МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ РЕКЛАМЫ НА ПРОДАЖУ ОДНОРОДНЫХ ТОВАРОВ

А.Ф.ТЕРПУГОВ, Н.П. ЩИРОВА

Реклама, как известно, – двигатель торговли, и без рекламы в самых разнообразных формах не производится продажи практически никаких товаров. Однако математические модели влияния рекламы на продажу товаров и математические модели рекламных компаний авторам неизвестны. В данной статье делается попытка построить простейшую математическую модель влияния рекламы на продажу однородных товаров.

Описание модели

Пусть имеется магазин (склад и т.п.), где находится неограниченное колчество однородных товаров, за которыми приходят покупатели. Будем считать, что каждый приходящий покупатель совершает покупку на величину ξ, которая является случайной величиной с функцией распределения $F(\xi)$.

Состояние магазина мы будем характеризовать его капиталом $S(t)$, зависящим явно от t. Будем считать, что за время $[t, t+\Delta t]$ магазин несет расходы, равные $[c_0+c_1S(t)]\Delta t$. Величина c_0 описывает постоянные расходы, связанные с расходами на аренду, тепло, свет и т.д., а величина c_1 показывает расходы, связанные с обслуживанием капитала, например налоги. Кроме того, будем считать, что за время $[t, t+\Delta t]$ часть капитала, равная $\alpha S(t)\Delta t$, выделяется на рекламу продаваемых товаров.

Эффективность рекламы будем оценивать величиной $R(t)$. Ее влияние проявляется в следующем: будем считать поток покупателей пуассоновским потоком с интенсивностью $\lambda_0+\lambda_1R(t)$, где коэффициент λ_1 описывает влияние рекламы на поток покупателей. Величина λ_0 определяет интенсивность потока покупателей без всякой рекламы.

Расчет математических ожиданий

Так как процесс покупок случаен, то и величина капитала компании $S(t)$ есть случайный процесс, а поскольку на рекламу выделяется доля капитала $\alpha S(t)$, то и степень влияния рекламы становится случайным процессом. Найдем поэтому величины $S_1(t)= M\{S(t)\}$ и $R_1(t)= M\{R(t)\}$.

Рассуждения имеют следующий вид: при $\Delta t \to 0$ за покупкой может прийти только один покупатель с вероятностью $(\lambda_0+\lambda_1 R(t))\Delta t + o(\Delta t)$ [1], следовательно изменение капитала за время Δt составляет величину

$$\Delta S(t)=\begin{cases}\xi-(\alpha+c_1)S(t)\Delta t-c_0\Delta t, & \text{с вероятностью } (\lambda_0+\lambda_1 R(t))\Delta t,\\ -(\alpha+c_1)S(t)\Delta t-c_0\Delta t, & \text{с вероятностью } 1-(\lambda_0+\lambda_1 R(t))\Delta t.\end{cases} \quad (1)$$

Поэтому $S(t+\Delta t)= S(t)+ \Delta S(t)$. Найдем математическое ожидание этого выражения. Усредним сначала по возможному факту покупки. Тогда

$$M\{\Delta S(t)|S(t),R(t)\}=a(\lambda_0+\lambda_1 R(t))\Delta t-(\alpha+c_1)S(t)\Delta t-c_0\Delta t+o(\Delta t), \quad (2)$$

где $a = M\{\xi\}$ – средняя величина покупки. Усредняя (2) еще и по $S(t)$ и $R(t)$, получим

$$M\{S(t+\Delta t)\}=M\{S(t)\}+a(\lambda_0+\lambda_1 M\{R(t)\})\Delta t-(\alpha+c_1)M\{S(t)\}\Delta t-c_0\Delta t+o(\Delta t).$$

Перенося $S_1(t)= M\{S(t)\}$ влево, деля на Δt и устремляя Δt к нулю, получим дифференциальное уравнение для $S_1(t)$

$$\frac{dS_1(t)}{dt}=a(\lambda_0+\lambda_1 R(t))-(\alpha+c_1)S_1(t)-c_0. \quad (3)$$

Выведем теперь уравнение для влияния рекламы $R(t)$. Как уже говорилось, из-за случайной величины $\alpha S(t)\Delta t$ $R(t)$ также становится случайным процессом. Будем считать, что на изменение $R(t)$ действуют оба процесса: а) процесс увеличения $R(t)$, обусловленный вложением в рекламу капитала $\alpha S(t)\Delta t$, и б) процесс забывания рекламы, пропорциональный самой $R(t)$. Поэтому будем писать:

$$R(t+\Delta t) = R(t) - \omega R(t)\Delta t + \beta \cdot \alpha S(t) + o(\Delta t), \tag{4}$$

где коэффициент ω определяет скорость забывания рекламы $R(t)$, а β – степень влияния денег, вкладываемых в рекламу. Усредняя, получим

$$M\{R(t+\Delta t)\} = M\{R(t)\} - \omega\, R(t)\Delta t + \beta\alpha\, M\{S(t)\}\Delta t + o(t),$$

или после обычных преобразований

$$\frac{dR_1(t)}{dt} = -\omega R_1(t) + \beta \cdot \alpha S_1(t). \tag{5}$$

Для средних значений капитала $S_1(t)$ и степени влияния рекламы мы имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dS_1(t)}{dt} = -(\alpha + c_1)S_1(t) + a\lambda_1 R_1(t) + (a\lambda_0 - c_0), \\ \dfrac{dR_1(t)}{dt} = \beta \cdot \alpha S_1(t) - \omega R_1(t), \end{cases} \tag{6}$$

являющуюся неоднородной системой двух линейных дифференциальных уравнений.

Исследование системы

Прежде всего, найдем частные решения неоднородной системы (6). Считая $S_1(t) = S_{10}=\text{const}$ и $R_1(t) = R_{10}=\text{const}$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -(\alpha + c_1)S_{10} + a\lambda_1 R_{10} = -(a\lambda_0 - c_0), \\ \beta\alpha S_{10} - \omega R_{10} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

решение которой имеет вид

$$S_{10} = \frac{a\lambda_0 - c_0}{\alpha + c_1 - a\lambda_1\alpha\beta/\omega}, \quad R_{10} = \beta\alpha \frac{a\lambda_0 - c_0}{(\alpha + c_1)\omega - a\lambda_1\alpha\beta}. \tag{8}$$

Для выписывания общего решения найдем характеристическое уравнение системы (6). Оно имеет вид

$$\begin{vmatrix} -(\alpha + c_1) - \gamma & a\lambda_1 \\ \beta\alpha & -\omega - \gamma \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

где γ – корни уравнения. В явном виде это уравнение можно записать так

$$\gamma^2 + \gamma(a + c_1 + \omega) + [\omega(\alpha + c_1) - a\lambda_1\beta\alpha] = 0. \tag{10}$$

Обозначая его корни через γ_1 и γ_2 можно записать

$$\begin{aligned} S_1(t) &= S_{10} + C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}, \\ R_1(t) &= R_{10} + C_1 Y_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 Y_2 e^{\gamma_2 t}, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$Y_i = \beta\alpha/(\omega + \gamma_i) = (\alpha + c_1 + \gamma_i)/a\lambda_1, \qquad i = 1,2. \tag{12}$$

Нас будет в первую очередь интересовать знак вещественной части корней γ_1 и γ_2. Если Re $\gamma_1<0$ и Re $\gamma_2<0$, то это значит, что реклама неэффективна, так как в том случае

$$\lim_{t\to\infty} S_1(t) = S_{10} \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} R_1(t) = R_{10}.$$

Если Re $\gamma_1>0$ и Re $\gamma_2<0$ или Re $\gamma_1<0$ и Re $\gamma_2>0$, то хотя бы одна из экспонент 1) возрастает и мы имеем дело с эффективной рекламой. Случай Re $\gamma_1>0$ и $\gamma_2>0$ мы будем условно называть случаем суперэффективности рекламы.

Для решения вопроса об эффективности рекламы мы воспользуемся критерием Гурвица[2]. В нашем случае матрица Гурвица имеет вид

$$\begin{bmatrix} a + c_1 + \omega & 1 \\ 0 & \omega(\alpha + c_1) - a\lambda_1\beta\alpha \end{bmatrix} \tag{13}$$

Реклама будет неэффективной при одновременном выполнении условий

$$\begin{aligned} a + c_1 + \omega &> 0, \\ \omega(\alpha + c_1) - a\lambda_1\alpha\beta &> 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Первое условие выполняется автоматически, поэтому условием эффективности будет

$$\omega(\alpha + c_1) - a\lambda_1\alpha\beta < 0$$

$$\omega(\alpha + c_1) < a\lambda_1\alpha\beta. \tag{15}$$

При выполнении этого условия вещественная часть хотя бы одного из корней γ_1 или γ_2 положительна и в $S_1(t)$ и $R_1(t)$ мы имеем экспоненциально нарастающие члены.

Что касается явного вида корней, то он следующий

$$\gamma_{1,2} = \frac{-(a+c_1+\omega) \pm \sqrt{(a+c_1+\omega)^2 - 4(\omega(a+c_1) - a\lambda_1\alpha\beta)}}{2}. \qquad (16)$$

откуда видно, что оба корня вещественные, причем для эффективной рекламы один из них положительный:

$$\gamma_1 = \frac{-(a+c_1+\omega) + \sqrt{(a+c_1+\omega)^2 - 4(\omega(a+c_1) - a\lambda_1\alpha\beta)}}{2} \qquad (17)$$

а второй корень – отрицательный. Именно γ_1 и определяет экпоненциально нарастающие слагаемые в (11).

Уравнения для ковариационной матрицы величин $S(t)$ и $R(t)$

Обозначим $C_{SS}=D\{S(t)\}$ и $C_{RR}=D\{R(t)\}$ и $C_{RS}=\operatorname{cov}(R,S)$ и выведем систему дифференциальных уравнений для их определения.

Начнем с самого сложного – уравнения для C_{SS}. Из (2) имеем

$$S^2(t+\Delta t) = S^2(t) + 2S(t)\Delta S(t) + (\Delta S(t))^2. \qquad (18)$$

Усредняя по покупкам, получим

$$\begin{aligned} S^2(t+\Delta t) &= S^2(t) + 2S(t)[a(\lambda_0+\lambda_1 R(t)) - (\alpha+c_1)S(t) - c_0]\Delta t + \\ &+ a_2(\lambda_0+\lambda_1 R(t))\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

где $a_2=M\{\xi^2\}$. Обозначая $S_2(\mathrm{t})=M^2\{S(t)\}$ и $<SR>=M\{S(t)R(t)\}$, получим

$$\frac{dS_2}{dt} = 2a\lambda_0 S_1(t) + 2a\lambda_1\langle SR\rangle - 2(\alpha+c_1)S_2(t) - 2c_0 S_1(t) + a_2(\lambda_0+\lambda_1 R(t)). \qquad (19)$$

С другой стороны,

$$\frac{dS_1^2}{dt} = 2S_1(t)\frac{dS_1}{dt} = -2(\alpha+c_1)S_1^2 + 2a\lambda_1 R_1(t)S_1(t) + 2(a\lambda_0 - c_0)S_1(t). \qquad (20)$$

Так как $C_{SS}=S_2(t)-S_1^2(t)$,то, вычитая (20) из (19), получим

$$\frac{dC_{SS}}{dt}=-2(\alpha+c_1)C_{SS}+2a\lambda_1C_{RS}+a_2(\lambda_0+\lambda_1R_1(t))S_1(t). \qquad (21)$$

Выведем теперь уравнение для C_{RS}. Так как

$$R(t+\Delta t)=R(t)+(\beta\alpha S(t)-\xi R(t))\Delta t,$$

то

$$R^2(t+\Delta t)=R^2(t)+2R(t)(\beta\alpha S(t)-\omega R(t))\Delta t+o(\Delta t).$$

и поэтому для $R_2(t)=M\{R^2(t\}$ получаем

$$\frac{dR_2}{dt}=2\alpha\beta\langle RS\rangle-2\omega R_2(t). \qquad (22)$$

Но, с другой стороны

$$\frac{dR_1^2(t)}{dt}=2R_1(t)\frac{dR_1}{dt}=2\alpha\beta R_1(t)S_1(t)-2\omega R_1^2(t),$$

и поэтому для $C_{RR}=R_2(t)-R_1^2(t)$ имеем

$$\frac{dC_{RR}}{dt}=2\alpha\beta C_{RS}-2\omega C_{RR}.$$

Наконец, после усреднения по покупкам

$$\begin{aligned}R(t+\Delta t)S(t+\Delta t)&=[R(t)+(\beta\alpha S(t)-\omega R(t))\Delta t]\times\\ &\times[S(t)+[a(\lambda_0+\lambda_1R(t))-(\alpha+c_1)S(t)-c_0]\Delta t]=\\ &=R(t)S(t)+(\beta\alpha S^2(t)-\omega R(t)S(t)+(a(\lambda_0+\lambda_1R_1(t))R(t)-(\alpha+c_1)S(t)R(t)-c_0R_1(t))\Delta t.\end{aligned}$$

Усредняя, получим

$$\begin{aligned}\frac{d(\langle SR\rangle)}{dt}&=\beta\alpha S_2(t)-\omega\langle RS\rangle+a\lambda_0R_1(t)+a\lambda_1R_2(t)-\\ &-(\alpha+c_1)\langle RS\rangle-c_0R_1(t).\end{aligned} \qquad (24)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}\frac{d(\langle S_1R_1\rangle)}{dt}&=S_1\frac{dR_1}{dt}+R_1\frac{dS_1}{dt}=\beta\alpha S_1^2(t)-\omega S_1(t)R_1(t)-\\ &-(\alpha+c_1)R_1S_1+a\lambda_1R_1^2+(a\lambda_0-c_0)R_1.\end{aligned} \qquad (25)$$

Вычитая (25) из (24), получаем

$$\frac{dC_{RS}}{dt}=\beta\alpha C_{SS}-(\alpha+c_1+\omega)C_{RS}+a\lambda_1 C_{RR}.$$

Итак, система уравнений для ковариаций C_{SS}, C_{SR} и C_{RR} имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{dC_{SS}}{dt}=-2(\alpha+c_1)C_{SS}+2a\lambda_1 C_{RS},\\ \dfrac{dC_{RS}}{dt}=\beta\alpha C_{SS}-(\alpha+c_1+\omega)C_{RS}+a\lambda_1 C_{RR},\\ \dfrac{dC_{RR}}{dt}=2\alpha\beta C_{RS}-2\omega C_{RR},\end{cases} \tag{26}$$

что является неоднородной системой трех линейных уравнений дифференциальных уравнений.

Характеристическое уравнение для этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix}-2(\alpha+c_1)-\gamma & 2a\lambda_1 & 0\\ 3\alpha & -(\alpha+c_1+\omega)-\gamma & a\lambda_1\\ 0 & 2\alpha\beta & -2\omega-\gamma\end{vmatrix}=0. \tag{27}$$

Легко показать, что $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ является корнем этого уравнения, непосредственно подставляя $\gamma_1+\gamma_2=-(\alpha+c_1+\omega)$ в детерминант и вычисляя его. После этого кубичное уравнение сводится к квадратному и показывается, что два остальных корня имеют вид $2\gamma_1$ и $2\gamma_2$. Итак, корни характеристического уравнения (27) есть $2\gamma_1$, $\gamma_1+\gamma_2$ и $2\gamma_2$.

Можно выписать явные выражения для $C_{SS}(t)$, $C_{SR}(t)$ и $C_{RR}(t)$, но их вид крайне сложен. Однако их характерной чертой является то, что в них присутствуют слагаемые, содержащие сомножители $e^{2\gamma_1 t}$, $e^{(\gamma_1+\gamma_2)t}$ и $e^{2\gamma_2 t}$ и при условии выполнения эффективности рекламы эти ковариации также экспоненциально возрастают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М. Наука, 1988. 447 с.
2. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 615 с.