НАХОЖДЕНИЕ СПРАВЕДЛИВОЙ ЦЕНЫ ПРОИЗВОДНЫХ ЦЕННЫХ БУМАГ ПРИ МОДЕЛИ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕНЫ В ВИДЕ ПРОЦЕССА, ВОЗВРАЩАЮЩЕГОСЯ К СРЕДНЕМУ

Т.В.КАЛАШНИКОВА, А.Ф.ТЕРПУГОВ

Нахождение “справедливой” цены производных ценных бумаг (опционов, фьючерсов и т.д.) является одной из важнейших задач финансовой математики.

Явное решение для цены опционов европейского типа получено Ф. Блэком и М. Шоулсом [1] для случая, когда процесс изменения цены рискового актива описывается моделью Самуэльсона [2]. Однако эта модель не является единственной моделью изменения цены. В условиях стабильного состояния рынка, когда отсутствуют скачки и большие тренды изменения цены, более предпочтительной является модель так называемого MRSR (Mean Reverting Square Root) процесса. Ниже выводится формула для расчета стоимости опционов европейского типа при такой модели изменения цены рискового актива.

Вывод аналога уравнения Блэка-Шоулса

Пусть цена рискового актива в момент времени t есть S_t. В качестве модели изменения S_t со временем рассмотрим процесс

$$dS_t = (\alpha - \beta S_t)dt + \sigma\sqrt{S_t}dw_t ,$$

где w_t – стандартный винеровский процесс. Такой процесс называется MRSR процессом. Предполагается, что $S_t>0$ в любой момент времени t.

Обозначим через $V(S_t,t)$ справедливую цену производной ценной бумаги в момент времени t и выведем уравнение для $V(S_t,t)$ методом самофинансируемого портфеля, считая, что дивиденды по рисковой бумаге не выплачиваются.

Пусть B_t – цена безрискового актива в момент времени t. Считается, что $dB_t = rB_t dt$, где r – процентная ставка безрискового актива. Рассмотрим самофинансируемый портфель, состоящий в момент времени t из β_t безрисковых ценных бумаг и γ_t рисковых бумаг. Стоимость этого портфеля $\Pi_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$, условие самофинансирования $B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = 0$, так что $d\Pi_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t$.

Построим самофинансируемый портфель, который бы на всей траектории повторял стоимость производной ценной бумаги, то есть $\forall t \in [0,T]$ было бы $\Pi_t = V(S_t,t)$:

$$\beta_t B_t + \gamma_t S_t = V(S_t,t). \tag{1}$$

Тогда получаем

$$d\Pi_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t = dV(S_t,t).$$

Но согласно нашей модели

$$dB_t = rB_t dt, \qquad dS_t = (\alpha - \beta S_t)dt + \sigma\sqrt{S_t}dw_t$$

и по формуле Ито

$$dV(S_t,t) = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (\alpha - \beta S_t)\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right]dt + \sigma\sqrt{S_t}\frac{\partial V}{\partial S_t}dw_t.$$

Тогда

$$\beta_t rB_t dt + \gamma_t(\alpha - \beta S_t)dt + \gamma_t \sigma\sqrt{S_t}dw_t =$$

$$= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (\alpha - \beta S_t)\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right]dt + \sigma\sqrt{S_t}\frac{\partial V}{\partial S_t}dw_t$$

и, приравнивая коэффициенты при dt и dw_t, получаем

$$\beta_t rB_t + \gamma_t(\alpha - \beta S_t) = \frac{\partial V}{\partial t} + (\alpha - \beta S_t)\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2},$$

$$\gamma_t \sigma\sqrt{S_t}dw_t = \sigma\sqrt{S_t}\frac{\partial V}{\partial S_t}.$$

Отсюда $\gamma_t = \dfrac{\partial V}{\partial S_t}$ и подстановка в предыдущее уравнение дает

$$\beta_t = \frac{1}{rB_t}\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right].$$

Подставляя это выражение в соотношение (1) и отбрасывая для краткости индекс t у S_t, получим уравнение для $V(S,t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV(S,t) = 0, \tag{2}$$

которое заменяет теперь уравнение Блэка-Шоулса и отличается от него коэффициентом при $V(S,T) = V_0(S)$.

Решение уравнения для $V(S,t)$

Решим уравнение (2) для $V(S,t)$, используя преобразование Лапласа. Для этого перейдем сначала к переменной $\tau = T - t$ и обозначим $V(S, T-\tau) = Y(s,\tau)$. Тогда уравнение для $Y(S,\tau)$ примет вид

$$\frac{\sigma^2 S}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} + rS\frac{\partial Y}{\partial S} - rY - \frac{\partial Y}{\partial \tau} = 0$$

с граничным условием $Y(S,0) = V_0(S)$.

Перейдем от $Y(S,\tau)$ к функции

$$\overline{Y}(S,q) = \int_0^\infty Y(S,\tau)e^{-q\tau}d\tau,$$

то есть $\overline{Y}(S,\tau)$ есть преобразование Лапласа от $Y(S,\tau)$ по аргументу τ. Тогда $\partial V/\partial\tau$ соответствует $q\overline{Y}(S,q) - V_0(S)$ и уравнение для $\overline{Y}(S,\tau)$ примет вид

$$\frac{\sigma^2 S}{2}\frac{d^2\overline{Y}}{dS^2} + rS\frac{d\overline{Y}}{dS} - rY - qY = -V_0(S). \tag{3}$$

Согласно финансовому смыслу задачи должны еще выполняться условия $\overline{Y}(0,q) = \overline{Y}'_S\ (0,q) = 0$.

Для решения уравнения (3) перейдем от функции $\overline{Y}(S,\tau)$ к функции $\widetilde{Y}(S,q)$ по формуле

$$\widetilde{Y}(p,q)=\int_0^\infty \overline{Y}(S,q)e^{-pS}dS,$$

то есть к преобразованию Лапласа от $\overline{Y}(S,q)$ по аргументу S. Тогда по свойствам преобразования Лапласа

$$\frac{d\overline{Y}}{dS}\leftrightarrow p\widetilde{Y}(p,q),$$

$$\frac{d^2\overline{Y}}{dS^2}\leftrightarrow p^2\widetilde{Y}(p,q),$$

так что комбинация

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d\ \overline{Y}}{dS^2}+r\frac{d\overline{Y}}{dS}\leftrightarrow\left(\frac{\sigma^2p^2}{2}+rp\right)\widetilde{Y}(p,q).$$

По свойствам преобразования Лапласа комбинации

$$\frac{\sigma^2S}{2}\frac{d^2\overline{Y}}{dS^2}+rS\frac{d\overline{Y}}{dS}$$

соответствует

$$-\frac{d}{dp}\left\{\left[\frac{\sigma^2p^2}{2}+rp\right]\widetilde{Y}(p,q)\ \right\}=-\left(\frac{\sigma^2p^2}{2}+rp\right)\frac{d\widetilde{Y}}{dp}-\left(\sigma^2p+r\right)\widetilde{Y}(p,q),$$

так что уравнение для $\widetilde{Y}(p,q)$ принимает вид

$$\left(\frac{\sigma^2p^2}{2}+rp\right)\frac{d\widetilde{Y}}{dp}+\left(\sigma^2p+2r+q\right)\widetilde{Y}(p,q)=\widetilde{V}_0(p)\quad, \tag{4}$$

где $\widetilde{V}_0(p)$ есть преобразование Лапласа от $V_0(S)$.

Решим это уравнение. Однородное уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\sigma^2p^2}{2}+rp\right)\frac{d\widetilde{Y}}{dp}+\left(\sigma^2p+2r+q\right)\widetilde{Y}(p,q)=0,$$

или

$$\frac{d\widetilde{Y}}{\widetilde{Y}} = -\frac{\sigma^2 p + 2r + q}{\frac{\sigma^2 p^2}{2} + rp} dp .$$

Разлагая на простейшие дроби, получаем

$$-\frac{\sigma^2 з + 2r + q}{\frac{\sigma^2}{2} p^2 + rp} = -\left(2 + \frac{q}{r}\right)\frac{1}{p} + \frac{q}{r}\frac{1}{p + \frac{2r}{\sigma^2}} .$$

Обозначим для краткости

$$a = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad \frac{q}{r} = \gamma .$$

Тогда

$$\frac{d\widetilde{Y}}{\widetilde{Y}} = -(2 + \gamma)\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dp}{p + a},$$

и, интегрируя, получаем

$$\widetilde{Y}(p,q) = \frac{C}{p^2}\left(\frac{p + a}{p}\right)^{\gamma}$$

Решение неоднородного уравнения (4) будем искать в виде

$$\widetilde{Y}(p,q) = C(p)\frac{1}{p^2}\left(\frac{p + a}{p}\right)^{\gamma}$$

Тогда

$$\frac{d\widetilde{Y}}{dp} = C'(p)\frac{1}{p^2}\left(\frac{p + a}{p}\right)^{\gamma} + C(p)\left[\frac{1}{p^2}\left(\frac{p + a}{p}\right)^{\gamma}\right]',$$

и подстановка в (4) приводит к уравнению

$$\left(\frac{\sigma^2 p^2}{2} + rp\right)C'(p)\frac{(p + a)^{\gamma}}{p^{\gamma+2}} = \widetilde{V}_0(p).$$

Отсюда

$$C'(p)=\frac{2}{\sigma^2}\widetilde{V}_0(p)\frac{p^{\gamma+1}}{\left(p+a\ \right)^{\gamma+1}},$$

так что

$$C(p)=\frac{2}{\sigma^2}\int_0^p \widetilde{V}_0(t)\left(\frac{t}{t+a}\right)^{\gamma+1}dt.$$

Окончательно

$$\widetilde{Y}(p,q)=\frac{2}{\sigma^2}\frac{(p+a)^\gamma}{p^{\gamma+2}}\int_0^p \widetilde{V}_0(t)\left(\frac{t}{t+a}\right)^{\gamma+1}dt,$$

где константа интегрирования подобрана из того условия, что при $\widetilde{V}_0\equiv 0$ должно получаться $\widetilde{Y}\,(p,q)\equiv 0$. Упростим это выражение. Для этого снова вернемся к исходной переменной τ. Учитывая, что $\gamma=\dfrac{q}{r}$, имеем

$$\left(\frac{p+a}{p}\frac{t}{t+a}\right)^\gamma=\exp\left(-q\frac{1}{r}\ln\left(\frac{p(t+a)}{t(p+a)}\right)\right)$$

и обратное преобразование Лапласа от этого выражения есть

$$\delta\left(\tau-\frac{1}{r}\ln\left(\frac{p(t+a)}{t(p+a)}\right)\right),$$

так что

$$\widetilde{Y}(p,\tau)=\frac{2}{\sigma^2p^2}\int_0^p\frac{t}{t+a}\widetilde{V}_0(t)\,\delta\left(\tau-\frac{1}{r}\ln\left(\frac{p(t+a)}{t(p+a)}\right)\right)dt\ . \tag{5}$$

Рассмотрим интегралы вида $\int_0^\infty f(t)\delta(\varphi(t))dt$. Сделаем замену переменных $\varphi(t)=u$, $t=\psi(u)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(\varphi(t))dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(\psi(u))\delta(u)\psi'(u)du=f(\psi(0))\psi'(0) \tag{6}$$

В нашем случае

$$\varphi(t) = \tau - \frac{1}{r}\ln\left[\frac{p(t+a)}{t(p+a)}\right] = u\ . \qquad (7)$$

Отсюда

$$\frac{p(t+a)}{t(p+a)} = e^{r(\tau-u)},$$

так что

$$t = \frac{pa}{e^{r(\tau-u)}(p+a)-p} = \psi(u).$$

Имеем

$$\psi(0) = \frac{pa}{e^{r\tau}(p+a)-p},$$

$$\psi'(u) = \frac{pa}{\left[e^{r(\tau-u)}(p+a)-p\right]^2}(p+a)r\,e^{r(\tau-u)},$$

$$\psi'(0) = \frac{pa(p+a)re^{r\tau}}{\left(e^{r\tau}(p+a)-p\right)^2}.$$

Заметим еще, что при $u=0$ уравнение (7) принимает вид

$$\tau - \frac{1}{r}\ln\frac{p(t+a)}{t(p+a)} = 0,$$

так что при $u=0$ $$\frac{t}{t+a} = \frac{p}{p+a}e^{-r\tau}.$$

Подставляя это все в (5) и (6), получим

$$\widetilde{Y}(p,\tau) = \frac{2r}{\sigma^2 p^2}\frac{p}{p+a}e^{-r\tau}\frac{pa(p+a)^{r\tau}}{\left(e^{r\tau}(p+a)-p\right)^2}\widetilde{V}_0\left(\frac{pa}{e^{r\tau}(p+a)-p}\right),$$

или после упрощений

$$\widetilde{Y}(p,\tau) = \frac{a^2}{\left(e^{r\tau}(p+a)-p\right)^2}\widetilde{V}_0\left(\frac{pa}{e^{r\tau}(p+a)-p}\right), \qquad (8)$$

что и дает явное выражение для преобразования Лапласа по аргументу S от искомой функции $Y(S,\tau)$.

Заметим еще, что при τ=0 получается $\tilde{Y}(p,0)=\tilde{V}_0(p)$, то есть граничные условия выполняются.

Дальнейшие формулы можно получить при конкретизации $V_0(S)$.

Расчет цены фьючерса

Для фьючерса имеет место $V_0(S)=S-K$, где K – цена исполнения. Поэтому для фьючерса $\tilde{V}_0(p)=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{K}{p}$ и

$$\tilde{Y}(p,\tau)=\frac{a^2}{\left(e^{2r\tau}(p+a)-p^2\right)}\left[\frac{\left[e^{r\tau}(p+a)-p\right]^2}{p^2a^2}-\frac{K\left(e^{r\tau}(p+a)-p\right)}{pa}\right]=$$

$$=\frac{1}{p^2}-\frac{aK}{p\left(e^{r\tau}(p+a)-p\right)}.$$

Разложение на простейшие дроби дает

$$\tilde{Y}(p,\tau)=\frac{1}{p^2}-\frac{Ke^{-r\tau}}{p}+\frac{K\left(1-e^{-r\tau}\right)}{e^{r\tau}(p+a)-p},$$

и обратное преобразование Лапласа дает цену фьючерса

$$Y(S,\tau)=S-Ke^{-r\tau}+Ke^{-r\tau}\exp\left(-\frac{aS}{1-e^{-r\tau}}\right).$$

При $\tau\to+0$ получается $Y(S,0)=S-K$:

$$\frac{Y(S,\tau)}{K}=\frac{S}{K}-e^{-r\tau}+e^{-r\tau}\exp\left(-aK\frac{S/K}{1-e^{-r\tau}}\right).$$

Расчет цены опциона-колл

Для опциона-колл $V_0(S)=\max(0,S-K)$, так что $\tilde{V}_0(p)=\dfrac{1}{p^2}e^{-pK}$.

Подстановка этого выражения в (8) дает

$$\tilde{Y}(p,\tau)=\frac{1}{p^2}\exp\left(-\frac{aKp}{e^{r\tau}(p+a)-p}\right). \tag{9}$$

Для нахождения обратного преобразования Лапласа воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{P+b}\exp\left(+\frac{a}{p+b}\right)\leftrightarrow e^{-bS}I_0\left(2\sqrt{aS}\right). \qquad (10)$$

Представим (9) в виде

$$\tilde{Y}(p,\tau)=e^{\frac{aK}{e^{r\tau}-1}}\frac{p+b}{p^2}\frac{1}{p+b}\exp\left(\frac{\frac{a^2K}{2(ch\,r\tau-1)}}{p+b}\right),$$

где $b=a/(1-e^{-r\tau})$. Обратное преобразование Лапласа дает

$$Y(S,\tau)=\exp\left(-\frac{aK}{e^{r\tau}-1}\right)\int_0^S(b(S-u)+1)e^{-bu}I_0\left(a\sqrt{\frac{2K}{ch(r\tau)-1}u}\right)du.$$

Входящий сюда интеграл может быть найден численно.

Для более простого представления результатов перейдем к безразмерной величине $v=u/K$, $u=vK$. Тогда

$$\frac{Y(S,\tau)}{K}=\exp\left(-\frac{aK}{e^{r\tau}-1}\right)\int_0^{S/K}\left(1+bK\left(\frac{S}{K}\right)\right)e^{-bKv}I_0\left(aK\sqrt{\frac{2v}{ch(r\tau)-1}}\right)dv,$$

откуда видно, что величина $Y(S,\tau)/K$ зависит лишь от безразмерных величин $\frac{S}{K}$, $aK=\frac{2rK}{\sigma^2}$ и $r\tau$.

Стоимость опционов при наличии дивидендов

Обобщим полученные формулы на тот случай, когда по ценным бумагам выплачиваются дивиденды. Примем следующую модель их выплаты:

– дивиденды выплачиваются непрерывно во времени;

– размер дивидендов пропорционален стоимости ценной бумаги S_t.

Таким образом, если в момент времени t имеется γ_t ценных бумаг, каждая стоимостью S_t, то на промежутке времени $[t,t+dt]$ в качестве дивидендов получим сумму $dD=\delta\gamma_tS_tdt$.

Теперь условие самофинансирования примет вид

$$Btd\beta_t+S_t d\gamma_t=dD=\delta\gamma_t S_t dt.$$

Следовательно, $d\Pi_t=\beta_t dB_t+\gamma_t dS_t+\delta\gamma_t S_t dt$.Чтобы он на всей траектории повторял стоимость производной ценной бумаги, то есть для любого $t\in[0,T]$ выполнялось $\Pi_t=V(S_t,t)$, требуется

$$d\Pi_t=\beta_t dB_t+\gamma_t dS_t+\delta\gamma_t S_t dt=dV(S_t,t).$$

Делая аналогичные случаю без дивидендов выводы, получаем уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-\delta)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV(S,t)=0 \qquad (11)$$

Решим это уравнение для $V(S,t)$, используя преобразование Лапласа. Для этого перейдем сначала к переменной $\tau=T-t$ и обозначим $V(S,T-\tau)=Y(s,\tau)$. Тогда уравнение для $Y(S,\tau)$ примет вид

$$\frac{\sigma^2 S}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}+(r-\delta)S\frac{\partial Y}{\partial S}-rY-\frac{\partial Y}{\partial\tau}=0$$

с граничным условием $Y(S,0)=V_0(S)$.

Перейдем от $Y(S,\tau)$ к функции

$$\overline{Y}(S,q)=\int_0^\infty Y(S,\tau)e^{-q\tau}d\tau,$$

то есть $\overline{Y}(S,\tau)$ есть преобразование Лапласа от $Y(S,\tau)$ по аргументу τ. Тогда $\partial V/\partial t$ соответствует $q\overline{Y}(S,q)-V_0(S)$ и уравнение для $\overline{Y}(S,\tau)$ примет вид

$$\frac{\sigma^2 S}{2}\frac{d^2\overline{Y}}{dS^2}+(r-\delta)S\frac{d\overline{Y}}{dS}-r\overline{Y}-q\overline{Y}=-V_0(S) . \qquad (12)$$

Согласно финансовому смыслу задачи должны еще выполняться условие $\overline{Y}(0,q)=\overline{Y}'_S(0,q)=0$.

Для решения уравнения (12) перейдем от функции $\overline{Y}(S,\tau)$ к функции $\widetilde{Y}(S,q)$ по формуле

$$\widetilde{Y}(p,q)=\int_0^\infty \overline{Y}(S,q)e^{-pS}dS,$$

то есть к преобразованию Лапласа от $\tilde{Y}(S,q)$ по аргументу S. Уравнение для $\tilde{Y}(p,q)$ принимает вид:

$$\left(\frac{\sigma^2 p^2}{2}+(r-\delta)p\right)\frac{d\tilde{Y}}{dp}+\left(\sigma^2 p+2r-\delta+q\right)\tilde{Y}(p,q)=\tilde{V}_0(p),$$

где $\tilde{V}_0(p)$ есть преобразование Лапласа от $V_0(S)$.

Решим это уравнение. Однородное уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\sigma^2 p^2}{2}+(r-\delta)p\right)\frac{d\tilde{Y}}{dp}+\left(\sigma^2 p+2r-\delta+q\right)\tilde{Y}(p,q)=0,$$

или

$$\frac{d\tilde{Y}}{\tilde{Y}}=-\frac{\sigma^2 p+2r-\delta+q}{\dfrac{\sigma^2 p^2}{2}+(r-\delta)p}dp.$$

Разложим на простейшие дроби:

$$-\frac{\sigma^2 p+2r-\delta+q}{\dfrac{\sigma^2 p^2}{2}+(r-\delta)p}=-\left(1+\frac{r+q}{r-\delta}\right)\frac{1}{p}+\frac{\left(\dfrac{r+q}{r-\delta}-1\right)}{p+\dfrac{2(r-\delta)}{\sigma^2}}.$$

Обозначим для краткости: $\dfrac{r+q}{r-\delta}=a$, $2\dfrac{r-\delta}{\sigma^2}=b$.

Тогда

$$\frac{d\tilde{Y}}{\tilde{Y}}=-(1+a)\frac{dp}{p}-(1-a)\frac{dp}{p+b}.$$

Интегрируя, получим

$$\ln\tilde{Y}=-(1+a)\ln p-(1-a)\ln(p+b)+\ln C,$$

$$\tilde{Y}=\frac{C}{p^{(1+a)}\left(p+b^{(1-a)}\right)}=\frac{C}{p(p+b)}\left(\frac{p+b}{p}\right)^a.$$

Решение неоднородного уравнения (13) будем искать в виде

$$\widetilde{Y}(p,q)=C(p)\frac{1}{p(p+b)}\left(\frac{p+b}{p}\right)^{a}.$$

Тогда:

$$\frac{d\widetilde{Y}}{dp}=C'(p)\frac{1}{p(p+b)}\left(\frac{p+b}{p}\right)^{a}+C(p)\left[\frac{1}{p(p+b)}\left(\frac{p+b}{p}\right)^{a}\right]'$$

и подстановка в (13) приводит к уравнению

$$\left(\frac{\sigma^2 p^2}{2}+(r-\delta)p\right)C'(p)\frac{1}{p(p+b)}\left(\frac{p+b}{p}\right)^{a}=\widetilde{V}_0(p).$$

Отсюда

$$C'(p)=\widetilde{V}_0(p)\frac{2}{\sigma^2}\frac{p^a}{(p+b)^a},$$

так что

$$C(p)=\frac{2}{\sigma^2}\int_0^p \widetilde{V}_0(t)\left(\frac{t}{t+b}\right)^{a}dt.$$

Окончательно

$$\widetilde{Y}(p,q)=\frac{2}{\sigma^2}\frac{(p+b)^{a-1}}{p^{a+1}}\int_0^p \widetilde{V}_0(t)\left(\frac{t}{t+b}\right)^{a}dt,$$

где константа интегрирования подобрана из того условия, что при $\widetilde{V}_0(t)\equiv 0$ должно получаться $\widetilde{Y}(p,q)\equiv 0$.

Упростим это выражение. Для этого снова вернемся к исходной переменной τ. Учитывая, что $a=\dfrac{r+q}{r-\delta}$, имеем:

$$\left(\frac{p+b}{p}\frac{t}{t+b}\right)^{a-1}=\exp\left(\left[-q\frac{1}{r-\delta}-\frac{\delta}{r-\delta}\right]\ln\left|\frac{p(t+b)}{t(p+b)}\right|\right),$$

так как

$$a-1=q\frac{1}{r-\delta}+\frac{\delta}{r-\delta},$$

то обратное преобразование Лапласа от этого выражения есть

$$\left(\frac{p(t+b)}{t(p+b)}\right)^{-\frac{\delta}{r-\delta}}\delta\left(\tau-\frac{1}{r-\delta}\ln\left(\frac{p(t+b)}{t(p+b)}\right)\right),$$

так что

$$\widetilde{Y}(p,\tau)=\frac{2}{\sigma^2 p^2}\int_0^p\frac{t}{t+b}\widetilde{V}_0(t)\left(\frac{p(t+b)}{t(p+b)}\right)^{-\frac{\delta}{r-\delta}}\delta\left(\tau-\frac{1}{r-\delta}\ln\left(\frac{p(t+b)}{t(p+b)}\right)\right)dt\,. \qquad (14)$$

Рассмотрим интегралы вида

$$\int_0^\infty f(t)\,\delta(\varphi(t))\,dt\,.$$

Сделаем замену переменных $\varphi(t)=u$, $t=\psi(u)$, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\delta(\varphi(t))\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(\psi(u))\,\delta(u)\,\psi'(u)\,du=f(\psi(0))\psi'(0). \qquad (15)$$

В нашем случае $\varphi(t)=\tau-\frac{1}{r-\delta}\ln\frac{p(t+b)}{t(p+b)}$, и уравнение $\varphi(t)=u$ превращается в

$$\tau-\frac{1}{r-\delta}\ln\frac{p(t+b)}{t(p+b)}=u\,. \qquad (16)$$

Отсюда

$$\frac{p(t+b)}{t(p+b)}=e^{(\tau-u)(r-\delta)},$$

так что

$$t=\frac{pb}{e^{(\tau-u)(r-\delta)}(p+b)-p}=\psi(u).$$

Имеем

$$\psi(0)=\frac{pb}{e^{\tau(r-\delta)}(p+b)-p}.$$

$$\psi'(u)=\frac{pb}{\left[e^{(\tau-u)(r-\delta)}(p+b)-p\right]^2}(r-\delta)(p=b)e(\tau-u)(r-\delta),$$

$$\psi'(0)=\frac{pb(r-\delta)(p+b)e^{(r-\delta)\tau}}{\left[e^{(r-\delta)\tau}(p+b)-p\right]^2}.$$

Заметим еще, что при u=0 уравнение (6) принимает вид

$$\tau-\frac{1}{r-\delta}\ln\frac{p(t+b)}{t(p+b)}=0,$$

так что при u=0

$$\frac{t}{t+b}=\frac{p}{p+b}e^{-\tau(r-\delta)}.$$

Формулу (14) можно переписать в виде:

$$\widetilde{Y}(p,\tau)=\frac{2}{\sigma^2p^2}\int_0^p\left(\frac{t}{t+b}\right)^{\frac{r}{r-\delta}}\widetilde{V}_0(t)\left(\frac{p+b}{p}\right)^{\frac{\delta}{r-\delta}}\delta\left(\tau-\frac{1}{r-\delta}\ln\left(\frac{p(t+b)}{t(p+b)}\right)\right)dt.$$

Тогда, подставляя в (15) и (16) полученные выражения, запишем

$$\widetilde{Y}(p,\tau)=\frac{2}{\sigma^2p^2}\left(\frac{p+b}{p}\right)^{\frac{\delta}{r-\delta}}\left(\frac{p}{p+b}e^{-\tau(r-\delta)}\right)^{\frac{r}{r-\delta}}\widetilde{V}_0\left(\frac{pb}{e^{(r-\delta)\tau}-p}\right)\frac{pb(p+b)(r-\delta)e^{(r-\delta)\tau}}{\left[e^{(r-\delta)\tau}(p+b)-p\right]^2}$$

или после упрощения

$$\widetilde{Y}(p,\tau)=\frac{b^2e^{-\delta\tau}}{\left[e^{(r-\delta)\tau}(p+b)-p\right]^2}\widetilde{V}_0\left(\frac{pb}{e^{(r-\delta)\tau}(p+b)-p}\right),\tag{17}$$

что и дает явное выражение для преобразования Лапласа по аргументу S от искомой функции $Y(S,\tau)$.

Заметим еще, что при τ=0 получается $\widetilde{Y}(p,0)=\widetilde{V}_0(p)$, то есть граничные условия выполняются.

Дальнейшие формулы можно получить при конкретизации $V_0(S)$.

Расчет цены фьючерса

Для фьючерса имеет место $V_0(S)=S-K$, где K – цена исполнения. Поэтому

$$\widetilde{V}_0(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{K}{p}$$

и, следовательно, для фьючерса

$$\widetilde{Y}(p,\tau) = \frac{b^2 e^{-\delta\tau}}{\left[e^{(r-\delta)\tau}(p+b)-p\right]^2}\left[\frac{\left[e^{(r-\delta)\tau}(p+b)-p\right]^2}{p^2b^2} - \frac{K\left(e^{(r-\delta)\tau}(p+b)-p\right)}{pb}\right] =$$

$$= \frac{e^{-\delta\tau}}{p^2} - \frac{bKe^{-\delta\tau}}{p\left(e^{(r-\delta)\tau}(p+b)-p\right)}.$$

Разложение на простейшие дает:

$$\widetilde{Y}(p,\tau) = \left[\frac{1}{p^2} - \frac{K e^{-(r-\delta)\tau}}{} + \frac{K\left(1-e^{-(r-\delta)\tau}\right)}{e^{(r-\delta)\tau}(p+b)-p}\right]e^{-\delta\tau},$$

и обратное преобразование Лапласа дает цену фьючерса

$$Y(S,\tau) = \left[S - Ke^{-(r-\delta)\tau}\exp\left(-\frac{bS}{1-e^{-(r-\delta)\tau}}\right)\right]e^{-\delta\tau}.$$

При $\tau \to +0$ получается $Y(S,0) = S - K$

$$\frac{Y(S,\tau)}{K} = \left[\frac{S}{K} - e^{-(r-\delta)\tau} + e^{-(r-\delta)\tau}\exp\left(-bK\frac{S/K}{1-e^{-(r-\delta)\tau}}\right)\right]e^{-\delta\tau}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of political economy. 1973. Vol. 81, № 3. p. 637-659.
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. I. Факты и модели. М.: Фазис, 1998. 489 с.