СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ И УПРАВЛЕНИЕ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

Выпуск 2

Анжеро-Судженский филиал
Кемеровского государственного университета

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ И УПРАВЛЕНИЕ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

Выпуск 2

Под редакцией профессора А.Ф. Терпугова

Издательство Томского университета
2000

УДК 519.2
ББК 22.17

С78 **Статистическая обработка данных и управление в сложных системах. Вып.2** Сборник статей/ Под ред. проф. А.Ф. Терпугова – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2000. –144 с.

ISBN 5-7511-1196-6

Сборник содержит статьи сотрудников и аспирантов факультета математики и информатики филиала Кемеровского университета в г. Анжеро-Судженске, посвященные статистической обработке временных рядов, актуарной математике, а также вопросам управления в системах массового обслуживания и в измерительных системах.

Для студентов, аспирантов, научных работников, занимающихся вопросами анализа временных рядов и управления в измерительных системах.

УДК 519.2
ББК 22.17

ISBN 5-7511-1196-6

МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕН ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ С ДВОЙНОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТЬЮ

Е.Е. СОТНИКОВА, А.Ф. ТЕРПУГОВ

В настоящее время большой интерес вызывает так называемый технический анализ фондового и финансового рынка, который позволяет по данным об изменениях цен финансовых активов за какой-то интервал времени судить о состоянии рынка, тенденциях изменения цены и прогнозировать цены на некоторое время вперед.

Для обоснования такого технического анализа необходимо иметь какую-то математическую модель изменения цен финансовых активов. В настоящее время существует уже достаточно много математических моделей для изменения цен, довольно подробный обзор которых дан в [1]. Однако тем не менее эти модели учитывают не все явления, подмеченные эмпирически, - такие как волнообразность (волновой принцип Эллиота [2], кластерность и т.д.). Поэтому разработка таких моделей остается на повестке дня.

В данной работе предлагается и исследуется модель изменения цен финансовых активов, являющаяся вариантом так называемой модели с двойной волатильностью SV(2) [1].

Описание модели

Рассмотрим случай дискретного времени, когда цена финансового актива учитывается через равные интервалы времени Δt, и через S_n обозначим цену актива в момент времени $n \cdot \Delta t$. Как это обычно принято в теории [1], перейдем от величин S_n к величинам h_n по формуле

$$S_n = S_{n-1} \cdot e^{h_n} \qquad (1)$$

и будем описывать не процесс S_n, а процесс h_n, $n = 0,1,2,3...$

Простейшей моделью такого процесса является так называемая гауссовская модель, когда процесс h_n задается в виде

$$h_n = \mu + a \cdot \varepsilon_n \,, \qquad (2)$$

где μ и a – константы, определяющие тренд (константа μ) и волатильность (константа a) процесса h_n, а ε_n - последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин $N(0,1)$.

Для того чтобы описать так называемый эффект кластерности [1], изменим эту модель и представим процесс h_n в виде

$$h_n = \mu + (a + b \cdot \Delta_n) \cdot \varepsilon_n \,, \qquad (3)$$

где процесс Δ_n будем считать авторегрессионным процессом первого порядка

$$\Delta_n = \rho \cdot \Delta_{n-1} + \eta_{n-1} \qquad (4)$$

с коэффициентом регрессии ρ, $|\rho| < 1$, в котором η_n также является последовательностью независимых стандартных случайных величин $N(0,1)$. Таким образом, в этой модели коэффициент при ε_n, определяющий волатильность процесса h_n, сам становится случайным процессом. Подобные модели получили название моделей с двойной волатильностью.

Характеристики модели

Найдем статистические характеристики процесса h_n. Так как $M\{\varepsilon_n\} = M\{\Delta_n\} = 0$ и эти процессы независимы, то

$$M\{h_n\} = \mu + (a + M\{\Delta_n\}) \cdot M\{\varepsilon_n\} = \mu \,. \qquad (5)$$

В дальнейшем будем рассматривать центрированный процесс

$$\dot{h}_n = h_n - \mu \,.$$

Имеем

$$\dot{h}_n^2 = \varepsilon_n^2(a^2 + 2ab\Delta_n + b^2\Delta_n^2).$$

По свойствам авторегрессионных процессов [3]:

$$M\{\Delta_n\} = 0 \qquad\qquad M\{\Delta_n^2\} = \frac{1}{1-\rho^2}$$

и поэтому

$$M\left\{\dot{h}_n^2\right\} = a^2 + \frac{b^2}{1-\rho^2} = a^2 + b_0^2\ , \tag{6}$$

где $b_0^2 = \dfrac{b^2}{1-\rho^2}$.

Далее

$$\dot{h}_n^4 = \varepsilon_n^4(a^4 + 4a^3b\Delta_n + 6a^2b^2\Delta_n^2 + 4ab^3\Delta_n^3 + \Delta_n^4).$$

Так как η_n являются нормальными случайными величинами, то Δ_n есть нормальный случайный процесс. По свойствам нормальных случайных величин

$$M\{\varepsilon_n^4\} = 3\cdot D\{\varepsilon_n\}^2 = 3,$$

$$M\{\Delta_n^4\} = 3\cdot D\{\varepsilon_n^2\}^2 = \frac{3}{(1-\rho^2)^2}$$

и $M\{\Delta_n^3\} = 0$. Поэтому

$$M\left\{\dot{h}_n^4\right\} = 3\cdot\left(a^4 + 6a^2\frac{b^2}{1-\rho^2} + 3\frac{b^4}{(1-\rho^2)^2}\right) = 3\cdot\left(a^4 + 6a^2b_0^2 + 3b_0^4\right). \tag{7}$$

Вычислим теперь ковариацию процесса $\dot{h}_n^2$. Имеем

$$\dot{h}_n^2\cdot\dot{h}_{n+k}^2 = \varepsilon_n^2\cdot\varepsilon_{n+k}^2\cdot\left(a^2 + 2ab\Delta_n + b^2\Delta_n^2\right)\cdot\left(a^2 + 2ab\Delta_{n+k} + b^2\Delta_{n-k}^2\right) =$$
$$= a^4 + 2a^3b\Delta_n + a^2b^2\Delta_n^2 + 2a^3b\Delta_{n+k} + 4a^2b^2\Delta_n\Delta_{n+k} +$$
$$+ 2ab^3\Delta_n^2\Delta_{n+k} + a^2b^2\Delta_{n+k}^2 + 2ab^3\Delta_n\Delta_{n+k}^2 + b^4\Delta_n^2\Delta_{n+k}^2.$$

Так как величины ε_n независимы, то $M\left\{\varepsilon_n^2\varepsilon_{n+k}^2\right\}=1$.

Процесс Δ_n, как уже говорилось выше , является нормальным слу- йным процессом с нулевым математическим ожиданием. Поэтому по ойствам нормальных случайных процессов [4]:

$$M\left\{\Delta_n\Delta_{n+k}^2\right\} = M\left\{\Delta_{n+k}\Delta_n^2\right\} = 0,$$

$$M\left\{\Delta_n^2\Delta_{n+k}^2\right\}=M\left\{\Delta_n^2\right\}M\left\{\Delta_{n+k}^2\right\}+2M\left\{\Delta_{n+k}\Delta_n\right\}^2=\frac{1}{(1-\rho^2)^2}+\frac{2\rho^{2k}}{(1-\rho^2)^2}$$

отсюда следует, что

$$M\left\{\dot{h}_n^2\dot{h}_{n+k}^2\right\}=\left(a^2+b_0^2\right)^2+4a^2b_0^2\rho^k+2b_0^4\rho^{2k}, \tag{8}$$

$$\operatorname{cov}\left(\dot{h}_n^2,\dot{h}_{n+k}^2\right)=4a^2b_0^2\rho^k+2b_0^4\rho^{2k} . \tag{9}$$

Оценка параметров

Полученные соотношения позволяют построить оценки параметров модели, пользуясь методом моментов.

Пусть у нас имеется выборка $h_1,h_2,\ldots,h_N$ величин h_n объема N.

Тогда можно взять оценки величин $M\{h_n\}$, $M\left\{\dot{h}_n^2\right\}$, $M\left\{\dot{h}_n^4\right\}$ и $M\left\{\dot{h}_n^2\dot{h}_{n+k}^2\right\}$ в виде

$$m_1=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}h_n ,$$

$$\mu_2=\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(h_n-m_1)^2 , \tag{10}$$

$$\mu_{40}=\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(h_n-m_1)^4 ,$$

$$\mu_{4k} = \frac{1}{N-k-1}\sum_{n=1}^{N-k}(h_n - m_1)^2(h_{n+k} - m_1)^2.$$

Оценки параметров μ, a, b_0, ρ можно поэтому искать из системы урав- нений

$$\begin{gathered} m_1 = \hat{\mu}, \\ \mu_2 = \hat{a}^2 + \hat{b}_0^2, \\ \mu_{40} = 3\cdot\left(\hat{a}^4 + 6\hat{a}^2\hat{b}_0^2 + 3\hat{b}_0^4\right), \\ \mu_{4k} = \left(\hat{a}^2 + \hat{b}_0^2\right)^2 + 4\hat{a}^2\hat{b}_0^2\hat{\rho}^k + 2\hat{b}_0^4\hat{\rho}^{2k}. \end{gathered} \tag{11}$$

Выпишем явный вид получающихся оценок. Из первого уравнения системы (11) имеем

$$\hat{\mu} = m_1 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h_n .$$

Из второго уравнения системы (11) получаем, что $\hat{b}_0^2 = \mu^2 - \hat{a}^2$.

Подставляем это в третье уравнение системы (11), и получаем

$$\mu_{40} = 3\cdot\left(3\mu_2^2 - 2\cdot\hat{a}^4\right),$$

откуда находится явный вид оценок параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$:

$$\hat{a}^2 = \sqrt{\frac{3}{2}\mu_2^2 - \frac{\mu_{40}}{6}}, \qquad \hat{b}^2 = \mu_2 - \sqrt{\frac{3}{2}\mu_2^2 - \frac{\mu_{40}}{6}} . \tag{12}$$

Заметим, что сами коэффициенты a и b оцениваются с точностью до знака. С учетом того, что $\hat{a}^2 + \hat{b}_0^2 = \mu_2$, последнее уравнение системы (11) дает

$$\mu_{4k} - \mu_2^2 = 4\hat{a}^2\hat{b}_0^2\hat{\rho}^k + 2\hat{b}_0^4\hat{\rho}^{2k}.$$

Обозначая $\hat{b}_0^2\hat{\rho}^k = x$, получаем квадратное уравнение

$$x^2 + 2\hat{a}^2 x + \frac{1}{2}\left(-\mu_{4k} + \mu_2^2\right) = 0,$$

откуда

$$x=-\hat{a}^2\pm\sqrt{\hat{a}^2-\frac{1}{2}\left(\mu_2^2-\mu_{4k}\right)}.$$

Учитывая явный вид оценки $\hat{a}^2$, после некоторых преобразований получим

$$x=-\sqrt{\frac{3}{2}\mu_2^2-\frac{\mu_{40}}{6}}\pm\sqrt{\mu_2^2+\frac{\mu_{4k}}{2}-\frac{\mu_{40}}{6}}. \qquad (13)$$

Заметим, что когда $\rho=0$, имеет место соотношение $\mu_{4k}=\mu_2^2$. В этом случае соотношение (13) принимает вид

$$x=-\sqrt{\frac{3}{2}\mu_2^2-\frac{\mu_{40}}{6}}\pm\sqrt{\frac{3}{2}\mu_2^2-\frac{\mu_{40}}{6}}$$

и правильный ответ $x=0$ получается лишь тогда, когда перед вторым слагаемым берется знак плюс. Поэтому x следует брать в виде

$$x=-\sqrt{\frac{3}{2}\mu_2^2-\frac{\mu_{40}}{6}}+\sqrt{\mu_2^2+\frac{\mu_{4k}}{2}-\frac{\mu_{40}}{6}},$$

и оценка $\hat{\rho}^k$ будет иметь вид

$$\hat{\rho}^k=\frac{-\sqrt{\frac{3}{2}\mu_2^2-\frac{\mu_{40}}{6}}+\sqrt{\mu_2^2+\frac{\mu_{4k}}{2}-\frac{\mu_{40}}{6}}}{\mu_2-\sqrt{\frac{3}{2}\mu_2^2-\frac{\mu_{40}}{6}}}.$$

Для точного определения знака ρ следует брать величину k нечетной. По-видимому, достаточно брать значение $k=1$, когда сразу получается оценка $\hat{\rho}$ параметра ρ.

Проверка гипотезы о наличии двойной волатильности

Наличие двойной волатильности в модели (3) связано с наличием коэффициента b. Поэтому представляет интерес проверка статистической гипотезы вида

$$H_0:\ b=0; \quad H_1:\ b\neq 0.$$

Из системы (11) следует, что при $b=0$ должны выполняться соотношения $\mu_2 = a^2$, $\mu_{40} = 3a^4$, то есть $\mu_{40} = 3\mu_2^2$. Поэтому для проверки гипотезы о том, что $b=0$, следует использовать статистику $\frac{\mu_{40}}{\mu_2^2}$. Сам тест выглядит следующим образом: если

$$\left|\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3\right| < g_\alpha \sqrt{\frac{24}{N}},$$

то следует принять гипотезу H_0, в противном случае - отвергнуть ее. Константа g_α определяется по уровню значимости α.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. I. Факты и модели. М.: Фазис, 1998. 489с.
2. Меладзе В.Э. Курс технического анализа. М.: Серебряные нити, 1997. 272с.
3. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 755с.
4. Крамер Г., Линдбеттер М. Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1987. 313с.