СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ И УПРАВЛЕНИЕ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

Выпуск 2

Анжеро-Судженский филиал
Кемеровского государственного университета

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ И УПРАВЛЕНИЕ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

Выпуск 2

Под редакцией профессора А.Ф. Терпугова

Издательство Томского университета
2000

УДК 519.2
ББК 22.17

С78 **Статистическая обработка данных и управление в сложных системах. Вып.2**
Сборник статей/ Под ред. проф. А.Ф. Терпугова – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2000.
–144 с.

ISBN 5-7511-1196-6

Сборник содержит статьи сотрудников и аспирантов факультета математики и информатики филиала Кемеровского университета в г. Анжеро-Судженске, посвященные статистической обработке временных рядов, актуарной математике, а также вопросам управления в системах массового обслуживания и в измерительных системах.

Для студентов, аспирантов, научных работников, занимающихся вопросами анализа временных рядов и управления в измерительных системах.

УДК 519.2
ББК 22.17

ISBN 5-7511-1196-6

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕН САМУЭЛЬСОНА ПО "ЯПОНСКИМ СВЕЧКАМ"

Р.Т. ВАЛЕЕВ, А.Ф.ТЕРПУГОВ

Технические методы анализа фондового и финансового рынка получили в настоящее время очень широкое распространение. Наряду с методами, имеющими теоретическое обоснование, например метод скользящего среднего, метод осцилляторов, имеется целый ряд методов, для которых техническое обоснование отсутствует. К таким методам относится и популярный метод "японских свечек". Несмотря на то, что этому методу посвящены уже целые монографии [1,2], авторам не удалось найти в научной литературе каких-либо теоретических обоснований этого метода.

В работе [3] нами получены точные распределения вероятностей для некоторых величин, характеризующих эти "свечки". В данной работе на основании полученных в [3] результатов находится приближенное совместное распределение вероятностей для всех величин, характеризующих «японские свечи», строятся и исследуются оценки параметров, проверяются некоторые статистические гипотезы о параметрах модели изменения цен Самуэльсона по наборам "японских свечек".

Описание модели

Пусть торговая сессия начинается в момент времени $t=0$ и заканчивается в момент времени $t=T$. Цену финансового актива в момент времени t обозначим как S_t. Величинами, определяющими "японскую свечку", являются следующие:

S_0 - цена открытия;

S_t –цена закрытия;

$S_{\max} = \max\limits_{0\le t\le T} S_t$ – максимальная цена за период сессии;

$S_{\min} = \min\limits_{0\le t\le T} S_t$ –минимальная цена за период сессии.

Для теоретического исследования перейдем от процесса S_t к процессу

$$h_t = \ln(S_t/S_0).$$

Тогда «японская свеча» характеризуется величинами h_T, $h_{\max}$ и $h_{\min}$, так как $h_0 = 0$.

В дальнейшем для процесса h_t будет использоваться модель изменения цен Самуэльсона [5], когда считается, что процесс h_t является диффузионным случайным процессом, который записывается в виде

$$dh_t = \left(\mu_0 - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\, dw_t,$$

где μ_0 - коэффициент сноса; σ - коэффициент волатильности, а w_t – стандартный винеровский случайный процесс.

Определение совместной плотности вероятностей величин $h_{\min}, h_{\max}$ и h_τ

В работе [3] получены точные выражения для совместных плотностей вероятностей пар $(h_{\max}, h_\tau)$ и $(h_{\min}, h_\tau)$, а также для величины h_τ, которые собственно имеют вид

$$p(h_{\max}, h_\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi\tau^3}}(2h_{\max} - h_\tau)\exp\left(-\frac{(2h_{\max} - h_\tau)^2}{2\tau} + h_\tau\mu - \frac{\mu^2}{2}\tau\right),$$

$$p(h_{\min}, h_\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi\tau^3}}(h_\tau - 2h_{\min})\exp\left(-\frac{(h_\tau - 2h_{\min})^2}{2\tau} + h_\tau\mu - \frac{\mu^2}{2}\tau\right), \quad (1)$$

$$p(h_\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{(h_\tau - 2h_{\min})^2}{2\tau}\right),$$

где параметры μ и τ имеют вид

$$\mu = \left(\mu_0 - \frac{\sigma^2}{2}\right)T; \qquad \tau = \sigma^2 T. \quad (2)$$

Для того чтобы найти совместную плотность вероятностей $(h_{\min}, h_{\max}, h_\tau)$, сделаем приближение в виде условной независимости величин

h_{max} и h_{min} при фиксированном h_τ. Данное приближение делается на том основании, что при достаточно длинной реализации процесса $h(t)$ его глобальные максимум и минимум находятся далеко друг от друга и интервал времени между ними много больше времени корреляции процесса $h(t)$. Зависимость от h_τ должна быть сохранена, так как при наличии тренда глобальный максимум может находиться около конца интервала и, кроме того, есть ограничения вида $h_{max} \ge \max(h_\tau, 0)$ и $h_{min} \le \min(h_\tau, 0)$. Поэтому по формулам условной вероятности

$$p(h_{max} | h_\tau) = \frac{p(h_{max}, h_\tau)}{p(h_\tau)} = \frac{2}{\tau}(2h_{max} - h_\tau)\exp\left(-\frac{(2h_{max} - h_\tau)^2}{2\tau} + \frac{h_\tau^2}{2\tau}\right). \tag{3}$$

Аналогично

$$p(h_{max} | h_\tau) = \frac{2}{\tau}(h_\tau - 2h_{min})\exp\left(-\frac{(h_\tau - 2h_{min})^2}{2\tau} + \frac{h_\tau^2}{2\tau}\right).$$

В сформулированном приближении

$$\begin{aligned} p(h_{max}, h_{min} | h_\tau) &= p(h_{max} | h_\tau)\, p(h_{min} | h_\tau) = \\ &= \frac{4}{\tau^2}(2h_{max} - h_\tau)(h_\tau - 2h_{min})\exp\left(-\frac{(h_\tau - 2h_{min})^2}{2\tau} - \frac{(2h_{max} - h_\tau)^2}{2\tau} + 2\frac{h_\tau^2}{2\tau}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, совместная плотность вероятностей от трех параметров h_{max}, h_{min} и h_τ

$$\begin{aligned} p(h_{max}, h_{min}, h_\tau) &= \frac{4}{\sqrt{2\pi}\,\tau^{5/2}}(2h_{max} - h_\tau)(h_\tau - 2h_{min}) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{(h_\tau - 2h_{min})^2}{2\tau} - \frac{(2h_{max} - h_\tau)^2}{2\tau} + \frac{h_\tau^2}{2\tau} + h_\tau \mu - \frac{\mu_0^2 \tau}{2}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

Эта плотность вероятностей определеиа в области $-\infty < h_\tau < +\infty$. Что касается величины $2h_{max} - h_\tau$, то если $h_\tau < 0$, то $h_{max} \ge 0$ и, следовательно, $2h_{max} - h_\tau \ge -h_\tau$. Если же $h_\tau > 0$, то $h_{max} \ge h_\tau$ и тогда $2h_{max} - h_\tau \ge h_\tau$. Эти два условия можно объединить в одно и записать $2h_{max} - h_\tau \ge |h_\tau|$. Аналогично с комбинацией $h_\tau - 2h_{\min} \geq |h_\tau|$. Таким образом, $p(h_{\max}, h_{\min}, h_\tau)$ определена в области

$$-\infty < h_\tau < +\infty, \quad 2h_{\max} - h_\tau \geq |h_\tau|, \;\; h_\tau - 2h_{\min} \geq |h_\tau|.$$

Оценка параметров μ и τ по методу максимального правдоподобия

Рассмотрим теперь оценку параметров μ и τ по величинам h_τ, $h_{\min}$ и $h_{\max}$. Оценки построены в предположении, что величины μ и τ не меняются от сессии к сессии. Пусть мы имеем n «японских свечек», в которых значения $h_{\max}$, $h_{\min}$ и h_τ были

$$\left(h_{\max}^{(1)}, h_{\min}^{(1)}\, h_\tau^{(1)};\; h_{\max}^{(2)}, h_{\min}^{(2)}\, h_\tau^{(2)};\ldots, h_{\max}^{(n)}, h_{\min}^{(n)}\, h_\tau^{(n)}\right)$$

Для сокращения дальнейших выкладок обозначим

$$H \equiv 2h_{\max} - h_\tau, \; G \equiv h_\tau - 2h_{\min}, \; h \equiv h_\tau.$$

Так как якобиан перехода

$$\frac{\partial H}{\partial h_{\max}} = 2, \;\; \frac{\partial h_{\max}}{\partial H} = \frac{1}{2}, \;\; \frac{\partial h_{\min}}{\partial G} = -\frac{1}{2},$$

то плотность вероятностей (5) величин H, G и h имеет вид

$$p(H,G,h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau^{5/2}} \cdot H \cdot G \cdot \exp\left(-\frac{H^2}{2\tau} - \frac{G^2}{2\tau} + \frac{h^2}{2\tau} + h\mu - \frac{\mu^2\tau}{2}\right). \tag{6}$$

Область определения величин H, G и h, как было отмечено выше,

$$-\infty < h < +\infty, \;\; G \geq |h|, \; H \geq |h|.$$

Итак, пусть имеется выборка (H_i, G_i, h_i), $i = \overline{1,n}$. Тогда совместная плотность вероятностей этих величин есть

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^5}} G_i H_i \exp\left(-\frac{H_i^2}{2\tau} - \frac{G_i^2}{2\tau} + \frac{h_i^2}{2\tau} + h_i\mu - \frac{\mu^2}{2}\tau\right)$$

и логарифм этого выражения равен

$$L = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln H_i + \ln G_i - \frac{5}{2}\ln\tau - \frac{H_i^2}{2\tau} - \frac{G_i^2}{2\tau} + \frac{h_i^2}{2\tau} + h_i\mu - \frac{\mu^2}{2}\tau\right) + \text{const}. \tag{7}$$

Найдем оценки $\hat{\mu}$ и $\hat{\tau}$ величин μ и τ методом максимального правдоподобия. Из условия $\dfrac{\partial L}{\partial \mu} = 0$ получим

$$\sum_{i=1}^{n} h_i - n\mu\,\tau = 0 \quad \text{или} \quad \mu\tau = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i . \tag{8}$$

Из условия $\dfrac{\partial L}{\partial \tau} = 0$ получаем

$$-\frac{5}{2}\frac{n}{\tau} + \frac{1}{2\tau^2}\sum_{i=1}^{n} H_i^2 + \frac{1}{2\tau^2}\sum_{i=1}^{n} G_i^2 - n\frac{\mu^2}{2} - \frac{1}{2\tau^2}\sum_{i=1}^{n} h_i^2 = 0.$$

Учитывая предыдущее соотношение, имеем

$$-\frac{5n}{\tau} + \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n} H_i^2 + \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n} G_i^2 - \frac{1}{\tau^2}\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right)^2 - \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n} h_i^2 = 0,$$

откуда после некоторых упрощений получаем искомые оценки

$$\hat{\tau} = \frac{1}{5n}\left[\sum_{i=1}^{n} H_i^2 + \sum_{i=1}^{n} G_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} h_i^2\right], \tag{9}$$

а также

$$\hat{\mu} = \frac{5\sum_{i=1}^{n} h_i}{\sum_{i=1}^{n} H_i^2 + \sum_{i=1}^{n} G_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} h_i^2}. \tag{10}$$

Точное распределение

Прежде чем исследовать эти оценки, выведем точную формулу для плотности вероятностей некоторых величин, указанных ниже.

Как видно из формул (9), (10), оценки $\hat{\tau}$ и $\hat{\mu}$ зависят от комбинаций $\sum_{i=1}^{n} h_i$, $\sum_{i=1}^{n}\left(G_i^2 - h_i^2\right)$, $\sum_{i=1}^{n}\left(H_i^2 - h_i^2\right)$ и $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right)^2$. Обозначим их для краткости соответственно

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = h,\ \ \sum_{i=1}^{n} h_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right)^2 \equiv \Theta,\ \ \sum_{i=1}^{n}\left(G_i^2 - h_i^2\right) \equiv \eta_{\min},\ \sum_{i=1}^{n}\left(H_i^2 - h_i^2\right) \equiv \eta_{\max}. \quad (11)$$

Выведем точную формулу для совместной плотности вероятностей этих величин.

Как уже указывалось выше, для отдельной свечки

$$p(H,G,h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau^{5/2}} \cdot H \cdot G \cdot \exp\left(-\frac{H^2}{2\tau} - \frac{G^2}{2\tau} + \frac{h^2}{2\tau} + h\mu - \frac{\mu^2\tau}{2}\right).$$

Найдем

$$g(s,\omega) = M\left\{e^{-s_1\left(H_i^2 - h_i^2\right) - s_2\left(G_i^2 - h_i^2\right) - s_3 h_i^2 + i\omega h_i}\right\}, \quad (12)$$

представляющие собой преобразование Фурье по переменной h и преобразование Лапласа по комбинациям $H_i^2 - h_i^2$, $G_i^2 - h_i^2$ и h_i^2 от $p(H,G,h)$. Имеем

$$g(s,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^5}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega h - s_3 h^2 + \frac{h^2}{2\tau} + h\mu - \frac{\mu^2\tau}{2}} dh \int_{|h|}^{\infty} H \cdot e^{-s_1\left(H^2 - h^2\right) - \frac{H^2}{2\tau}} dH \int_{|h|}^{\infty} G \cdot e^{-s_2\left(G^2 - h^2\right) - \frac{G^2}{2\tau}} dG. \quad (13)$$

Вычисляя эти интегралы и возводя в n-ю степень, получим

$$g^n(s,\omega) = \frac{\exp\left(i\omega \frac{\mu\tau n}{1+2\tau s_3} - \omega^2 \frac{\tau n}{2\left(1+2\tau s_3\right)} - \frac{\mu^2\tau^2 s_3 n}{1+2\tau s_3}\right)}{(2\tau)^{n/2}\left(1+2\tau s_1\right)^n\left(1+2\tau s_2\right)^n\left(s_3 + \frac{1}{2\tau}\right)^{n/2}} \quad (14)$$

Обратное преобразование Фурье по переменной ω дает

$$\hat{G}(s,h) = \frac{\exp\left(-\frac{(h-\mu\tau n)^2}{2\tau n} - \frac{h^2 s_3}{n}\right)}{\sqrt{\pi n}(2\tau)^{\frac{5n}{2}}\left(\frac{1}{2\tau} + s_3\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{2\tau} + s_2\right)^n\left(\frac{1}{2\tau} + s_1\right)^n}. \quad (15)$$

Находя теперь обратное преобразование Лапласа, получаем плотность вероятностей величин $\eta_{\min}, \eta_{\max}, \Theta$ и h:

$$p(\eta_{\min},\eta_{\max},\Theta,h)=\frac{\eta_{\max}^{n-1}}{\Gamma(n)(2\tau)^n}e^{-\frac{\eta_{\max}}{2\tau}}\cdot\frac{\eta_{\min}^{n-1}}{\Gamma(n)(2\tau)^n}e^{-\frac{\eta_{\min}}{2\tau}}\cdot\frac{\Theta^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)(2\tau)^{\frac{n-1}{2}}}e^{-\frac{\Theta}{2\tau}}\times \tag{16}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi n\tau}}e^{-\frac{(h-\mu\tau n)^2}{2\tau n}}.$$

Отсюда следует, что $\eta_{\min},\eta_{\max},\Theta$ и h - независимые случайные величины, причем величина h распределена нормально с математическим ожиданием $n\mu\tau$ и дисперсией $n\tau$. Так как вид наших оценок $\hat{\mu}$ и $\hat{\tau}$ соответственно

$$\hat{\mu}=\frac{h(5n-3)}{(\eta_{\min}+\eta_{\max}+\Theta)h} \quad \text{и} \quad \hat{\tau}=\frac{\eta_{\min}+\eta_{\max}+\Theta}{5n-1},$$

обозначим для краткости $\eta_{\min}+\eta_{\max}+\Theta=\xi$. Для того чтобы найти плотность $p(\xi)$, проведем аналогичные операции. Найдем преобразование Лапласа по комбинациям $\eta_{\min},\eta_{\max},\Theta$ от $p(\eta_{\min},\eta_{\max},\Theta)$:

$$M\left\{e^{-s_1\eta_{\min}-s_2\eta_{\max}-s_3\Theta}\right\}=\frac{1}{(2\tau)^{\frac{5n-1}{2}}(2\tau s_1+1)^n(2\tau s_2+1)^n(2\tau s_3+1)^{\frac{n-1}{2}}}. \tag{17}$$

При $s_1=s_2=s_3$ и проводя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$p(\xi)=\frac{\xi^{\frac{5n-3}{2}}}{(2\tau)^{\frac{5n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{5n-1}{2}\right)}e^{-\frac{\xi}{2\tau}}. \tag{18}$$

Этой формулой мы и будем пользоваться в дальнейшем при исследовании характеристик оценок.

Корректировка оценок и вычисление их характеристик

Полученное выражение для $p(\xi)$ позволяет найти все характеристики оценок и скорректировать их.

Начнем с оценки $\hat{\tau}$, которая, в новых обозначениях, будет иметь вид $\hat{\tau}=\xi/5n$. Вычисляя математическое ожидание, найдем

$$M\{\hat{\tau}\}=\frac{1}{5n}\int_0^\infty \frac{\xi^{\frac{5n-3}{2}}}{(2\tau)^{\frac{5n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{5n-1}{2}\right)}\exp\left(-\frac{\xi}{2\tau}\right)d\xi=\frac{5n-1}{5n}\tau, \tag{19}$$

откуда видно, что полученная оценка является смещенной. Чтобы оценка $\hat{\tau}$ параметра τ была несмещенной, ее следует взять в виде

$$\hat{\tau}=\frac{\xi}{5n-1}=\frac{1}{5n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(H_i^2-h_i^2\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(G_i^2-h_i^2\right)+\sum_{i=1}^{n}h_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\right)^2\right]. \tag{20}$$

Вычисляя теперь $M\{\hat{\tau}\}$, получим

$$M\{\hat{\tau}\}=\frac{(5n+1)(5n-1)}{(5n-1)^2}\tau^2=\frac{5n+1}{5n-1}\tau^2,$$

откуда

$$D\{\hat{\tau}\}=\frac{2\tau^2}{5n-1}. \tag{21}$$

Перейдем теперь к оценке $\hat{\mu}$ параметра μ, которая, в новых переменных, имеет вид $\hat{\mu}=5h/\xi$. Для нее

$$M\{\hat{\mu}\}=5M\{h\}M\left\{\frac{1}{\xi}\right\}=\frac{5n}{5n-1}\mu, \tag{22}$$

откуда видно, что оценка также смещена. Скорректированная оценка $\hat{\mu}$ параметра μ имеет вид

$$\hat{\mu}=5\frac{5n-3}{5n}\frac{h}{\xi}=\frac{5n-3}{n}\frac{h}{\xi}=$$

$$=\frac{5n-3}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}h_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(H_i^2-h_i^2\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(G_i^2-h_i^2\right)+\sum_{i=1}^{n}h_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\right)^2}, \tag{23}$$

которая является уже несмещенной оценкой. Далее

$$M\{\hat{\mu}\}=\frac{(5n-3)^2}{n^2}M\{h^2\}M\left\{\frac{1}{\eta^2}\right\}=\frac{5n-3}{5(n-1)}\mu^2+\frac{5n-3}{5n(n-1)}\frac{1}{\tau},$$

так что

$$D\{\hat{\mu}\}=\frac{2}{5(n-1)}\mu^2+\frac{5n-3}{5n(n-1)}\frac{1}{\tau}. \tag{24}$$

Наконец, так как

$$M\{\hat{\mu}\hat{\tau}\}=\frac{5n-3}{n(5n-1)}M\{h\}=\frac{5n-3}{5n-1}\mu\tau, \tag{25}$$

то

$$\operatorname{cov}(\hat{\mu},\hat{\tau})=-\frac{2}{5n-1}\mu\tau. \tag{26}$$

Отсюда видно, что оценки $\hat{\mu}$ и $\hat{\tau}$ коррелированны с коэффициентом корреляции

$$\operatorname{corr}(\hat{\mu},\hat{\tau})=-\frac{2\mu}{\sqrt{2\left(2\frac{5n-1}{5(n-1)}\mu^2+\frac{(5n-3)(5n-1)}{5n(n-1)}\frac{1}{\tau}\right)}}, \tag{27}$$

который при $n\to\infty$ сходится к своему предельному значению

$$\operatorname{corr}(\hat{\mu},\hat{\tau})=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{2\mu^2\tau}}}. \tag{28}$$

Сходимость оценок почти наверное

Величины h_i являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, так же как G_i и H_i. Поэтому по теореме Хинчина при $n\to\infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h_i\xrightarrow{\text{пн}}M\{h_i\}=\mu\tau,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}H_i^2\xrightarrow{\text{пн}}M\{H_i^2\}=\mu^2\tau^2+3\tau,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G_i^2 \xrightarrow{\text{пн}} M\{G_i^2\} = \mu^2\tau^2 + 3\tau\,,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \xrightarrow{\text{пн}} M\{h_i^2\} = \mu^2\tau^2 + \tau\,.$$

Поэтому, представляя оценку $\hat{\tau}$ в виде

$$\hat{\tau} = \frac{n}{5n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i\right)^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i^2\right],$$

мы видим, что при $n \to \infty$ имеет место сходимость почти наверное $\hat{\tau} \xrightarrow{\text{пн}} \tau$.

Аналогично, представляя $\hat{\mu}$ в виде

$$\hat{\mu} = \frac{5n}{5n-3}\,\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i\right)^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i^2},$$

видно, что при $n \to \infty$ имеет место сходимость почти наверное $\hat{\mu} \xrightarrow{\text{пн}} \mu$.

Асимптотическая нормальность оценок

Докажем, что построенные нами оценки являются асимптотическими нормальными. Имея в виду их несмещенность и выражения для дисперсий, перейдем к их величинам

$$x = \left(\frac{\xi}{5n} - \tau\right)\sqrt{\frac{5n}{2\tau^2}} = \frac{\xi}{\tau\sqrt{10n}} - \sqrt{\frac{5n}{2}}\,,$$

(29)

$$y = \left(5\frac{h}{\xi} - \mu\right)\sqrt{n}\,,$$

так что

$$\xi = \left(x\sqrt{10n} + 5n\right)\tau\,,$$

(30)

$$h=\frac{1}{5}\left(\frac{y}{\sqrt{n}}+\mu\right)\left(x\sqrt{10n}+5n\right)\tau .$$

Для этого перехода

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\tau\sqrt{10n} \qquad \frac{\partial h}{\partial y}=\frac{1}{5\sqrt{n}}\left(x\sqrt{10n}+5n\tau\right). \tag{31}$$

Рассмотрим сначала сомножитель, зависящий только от ξ в выражении для $p(h,\xi)$. После умножения на $\partial\xi/\partial x$ он принимает вид

$$I_1=\tau\sqrt{10n}\frac{\xi^{\frac{5n-3}{2}}}{(2\tau)^{\frac{5n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{5n-1}{2}\right)}e^{-\frac{\xi}{2\tau}}. \tag{32}$$

Логарифмируя и подставляя вместо ξ его выражение через x, получим

$$\ln I_1=\ln\tau+\frac{1}{2}\ln(10n)+\frac{5n-3}{2}\ln\left(x\tau\sqrt{10n}+5n\tau\right)-\frac{5n-1}{2}\ln(2\tau)-$$
$$-\ln\Gamma\left(\frac{5n-1}{2}\right)-\frac{x\tau\sqrt{10n}+5n\tau}{2\tau}.$$

Далее имеем

$$\frac{5n-3}{2}\ln\left(x\tau\sqrt{10n}+5n\tau\right)=\frac{5n-3}{2}\ln(5n\tau)+\frac{5n-3}{2}\ln\left(1+\frac{x\sqrt{10n}}{5n}\right)=$$
$$=\frac{5n-3}{2}\ln(5n\tau)+\frac{5n-3}{2}\left(\frac{x\sqrt{10n}}{5n}-\frac{x^2}{2}\frac{10n}{25n^2}+\ldots\right).$$

Поэтому для $\ln I_2$ имеем выражение

$$\ln I_1=\left[\frac{1}{2}\ln(10n)+\frac{5n-3}{2}\ln(5n)-\frac{5n-1}{2}\ln(2)-\ln\Gamma\left(\frac{5n-1}{2}\right)-\frac{5n}{2}\right]+$$
$$+\left[\ln\tau+\frac{5n-3}{2}\ln\tau-\frac{5n-1}{2}\ln\tau\right]+\left[\frac{5n-3}{2\cdot 5n}x\sqrt{10n}-\frac{5n-3}{2}\frac{x^2}{2}\frac{10n}{25n^2}-\frac{x\sqrt{10n}}{2}\right].$$

Слагаемые, содержащие τ, сокращаются. Группа слагаемых, содержащая x, при $n\to\infty$ стремится к $-x^2/2$. Наконец, используя асимптотическое выражение для $\ln\Gamma\left(\frac{5n-1}{2}\right)$, можно показать, что первая группа слагаемых, зависящая только от n, при $n\to\infty$ стремится к $-\ln\sqrt{2\pi}$. Поэтому при $n\to\infty$

$$\ln I_1 \to -\frac{x^2}{2} - \ln\sqrt{2\pi}, \qquad I_1 \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \tag{33}$$

Рассмотрим теперь предельный переход в том сомножителе $p(h,\xi)$, который зависит лишь от h. Умноженный на $\partial h/\partial y$, он имеет вид

$$I_2 = \frac{x\sqrt{10n}+5n\tau}{5\sqrt{n}\,\sqrt{2\pi\tau n}} \exp\left(-\frac{1}{2n\tau}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{y}{\sqrt{n}}+\mu\right)\left(x\sqrt{10n}+5n\right)\tau - n\mu\tau\right]^2\right). \tag{34}$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x\sqrt{10n}+5n\tau}{5\sqrt{n}\,\sqrt{2\pi n\tau}} = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\tau}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{y}{\sqrt{n}}+\mu\right)\left(x\sqrt{10n}+5n\right)\tau - n\mu\tau\right]^2 = \frac{\tau}{2}\left(y^2+\frac{2}{5}xy\mu\sqrt{10}+\frac{2}{5}\mu^2x^2\right),$$

так что

$$\lim_{n\to\infty} I_2 = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau}{2}\left(\frac{2}{5}\mu^2x^2+\frac{2}{5}xy\mu\sqrt{10}+y^2\right)\right). \tag{35}$$

Объединяя все вместе, получаем, что для плотности вероятностей $p(x,y)$ величин (x,y) в пределе $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} p(x,y) = \frac{\tau}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left[\frac{2}{5}\mu^2\tau+1\right]x^2+\frac{2}{5}xy\mu\sqrt{10}\tau+y^2\tau\right)\right), \tag{36}$$

что и говорит об асимптотической нормальности величин x и y, а вместе с тем об асимптотической нормальности оценок $\hat{\tau}$ и $\hat{\mu}$.

Отметим еще, что для ковариационной матрицы R величин x и y при $n\to\infty$ имеем

$$R^{(-1)}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\mu^2\tau+1 & \frac{\sqrt{10}}{5}\mu\tau\\ \frac{\sqrt{10}}{5}\mu\tau & \tau\end{bmatrix},\qquad R=\begin{bmatrix}1 & -\mu\sqrt{\frac{2}{5}}\\ -\mu\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{2}{5}\mu^2+\frac{1}{\tau}\end{bmatrix}, \tag{37}$$

что полностью соответствует ковариациям и дисперсиям оценок $\hat{\tau}$ и $\hat{\mu}$.

Доверительные интервалы для неизвестных параметров

Рассмотрим теперь вопрос о доверительных границах для неизвестных параметров. Проще всего это сделать для параметра τ. Для этого заметим, что величина $z=\xi/\tau$ имеет плотность вероятностей

$$p(z)=\frac{z^{\frac{5n-1}{2}-1}}{2^{\frac{5n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{5n-1}{2}\right)}e^{-\frac{z}{2}}, \tag{38}$$

то есть z имеет χ^2 распределение с числом степеней свободы $f=5n-1$.

Пусть α есть доверительный уровень. Найдем $C_1(f,\alpha)$ и $C_2(f,\alpha)$ из условия

$$P\{z<C_1(f,\alpha)\}=\frac{\alpha}{2},\qquad P\{z>C_2(f,\alpha)\}=\frac{\alpha}{2}. \tag{39}$$

Сами значения $C_1(f,\alpha)$и $C_2(f,\alpha)$ могут быть найдены, например, из таблиц.

Тогда с вероятностью $1-\alpha$ верно неравенство

$$C_1(f,\alpha)\le z\le C_2(f,\alpha).$$

Так как $\hat{\tau}=\xi/(5n-1)$, то $z=\frac{\xi}{\tau}=(5n-1)\frac{\hat{\tau}}{\tau}$ и с вероятностью $1-2\alpha$

$$C_1(f,\alpha)\le(5n-1)\frac{\hat{\tau}}{\tau}\le C_2(f,\alpha),$$

откуда получается доверительный интервал для параметра τ

$$\hat{\tau}\frac{5n-1}{C_2(f,\alpha)}\le\tau\le\hat{\tau}\frac{5n-1}{C_1(f,\alpha)}, \tag{40}$$

При больших ξ можно воспользоваться нормальной аппроксимацией, тогда доверительный интервал для параметра τ можно найти следующим образом: определить g_α как решение уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{g_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{\alpha}{2}. \qquad (41)$$

Тогда с вероятностью $1-\alpha$

$$\frac{|\hat{\tau}-\tau|}{\tau\sqrt{\dfrac{2}{5n}}} \le g_\alpha,$$

откуда получаем доверительный интервал для параметра τ

$$\frac{\hat{\tau}}{1+g_\alpha\sqrt{\dfrac{2}{5n}}} \le \tau \le \frac{\hat{\tau}}{1-g_\alpha\sqrt{\dfrac{2}{5n}}}, \qquad (42)$$

Для нахождения доверительного интервала для параметра μ можно воспользоваться нормальной аппроксимацией. Так как при $n>>1$

$$D\{\hat{\mu}\} = \left(\frac{2}{5}\mu^2 + \frac{1}{\tau}\right)\frac{1}{n}, \qquad (43)$$

и имеет место сходимость оценок почти наверное, то доверительный интервал для параметра μ имеет вид

$$\mu = \hat{\mu} \pm g_\alpha\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\hat{\mu}^2 + \frac{1}{\hat{\tau}}\right)}. \qquad (44)$$

Проверка гипотез о параметрах

Рассмотрим теперь два набора "японских свечек", которые имеют параметры $\left(h_{\max}^{(i)}, h_{\min}^{(i)}, h_\tau^{(i)}\right)$ $i=\overline{1,n}$ в первом наборе из n свечек и параметры $\left(h_{\max}^{(j)}, h_{\min}^{(j)}, h_\tau^{(j)}\right)$ $j=\overline{1,m}$ во втором наборе из m свечек. Эти величины, как указывалось выше (11), пересчитываются в статистиках соответственно

$\eta_{\min},\eta_{\max},\Theta$ и h, а также $\bar{\eta}_{\min},\bar{\eta}_{\max},\bar{\Theta}$ и $\bar{h}$, которые, в свою очередь, являются независимыми случайными величинами (16) с плотностями вероятностей

$$p(\eta_{\min})=\frac{\eta_{\min}^{n-1}}{\Gamma(n)(2\tau_1)^n}e^{-\frac{\eta_{\min}}{2\tau_1}},\quad p(\bar{\eta}_{\min})=\frac{\bar{\eta}_{\min}^{m-1}}{\Gamma(m)(2\tau_2)^m}e^{-\frac{\bar{\eta}_{\min}}{2\tau_2}},$$

$$p(\eta_{\max})=\frac{\eta_{\max}^{n-1}}{\Gamma(n)(2\tau_1)^n}e^{-\frac{\eta_{\max}}{2\tau_1}},\quad p(\bar{\eta}_{\max})=\frac{\bar{\eta}_{\max}^{n-1}}{\Gamma(m)(2\tau_2)^m}e^{-\frac{\bar{\eta}_{\max}}{2\tau_2}},$$

$$p(\Theta)=\frac{\Theta^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)(2\tau_1)^{\frac{n-1}{2}}}e^{-\frac{\Theta}{2\tau_1}},\quad p(\bar{\Theta})=\frac{\bar{\Theta}^{\frac{m-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)(2\tau_2)^{\frac{m-1}{2}}}e^{-\frac{\bar{\Theta}}{2\tau_2}},$$

$$p(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi n\tau_1}}\exp\left(-\frac{(h-\mu_1\tau_1 n)^2}{2\tau_1 n}\right),\quad p(\bar{h})=\frac{1}{\sqrt{2\pi mn\tau_2}}\exp\left(-\frac{(\bar{h}-\mu_2\tau_2 m)^2}{2\tau_2 m}\right),$$

где (μ_1,τ_1) есть значение параметров μ и τ в первой n группе "свечек", а (μ_2,τ_2) – значение тех же параметров во второй группе.

Рассмотрим проверку некоторых гипотез.

Проверка гипотез о равенстве параметров τ

Рассмотрим проверку следующей статистической гипотезы

$$H_0:\ \tau_1=\tau_2 \qquad H_1:\tau_1\neq\tau_2.$$

Так как оценки параметров имеют вид

$$\hat{\tau}_1=\frac{\xi}{5n-1}\qquad \hat{\tau}_2=\frac{\bar{\xi}}{5m-1}.$$

то в дальнейшем будем использовать формулу (18). Заметим, что эти оценки всегда неотрицательны. При гипотезе H_0, когда $\tau_1=\tau_2$, их отношение $\tau_1/\tau_2=1$. Поэтому при верности гипотезы H_0 естественно использовать статистику

$$\gamma=\frac{\hat{\tau}_1}{\hat{\tau}_2}=\frac{\xi}{\bar{\xi}}\cdot\frac{5m-1}{5n-1}\ . \tag{45}$$

Найдем плотность вероятностей величины γ, считая, что гипотеза H_0 верна. Общее значение τ_1 и τ_2 обозначим для краткости через τ.

Используя формулу, определяющую плотность вероятностей частного двух случайных величин [4, с.42], найдем сначала плотность вероятностей величины $u = \xi/\bar{\xi}$

$$p(u) = \int_0^\infty \bar{\xi} \frac{(u\bar{\xi})^{\frac{5n-3}{2}}}{(2\tau)^{\frac{5n-1}{2}}\left(\frac{5n-3}{2}\right)!} e^{-\frac{u\bar{\xi}}{2\tau}} \frac{\bar{\xi}^{\frac{5m-3}{2}}}{(2\tau)^{\frac{5m-1}{2}}\left(\frac{5m-3}{2}\right)!} e^{-\frac{\bar{\xi}}{2\tau}} d\bar{\xi}.$$

В итоге получаем

$$p(u) = \frac{u^{\frac{5n-3}{2}}}{(1+u)^{\frac{5(n+m)}{2}-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{5(n+m)}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{5n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5m-1}{2}\right)}. \tag{46}$$

Учитывая, что $\gamma = u\dfrac{5m-1}{5n-1}$, получаем окончательно

$$p(\gamma|H_0) = \frac{\left(\gamma\frac{5n-1}{5m-1}\right)^{\frac{5n-3}{2}}}{\left(1+\gamma\frac{5n-1}{5m-1}\right)^{\frac{5(n+m)}{2}-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{5(n+m)}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{5n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5m-1}{2}\right)}. \tag{47}$$

Формулируя решающее правило для проверки гипотезы H_0, обозначим уровень значимости через 2α и найдем величины z_1 и z_2 из условий

$$\begin{aligned} &\int_0^{z_1} p(\gamma|H_0)d\gamma = P\{\gamma \le \gamma_1|H_0\} = \alpha, \\ &\int_{z_2}^{\infty} p(\gamma|H_0)d\gamma = P\{\gamma \ge \gamma_2|H_0\} = \alpha. \end{aligned} \tag{48}$$

Вероятность выполнения условия $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ равна $1-2\alpha$. Поэтому при выполнении условия

$$\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$$

принимают гипотезу H_0, то есть принимают, что $\tau_1 = \tau_2$, а если $\gamma \le \gamma_1$ или $\gamma \ge \gamma_2$ – отвергают гипотезу H_0, то есть принимают, что $\tau_1 = \tau_2$.

Проверка гипотезы $\tau_1 = \tau_2 \wedge \mu_1 = \mu_2$

Рассмотрим теперь проверку статистической гипотезы вида

$$H_0: \quad \tau_1 = \tau_2 \wedge \mu_1 = \mu_2 \qquad H_1: \tau_1 \neq \tau_2 \vee \mu_1 = \mu_2.$$

Смысл проверки гипотезы в том, что в обеих группах "свечек" параметры модели изменения цен одинаковы, то есть нет никаких изменений в состоянии фондового рынка.

Чтобы сформулировать критерий для проверки этой гипотезы, перепишем ее в виде

$$H_0: \quad \tau_1 = \tau_2 \wedge \mu_1\tau_1 = \mu_2\tau_2, \quad H_1: \tau_1 \neq \tau_2 \vee \mu_1\tau_1 = \mu_2\tau_2.$$

Теперь проверку гипотезы можно реализовать как двухэтапную процедуру. На первом этапе проверяется гипотеза $H_0: \tau_1 = \tau_2$ так, как описано выше. Если эта гипотеза будет отвергнута, то дальнейшая проверка не происходит. Если же будет принято решение о том, что $\tau_1 = \tau_2$, то надо будет проверить гипотезу

$$H_0: \quad \mu_1\tau_1 = \mu_2\tau_2, \quad H_1: \mu_1\tau_1 \neq \mu_2\tau_2.$$

Построим критерий для ее проверки, считая, что $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Для этого заметим, что $M\{h\} = n\tau\mu_1$ и $M\{\bar{h}\} = m\tau\mu_2$, и поэтому

$$M\left\{\frac{h}{n} - \frac{\bar{h}}{m}\right\} = \tau(\mu_1 - \mu_2), \tag{49}$$

очевидно, что чем больше разность $\frac{h}{n} - \frac{\bar{h}}{m}$, тем менее вероятно, что $\mu_1 = \mu_2$.

Итак, допустим, что верна гипотеза $H_0: \tau\mu_1 = \tau\mu_2$. Тогда

$$M\left\{\frac{h}{n} - \frac{\bar{h}}{m}\right\} = 0,$$

$$D\left\{\frac{h}{n}-\frac{\bar{h}}{m}\right\}=\tau\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right).$$

Величина τ неизвестна, но ее оценка

$$\hat{\tau}=\frac{\xi+\bar{\xi}}{5n+5m-2}. \tag{50}$$

Причем $M\{\hat{\tau}\}=\tau$. Поэтому для проверки гипотезы $H_0: \tau\mu_1=\tau\mu_2$ используем статистику

$$t=\frac{\frac{h}{n}-\frac{\bar{h}}{m}}{\sqrt{D}}. \tag{51}$$

Найдем плотность вероятностей величины t при гипотезе H_0. Так как

$$p(\xi,\bar{\xi})=\frac{\xi^{\frac{5n-3}{2}}}{(2\tau)^{\frac{5n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{5n-1}{2}\right)}e^{-\frac{\xi}{2\tau}}\cdot\frac{\bar{\xi}^{\frac{5m-3}{2}}}{(2\tau)^{\frac{5m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{5m-1}{2}\right)}e^{-\frac{\bar{\xi}}{2\tau}}, \tag{52}$$

то отсюда следует, что величина $\lambda=\xi+\bar{\xi}$ имеет плотность вероятностей

$$p(\lambda)=\frac{\lambda^{\frac{5(n+m)}{2}-2}}{(2\tau)^{\frac{5(n+m)}{2}-1}\Gamma\left(\frac{5(n+m)}{2}-1\right)}e^{-\frac{\lambda}{2\tau}}. \tag{53}$$

Величина $\varphi=\frac{h}{n}-\frac{\bar{h}}{m}$ – нормальная случайная величина с $M\{\varphi\}=0$ и $D\{\varphi\}=\tau\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$. Кроме того, величины λ и φ независимы. Отсюда следует, что величина t имеет плотность вероятностей распределения Стьюдента

$$p(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi f}\,\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{f}\right)^{\frac{f+1}{2}}} \tag{54}$$

с числом степеней свободы $f=5(n+m)-2=(5n-1)+(5m-1)$.

Итак, решающее правило для проверки гипотезы $H_0: \tau\mu_1 = \tau\mu_2$ при альтернативе $H_1: \tau\mu_1 \neq \tau\mu_2$ выглядит следующим образом: по уровню значимости 2α и $f = 5(n+m) - 2$ находится величина t_α из условия

$$\int_{t_\alpha}^{\infty} p(t)dt = \alpha, \tag{55}$$

и при выполнении условия $|t| < t_\alpha$ следует принимать гипотезу H_0, а если $|t| \geq t_\alpha$ - отвергать ее.

Проверка гипотезы $\mu_1 = \mu_2$

Рассмотрим теперь гипотезы

$$H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2 ,$$

считая τ_1 и τ_2 произвольными.

Построить точный тест для этой гипотезы не удается, и поэтому рассмотрим лишь приближенный тест.

Как уже говорилось при оценивании параметра μ, его оценкой является величина (при $n \gg 1$)

$$\hat{\mu} = \frac{5h}{\xi},$$

и ее дисперсия равна

$$D\{\hat{\mu}\} = \frac{1}{n}\left(\frac{2\mu^2}{5} + \frac{1}{\tau}\right). \tag{56}$$

Оценка этой дисперсии имеет вид

$$\hat{D}\{\hat{\mu}\} = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\left(\frac{5h}{\xi}\right)^2 + \frac{5n}{\xi}\right) = \frac{10}{n} \cdot \frac{h^2}{\xi^2} + \frac{5}{\xi}. \tag{57}$$

Рассмотрим разность

$$\frac{5h}{\xi} - \frac{5\bar{h}}{\bar{\xi}},$$

которая имеет следующие характеристики:

$$M\left\{\frac{5h}{\xi}-\frac{5\bar{h}}{\bar{\xi}}\right\}=\mu_1-\mu_2,$$

$$D\left\{\frac{5h}{\xi}-\frac{5\bar{h}}{\bar{\xi}}\right\}=D\{\hat{\mu}_1\}+D\{\hat{\mu}_2\}$$

в силу того, что (h,ξ) и $(\bar{h},\bar{\xi})$ – независимы.

Поэтому для проверки нашей гипотезы можно предложить статистику

$$S=\frac{\frac{5h}{\xi}-\frac{5\bar{h}}{\bar{\xi}}}{\sqrt{\frac{10}{n}\frac{h^2}{\xi^2}+\frac{5}{\xi}+\frac{10}{m}\frac{\bar{h}}{\bar{\xi}^2}+\frac{5}{\bar{\xi}}}},\tag{58}$$

относительно которой можно утверждать лишь то, что при $n,m\to\infty$ и верности гипотезы H_0 она сходится по распределению к нормальной случайной величине с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Поэтому при уровне значимости 2α, выбирая g_α из условия

$$\int_{g_\alpha}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\alpha,\tag{59}$$

следует принимать гипотезу H_0 при выполнении неравенства $|S|<g_\alpha$, а при выполнении условия $|S|\ge g_\alpha$ – отвергать ее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nison S. Japanese candlestick charting techniques. New York institute of finance. New York, 1991. 315p.
2. Nison S. Beyond Candlesticks. John Wiley, New York, 1994. 280p.
3. Валеев Р.Т., Терпугов А.Ф. // Изв. вузов. Физика. 2000. №4.
4. Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во ТГУ, 1988. 144с.
5. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1: Факты и модели. М.: Фазис, 1998. 489 с.