

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА**

---

---

*Научный журнал*

---

---

**2008**

**№ 3(4)**

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС 77-29497  
от 27 сентября 2007 г.



ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

## **НАУЧНО-РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

Майер Г.В., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Дунаевский Г.Е., д-р техн. наук, проф. (зам. председателя); Ревушкин А.С., д-р биол. наук, проф. (зам. председателя); Катунин Д.А., канд. филол. наук, доц. (отв. секретарь); Аванесов С.С., д-р филос. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Гага В.А., д-р экон. наук, проф.; Галажинский Э.В., д-р психол. наук, проф.; Глазунов А.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Голиков В.И., канд. ист. наук, доц.; Горцев А.М., д-р техн. наук, проф.; Гураль С.К., канд. филол. наук, проф.; Демешкина Т.А., д-р филол. наук, проф.; Демин В.В., канд. физ.-мат. наук, доц.; Ершов Ю.М., канд. филол. наук, доц.; Зиновьев В.П., д-р ист. наук, проф.; Канов В.И., д-р экон. наук, проф.; Кривова Н.А., д-р биол. наук, проф.; Кузнецов В.М., канд. физ.-мат. наук, доц.; Кулижский С.П., д-р биол. наук, проф.; Парначев В.П., д-р геол.-минерал. наук, проф.; Петров Ю.В., д-р филос. наук, проф.; Портнова Т.С., канд. физ.-мат. наук, директор Издательства НТЛ; Потекаев А.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Прокументов Л.М., д-р юрид. наук, проф.; Прокументова Г.Н., д-р пед. наук, проф.; Савицкий В.К., зав. редакционно-издательским отделом; Сахарова З.Е., канд. экон. наук, доц.; Слизов Ю.Г., канд. хим. наук, доц.; Сумарокова В.С., директор Издательства ТГУ; Сущенко С.П., д-р техн. наук, проф.; Тарасенко Ф.П., д-р техн. наук, проф.; Татьянин Г.М., канд. геол.-минерал. наук, доц.; Унгер Ф.Г., д-р хим. наук, проф.; Уткин В.А., д-р юрид. наук, проф.; Шилько В.Г., д-р пед. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р техн. наук, проф.

### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА»**

Горцев А.М., д-р техн. наук, проф. (председатель); Смагин В.И., д-р техн. наук, проф. (зам. председателя); Терпугов А.Ф., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Цой С.А., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь); Агибалов Г.П., д-р техн. наук, проф.; Дмитриев Ю.Г., д-р физ.-мат. наук, проф.; Домбровский В.В., д-р техн. наук, проф.; Змеев О.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Костюк Ю.Л., д-р техн. наук, проф.; Кошкин Г.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Матророва А.Ю., д-р техн. наук, проф.; Назаров А.А., д-р техн. наук, проф.; Параев Ю.И., д-р техн. наук, проф.; Поддубный В.В., д-р техн. наук, проф.; Сущенко С.П., д-р техн. наук, проф.; Тарасенко Ф.П., д-р техн. наук, проф.

**Адрес редакции:** 634050, г. Томск, проспект Ленина, д. 36

**E- mail:** [vestnik\\_uvti@mail.tsu.ru](mailto:vestnik_uvti@mail.tsu.ru)

**ООО «Издательство научно-технической литературы»**  
634050, Томск, пл. Ново-Соборная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*  
Верстка *Д.В. Фортес*

К-ОКП ОК-005-93, код продукции 952000

---

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 05.09.2008.  
Формат 70 × 100 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Усл. п. л. 10,32. Уч.-изд. л. 11,56. Тираж 300 экз. Заказ № 14.

---

Отпечатано в типографии «М-Принт», г. Томск, ул. Пролетарская, 38/1

# СОДЕРЖАНИЕ

## УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

<b>Поддубный В.В., Романович О.В.</b> Рынок как оптимально самоуправляемая инерционная система с запаздыванием .....	5
<b>Смагин В.И., Смагин С.В.</b> Адаптивное управление запасами с учетом ограничений и транспортных запаздываний .....	19
<b>Степанова Н.В., Терпугов А.Ф.</b> Управление ценой при продаже портящегося товара .....	27

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

<b>Гульбин К.Г.</b> Моделирование процесса получения лазерно-локационных данных .....	40
<b>Лившиц К.И., Бублик Я.С.</b> Диффузионная аппроксимация пуассоновской модели деятельности некоммерческого фонда при дважды стохастическом потоке платежей .....	48
<b>Решетникова Г.Н., Гладких Д.Н., Селенин Е.Г., Константинов П.В., Дерябин В.И.</b> Электронный учебник «Моделирование систем» .....	59

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

<b>Горбатенко А.Е., Назаров А.А.</b> Исследование MAP-потока в условиях растущей интенсивности .....	66
<b>Лопухова С.В.</b> Исследование MMP-потока асимптотическим методом $m$ -го порядка .....	71
<b>Ниссенбаум О.В.</b> Построение оценок параметров асинхронного дважды стохастического потока событий с инициированием лишнего события и продлевающимся мертвым временем .....	77

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

<b>Громов М.Л.</b> Метод построения полного проверяющего теста для входо-выходных полуавтоматов .....	85
<b>Матросова А.Ю., Андреева В.В., Николаева Е.А.</b> Синтез синхронных последовательностных устройств, устойчивых к кратковременным и перемежающимся неисправностям .....	99

## ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ И АВТОМАТЫ

<b>Михайлов Ю.В., Коломеец А.В.</b> Проверка переходов в расширенном автомате на основе срезов .....	110
<b>Парватов Н.Г.</b> О некоторых свойствах операции замыкания, связанных с проблемами выразимости .....	119
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ .....	125
АННОТАЦИИ СТАТЕЙ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ .....	127

# CONTENTS

## CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

<b>Poddubny V.V. and Romanovich O.V.</b> The Market as Optimum Self-Control System with Inertia and Delay .....	5
<b>Smagin V.I. and Smagin S.V.</b> Adaptive Inventory Control with Restrictions and Transport Delays .....	19
<b>Stepanova N.V. and Terpugov A.F.</b> The Control of Retail Price of Perishable Goods.....	27

## MATHEMATICAL MODELING

<b>Goulbin K.G.</b> Modeling the Process of Getting Laser Scanning Data.....	40
<b>Livshits K.I. and Bublik Y.S.</b> Diffusion Approximation of Puasson's Model of Uncommercial Fund's Activities by Double Stochastic Payment Current.....	48
<b>Reshetnikova G.N., Gladkikh D.N., Selenin E.N., Konstantinov P.V., and Deryabin V.I.</b> Electronic Educational Complex "Modeling of Systems".....	59

## INFORMATION HANDLING

<b>Gorbatenko A.E. and Nazarov A.A.</b> The Research of MAP in Conditions of Growing Intensity.....	66
<b>Lopuchova S.V.</b> Research of MMP- Process by the Asymptotical Analysis Method of the $m$ -th Order .....	71
<b>Nissenbaum O.V.</b> Construction of the Evaluations of Parameters of the Asynchronous Alternating Doubly Stochastic Event Flow with Extra Event Initiation at Prolonging Dead Time .....	77

## DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS

<b>Gromov M.L.</b> A Method of the Complete Test Derivation For Labeled Transition Systems .....	85
<b>Matrosova A.Yu., Andreeva V.V., and Nikolaeva E.A.</b> Fault Tolerance Synchronous Sequential Design for Transient and Intermittent Faults .....	99

## DISCRETE FUNCTIONS AND AUTOMATONS

<b>Mihaylov Yu.V. and Kolomeec A.V.</b> Check Transition Extended Automation on Base Cut.....	110
<b>Parvatov N.G.</b> Same properTies of Closure Operators in Complete Lattice .....	119

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS .....	125
-------------------------------------------	-----

PAPER ABSTRACTS.....	127
----------------------	-----

## УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.865

**В.В. Поддубный, О.В. Романович**

### РЫНОК КАК ОПТИМАЛЬНО САМОУПРАВЛЯЕМАЯ ИНЕРЦИОННАЯ СИСТЕМА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается математическая модель рынка одного товара при известной линии спроса с учетом запаздывания в поставках товара. Сформулированы общий и частные критерии оптимальности поведения рынка. Состояние рынка характеризуется ценой товара в последовательные дискретные моменты времени и объемами непроданного товара (остатками). Управление состоянием рынка производится изменением цены товара. Учитывается инерционность (консервативность) рынка по отношению к изменениям цены товара. Из критериев оптимальности выводятся стратегии (алгоритмы) самоуправления рынка при переходе его из некоторого возмущенного состояния в состояние равновесия. Приведены примеры численного исследования различных моделей рынка с использованием метода возможных направлений.

**Ключевые слова:** рынок, цена товара, инерционность, запаздывание, математическая модель, оптимальное самоуправление.

В классической модели рынка Вальраса – Маршалла [1] и ее модификациях [2] рыночное равновесие достигается в точке пересечения линий спроса и предложения. В этой модели рынок, будучи выведенным в некоторый начальный момент времени из состояния равновесия, стремится снова к состоянию равновесия, совершая вокруг него затухающие колебания, если точка равновесия устойчива, и незатухающие колебания, если она неустойчива (известная «паутинообразная» модель рынка).

В реальных условиях функционирования рынка можно предположить, что вид линии спроса более или менее известен (его можно идентифицировать по результатам наблюдений покупательского спроса при различных ценах на один и тот же товар). Но вид линии предложения, как правило, неизвестен, и его практически невозможно оценить по наблюдениям за состоянием рынка. В связи с этим в данной работе рассматривается математическая модель рынка, не требующая знания линии предложения, но использующая знание линии потребительского спроса.

#### 1. Постановка задачи

Пусть  $x$  – цена товара,  $Q^D$  – объем спроса товара при данной цене. В простейшем случае линия спроса, определяющая зависимость объема спроса товара от его цены, представляется прямой линией [1], понижающейся с ростом цены:

$$Q^D(x) = Q_m - ax, \quad (1)$$

где  $a$  – модуль тангенса угла наклона линии в координатах цена-спрос  $(x, Q)$ ,  $Q_m$  – спрос при нулевой цене. Реально спрос  $Q^D(x)$  нелинеен, и при приближении цены к нулю очень быстро возрастает, а при значительном увеличении цены медленно приближается к нулю, оставаясь положительным, так что линейная модель спроса (1) является простейшим приближением линии спроса, достаточно адекватным реальности лишь в окрестности точки рыночного равновесия.

Пусть состояние рынка характеризуется в каждый данный момент (интервал) текущего времени  $t$  ценой товара  $x(t)$ . Не будет большим преувеличением предположение о том, что рынок стремится обеспечить покупательский спрос и при этом добиться максимальной прибыли путем соответствующего регулирования цены товара. Очевидно, слишком высокие цены приведут к падению покупательского спроса на этот товар и снизят объем продаж с соответствующим уменьшением прибыли. Наоборот, слишком низкие цены сделают рынок нерентабельным для продавцов. Следовательно, критерий оптимальности поведения рынка должен быть связан с требованием обеспечения покупательского спроса при цене, обеспечивающей максимальную прибыль продавцов, т.е. максимальную рентабельность рынка.

Примем в качестве стратегии поставки товара на рынок поставку товара при закупке его в объеме покупательского спроса. В момент времени  $t$  покупательский спрос определяется линией спроса

$$Q^D(t) = Q_m - ax(t). \quad (2)$$

Обычно между моментом заказа товара для поставки его на рынок и моментом исполнения заказа (фактической поставкой) проходит некоторое время  $\tau$  (запаздывание, лаг поставки), так что к моменту времени  $t$  на рынок поступит товар, заказанный за  $\tau$  единиц времени до этого в объеме

$$Q^S(t) = Q_m - ax(t - \tau) \quad (3)$$

по цене закупки  $P_1$ . Таким образом, к моменту времени  $t$  объем поставки товара равен  $Q^S(t)$ , тогда как объем спроса товара в этот момент составляет величину  $Q^D(t)$  по цене  $x(t)$ .

Заметим, что стратегия закупки товара в объеме текущего спроса (3) не учитывает того факта, что в момент времени  $t - \tau$  на рынке уже может находиться непроданный на предыдущем интервале товар в объеме  $Q(t - \tau)$ , так что логичнее было бы заказывать поставку товара в объеме

$$Q^S(t) - Q(t - \tau) = Q_m - ax(t - \tau) - Q(t - \tau)$$

вместо объема спроса (3), если  $Q^S(t) > Q(t - \tau)$ , т.е. если текущий спрос превышает остатки, или вообще не заказывать товар, если его остатки превышают текущий спрос. Однако в такой постановке модель рынка резко усложняется, хотя, естественно, является более адекватной реальности. Из-за сложности такой модели оставим пока стратегию закупки товара для поставки его на рынок в виде текущего спроса (3).

Если  $x(t - \tau) < x(t)$ , то  $Q^S(t) > Q^D(t)$ , и спрос будет полностью удовлетворен. При этом останется непроданным  $Q(t) = Q^S(t) - Q^D(t) > 0$  единиц товара. Если же  $x(t - \tau) \geq x(t)$ , то  $Q^S(t) \leq Q^D(t)$ , и спрос может оказаться неудовлетворенным в полном объеме. Весь товар  $Q^S(t)$  будет продан, непроданного товара (остатка) не будет ( $Q(t) = 0$ ), и образуется дефицит спроса  $Q^S(t) - Q^D(t) < 0$ , что приведет к недополученной прибыли.

Таким образом, если к моменту  $t$  (к началу  $t$ -го интервала дискретного времени) имелся остаток (непроданный товар) в объёме  $Q(t)$ , а дополнительное предложение (поставка) товара на этом интервале составило величину  $Q^S(t)$ , то продано на этом интервале может быть либо  $Q^D(t)$ , если  $Q(t) + Q^S(t) \geq Q^D(t)$ , либо  $Q(t) + Q^S(t)$ , если  $Q(t) + Q^S(t) < Q^D(t)$ . Тогда остаток товара на рынке к началу следующего ( $t+1$ -го) интервала выразится величиной

$$Q(t+1) = [Q(t) + Q^S(t) - Q^D(t)] \cdot 1(Q(t) + Q^S(t) \geq Q^D(t)), \quad (4)$$

где  $1(\cdot)$  – индикатор события, указанного в скобках, равный 1, если событие имеет место, и 0, если нет.

Соотношение (4) может рассматриваться как уравнение состояния рынка по переменной  $Q$ . В развернутой форме это уравнение имеет вид

$$Q(t+1) = [Q(t) - a(x(t-\tau) - x(t))] \cdot 1(Q(t) - a(x(t-\tau) - x(t))), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Очевидно, на закупку товара в объёме  $Q^S(t)$  по цене  $P_1$  продавец платит сумму  $Q^S(t)P_1$ . А продажа товара происходит в момент  $t$  по цене  $x(t)$  в объёме

$$\begin{aligned} Q_{\text{прод}}(t) &= \min(Q(t) + Q^S(t), Q^D(t)) = \min(Q(t) + Q_m - ax(t-\tau), Q_m - ax(t)) = \\ &= [Q_m - (ax(t-\tau) - Q(t)) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t) + Q(t)/a) - \\ &\quad - ax(t) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t) + Q(t)/a)] x(t) - (Q_m - ax(t-\tau))P_1 - Q(t)P_2. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом выручка продавца составит на интервале  $t$  величину  $Q_{\text{прод}}(t)x(t)$ , а прибыль – разницу

$$Q^S(t)P_1 - Q_{\text{прод}}(t)x(t).$$

При этом, если  $Q(t) \neq 0$  (оставался некоторый объём непроданного товара на текущем интервале дискретного времени), то хранение его стоило  $Q(t)P_2$ , где  $P_2$  – цена хранения единицы товара, и прибыль уменьшается на эту величину. Таким образом, текущая прибыль продавца на  $t$ -м интервале времени составляет величину

$$\begin{aligned} J(t) &= \min(Q(t) + Q_m - ax(t-\tau), Q_m - ax(t))x(t) - \\ &\quad - (Q_m - ax(t-\tau))P_1 - Q(t)P_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Если с течением времени цена стабилизируется, принимая равновесное значение  $x$ , так что  $x(t) \rightarrow x$ ,  $x(t-\tau) \rightarrow x$ ,  $\min(Q(t) + Q_m - ax(t-\tau), Q_m - ax(t)) \rightarrow Q_m - ax$ , то текущая прибыль принимает вид

$$J(x) = (Q_m - ax)(x - P_1) - Q(t)P_2, \quad (8)$$

откуда видно, что наибольшего и стационарного значения она достигает в отсутствие остатков непроданных товаров, т.е. при  $Q(t) = 0$ :

$$J(x) = (Q_m - ax)(x - P_1). \quad (9)$$

Это квадратичная выпуклая вверх функция  $x$ . Следовательно, максимальное значение текущая прибыль достигает при

$$x = \frac{Q_m + aP_1}{2a} = P^*, \quad (10)$$

$$\max_x J(x) = J(P^*) = \frac{(Q_m - aP_1)^2}{4a}.$$

Заметим, что линия спроса  $Q_m - ax$  принимает значение, равное нулю, при  $x_{max} = Q_m/a$  (это максимальная цена, при которой спрос обращается в нуль, т.е. предельная цена, по которой покупатель уже не согласен покупать товар). Цена закупки товара  $P_1 < P^* < x_{max}$  всегда.

Таким образом, в рассматриваемой модели рынка существует равновесная цена  $P^*$ , обеспечивающая максимальную прибыль продавца, которая достигается при отсутствии остатков непроданного товара.

Пусть до некоторого начального момента  $t = 0$  рынок находился в состоянии равновесия, так что

$$x(t)|_{t < 0} = P^*. \quad (11)$$

Пусть в момент  $t = 0$  рынок каким-либо образом выводится из состояния равновесия, т.е. цена товара в этот момент принимает значение

$$x(0) = P_0 \neq P^*. \quad (12)$$

Очевидно, для обеспечения максимальной прибыли продавца рынок в следующий же момент дискретного времени должен вернуться в состояние равновесия  $P^*$ , т.е. скачком изменить цену от значения  $x(0) = P_0$  до значения  $x(1) = P^*$ . Однако реальный рынок, как правило, не допускает резкого изменения цен, обладая определенной инерционностью, консерватизмом. Эту инерционность можно ввести в математическую модель рынка в виде аддитивной штрафной функции вида

$$-\frac{R}{2}(x(t+1) - x(t))^2, \quad R > 0,$$

к целевой функции рынка  $J(t)$ . Величину  $u(t) = x(t+1) - x(t)$  можно рассматривать как «управление», которое вырабатывает инерционный рынок, стремясь перевести себя из возмущенного состояния  $x(0) = P_0$  в равновесное  $P^*$  с максимизацией на траектории этого перехода суммарной прибыли:

$$\begin{aligned} J = \sum_{t=0}^T \{ & [Q_m - (ax(t-\tau) - Q(t)) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t) + Q(t)/a) - \\ & - ax(t) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t) + Q(t)/a)] x(t) - \\ & - (Q_m - ax(t-\tau))P_1 - Q(t)P_2 \} - \sum_{t=0}^{T-1} \frac{R}{2} u^2(t) \Rightarrow \max_{u,x} \end{aligned} \quad (13)$$

при ограничениях типа равенств (уравнения состояния)

$$x(t+1) = x(t) + u(t), \quad x(0) = P_0 > 0, \quad x(t)|_{t < 0} = P^*, \quad t = \overline{0, T-1}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} Q(t+1) = [Q(t) - ax(t-\tau) + ax(t)] \cdot 1(x(t-\tau) < x(t) + Q(t)/a), \\ Q(0) = Q_0, \quad t = \overline{0, T-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

и неравенств (ограничения на состояния)

$$x(t+1) \geq 0, \quad t = \overline{0, T-1}, \quad (16)$$

или, что то же, неравенств (ограничений на управления)

$$x(t) + u(t) \geq 0, \quad t = \overline{0, T-1}. \quad (17)$$

Здесь  $T$  – время наблюдения за состоянием рынка (время функционирования рынка).

Таким образом, рассматриваемая модель рынка – это оптимально самоуправляемая система, описываемая уравнениями состояния (14), (15), максимизирующая выпуклый вверх функционал качества (13) с помощью управлений  $u(t)$ , допустимых системой неравенств (16) или (17).

### 3. Необходимые условия оптимальности

Выпишем необходимые условия оптимальности управления  $u(t)$  и состояния  $x(t)$ ,  $Q(t)$ , используя функцию Лагранжа, присоединяющую к функционалу качества (13) ограничения типа равенств (уравнения состояния) (14), (15) с помощью неопределенных множителей Лагранжа (сопряженных по Гамильтону переменных)  $p(t+1)$ ,  $q(t+1)$ :

$$L(x, Q, u, p, q) = J(x, Q, u) + \sum_{t=0}^{T-1} p(t+1)(x(t) + u(t) - x(t+1)) + \sum_{t=0}^{T-1} q(t+1)[(Q(t) - ax(t-\tau) - ax(t)) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t) + Q(t)/a) - Q(t+1)]. \quad (18)$$

Решив двойственную задачу

$$L(u, p, q) = \max_{x, Q} L(x, Q, u, p, q) \quad (19)$$

при фиксированных значениях управлений  $u(t)$  и сопряженных переменных  $p(t+1)$ ,  $q(t+1)$ , получим систему рекуррентных уравнений для сопряженных переменных, решаемую в обратном времени:

$$p(t) = p(t+1) + \frac{\partial J}{\partial x(t)}, \quad t = \overline{T-1, 1}, \quad p(T) = \frac{\partial J}{\partial x(T)}; \quad (20)$$

$$q(t) = q(t+1) + \frac{\partial J}{\partial Q(t)}, \quad t = \overline{T-1, 1}, \quad q(T) = \frac{\partial J}{\partial Q(T)}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial J}{\partial x(t)} \right|_{1 \leq t \leq T-1} &= Q_m - (aP^* - Q(t)) \cdot 1(P^* \geq x(t) + Q(t)/a) - \\ &\quad - 2ax(t) \cdot 1(P^* < x(t) + Q(t)/a), \\ \left. \frac{\partial J}{\partial x(t)} \right|_{t=\tau} &= Q_m - (aP_0 - Q(\tau)) \cdot 1(P_0 \geq x(\tau) + Q(\tau)/a) - \\ &\quad - 2ax(\tau) \cdot 1(P_0 < x(\tau) + Q(\tau)/a), \\ \left. \frac{\partial J}{\partial x(t)} \right|_{\tau+1 \leq t \leq T-\tau} &= Q_m - (ax(t-\tau) - Q(t)) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t) + Q(t)/a) - \\ &\quad - 2ax(t) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t) + Q(t)/a) - \\ &\quad - ax(t+\tau) \cdot 1(x(t) \geq x(t+\tau) + Q(t+\tau)/a) + aP_1, \\ \left. \frac{\partial J}{\partial x(t)} \right|_{T-\tau \leq t \leq T} &= Q_m - (ax(t-\tau) - Q(t)) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t) + Q(t)/a) - \\ &\quad - 2ax(t) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t) + Q(t)/a); \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial J}{\partial Q(t)} \right|_{1 \leq t \leq \tau-1} &= x(t) \cdot 1(P^* \geq x(t) + Q(t)/a) - P_2, \\ \left. \frac{\partial J}{\partial Q(t)} \right|_{t=\tau} &= x(\tau) \cdot 1(P_0 \geq x(\tau) + Q(\tau)/a) - P_2, \\ \left. \frac{\partial J}{\partial Q(t)} \right|_{\tau+1 \leq t \leq T} &= x(t) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t) + Q(t)/a) - P_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Выпишем функцию Гамильтона как функцию управления  $u(t)$ :

$$H(u(t)) = -\frac{R}{2}u^2(t) + p(t+1) \cdot u(t). \quad (24)$$

Оптимальное управление находится из условия максимума этой функции по  $u(t)$  при ограничениях (17). Функция Гамильтона (24) – выпуклая вверх квадратичная функция скалярной переменной  $u(t)$ . Безусловный максимум этой функции находится в точке

$$u^*(t) = p(t+1)/R. \quad (25)$$

Но оптимальное управление  $u(t)$  должно удовлетворять ограничению (17), откуда получаем

$$u(t) = u^*(t) \cdot 1(u^*(t) + x(t) \geq 0), \quad (26)$$

т.е. окончательно

$$u(t) = (p(t+1)/R) \cdot 1(x(t) + p(t+1)/R \geq 0). \quad (27)$$

Подставив это выражение в уравнение состояния (14), получаем уравнение состояния в замкнутой форме (т.е. уравнение состояния оптимального самоуправляемого рынка):

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + (p(t+1)/R) \cdot 1(x(t) + p(t+1)/R \geq 0), \\ x(0) &= P_0, \quad x(t)|_{t < 0} = P^*. \end{aligned} \quad (28)$$

Это уравнение совместно с уравнением состояния (15) и уравнениями (20), (21) для сопряженных переменных  $p(t)$ ,  $q(t)$  образуют нелинейную двухточечную краевую задачу (ДТКЗ), решение которой определяет оптимальную траекторию перехода рассматриваемой модели инерционного рынка с запаздыванием из возмущенного состояния  $x(0)=P_0$  к равновесному состоянию  $P^*$ .

К сожалению, эффективных общих методов решения нелинейных двухточечных краевых задач не существует.

#### 4. Метод возможных направлений

Воспользуемся для решения оптимизационной задачи (13) при ограничениях типа равенств (14), (15) и неравенств (16) или (17) одним из методов последовательных приближений по управлениям – методом возможных направлений [3], конкретизировав его применительно к рассматриваемой задаче оптимизации инерционного рынка с запаздыванием. Опишем работу алгоритма по шагам.

**Шаг 1.** Выбираем в качестве допустимого начального приближения для управления  $\bar{u}(t) \equiv 0$ ,  $t = 0, T-1$ .

**Шаг 2.** Используя рекуррентное соотношение (14), вычислим траекторию цен  $\bar{x}(t)$ ,  $t = \overline{1, T}$ , соответствующую заданному управлению  $\bar{u}(t)$ , полагая  $\bar{x}(0) = P_0$ . Используя рекуррентное соотношение (15), вычислим соответствующую траекторию остатков товара  $\bar{Q}(t)$ ,  $t = \overline{1, T}$ , полагая  $\bar{Q}(0) = Q_0$ .

**Шаг 3.** Используя формулы (22) и (23), вычислим все производные  $\partial J / \partial x(t)$  и  $\partial J / \partial Q(t)$ ,  $t = \overline{1, T}$ , соответствующие значениям  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{Q}(t)$ , после чего, используя рекуррентные соотношения (20), (21), вычислим в обратном времени все сопряженные переменные  $\bar{p}(t)$ ,  $\bar{q}(t)$ ,  $t = \overline{1, T}$ .

**Шаг 4.** Вычислим градиент функции Гамильтона при заданных  $\bar{u}(t)$  и полученных  $\bar{p}(t)$ :

$$\bar{\gamma}(t) = \left. \frac{\partial H(u(t))}{\partial u(t)} \right|_{u=\bar{u}, p=\bar{p}} = -R\bar{u}(t) + \bar{p}(t+1), \quad t = \overline{0, T-1}. \quad (29)$$

Найдем направления  $s(t)$  изменения  $\bar{u}(t)$ , обеспечивающие наибольшее улучшение показателя качества (увеличение функции Гамильтона), решив задачу максимизации скалярного произведения

$$\sum_{t=0}^{T-1} \frac{\partial H(\bar{u}(t))}{\partial u(t)} s(t) = \sum_{t=0}^{T-1} \bar{\gamma}(t) s(t) \Rightarrow \max_s \quad (30)$$

при ограничениях  $|s(t)| \leq 1$ ,  $t = \overline{0, T-1}$ . Очевидно, её решение имеет вид

$$\bar{s}(t) = \text{sign} \bar{\gamma}(t) = \text{sign}(\bar{p}(t+1) - R\bar{u}(t)), \quad t = \overline{0, T-1}. \quad (31)$$

**Шаг 5.** Строим новое управление

$$u(t) = \bar{u}(t) + \varepsilon \bar{s}(t), \quad t = \overline{0, T-1}, \quad (32)$$

где  $\varepsilon > 0$  – шаг изменения управления в направлении  $\bar{s}(t)$ . Тогда получится новая траектория

$$x(t+1) = x(t) + \bar{u}(t) + \varepsilon \bar{s}(t), \quad t = \overline{0, T-1}, \quad x(0) = P_0. \quad (33)$$

Решив это уравнение для любого  $t$ , получим

$$x(t+1) = \bar{x}(t+1) + \varepsilon c(t+1), \quad t = \overline{0, T-1}, \quad (34)$$

где обозначено

$$c(t+1) = \sum_{k=0}^t \bar{s}(k), \quad t = \overline{0, T-1}. \quad (35)$$

С одной стороны, шаг  $\varepsilon > 0$  должен быть выбран так, чтобы не нарушались неравенства (16):

$$\bar{x}(t+1) + \varepsilon c(t+1) \geq 0, \quad t = \overline{0, T-1}. \quad (36)$$

Очевидно, если  $c(t+1) \geq 0$ , то  $\varepsilon > 0$  может быть любым, даже как угодно большим. Если же  $c(t+1) < 0$ , то, очевидно,

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\bar{x}(t+1)}{|c(t+1)|}.$$

Положим

$$\varepsilon_u = \min \{ \varepsilon_u(t) \}, \quad (37)$$

где

$$\varepsilon_u(t) = \begin{cases} +\infty, & c(t+1) \geq 0, \\ \bar{x}(t+1)/|c(t+1)|, & c(t+1) < 0, \end{cases} \quad t = \overline{0, T-1}. \quad (38)$$

С другой стороны, шаг  $\varepsilon > 0$  желательно выбрать таким, чтобы целевой функционал при новом управлении увеличился как можно больше, т.е. чтобы  $J(\varepsilon)$ , определяемый формулой (13) при  $u(t) = \bar{u}(t) + \varepsilon \bar{s}(t)$ ,  $x(t+1) = \bar{x}(t+1) + \varepsilon c(t+1)$ ,  $t = \overline{0, T-1}$ , с учетом (15) и условия  $c(t)|_{t \leq 0} = 0$ , достигал максимального по  $\varepsilon > 0$  значения. Ограничиваясь параболическим приближением функции  $J(\varepsilon)$ :

$$J(\varepsilon) \approx J(0) + \frac{dJ(0)}{d\varepsilon} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2 J(0)}{d\varepsilon^2} \varepsilon^2$$

и обозначая

$$\left. \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = A, \quad \left. \frac{d^2 J(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = B, \quad (39)$$

получим линейное уравнение

$$\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \approx A + B\varepsilon = 0, \quad (40)$$

откуда

$$\varepsilon_x = \arg \max_{\varepsilon} J(\varepsilon) \approx \left| \frac{A}{B} \right|. \quad (41)$$

Окончательно

$$\bar{\varepsilon} = \min(\varepsilon_u, \varepsilon_x). \quad (42)$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  рассчитываются по формулам

$$A = \sum_{t=0}^T \{ Q_m c(t) + a P_1 c(t-\tau) - \\ - [ a \bar{x}(t-\tau) c(t) + a c(t-\tau) \bar{x}(t) - Q(t) c(t) ] \cdot 1(\bar{x}(t-\tau) \geq \bar{x}(t) + Q(t)/a) - \\ - 2ac(t) \bar{x}(t) \cdot 1(\bar{x}(t-\tau) < \bar{x}(t) + Q(t)/a) \} - R(\bar{x}(T) - P_0), \quad (43)$$

$$B = \sum_{t=0}^T \{ -2ac(t-\tau) c(t) \cdot 1(\bar{x}(t-\tau) \geq \bar{x}(t) + Q(t)/a) - \\ - 2ac^2(t) \cdot 1(\bar{x}(t-\tau) < \bar{x}(t) + Q(t)/a) \} - R c(T), \quad (44)$$

причем при вычислениях следует учитывать, что  $c(t)|_{t \leq 0} = 0$ ,  $\bar{x}(t)|_{t < 0} = P^*$ ,  $\bar{x}(0) = P_0$ .

**Шаг 6.** Найдя таким образом оптимальную величину шага  $\varepsilon > 0$ , обеспечивающего максимальное увеличение функционала качества и не выводящего траекторию рыночной цены в область отрицательных значений, т.е. за допустимые пре-

дела, получим новое приближение управления  $u(t) = \bar{u}(t) + \varepsilon s(t)$ ,  $t = \overline{0, T-1}$ , к оптимальному и оценим его качество. Если

$$\max_t |u(t) - \bar{u}(t)| \leq \delta, \quad (45)$$

где  $\delta > 0$  – допустимая погрешность отыскания управления, то процесс построения решения заканчивается. Иначе переходим на **шаг 2** и продолжаем процесс последовательных приближений, пока не достигнем желаемой точности решения (45).

### 5. Более простые модели инерционного рынка с запаздыванием

Рассмотренная выше модель инерционного рынка с запаздыванием довольно сложна. Более простые модели, хотя, возможно, менее адекватные реальности, получаются, если в них  $Q(t) \equiv 0$ .

Для каждой из этих моделей в системе уравнений состояния (14), (15) остаётся только первое уравнение (14), описывающее динамику цены с теми же начальными условиями. Ограничения (16) или (17) остаются прежними. В системе сопряженных уравнений остаётся только уравнение (20) с соответствующей заменой целевого функционала на  $J_j$ , где  $j$  – номер рассматриваемого варианта задачи. Функция Гамильтона (24) и все соотношения (25) – (28) сохраняют прежний вид. Шаги алгоритма метода возможных направлений остаются прежними, только на **шаге 5** целевая функция  $J(\varepsilon)$  заменяется функцией  $J_j(\varepsilon)$ , соответствующей рассматриваемому варианту модели.

Рассмотрим 3 варианта частных моделей.

**Вариант 1.** Рынок с уничтожением остатков непроданного товара. Эта модель характерна для рынка скоропортящихся продуктов.

В этой модели функционал качества принимает вид

$$J_1 = J|_{Q(t) \equiv 0} = \sum_{t=0}^T \{ [Q_m - ax(t-\tau) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t)) - ax(t) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t))] x(t) - (Q_m - ax(t-\tau)) P_1 \} - \sum_{t=0}^{T-1} \frac{R}{2} u^2(t). \quad (46)$$

Сопряженная система

$$p(t) = p(t+1) + \frac{\partial J_1}{\partial x(t)}, \quad t = \overline{T-1, 1}, \quad p(T) = \frac{\partial J_1}{\partial x(T)}, \quad (47)$$

где 
$$\frac{\partial J_1}{\partial x(t)} = \frac{\partial J}{\partial x(t)} \Big|_{Q(t) \equiv 0}, \quad t = \overline{1, T}. \quad (48)$$

**Вариант 2.** Рынок с реализацией в каждый момент дискретного времени всего поставляемого товара, даже если поставка превышает спрос.

В этой модели функционал качества вместо (13) принимает вид

$$J_2 = \sum_{t=0}^T (Q_m - ax(t-\tau))(x(t) - P_1) - \sum_{t=0}^{T-1} \frac{R}{2} u^2(t). \quad (49)$$

Сопряженная система

$$p(t) = p(t+1) + \frac{\partial J_2}{\partial x(t)}, \quad t = \overline{T-1, 1}, \quad p(T) = \frac{\partial J_2}{\partial x(T)}, \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
\text{где} \quad \frac{\partial J_2}{\partial x(t)} \Big|_{1 \leq t \leq \tau-1} &= (Q_m - aP^*) - a(x(t) - P_1), \\
\frac{\partial J_2}{\partial x(t)} \Big|_{t=\tau} &= (Q_m - aP_0) - a(x(\tau) - P_1), \\
\frac{\partial J_2}{\partial x(t)} \Big|_{\tau+1 \leq t \leq T} &= (Q_m - ax(t-\tau)) - a(x(t) - P_1). \tag{51}
\end{aligned}$$

**Вариант 3.** Рынок с дополнительной поставкой товара на текущем интервале дискретного времени.

В этом варианте предполагается, что если цена товара  $x(t-\tau)$  в момент его заказа превышает цену товара  $x(t)$  в момент его продажи, так что поставка товара не удовлетворяет спрос в момент  $t$ , то возможна дополнительная поставка товара в момент  $t$ , что позволит удовлетворить спрос в этот момент. Однако в этой модели также предполагается, что если поставка заказанного ранее товара превышает спрос, товар все равно будет продан на интервале текущего времени. Таким образом, в этом варианте модели, как и в предыдущем варианте, предполагается, что продается весь товар без остатка, даже если поставка превышает спрос.

При такой постановке задачи функционал качества вместо (13) принимает вид

$$\begin{aligned}
J_3 &= \sum_{t=0}^T (Q_m - ax(t-\tau))(x(t) - P_1) + \\
&+ a(x(t-\tau) - x(t))(x(t) - P_1) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t)) - \sum_{t=0}^{T-1} \frac{R}{2} u^2(t). \tag{52}
\end{aligned}$$

Этот функционал можно привести к эквивалентному, иногда более удобному виду

$$\begin{aligned}
J_3 &= \sum_{t=0}^T [Q_m - ax(t-\tau) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t)) - \\
&- ax(t) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t))] (x(t) - P_1) - \sum_{t=0}^{T-1} \frac{R}{2} u^2(t). \tag{53}
\end{aligned}$$

Сопряженная система

$$p(t) = p(t+1) + \frac{\partial J_3}{\partial x(t)}, \quad t = \overline{T-1, 1}, \quad p(T) = \frac{\partial J_3}{\partial x(T)}, \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
\text{где} \quad \frac{\partial J_3}{\partial x(t)} \Big|_{1 \leq t \leq \tau-1} &= Q_m - aP^* \cdot 1(P^* < x(t)) - a(2x(t) - P_1) \cdot 1(P^* \geq x(t)), \\
\frac{\partial J_3}{\partial x(t)} \Big|_{t=\tau} &= Q_m - aP_0 \cdot 1(P_0 < x(\tau)) - a(2x(\tau) - P_1) \cdot 1(P_0 \geq x(\tau)), \\
\frac{\partial J_3}{\partial x(t)} \Big|_{\tau+1 \leq t \leq T-\tau} &= Q_m - ax(t-\tau) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t)) - \\
&- 2ax(t) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t)) - ax(t+\tau) \cdot 1(x(t) < x(t+\tau)) + aP_1,
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial J_3}{\partial x(t)} \right|_{\tau+1 \leq t \leq T} = Q_m - ax(t-\tau) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t)) - a(2x(t) - P_1) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t)). \quad (55)$$

**6. Примеры численного моделирования вариантов рынка**

При численном моделировании различных вариантов рынка использовались следующие значения параметров:  $T = 500$ ;  $R = 100$ ;  $Q_m = 4$ ;  $a = 0,4$ ;  $P_0 = 3$ ;  $P_1 = 1$ ;  $Q_0 = 1$ ;  $\tau = 0 - 40$ . Значение равновесной цены вычислялось по формуле (10):  $P^* = 5,5$ .

На рис. 1 и 2 изображены оптимальное управление  $u(t)$  и оптимальная траектория цены  $x(t)$  для основной модели рынка в отсутствие запаздывания ( $\tau = 0$ ). Виден экспоненциальный ход траектории цены к равновесному значению. Остаток непроданного товара в этом случае остается неизменным:  $Q(t) = Q_0$ .

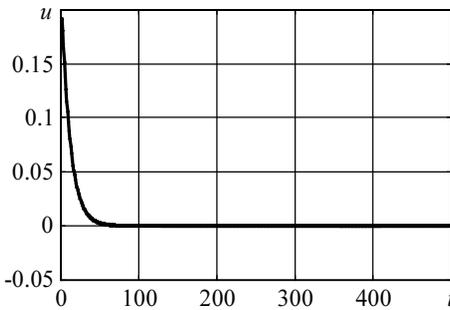


Рис. 1. Оптимальное управление  $u(t)$  при  $\tau = 0$

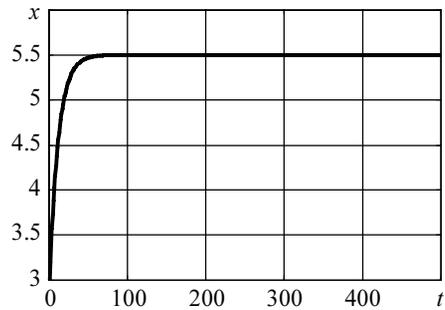


Рис. 2. Оптимальная цена  $x(t)$  при  $\tau = 0$

На рис. 3 – 6 приведены оптимальное управление  $u(t)$ , оптимальная траектория цены  $x(t)$ , поведение остатка непроданного товара  $Q(t)$  и фазовая траектория рынка – зависимость остатка товара от цены  $Q(x)$  – для основной модели рынка при запаздывании  $\tau = 10$ . Видно, что цена товара возрастает до равновесного значения и долго сохраняется на этом уровне. Но примерно за  $2\tau$  единиц времени до конца интервала функционирования рынка цена начинает снижаться, причем скорость снижения цены достигает максимального значения за  $\tau$  единиц времени до конца интервала, а максимальное снижение цены достигается в конце интервала. Это можно объяснить необходимостью хотя бы частичной распродажи остатков непроданного товара.

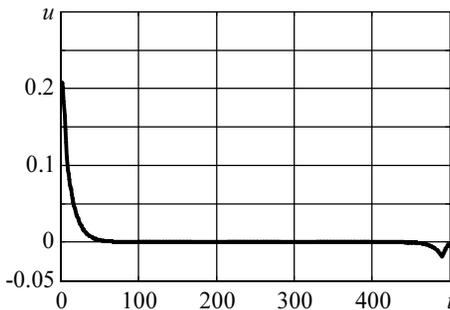


Рис. 3. Оптимальное управление  $u(t)$  при  $\tau = 10$

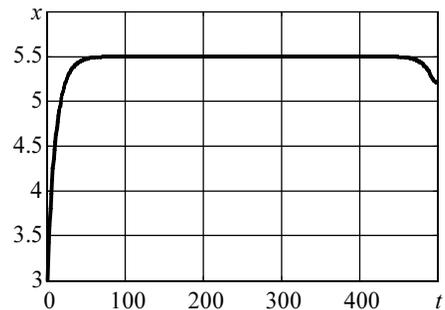
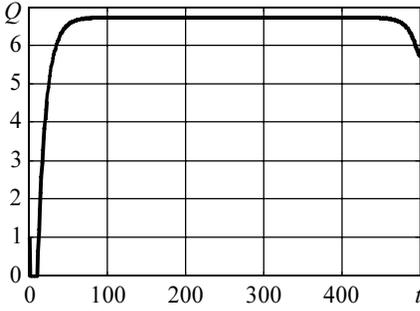
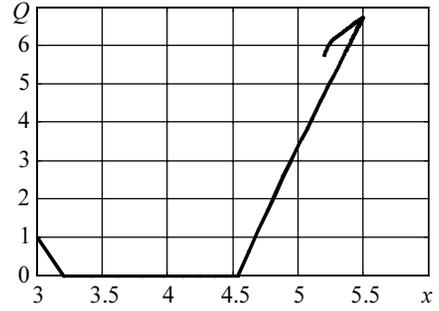
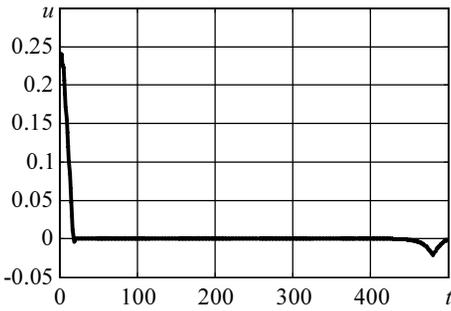
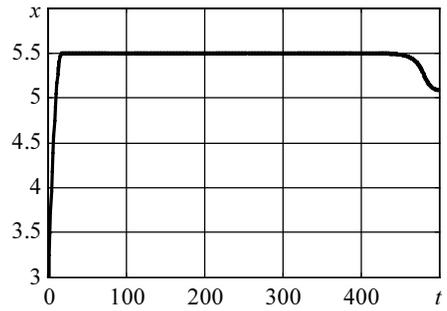
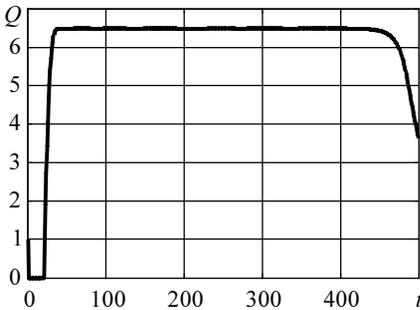
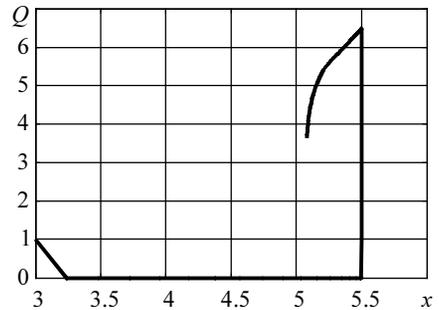


Рис. 4. Оптимальная цена  $x(t)$  при  $\tau = 10$

Рис. 5. Остаток товара  $Q(t)$  при  $\tau = 10$ Рис. 6. Фазовая траектория  $Q(x)$  при  $\tau = 10$ 

На рис. 7 – 10 приведены оптимальное управление  $u(t)$ , оптимальная траектория цены  $x(t)$ , поведение остатка непроданного товара  $Q(t)$  и фазовая траектория рынка  $Q(x)$  для основной модели рынка при запаздывании  $\tau = 20$ . Видно, что с увеличением запаздывания скорость снижения цены возрастает, а само снижение цены и уменьшение остатка товара к концу интервала увеличиваются.

Рис. 7. Оптимальное управление  $u(t)$  при  $\tau = 20$ Рис. 8. Оптимальная цена  $x(t)$  при  $\tau = 20$ Рис. 9. Остаток товара  $Q(t)$  при  $\tau = 20$ Рис. 10. Фазовая траектория  $Q(x)$  при  $\tau = 20$ 

Исследования показали, что при больших запаздываниях ( $\tau > 40$ ) остаток товара к концу интервала уменьшается почти до нуля. Скорость этого снижения зависит от инерционности рынка, определяемой параметром  $R$  (чем больше  $R$ , тем выше инерционность), а время снижения определяется запаздыванием. Инерционность

рынка не позволяет быстро снижать цену при распродаже остатков и доводить ее до «бросовой» цены за конечное время  $2\tau$ .

На рис. 11 – 16 приведены оптимальное управление  $u(t)$  и оптимальная траектория цены  $x(t)$  для вариантов 1 – 3 частных моделей рынка при запаздывании  $\tau = 30$ .

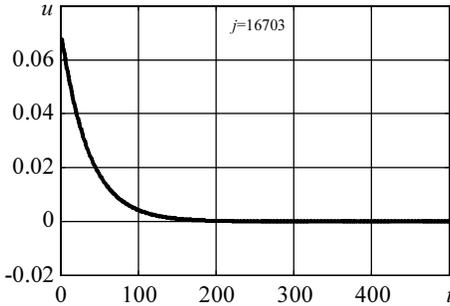


Рис. 11. Оптимальное управление  $u(t)$  при  $\tau = 0 - 30$  (вариант 1 модели)

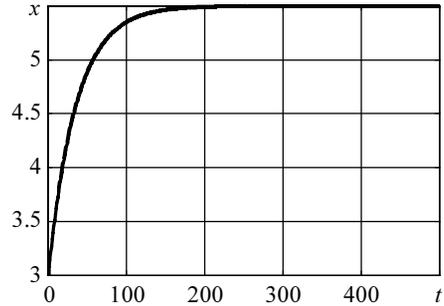


Рис. 12. Оптимальная цена  $x(t)$  при  $\tau = 0 - 30$  (вариант 1 модели)

Из рис. 11, 12 видно, что в варианте 1 модели рынка переход к равносному состоянию носит экспоненциальный характер и не зависит от запаздывания.

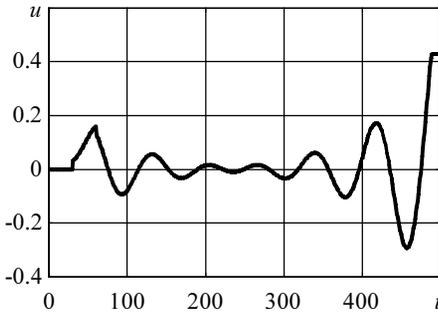


Рис. 13. Оптимальное управление  $u(t)$  при  $\tau = 0 - 30$  (вариант 2 модели)

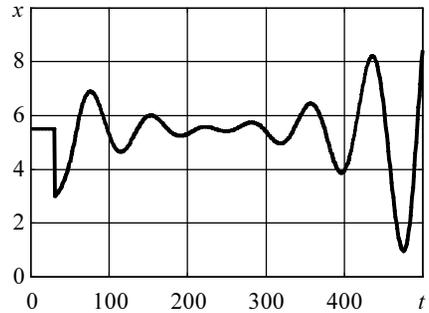


Рис. 14. Оптимальная цена  $x(t)$  при  $\tau = 0 - 30$  (вариант 2 модели)

Из рис. 13, 14 видно, что в варианте 2 модели рынка цена колеблется вокруг состояния равновесия. Как показали исследования, амплитуда этих колебаний возрастает с увеличением запаздывания  $\tau$  и уменьшается с его уменьшением, причем колебания становятся пренебрежимо малыми при малых запаздываниях  $\tau$  и исчезают при  $\tau = 0$ . В последнем случае в начале интервала функционирования рынка имеем экспоненциальный рост цены до равновесного значения, а затем трудно объяснимый новый рост цены в конце интервала. По-видимому, рост цены или увеличение амплитуды колебаний цены на правом конце интервала функционирования рынка («концевой» эффект) в моделях вариантов 2 и, как увидим ниже, 3 объясняется нереалистичным предположением этих моделей о возможности продажи всего поступающего на рынок товара безотносительно к спросу на него. Отсутствие этого предположения в основной модели рынка, как видим, не приводит к появлению «концевого» эффекта.

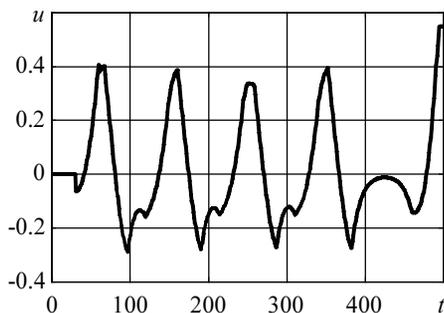


Рис. 15. Оптимальное управление  $u(t)$  при  $\tau = 0 - 30$  (вариант 3 модели)

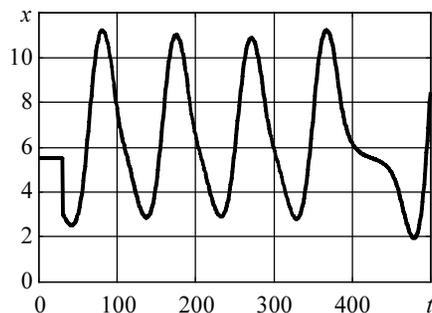


Рис. 16. Оптимальная цена  $x(t)$  при  $\tau = 0 - 30$  (вариант 3 модели)

Из рис. 15, 16 видно, что в варианте 3 модели рынка характер поведения цены тоже колебательный, но колебания имеют более сложный вид. При  $\tau = 0$  они исчезают, и мы имеем экспоненциальный переход цены к равновесному значению. При малых  $\tau$  возникают затухающие колебания, с увеличением  $\tau$  уменьшение амплитуды колебаний замедляется, и, наконец, при некотором достаточно большом  $\tau$  точка равновесия рынка теряет устойчивость (на рис. 16 – при  $\tau = 30$ ).

Подчеркнем, что в отсутствие запаздывания ( $\tau=0$ ) во всех вариантах частных моделей имеем экспоненциальный переход цены к равновесному значению, как и в случае основной модели.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперин В.М., Игнатъев С.М., Морозов В.И. Микроэкономика: В 2 т. / Под общ. ред. В.М. Гальперина. СПб.: Экономическая школа, 2002. Т. 1. 349 с.
2. Поддубный В.В., Романович О.В. Разностные динамические модели рынка вальрасовского типа с постоянными и случайными переменными запаздываниями // Сб. научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции «Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития. Транспорт, физика и математика». Одесса, 2007. Т. 1. С. 60 – 69.
3. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973. 256 с.

Статья представлена кафедрой прикладной информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 20 марта 2008 г.