МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ОБЩЕНАУЧНЫЙ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

№ 290 Март 2006

Серия «Математика. Кибернетика. Информатика»

Свидетельства о регистрации: бумажный вариант № 018694, электронный вариант № 018693
выданы Госкомпечати РФ 14 апреля 1999 г.
ISSN: печатный вариант – 1561-7793; электронный вариант – 1561-803X
от 20 апреля 1999 г. Международного Центра ISSN (Париж)

СОДЕРЖАНИЕ

ИСТОРИЯ ТГУ И ОБРАЗОВАНИЯ В СИБИРИ

МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ПРОБЛЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ

FEDERAL AGENCY OF EDUCATION

VESTNIC
TOMSK STATE UNIVERSITY

GENERAL SCIENTIFIC PERIODICAL

№ 290 March 2006

Series «Mathematics. Cybernetics. informatics»

Certification of registration: printed version № 018694, electronic version № 018693
Issued by Russian Federation state committee for publishing and printing on April, 14, 1999.
ISSN: printed version – 1561-7793; electronic version – 1561-803X
on April, 20, 1999 by International centre ISSN (Paris)

CONTENTS

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

DYNAMIC SYSTEMS THEORY

INFORMATICS AND PROGRAMMING

PROBLEMS OF EDUCATION

УДК 519.2

Е.В. Астафьева, А.Ф. Терпугов

МОДЕЛЬ РЕКЛАМНОЙ КОМПАНИИ, КОГДА ОБЪЕМ ПРОДАЖ ЗАВИСИТ ОТ ВЛИЯНИЯ РЕКЛАМЫ

Исследуется и оптимизируется математическая модель рекламной компании фирмы, производящей однородный товар, когда объем продаж товара в единицу времени зависит от влияния рекламы в этот момент времени.

Задача рекламы, как и всех маркетинговых инвестиций, состоит в увеличении прибыли компании посредством роста объема продаж или повышения цен. Таким образом, реклама является «двигателем торговли». В работах автора [1, 2] и в данной публикации рассмотрены некоторые модели влияния рекламы на деятельность фирмы и планирование рекламных компаний.

МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ РЕКЛАМЫ

Пусть $R(t)$ есть величина, определяющая влияние рекламы в момент времени *t*, а $\alpha(t)$ – величина расходов на рекламу в единицу времени в момент времени *t*. В отличие от предыдущих работ, мы рассмотрим следующее уравнение, определяющее зависимость $R(t)$ от расходов $\alpha(t)$:

$$\left(\kappa_1 \frac{dR}{dt}\right)^{\gamma} \operatorname{sgn}\left(\frac{dR}{dt}\right) + R(t) = \kappa_0 \alpha(t)\,, \qquad (1)$$

где параметр $\gamma > 1$. Величину $R(t)$ будем считать безразмерной; тогда величина κ_1 имеет размерность времени, а величина κ_0 имеет размерность сек/руб.

В дальнейшем выгодно перейти к безразмерному времени $\tau = t/\kappa_1$ и записывать уравнение (1) в виде

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma} \operatorname{sgn}\left(\frac{dR}{d\tau}\right) + R(\tau) = \kappa_0 \alpha(\tau)\,, \qquad (2)$$

что мы и будем делать. Тогда коэффициент κ_0 имеет размерность 1/руб. Заметим еще, что при выполнении условия $dR/d\tau > 0$ уравнение (2) приобретает вид

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma} + R(\tau) = \kappa_0 \alpha(\tau)\,. \qquad (3)$$

Отсюда находится явное выражение для $\alpha(\tau)$ через $R(\tau)$:

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{\kappa_0}\left[\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma} + R(\tau)\right]. \qquad (4)$$

Постановка задачи на оптимизацию

Рассмотрим случай, когда стоимость затрат на производство единицы товара равна *c*, а продается он по розничной цене *p*. Пусть $q(R(\tau))$ есть объем продаж в единицу времени, зависящий от влияния рекламы в этот момент времени. Тогда, обозначая через $\Pi(\tau)$ доход от продажи товара, полученный к моменту времени τ, можем записать

$$\frac{d\Pi}{d\tau} = (p-c)q(R(\tau)) - \frac{1}{\kappa_0}\left[\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma} + R(\tau)\right],$$

так что

$$\kappa_0 \Pi(T) = \int_0^T \left[\kappa_0 (p-c) q(R(\tau)) - \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma} - R(\tau)\right] d\tau\,, \quad (5)$$

и естественное желание максимизировать прибыль к моменту времени *T* приводит к задаче

$$\int_0^T \left[\kappa_0 (p-c) q(R(\tau)) - \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma} - R(\tau)\right] d\tau \Rightarrow \max_{R(\tau)}\,. \quad (6)$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $\kappa_0(p-c) = a$. Заметим, что это безразмерная величина.

Стационарная траектория

Среди всех траекторий функции $R(\tau)$ особую роль играет одна, которую мы будем называть стационарной. Она получается из следующих соображений.

Пусть $R(\tau) = R_0 = \text{const}$. Тогда $dR/d\tau = 0$, и подынтегральное выражение в (6) принимает вид $aq(R_0) - R_0$. Желание добиться максимума приводит к требованию $aq(R_0) - R_0 \Rightarrow \max\limits_{R_0}$, что, в свою очередь, дает уравнение для R_0:

$$aq'(R_0) = 1\,. \qquad (7)$$

Решение этого уравнения существует, если выполнено условие $aq'(0) > 1$.

Решение задачи оптимизации

Для решения уравнения (6) применим методы вариационного исчисления. В данном случае функционал имеет вид

$$F(\tau, R, R') = aq(R(\tau)) - \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma} - R(\tau)\,, \qquad (8)$$

и он явно от τ не зависит.

В этом случае уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$F - R'F_{R'} = C\,,$$

который в рассматриваемом случае принимает вид

$$aq(R(\tau)) - R(\tau) + (\gamma-1)(R'(\tau))^{\gamma} = C\,,$$

или, в явном виде,

$$(\gamma-1)\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma} = C - aq(R(\tau)) + R(\tau)\,. \qquad (9)$$

Рассмотрим вопрос к константе *C*. В нашем случае мы имеем задачу со свободным правым концом и поэтому при $T = \tau$ должно выполняться условие

$F_{R'} = 0$, что приводит к требованию $R'(T) = 0$. Отсюда получаем уравнение, определяющее C:

$$C = aq(R(T)) - R(T),$$

так что окончательно уравнение (9) принимает вид

$$(\gamma-1)\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma} = = a\big(q(R(T)) - q(R(\tau)) - (R(T) - R(\tau)\big). \tag{10}$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dR}{\left[a\big(q(R(T)) - q(R(\tau)) - (R(T) - R(\tau))\right]^{1/\gamma}} = = \frac{d\tau}{(\gamma-1)^{1/\gamma}}. \tag{11}$$

С учетом естественного начального условия $R(0) = 0$ получим решение в виде

$$\tau = (\gamma-1)^{1/\gamma}\int_0^R \frac{dz}{\left[a\big(q(R(T)) - q(z)\big) - (R(T) - z)\right]^{1/\gamma}}, \tag{12}$$

что дает явное выражение τ через $R = R(\tau)$.

Это же уравнение определяет и неизвестную величину $R(T)$. Подставляя в (12) $\tau = T$, получим уравнение для определения $R(T)$:

$$T = (\gamma-1)^{1/\gamma}\int_0^{R(T)} \frac{dz}{\left[a\big(q(R(T)) - q(z)\big) - (R(T) - z)\right]^{1/\gamma}}. \tag{13}$$

Рассмотрим основные свойства соотношений (12) и (13). Из (12) получаем

$$\frac{d\tau}{dR} = \frac{(\gamma-1)^{1/\gamma}}{\left[a\big(q(R(T)) - q(R)\big) - (R(T) - R)\right]^{1/\gamma}} > 0,$$

то есть τ монотонно возрастает с ростом R. Далее, так как при $\tau \to T$ $R \to R(T)$, то

$$\lim_{\tau \to T}\frac{d\tau}{dR} = +\infty.$$

Далее, находя вторую производную от τ по R, получим

$$\frac{d^2\tau}{dR^2} = \frac{(\gamma-1)^{1/\gamma}}{\left[a\big(q(R(T)) - q(R)\big) - (R(T) - R)\right]^{1+\frac{1}{\gamma}}}\,\frac{aq'(R) - 1}{\gamma},$$

и так как при $R < R_0$ $aq'(R) - 1 > 0$, то и $\dfrac{d^2\tau}{dR^2} > 0$, что говорит о том, что зависимость τ от R является выпуклой вниз функцией.

Заметим, что при $z \to R(T)$ знаменатель в подынтегральном выражении (13) обращается в ноль. Поэтому необходимо исследовать сходимость интеграла (13).

Рассмотрим поведение подынтегрального выражения интеграла (13). Здесь возможны два случая:

а) $R(T) < R_0$.

В этом случае, используя разложение в ряд Тейлора около точки $z = R(T)$, получим

$$a\big(q(R(T)) - q(z)\big) - (R(T) - z) = = \big(aq'(R(T)) - 1\big)\big(R(T) - z\big) + o\big((R(T) - z)\big), \tag{14}$$

и так как в этом случае $\big(aq'(R(T)) - 1\big) \neq 0$, то на верхнем пределе интеграл в (13) ведет себя как

$$\int^{R(T)} \frac{dz}{\big(R(T) - z\big)^{1/\gamma}},$$

и, по признакам сходимости несобственных интегралов второго рода, он сходится. Таким образом, при $R(T) < R_0$ формула (13) дает всегда конечные значения T.

б) $R(T) = R_0$.

Так как в этом случае $aq'(R_0) - 1 = 0$, то в (14) надо разлагать с точностью до членов с $(R_0 - z)^2$. Получаем

$$a\big(q(R_0) - q(z)\big) - (R_0 - z) = = -\frac{aq''(R_0)}{2}(R_0 - z)^2 + o\big((R_0 - z)^2\big),$$

и поэтому на верхнем пределе интеграл в (13) ведет себя как

$$\int^{R_0} \frac{dz}{\big(R_0 - z\big)^{2/\gamma}}.$$

Он сходится при $\gamma > 2$ и расходится при $\gamma \le 2$.

Таким образом, примерный вид зависимости T от $R(T)$ имеет вид, изображенный на рис. 1. Заметим, что при $\gamma > 2$ значению $R(T) = R_0$ соответствует конечное значение

$$T_1 = (\gamma-1)^{1/\gamma}\int_0^{R_0} \frac{dz}{\left[a\big(q(R_0) - q(z)\big) - (R_0 - z)\right]^{1/\gamma}}. \tag{15}$$

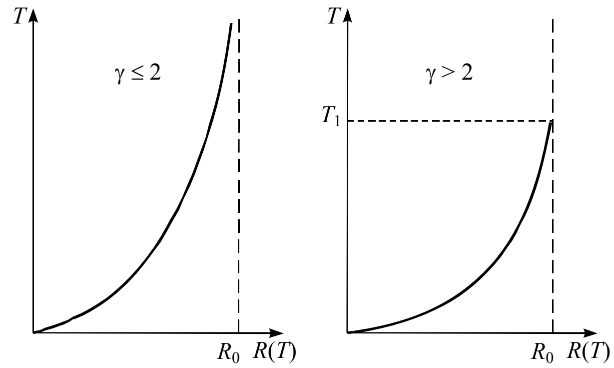

Рис. 1

Частный случай

Рассмотрим частный случай, когда

$$q(R) = q_m - (q_m - q_0)e^{-\beta R}. \tag{16}$$

Условие эффективности рекламы имеет в данном случае вид $aq'(0) > 1$ и превращается в условие $a(q_m - q_0)\beta > 1$.

Стационарное значение R_0 определяется уравнением $a(q_m - q_0)\beta e^{-\beta R_0} = 1$, решение которого имеет вид

$$R_0 = \frac{1}{\beta}\ln\big(a(q_m - q_0)\beta\big). \tag{17}$$

Интеграл (13) приобретает вид

$$T=(\gamma-1)^{1/\gamma}\times$$

$$\times\int_{0}^{R(T)}\frac{dz}{\left[a(q_m-q_0)\left(e^{-\beta z}-e^{-\beta R(T)}\right)-\left(R(T)-z\right)\right]^{1/\gamma}},\quad(18)$$

и надо строить графики зависимости T от $R(T)$ для значений $R(T)$ из области $0<R(T)<R_0$.

Ниже приведены примеры таких графиков для случая, когда β=0,5 и комбинация $a(q_m-q_0)=24{,}364$ (рис. 2 и 3). Это соответствует тому, что R_0 = 5.

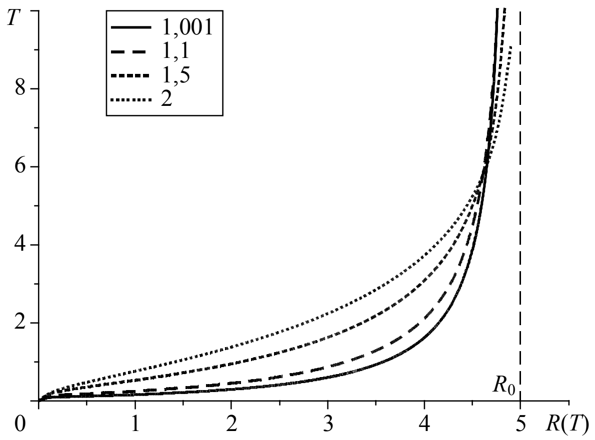

Рис. 2

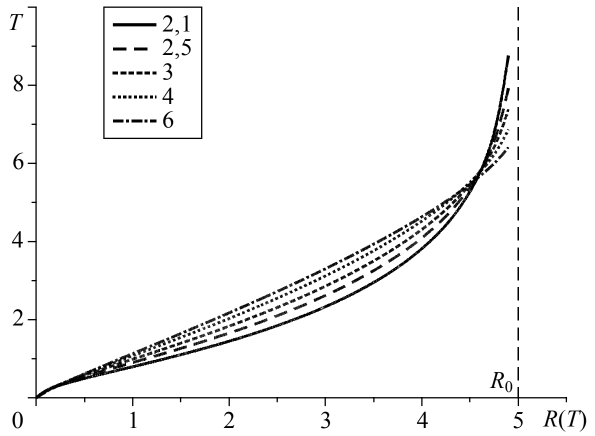

Рис. 3

Расходы на рекламу

Рассмотрим выражение (12)

$$\tau=(\gamma-1)^{1/\gamma}\int_{0}^{R}\frac{dz}{\left[a\left(q(R(T))-q(z)\right)-\left(R(T)-z\right)\right]^{1/\gamma}},$$

тогда

$$\frac{d\tau}{dR}=\frac{(\gamma-1)^{1/\gamma}}{\left[a\left(q(R(T))-q(R)\right)-\left(R(T)-R\right)\right]^{1/\gamma}},$$

откуда

$$\frac{dR}{d\tau}=\frac{\left[a\left(q(R(T))-q(R)\right)-\left(R(T)-R\right)\right]^{1/\gamma}}{(\gamma-1)^{1/\gamma}}.$$

Расходы имеют вид

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma}+R=\frac{a\left(q(R(T))-q(R)\right)-\left(R(T)-R\right)}{\gamma-1}.$$

График для случая, когда $\beta=0{,}5$ и комбинация $a(q_m-q_0)=24{,}364$, приведен на рис. 4.

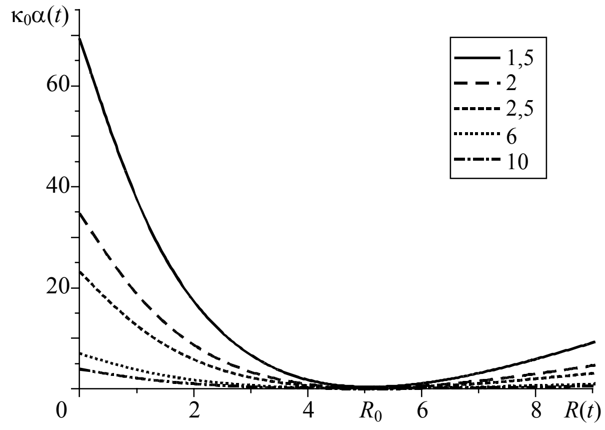

Рис. 4

Выключение рекламы

Незадолго до окончания периода деятельности T целесообразно прекратить выделение расходов на рекламу, чтобы дожить до конца этого периода «по инерции». Рассмотрим подробно этот процесс.

Пусть длительность периода деятельности T достаточно велика, так что можно считать, что устанавливается $R(t)=R_0$. Пусть в момент времени $T-T_*$ выделение расходов на рекламу прекращается. Тогда дифференциальное уравнение [2] принимает вид

$$-(R')^{\gamma}+R=0,$$

которое надо решить при начальном условии $R(T-T_*)=0$. Разделяя переменные

$$\frac{dR}{R^{1/\gamma}}=-d\tau$$

и интегрируя, получим

$$\int_{R_0}^{R}\frac{dz}{z^{1/\gamma}}=-\int_{T-T_*}^{\tau}d\tau=-(\tau-T+T_*).$$

Вычисляя внутренний интеграл, получим

$$R(\tau)^{(\gamma-1)/\gamma}-R_0{}^{(\gamma-1)/\gamma}=-\frac{\gamma}{\gamma-1}(\tau-T+T_*),$$

откуда окончательно

$$R(\tau)=\left[R_0{}^{(\gamma-1)/\gamma}-\frac{\gamma}{\gamma-1}(\tau-T+T_*)\right]^{\gamma/(\gamma-1)}.\quad(19)$$

Теперь рассуждаем следующим образом: если на участке $[T-T_*,T]$ не выключать расходы на рекламу, то мы получим доход

$$\left(aq(R_0)-\frac{1}{\kappa_0}R_0\right)T_*.$$

Если же мы прекратим выделение расходов на рекламу, то получим доход

$$\int_{T-T_*}^{T}aq\left(\left[R_0{}^{(\gamma-1)/\gamma}-\frac{\gamma}{\gamma-1}(\tau-T+T_*)\right]^{\gamma/(\gamma-1)}\right)d\tau=$$

$$=\int_{0}^{T_*}aq\left(\left[R_0{}^{(\gamma-1)/\gamma}-\frac{\gamma}{\gamma-1}z\right]^{\gamma/(\gamma-1)}\right)dz.$$

Разность этих величин будет равна

$$\int_0^{T_*} aq\left(\left[R_0^{(\gamma-1)/\gamma}-\frac{\gamma}{\gamma-1}z\right]^{\gamma/(\gamma-1)}\right)dz - \left(aq(R_0)-\frac{1}{\kappa_0}R_0\right)T_*,$$

и она достигает максимума, когда производная от этого выражения равна нулю. Это дает уравнение для определения T_*:

$$aq\left(\left[R_0^{(\gamma-1)/\gamma}-\frac{\gamma}{\gamma-1}T_*\right]^{\gamma/(\gamma-1)}\right)=aq(R_0)-\frac{1}{\kappa_0}R_0. \quad (20)$$

В рассматриваемом частном случае, когда $q(R)=q_m-(q_m-q_0)e^{-\beta R}$, явное выражение для T_* имеет вид

$$T_*=\frac{\gamma-1}{\gamma}\left[R_0^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}-\left(-\frac{1}{\beta}\ln\left(e^{-\beta R_0}+\frac{R_0}{a\kappa_0(q_m-q_0)}\right)\right)^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}\right]. (21)$$

Обозначим $a\kappa_0(q_m-q_0)=g$.

График (21) для $\beta=0,5$ и $R_0=5$ дан на рис. 5

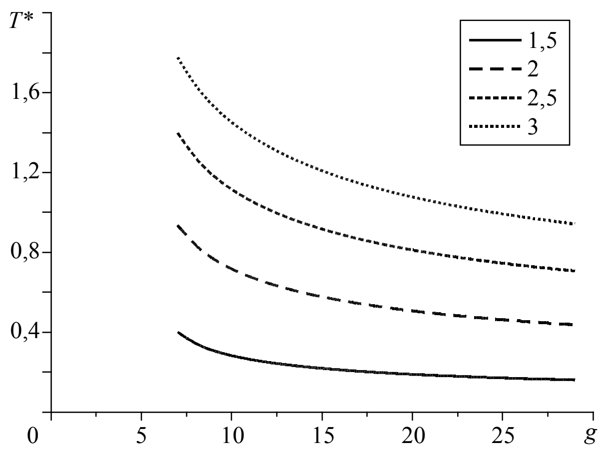

Рис. 5

СМЕЩЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ СПРОС–ЦЕНА ПАРАЛЛЕЛЬНО САМОЙ СЕБЕ

Пусть зависимость спрос – цена имеет вид $p+bq=a$, или, в явном виде, $p=a-bq$. Данный вид зависимости предполагает, что кривая спрос – цена с течением времени смещается параллельно самой себе.

Тогда доход фирмы в единицу времени составит величину

$$(a-bq-c)q-D.$$

Находя максимум этой величины по объему производства q, легко получить, что этот максимум достигается при $q=\frac{a-c}{2b}$ и доход фирмы в единицу времени при таком объеме производства равен

$$\frac{(a-c)^2}{4b}-D.$$

Объем товара $g(\tau)$, производимый в момент времени τ, определяется как

$$g(\tau)=\frac{a(R(\tau))-c}{2b}.$$

Тогда получаем следующую систему уравнений, описывающую рассматриваемую ситуацию:

$$\begin{cases}\dfrac{d\Pi(\tau)}{d\tau}=\dfrac{(a(R)-c)^2}{4b}-\alpha(\tau),\\ \left(\dfrac{dR(\tau)}{d\tau}\right)^{\gamma}+R(\tau)=\kappa_0\alpha(\tau),\end{cases} \quad (22)$$

и нам необходимо решить задачу

$$\Pi(T)=\int_0^T\left[\frac{(a(R)-c)^2}{4b}-\frac{1}{\kappa_0}\left(R(\tau)-\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma}\right)\right]d\tau\Rightarrow\max_{R(\tau)}. \quad (23)$$

В данном случае функционал имеет вид

$$F(\tau,R,R')=\frac{(a(R(\tau)-c)^2}{4b}-\frac{1}{\kappa_0}\left(R(\tau)-\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma}\right). \quad (24)$$

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{(a(R(\tau)-c)^2}{4b}-\frac{1}{\kappa_0}\left(R(\tau)-(\gamma-1)\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma}\right)=C. \quad (25)$$

Уравнение, определяющее C:

$$C=\frac{(a(R(T))-c)^2}{4b}-\frac{1}{\kappa_0}R(T).$$

Окончательно уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\gamma-1}{\kappa_0}\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma}= \quad (26)$$

$$=\frac{1}{4b}\left[(a(R(T))-c)^2-(a(R(\tau))-c)^2\right]-\frac{1}{\kappa_0}[R(T)-R(\tau)].$$

С учетом естественного начального условия $R(0)=0$ получим решение в виде

$$\tau=(\gamma-1)^{1/\gamma}\int_0^{R_\tau}\left[\frac{\kappa_0}{4b}\Big((a(R(T))-c)^2-(a(R(z))-c)^2\Big)-\right.$$

$$\left.-\big(R(T)-R(z)\big)\right]^{-1/\gamma}dz, \quad (27)$$

что дает явное выражение τ через $R=R(\tau)$.

Подставляя $\tau=T$, получим уравнение для определения $R(T)$:

$$T=(\gamma-1)^{1/\gamma}\int_0^{R(T)}\left[\frac{\kappa_0}{4b}\Big((a(R(T))-c)^2-(a(R(z))-c)^2\Big)-\right.$$

$$\left.-\big(R(T)-R(z)\big)\right]^{-1/\gamma}dz. \quad (28)$$

Частный случай

Рассмотрим частный случай, когда

$$q(\tau)=\frac{a_m-(a_m-a_0)e^{-\beta R(\tau)}-c}{2b}. \quad (29)$$

Стационарное значение R_0 определяется уравнением $(a_m-(a_m-a_0)e^{-\beta R_0}-c)(a_m-a)e^{-\beta R_0}\beta=2b$, решение которого имеет вид

$$R_0=\frac{1}{\beta(a_m-a_0)}\ln\frac{2\beta}{\beta(a_m-c)-\sqrt{(\beta(a_m-c))^2-8b\beta}}. \quad (30)$$

Интеграл (28) приобретает вид

$$T=(\gamma-1)^{1/\gamma}\int_0^{R(T)}\left[\frac{\kappa_0}{4b}((a_m-(a_m-a_0)e^{-\beta R(T)}-c)^2-\right.$$

$$\left.-(a_m-(a_m-a_0)e^{-\beta R(z)}-c)^2)-(R(T)-z)\right]^{-1/\gamma}dz.$$

СМЕЩЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ СПРОС – ЦЕНА ПОД УГЛОМ

Объем товара $g(\tau)$, производимый в момент времени τ, определяется как

$$g(\tau)=\frac{a(R(\tau))-c}{2b(R(\tau))}.$$

Тогда получаем следующую систему уравнений, описывающую рассматриваемую ситуацию:

$$\begin{cases}\dfrac{d\Pi(\tau)}{d\tau}=\dfrac{(a(R(\tau))-c)^2}{4b(R(\tau))}-\alpha(\tau),\\ \left(\dfrac{dR(\tau)}{d\tau}\right)^{\gamma}+R(\tau)=\kappa_0\alpha(\tau),\end{cases}\qquad(31)$$

и нам необходимо решить задачу

$$\Pi(T)=\int_0^T\left[\frac{(a(R(\tau))-c)^2}{4b(R(\tau))}-\frac{1}{\kappa_0}\left(R(\tau)-\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma}\right)\right]d\tau\Rightarrow\max_{R(\tau)}.\qquad(32)$$

В данном случае функционал имеет вид

$$F(\tau,R,R')=\frac{(a(R(\tau)-c)^2}{4b(R(\tau))}-\frac{1}{\kappa_0}\left(R(\tau)-\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma}\right).\qquad(33)$$

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{(a(R(\tau)-c)^2}{4b(R(\tau))}-\frac{1}{\kappa_0}\left(R(\tau)-(\gamma-1)\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma}\right)=C.\qquad(34)$$

Уравнение, определяющее C:

$$C=\frac{(a(R(T))-c)^2}{4b(R(T))}-\frac{1}{\kappa_0}R(T).$$

Окончательно уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\gamma-1}{\kappa_0}\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma}=$$
$$=\left[\frac{(a(R(T))-c)^2}{4b(R(T))}-\frac{(a(R(\tau))-c)^2}{4b(R(\tau))}\right]-\frac{1}{\kappa_0}[R(T)-R(\tau)].\qquad(35)$$

С учетом естественного начального условия $R(0)=0$ получим решение в виде

$$\tau=(\gamma-1)^{1/\gamma}\times\qquad(36)$$
$$\times\int_0^{R_\tau}\frac{dz}{\left[\dfrac{\kappa_0}{4}\left(\dfrac{(a(R(T))-c)^2}{b(R(T))}-\dfrac{(a(R(z))-c)^2}{b(R(z))}\right)-(R(T)-R(z))\right]^{1/\gamma}},$$

что дает явное выражение τ через $R=R(\tau)$.

Подставляя $\tau=T$, получим уравнение для определения $R(T)$:

$$T=(\gamma-1)^{1/\gamma}\times\qquad(37)$$
$$\times\int_0^{R(T)}\frac{dz}{\left[\dfrac{\kappa_0}{4}\left(\dfrac{(a(R(T))-c)^2}{b(R(T))}-\dfrac{(a(R(z))-c)^2}{b(R(z))}\right)-(R(T)-R(z))\right]^{1/\gamma}}.$$

Частный случай

Рассмотрим частный случай, когда

$$q(\tau)=\frac{a_m-(a_m-a_0)e^{-\beta R(\tau)}-c}{4(b_m-(b_m-b_0)e^{-\beta R(\tau)})}.\qquad(38)$$

Стационарное значение R_0 определяется уравнением

$$2\left(a_m-(a_m-a_0)e^{-\beta R_0}-c\right)(a_m-a_0)e^{-\beta R_0}\times$$
$$\times\beta\left(b_m-(b_m-b_0)e^{-\beta R_0}\right)-$$
$$-\left(a_m-(a_m-a_0)e^{-\beta R_0}-c\right)^2(b_m-b_0)e^{-\beta R_0}=$$
$$=4\left(b_m-(b_m-b_0)e^{-\beta R_0}\right)^2.$$

Интеграл (37) приобретает вид

$$T=(\gamma-1)^{1/\gamma}\int_0^{R(T)}\left[\frac{\kappa_0}{4}\left(\frac{\left(a_m-(a_m-a_0)e^{-\beta R(T)}-c\right)^2}{b_m-(b_m-b_0)e^{-\beta R(T)}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\left(a_m-(a_m-a_0)e^{-\beta R(z)}-c\right)^2}{b_m-(b_m-b_0)e^{-\beta R(z)}}\right)-(R(T)-z)\right]^{-1/\gamma}dz.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Астафьева Е.В., Терпугов А.Ф.* Математическая модель влияния рекламы на деятельность фирмы // Четвертая Всерос. конф. по финансово-актуарной математике и смежным вопросам: Тез. докл. Красноярск, 2005. С. 19 – 20.
2. *Астафьева Е.В., Терпугов А.Ф.* Модель рекламной компании, когда цена продажи зависит от рекламы // Обработка данных и управление в сложных системах. Вып. 6. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 13 – 20.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 30 мая 2005 г.