

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

ОБЩЕНАУЧНЫЙ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

№ 290

Март

2006

Серия «Математика. Кибернетика. Информатика»

Свидетельства о регистрации: бумажный вариант № 018694, электронный вариант № 018693
выданы Госкомпечати РФ 14 апреля 1999 г.

ISSN: печатный вариант – 1561-7793; электронный вариант – 1561-803X
от 20 апреля 1999 г. Международного Центра ISSN (Париж)

СОДЕРЖАНИЕ

ИСТОРИЯ ТГУ И ОБРАЗОВАНИЯ В СИБИРИ

Багров В.Г. У истоков Томской школы теоретиков	5
---	---

МАТЕМАТИКА

Александров И.А., Копанева Л.С. Об одном свойстве отображений полуплоскости на области с симметрией переноса.....	9
Гензе Л.В. Свободные булевы топологические группы	11
Гердт И.В. Малые абелевы группы	14
Гриншпон Я.С. Локально крестовые множества в топологиях раздельной непрерывности.....	18
Дмитренко А.Г., Пастухова Т.Н. Численный метод решения задач электромагнитного рассеяния на трехмерном магнитодиэлектрическом теле.....	24
Ельцова Т.А. Гомоморфные образы абелевых групп.....	30
Забарина А.И. К определению циклического порядка.....	33
Забарина А.И., Пестов Г.Г. К альтернативной теории множеств.....	35
Замалиева И.В. Отображение полуплоскости на круговой четырехугольник без внешних точек	38
Зиновьев Е.Г. Об одном обобщении колец псевдорациональных чисел.....	46
Катеринчук О.М. K -большие и обобщенно K -большие абелевы группы	48
Кирияцкий Э.Г., Касаткина Т.В. Об одном обобщении класса Левандовского	56
Кирияцкий Э.Г., Кирияцкий Е.Э. Об однолистных в полуплоскости функциях с отличными от нуля конечными разностями.....	60
Кобылина М.С. Локально равномерно выпуклые пространства вида $C(K)$, где K – линейно упорядоченный сепарабельный компакт.....	64
Лазарев В.Р. О расширенном сопряженном к пространству $C_p(X)$	66
Либин Э.Е., Чахлов С.В. Преобразование синограмм.....	68
Мисяков В.М. О сепарабельности прямого произведения произвольных абелевых групп.....	70
Онищук Н.М. Об одном классе векторных полей	72
Романович В.А. О размерности кардинальной степени модулярной решетки	78
Сижук Т.П. Об уклонении образов гладких кривых при однолистных выпуклых отображениях единичного круга	83
Тимошенко Е.А. Радикальные классы, замкнутые относительно сервантных подгрупп	86
Ярдыков Е.Ю. Простые модули над кольцами обобщенных матриц.....	89

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Авдеенко С.Н. Оценка доходной недвижимости в условиях неопределенности интервального вида	95
Астафьева Е.В., Терпугов А.Ф. Модель рекламной компании, когда объем продаж зависит от влияния рекламы	99
Богданов А.Л. Эконометрический анализ рынка подержанных автомобилей	104
Вавилов В.А., Назаров А.А. Диффузионная аппроксимация процесса изменения состояний в математической модели устойчивых сетей множественного доступа в случайной среде.....	108
Вавилов В.А., Назаров А.А. Исследование математических моделей неустойчивых сетей множественного доступа в диффузионной среде	114
Глухова Е.В., Фомин А.А. Оптимизация деятельности страховой компании при периодическом потоке страховых выплат.....	124
Горбенко К.А., Терпугов А.Ф. Стохастическая модель функционирования страховой компании О.А. Змеева при наличии портфеля рисков	128
Григорьев Ю.Д., Ле Динь Шон. О комонотонных рисках в договорах перестрахования с двумя уровнями удержаний.....	135
Даммер Д.Д. Исследование математической модели страховой компании в виде бесконечно линейной системы массового обслуживания при синхронном дважды стохастическом входящем потоке рисков	141
Демин Н.С., Кулешова Е.В. Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом экологических затрат	145

Дмитренко А.Г., Келлер Ю.А. Компьютерное моделирование электромагнитного рассеяния на структурах из нескольких тонких проводников.....	150
Жабин Д.Н., Масалова Е.А., Шаповалов А.В. Динамическое управление инвестиционным портфелем	158
Змеева Е.Е., Терпугов А.Ф. Управление розничной ценой продажи.....	163
Китаева А.В., Терпугов А.Ф. Управление капиталом фонда социального страхования.....	167
Кравченко М.Л., Грекова Т.И. Моделирование экономических систем с применением нейронных сетей.....	169
Моисеева С.П., Морозова А.С., Назаров А.А. Исследование суммарного потока обращений в бесконечно линейной СМО с повторным обслуживанием.....	173
Назаров А.А., Семёнова Т.Г. Математическая модель поведения участника торгов на фондовой бирже в условиях стационарности цены активов	176
Назаров А.А., Цой С.А. Общий подход к исследованию марковских моделей сетей передачи данных, управляемых динамическим протоколом случайного множественного доступа.....	180
Параев Ю.И., Цветницкая С.А. Управление инвестиционным портфелем в задаче слежения.....	187
Поддубный В.В., Сухарева Е.А. Исследование свободного и стабилизируемого рынка, описываемого динамической моделью Вальраса – Маршалла с запаздыванием.....	190
Туенбаева А.Н. Исследование немарковской модели сети связи случайного доступа с МР-входящим потоком	199
Туренова Е.Л. Исследование процесса изменения капитала при непрерывном расходовании средств, зависящем от их объема на активном счете.....	203
Чаусова Е.В. Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и потерь запаса.....	208

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Аникина А.В., Демин Н.С. Исследование европейского опциона продажи с последствием в случае выплаты дивидендов	216
Григорьев Ю.Д. Актуарные функции со случайной процентной ставкой.....	221
Ломакина С.С., Смагин В.И. Робастные следящие нестационарные системы с фильтром в контуре управления.....	226
Поддубный В.В., Шевелев О.Г., Фатыхов А.А. Сравнительный анализ эффективности алгоритмов распознавания авторства текстов по частотам переходов	232
Радюк Л.Е. Альтернативный подход к статистическому анализу результатов имитационного моделирования.....	235
Решетникова Г.Н. Следящая система адаптивного управления с прогнозирующей моделью пониженного порядка	237
Решетникова Г.Н. Синтез адаптивного управления по локальному критерию с моделью пониженного порядка	241
Смагин В.И., Смагин С.В. Управление запасами по двум критериям с учетом ограничений	244

ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Шидловский С.В. Система автоматического регулирования, инвариантная к параметрическим возмущениям, на базе нечеткой логики.....	247
---	-----

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Бабанов А.М. Сравнительный анализ семантических моделей, применяемых для проектирования схем баз данных.....	251
Бабанов А.М. Формальная система теории семантически значимых отображений.....	261
Змеев О.А., Малиновский А.Ю. Архитектура расширяемого ядра инструмента SADT-моделирования	264
Мирза Н.С., Петренко Д.А., Скворцов А.В. Технология трехмерной визуализации данных ГИС и САПР IndorViewer3D.....	267
Мирза Н.С., Скворцов А.В., Чаднов Р.В. Визуализация сверхбольших поверхностей	271
Петренко Д.А., Мирза Н.С., Скворцов А.В. Взаимодействие объектов в системе автоматизированного проектирования IndorCAD	275
Рюмкин А.И. Модель планировочной структуры города	279
Рюмкин А.И., Тябаев Е.С. О моделировании расселения региона	283
Сарычев Д.С., Снежко В.В. Телеметрия в геоинформационной системе электрических сетей.....	288
Фомичёв В.М. Исследование наследственных признаков в конечных группах	294
Чертов А.А., Лавров В.А. Методы и алгоритмы для оптимизации видеороликов формата FBR по размеру	297
Шевелев О.Г., Петраков А.В. Классификация текстов с помощью деревьев решений и нейронных сетей прямого распространения	300

ПРОБЛЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ

Ельцов А.А., Ельцова Г.А., Магазинников Л.И. Дифференциальное исчисление в курсе математики втуза.....	308
Лещинский Б.С. Программная система консультирования по фармакологическому взаимодействию лекарственных препаратов.....	311

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	315
-----------------------------------	-----

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ НА РУССКОМ И АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКАХ.....	320
---	-----

Certification of registration: printed version № 018694, electronic version № 018693
Issued by Russian Federation state committee for publishing and printing on April, 14, 1999.
ISSN: printed version – 1561-7793; electronic version – 1561-803X
on April, 20, 1999 by International centre ISSN (Paris)

CONTENTS

THE HISTORY OF TOMSK STATE UNIVERSITY AND EDUCATION IN SIBERIA

Bagrov V.G. At the beginning of the Tomsk school of theorists	5
--	---

MATHEMATICS

Alexandrov I.A., Copaneva L.S. About one property of mappings of the half-plane on domains with symmetry carry	9
Genze L.V. Free Boolean topological groups	11
Gerdt I.V. Small Abelian groups. In the paper the concept of small Abelian group is introduced	14
Grinshpon Ya.S. Locally cross sets in the topologies of separate continuity	18
Dmitrenko A.G., Pastuhova T.N. A numerical method for investigating electromagnetic scattering by three-dimensional magnetodielectric body	24
Yeltsova T.A. Homomorphic images of Abelian groups	30
Zabarina A.I. On the definition of the cyclic order	33
Zabarina A.I., Pestov G.G. On the alternative set theory	35
Zamalieva I.V. Mapping of the half-plane on the circular quadrangle without exterior points	38
Zinoviev E.G. On one of generalizations of rings of pseudorational numbers	46
Katerinchuk O.M. K -large and general K -large of the Abelian groups	48
Kirjatskij E.G., Kasatkina T.V. About one generalization of Levandovskij class	56
Kirjatskii E.G., Kirjatskii E.E. On functions being univalent in the half-plane with nonvanishing finite differences	60
Kobyлина M.S. Locally uniformly spaces in the form of $C(K)$, where K is a linearly ordered separable compact	64
Lazarev V.R. On the notion of extended dual of the space $C_p(X)$	66
Libin E.E., Chakhlov S.V. A transformation of Sinograms	68
Misyakov V.M. On separability of direct product of arbitrary Abelian groups	70
Onishchuk N.M. On a class of vector fields	72
Romanovitsh V.A. On the dimension of cardinal degree of a modular lattice	78
Sizhuk T.P. About evasion of images smooth curve at univalent convex mapping of the unit circle	83
Timoshenko E.A. Radical classes which are closed under pure subgroups	86
Yardikov E.Yu. Simple modules over generalized matrix rings	89

MATHEMATICAL MODELING

Avdeenko S.N. Estimation of profitable premises under interval uncertainty	95
Astafyeva Ye.V., Terpugov A.F. Mathematical model of advertising campaign when the amount of sells depend on advertising	99
Bogdanov A.L. Econometrics analysis of the secondary cars market	104
Vavilov V.A., Nazarov A.A. Diffusion approximation of the process of the change the conditions in mathematical model of the firm networks of the plural access in casual ambience	108
Vavilov V.A., Nazarov A.A. Investigation of the mathematical models of the unstable networks of the plural access in diffusion ambience	114
Glukhova Ye.V., Fomin A.A. Optimization of activity of insurance company while the periodical flow of insurance payments	124
Gorbenko K.A., Terpugov A.F. Stochastic model of functioning of insurance company O.A. Zmeev at presence of a portfolio of risks	128
Grigoriev Yu.D., Le Dinh Son. On comonotonic risks in the two-levels reinsurance treaties	135
Dammer D.D. Investigation of mathematical model of insurance company as an interminable linear queueing system with synchronous twice-stochastic flow of entrance risks	141
Dyomin N.S., Kuleshova E.V. The management of one-sector economy with provision for ecological expenses at the limited time interval	145
Dmitrenko A.G., Keller Yu.A. Computer modeling of electromagnetic scattering by structures comprising several thin wires	150
Zhabin D.N., Masalova E.A., Shapovalov A.V. Dynamic investment portfolio control	158

Zmeyeva Ye.Ye., Terpugov A.F. The control of retail price	163
Kitayeva A.V., Terpugov A.F. The social insurance fund capital management	167
Kravchenko M.L., Grekova T.I. Modeling of economic systems with using of neural networks	169
Moiseyeva S.P., Morozova A.S., Nazarov A.A. Investigation of the total flow of appeals in infinite lines queuing system with repeated service	173
Nazarov A.A., Semyonova T.G. The mathematical model of behavior of the trader in stock exchange in the conditions of stationarity of prices of stocks	176
Nazarov A.A., Tsoy S.A. Common approach to Markoff models investigation of networks with dynamic carrier sense multiple access protocols	180
Paraev J.I., Tsvetnitskaja S.A. Control of investment portfolio in tracking problem.....	187
Poddubny V.V., Sukhareva E.A. The research of free and being stabilized market subscribed by the delayed dynamic model of Walras – Marshall.....	190
Tuenbaeva A.N. Investigation of the non-markovian model of a network of connection of casual multiple access with MP-arrival stream	199
Turenova Ye.L. The investigation of principal changing process on continuous spending of funds depending on their amount on active account	203
Chausova E.V. Dynamic network inventory control model with interval uncertainties of demand and storage loss	208

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

Anikina A.V., Demin N.S. The research of the European look-back put-option in the case of dividends payment	216
Grigoriev Yu.D. Actuarial functions with the stochastic interest rate.....	221
Lomakina S.S., Smagin V.I. Robust tracking controller for time varying systems with a filter in control loop	226
Poddubny V.V., Shevelyov O.G., Fatykhov A.A. The comparative analysis of efficiency of algorithms of texts' authorship recognition on transitions' frequencies	232
Radjuk L.E. Alternative approach to the statistical analyses task of results on simulation testing.....	235
Reshetnikova G.N. Tracking systems of adaptive control with the predictive model of reduced order	237
Reshetnikova G.N. Adaptive control synthesis utilizing local criterion with the reduced order model	241
Smagin V.I., Smagin S.V. Inventory control on two criterions with restrictions.....	244

DYNAMIC SYSTEMS THEORY

Shidlovskiy S.V. Invariant to parametrical perturbation control system based on fuzzy logic	247
--	-----

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Babanov A.M. Comparative analysis of semantic models applicable for data-base schemes design.....	251
Babanov A.M. Formal system of the semantically significant mappings theory	261
Zmeyev O.A., Malinowski A.Yu. The architecture of the extensible kernel of SADT-modeling tool.....	264
Mirza N.S., Petrenko D.A., Skvortsov A.V. IndorViewer3D – a 3D-visualization technology for geoinformational and computer-aided design systems	267
Mirza N.S., Skvortsov A.V., Chadnov R.V. Very large terrains visualization.....	271
Petrenko D.A., Mirza N.S., Skvortsov A.V. Computer-aided design system IndorCAD objects interaction.....	275
Ryumkin A.I. Model of planning structure of the city and tasks of the town-planning analysis	279
Ryumkin A.I., Tjabaev E.S. About regional resettlement modeling	283
Sarychev D.S., Snezhko V.V. Telemetry in a geoinformation system of the power networks	288
Fomichev V.M. Investigation of heritable features in finite groups.....	294
Chertov A.A., Lavrov V.A. FBR file format is used to store a user activity by the product “BB FlashBack”.....	297
Shevelyov O.G., Petrakov A.V. Text classification with decision trees and feed-forward neural networks.....	300

PROBLEMS OF EDUCATION

Yeltsov A.A., Yeltsova G.A., Magazinnikov L.I. Differential calculation in course of mathematics in technical university	308
Leshchinskiy B.S. Software consulting system of pharmacological interactions of the drugs.....	311

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	315
--	-----

SUMMARIES OF THE ARTICLES IN RUSSIAN AND ENGLISH LANGUAGES	320
---	-----

МОДЕЛЬ РЕКЛАМНОЙ КОМПАНИИ, КОГДА ОБЪЕМ ПРОДАЖ ЗАВИСИТ ОТ ВЛИЯНИЯ РЕКЛАМЫ

Исследуется и оптимизируется математическая модель рекламной компании фирмы, производящей однородный товар, когда объем продаж товара в единицу времени зависит от влияния рекламы в этот момент времени.

Задача рекламы, как и всех маркетинговых инвестиций, состоит в увеличении прибыли компании посредством роста объема продаж или повышения цен. Таким образом, реклама является «двигателем торговли». В работах автора [1, 2] и в данной публикации рассмотрены некоторые модели влияния рекламы на деятельность фирмы и планирование рекламных компаний.

МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ РЕКЛАМЫ

Пусть $R(t)$ есть величина, определяющая влияние рекламы в момент времени t , а $\alpha(t)$ – величина расходов на рекламу в единицу времени в момент времени t . В отличие от предыдущих работ, мы рассмотрим следующее уравнение, определяющее зависимость $R(t)$ от расходов $\alpha(t)$:

$$\left(\kappa_1 \frac{dR}{dt} \right)^\gamma \operatorname{sgn} \left(\frac{dR}{dt} \right) + R(t) = \kappa_0 \alpha(t), \quad (1)$$

где параметр $\gamma > 1$. Величину $R(t)$ будем считать безразмерной; тогда величина κ_1 имеет размерность времени, а величина κ_0 имеет размерность сек/руб.

В дальнейшем выгодно перейти к безразмерному времени $\tau = t / \kappa_1$ и записывать уравнение (1) в виде

$$\left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma \operatorname{sgn} \left(\frac{dR}{d\tau} \right) + R(\tau) = \kappa_0 \alpha(\tau), \quad (2)$$

что мы и будем делать. Тогда коэффициент κ_0 имеет размерность 1/руб. Заметим еще, что при выполнении условия $dR/d\tau > 0$ уравнение (2) приобретает вид

$$\left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma + R(\tau) = \kappa_0 \alpha(\tau). \quad (3)$$

Отсюда находится явное выражение для $\alpha(\tau)$ через $R(\tau)$:

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{\kappa_0} \left[\left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma + R(\tau) \right]. \quad (4)$$

Постановка задачи на оптимизацию

Рассмотрим случай, когда стоимость затрат на производство единицы товара равна c , а продается он по розничной цене p . Пусть $q(R(\tau))$ есть объем продаж в единицу времени, зависящий от влияния рекламы в этот момент времени. Тогда, обозначая через $\Pi(\tau)$ доход от продажи товара, полученный к моменту времени τ , можем записать

$$\frac{d\Pi}{d\tau} = (p - c)q(R(\tau)) - \frac{1}{\kappa_0} \left[\left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma + R(\tau) \right],$$

так что

$$\kappa_0 \Pi(T) = \int_0^T \left[\kappa_0 (p - c)q(R(\tau)) - \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma - R(\tau) \right] d\tau, \quad (5)$$

и естественное желание максимизировать прибыль к моменту времени T приводит к задаче

$$\int_0^T \left[\kappa_0 (p - c)q(R(\tau)) - \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma - R(\tau) \right] d\tau \Rightarrow \max_{R(\tau)}. \quad (6)$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $\kappa_0(p - c) = a$. Заметим, что это безразмерная величина.

Стационарная траектория

Среди всех траекторий функции $R(\tau)$ особую роль играет одна, которую мы будем называть стационарной. Она получается из следующих соображений.

Пусть $R(\tau) = R_0 = \text{const}$. Тогда $dR/d\tau = 0$, и подынтегральное выражение в (6) принимает вид $aq(R_0) - R_0$. Желание добиться максимума приводит к требованию $aq(R_0) - R_0 \Rightarrow \max_{R_0}$, что, в свою очередь,

дает уравнение для R_0 :

$$aq'(R_0) = 1. \quad (7)$$

Решение этого уравнения существует, если выполнено условие $aq'(0) > 1$.

Решение задачи оптимизации

Для решения уравнения (6) применим методы вариационного исчисления. В данном случае функционал имеет вид

$$F(\tau, R, R') = aq(R(\tau)) - \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma - R(\tau), \quad (8)$$

и он явно от τ не зависит.

В этом случае уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$F - R'F_{R'} = C,$$

который в рассматриваемом случае принимает вид

$$aq(R(\tau)) - R(\tau) + (\gamma - 1)(R'(\tau))^\gamma = C,$$

или, в явном виде,

$$(\gamma - 1) \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma = C - aq(R(\tau)) + R(\tau). \quad (9)$$

Рассмотрим вопрос к константе C . В нашем случае мы имеем задачу со свободным правым концом и поэтому при $T = \tau$ должно выполняться условие

$F_{R'} = 0$, что приводит к требованию $R'(T) = 0$. Отсюда получаем уравнение, определяющее C :

$$C = aq(R(T)) - R(T),$$

так что окончательно уравнение (9) принимает вид

$$(\gamma - 1) \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma = a(q(R(T)) - q(R(\tau)) - (R(T) - R(\tau))). \quad (10)$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dR}{[a(q(R(T)) - q(R(\tau)) - (R(T) - R(\tau)))^{1/\gamma}]^\gamma} = \frac{d\tau}{(\gamma - 1)^{1/\gamma}}. \quad (11)$$

С учетом естественного начального условия $R(0) = 0$ получим решение в виде

$$\tau = (\gamma - 1)^{1/\gamma} \int_0^R \frac{dz}{[a(q(R(T)) - q(z)) - (R(T) - z)]^{1/\gamma}}, \quad (12)$$

что дает явное выражение τ через $R = R(\tau)$.

Это же уравнение определяет и неизвестную величину $R(T)$. Подставляя в (12) $\tau = T$, получим уравнение для определения $R(T)$:

$$T = (\gamma - 1)^{1/\gamma} \int_0^{R(T)} \frac{dz}{[a(q(R(T)) - q(z)) - (R(T) - z)]^{1/\gamma}}. \quad (13)$$

Рассмотрим основные свойства соотношений (12) и (13). Из (12) получаем

$$\frac{d\tau}{dR} = \frac{(\gamma - 1)^{1/\gamma}}{[a(q(R(T)) - q(R)) - (R(T) - R)]^{1/\gamma}} > 0,$$

то есть τ монотонно возрастает с ростом R . Далее, так как при $\tau \rightarrow T$ $R \rightarrow R(T)$, то

$$\lim_{\tau \rightarrow T} \frac{d\tau}{dR} = +\infty.$$

Далее, находя вторую производную от τ по R , получим

$$\frac{d^2\tau}{dR^2} = \frac{(\gamma - 1)^{1/\gamma}}{[a(q(R(T)) - q(R)) - (R(T) - R)]^{1 + \frac{1}{\gamma}}} \frac{aq'(R) - 1}{\gamma},$$

и так как при $R < R_0$ $aq'(R) - 1 > 0$, то и $\frac{d^2\tau}{dR^2} > 0$, что

говорит о том, что зависимость τ от R является выпуклой вниз функцией.

Заметим, что при $z \rightarrow R(T)$ знаменатель в подынтегральном выражении (13) обращается в ноль. Поэтому необходимо исследовать сходимость интеграла (13).

Рассмотрим поведение подынтегрального выражения интеграла (13). Здесь возможны два случая:

а) $R(T) < R_0$.

В этом случае, используя разложение в ряд Тейлора около точки $z = R(T)$, получим

$$a(q(R(T)) - q(z)) - (R(T) - z) = (aq'(R(T)) - 1)(R(T) - z) + o((R(T) - z)), \quad (14)$$

и так как в этом случае $(aq'(R(T)) - 1) \neq 0$, то на верхнем пределе интеграл в (13) ведет себя как

$$\int \frac{dz}{(R(T) - z)^{1/\gamma}},$$

и, по признакам сходимости несобственных интегралов второго рода, он сходится. Таким образом, при $R(T) < R_0$ формула (13) дает всегда конечные значения T .

б) $R(T) = R_0$.

Так как в этом случае $aq'(R_0) - 1 = 0$, то в (14) надо разлагать с точностью до членов с $(R_0 - z)^2$. Получаем

$$a(q(R_0) - q(z)) - (R_0 - z) = -\frac{aq''(R_0)}{2}(R_0 - z)^2 + o((R_0 - z)^2),$$

и поэтому на верхнем пределе интеграл в (13) ведет себя как

$$\int \frac{dz}{(R_0 - z)^{2/\gamma}}.$$

Он сходится при $\gamma > 2$ и расходится при $\gamma \leq 2$.

Таким образом, примерный вид зависимости T от $R(T)$ имеет вид, изображенный на рис. 1. Заметим, что при $\gamma > 2$ значению $R(T) = R_0$ соответствует конечное значение

$$T_1 = (\gamma - 1)^{1/\gamma} \int_0^{R_0} \frac{dz}{[a(q(R_0) - q(z)) - (R_0 - z)]^{1/\gamma}}. \quad (15)$$

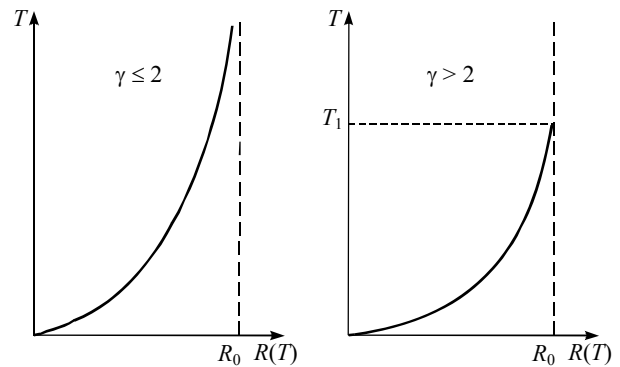


Рис. 1

Частный случай

Рассмотрим частный случай, когда

$$q(R) = q_m - (q_m - q_0)e^{-\beta R}. \quad (16)$$

Условие эффективности рекламы имеет в данном случае вид $aq'(0) > 1$ и превращается в условие $a(q_m - q_0)\beta > 1$.

Стационарное значение R_0 определяется уравнением $a(q_m - q_0)\beta e^{-\beta R_0} = 1$, решение которого имеет вид

$$R_0 = \frac{1}{\beta} \ln(a(q_m - q_0)\beta). \quad (17)$$

Интеграл (13) приобретает вид

$$T = (\gamma - 1)^{1/\gamma} \times \int_0^{R(T)} \frac{dz}{[a(q_m - q_0)(e^{-\beta z} - e^{-\beta R(T)}) - (R(T) - z)]^{1/\gamma}}, \quad (18)$$

и надо строить графики зависимости T от $R(T)$ для значений $R(T)$ из области $0 < R(T) < R_0$.

Ниже приведены примеры таких графиков для случая, когда $\beta=0,5$ и комбинация $a(q_m - q_0) = 24,364$ (рис. 2 и 3). Это соответствует тому, что $R_0 = 5$.

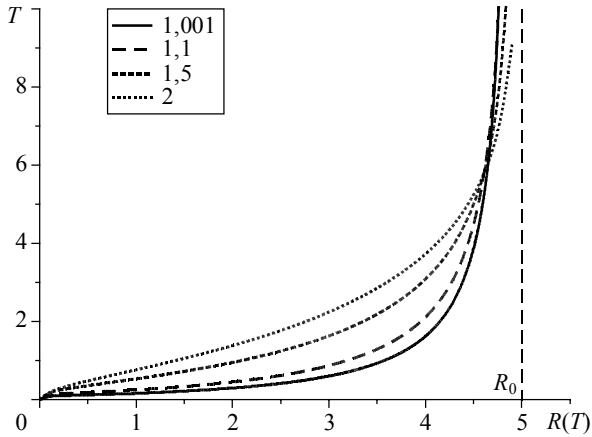


Рис. 2

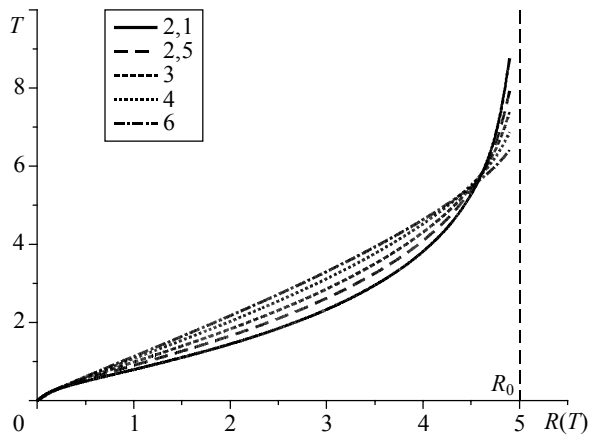


Рис. 3

Расходы на рекламу

Рассмотрим выражение (12)

$$\tau = (\gamma - 1)^{1/\gamma} \int_0^R \frac{dz}{[a(q(R(T)) - q(z)) - (R(T) - z)]^{1/\gamma}},$$

тогда

$$\frac{d\tau}{dR} = \frac{(\gamma - 1)^{1/\gamma}}{[a(q(R(T)) - q(R)) - (R(T) - R)]^{1/\gamma}},$$

откуда

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{[a(q(R(T)) - q(R)) - (R(T) - R)]^{1/\gamma}}{(\gamma - 1)^{1/\gamma}}.$$

Расходы имеют вид

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^\gamma + R = \frac{a(q(R(T)) - q(R)) - (R(T) - R)}{\gamma - 1}.$$

График для случая, когда $\beta = 0,5$ и комбинация $a(q_m - q_0) = 24,364$, приведен на рис. 4.

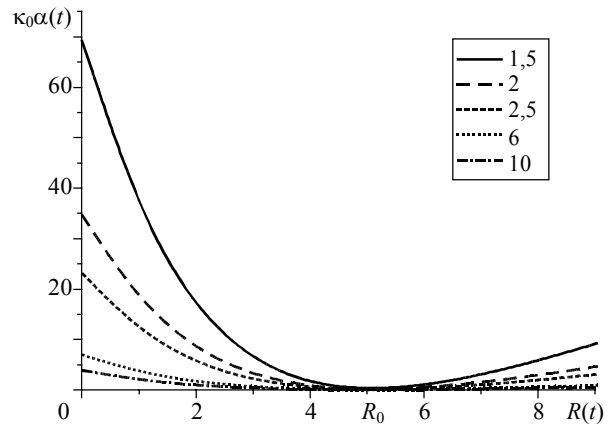


Рис. 4

Выключение рекламы

Незадолго до окончания периода деятельности T целесообразно прекратить выделение расходов на рекламу, чтобы дожить до конца этого периода «по инерции». Рассмотрим подробно этот процесс.

Пусть длительность периода деятельности T достаточно велика, так что можно считать, что устанавливается $R(t) = R_0$. Пусть в момент времени $T - T_*$ выделение расходов на рекламу прекращается. Тогда дифференциальное уравнение [2] принимает вид

$$-(R')^\gamma + R = 0,$$

которое надо решить при начальном условии $R(T - T_*) = 0$. Разделяя переменные

$$\frac{dR}{R^{1/\gamma}} = -d\tau$$

и интегрируя, получим

$$\int_{R_0}^R \frac{dz}{z^{1/\gamma}} = - \int_{T-T_*}^{\tau} d\tau = -(\tau - T + T_*).$$

Вычисляя внутренний интеграл, получим

$$R(\tau)^{(\gamma-1)/\gamma} - R_0^{(\gamma-1)/\gamma} = -\frac{\gamma}{\gamma-1}(\tau - T + T_*),$$

откуда окончательно

$$R(\tau) = \left[R_0^{(\gamma-1)/\gamma} - \frac{\gamma}{\gamma-1}(\tau - T + T_*) \right]^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (19)$$

Теперь рассуждаем следующим образом: если на участке $[T - T_*, T]$ не выключать расходы на рекламу, то мы получим доход

$$\left(aq(R_0) - \frac{1}{\kappa_0} R_0 \right) T_*.$$

Если же мы прекратим выделение расходов на рекламу, то получим доход

$$\int_{T-T_*}^T aq \left[\left[R_0^{(\gamma-1)/\gamma} - \frac{\gamma}{\gamma-1}(\tau - T + T_*) \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \right] d\tau = \int_0^{T_*} aq \left[\left[R_0^{(\gamma-1)/\gamma} - \frac{\gamma}{\gamma-1}z \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \right] dz.$$

Разность этих величин будет равна

$$\int_0^{T_*} aq \left[\left(R_0^{(\gamma-1)/\gamma} - \frac{\gamma}{\gamma-1} z \right)^{\gamma/(\gamma-1)} dz - \left(aq(R_0) - \frac{1}{\kappa_0} R_0 \right) T_* \right],$$

и она достигает максимума, когда производная от этого выражения равна нулю. Это дает уравнение для определения T_* :

$$aq \left[\left(R_0^{(\gamma-1)/\gamma} - \frac{\gamma}{\gamma-1} T_* \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \right] = aq(R_0) - \frac{1}{\kappa_0} R_0. \quad (20)$$

В рассматриваемом частном случае, когда $q(R) = q_m - (q_m - q_0)e^{-\beta R}$, явное выражение для T_* имеет вид

$$T_* = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left[R_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \left(-\frac{1}{\beta} \ln \left(e^{-\beta R_0} + \frac{R_0}{a\kappa_0(q_m - q_0)} \right) \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]. \quad (21)$$

Обозначим $a\kappa_0(q_m - q_0) = g$.

График (21) для $\beta = 0,5$ и $R_0 = 5$ дан на рис. 5

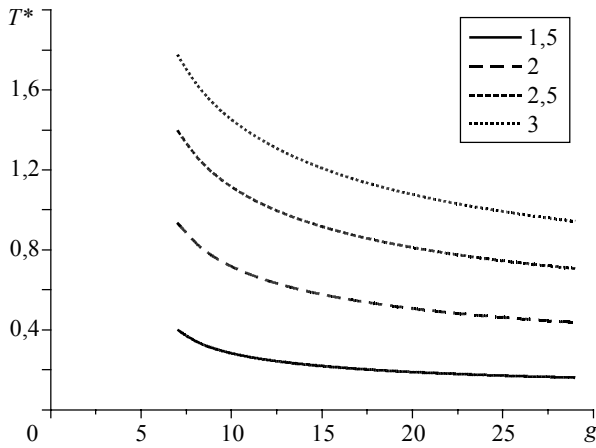


Рис. 5

СМЕЩЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ СПРОС – ЦЕНА ПАРАЛЛЕЛЬНО САМОЙ СЕБЕ

Пусть зависимость спрос – цена имеет вид $p + bq = a$, или, в явном виде, $p = a - bq$. Данный вид зависимости предполагает, что кривая спрос – цена с течением времени смещается параллельно самой себе.

Тогда доход фирмы в единицу времени составит величину

$$(a - bq - c)q - D.$$

Находя максимум этой величины по объему производства q , легко получить, что этот максимум достигается при $q = \frac{a-c}{2b}$ и доход фирмы в единицу времени при таком объеме производства равен

$$\frac{(a-c)^2}{4b} - D.$$

Объем товара $g(\tau)$, производимый в момент времени τ , определяется как

$$g(\tau) = \frac{a(R(\tau)) - c}{2b}.$$

Тогда получаем следующую систему уравнений, описывающую рассматриваемую ситуацию:

$$\begin{cases} \frac{d\Pi(\tau)}{d\tau} = \frac{(a(R) - c)^2}{4b} - \alpha(\tau), \\ \left(\frac{dR(\tau)}{d\tau} \right)^\gamma + R(\tau) = \kappa_0 \alpha(\tau), \end{cases} \quad (22)$$

и нам необходимо решить задачу

$$\Pi(T) = \int_0^T \left[\frac{(a(R) - c)^2}{4b} - \frac{1}{\kappa_0} \left(R(\tau) - \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma \right) \right] d\tau \Rightarrow \max_{R(\tau)}. \quad (23)$$

В данном случае функционал имеет вид

$$F(\tau, R, R') = \frac{(a(R(\tau)) - c)^2}{4b} - \frac{1}{\kappa_0} \left(R(\tau) - \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma \right). \quad (24)$$

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{(a(R(\tau)) - c)^2}{4b} - \frac{1}{\kappa_0} \left(R(\tau) - (\gamma-1) \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma \right) = C. \quad (25)$$

Уравнение, определяющее C :

$$C = \frac{(a(R(T)) - c)^2}{4b} - \frac{1}{\kappa_0} R(T).$$

Окончательно уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\gamma-1}{\kappa_0} \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma = \quad (26)$$

$$= \frac{1}{4b} \left[(a(R(T)) - c)^2 - (a(R(\tau)) - c)^2 \right] - \frac{1}{\kappa_0} [R(T) - R(\tau)].$$

С учетом естественного начального условия $R(0) = 0$ получим решение в виде

$$\tau = (\gamma-1)^{1/\gamma} \int_0^{R(T)} \left[\frac{\kappa_0}{4b} \left((a(R(T)) - c)^2 - (a(R(z)) - c)^2 \right) - (R(T) - R(z)) \right]^{-1/\gamma} dz, \quad (27)$$

что дает явное выражение τ через $R = R(\tau)$.

Подставляя $\tau = T$, получим уравнение для определения $R(T)$:

$$T = (\gamma-1)^{1/\gamma} \int_0^{R(T)} \left[\frac{\kappa_0}{4b} \left((a(R(T)) - c)^2 - (a(R(z)) - c)^2 \right) - (R(T) - R(z)) \right]^{-1/\gamma} dz. \quad (28)$$

Частный случай

Рассмотрим частный случай, когда

$$q(\tau) = \frac{a_m - (a_m - a_0)e^{-\beta R(\tau)} - c}{2b}. \quad (29)$$

Стационарное значение R_0 определяется уравнением $(a_m - (a_m - a_0)e^{-\beta R_0} - c)(a_m - a)e^{-\beta R_0} \beta = 2b$, решение которого имеет вид

$$R_0 = \frac{1}{\beta(a_m - a_0)} \ln \frac{2\beta}{\beta(a_m - c) - \sqrt{(\beta(a_m - c))^2 - 8b\beta}}. \quad (30)$$

Интеграл (28) приобретает вид

$$T = (\gamma-1)^{1/\gamma} \int_0^{R(T)} \left[\frac{\kappa_0}{4b} \left((a_m - (a_m - a_0)e^{-\beta R(T)} - c)^2 - (a_m - (a_m - a_0)e^{-\beta R(z)} - c)^2 \right) - (R(T) - z) \right]^{-1/\gamma} dz.$$

СМЕЩЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ СПРОС – ЦЕНА ПОД УГЛОМ

Объем товара $g(\tau)$, производимый в момент времени τ , определяется как

$$g(\tau) = \frac{a(R(\tau)) - c}{2b(R(\tau))}.$$

Тогда получаем следующую систему уравнений, описывающую рассматриваемую ситуацию:

$$\begin{cases} \frac{d\Pi(\tau)}{d\tau} = \frac{(a(R(\tau)) - c)^2}{4b(R(\tau))} - \alpha(\tau), \\ \left(\frac{dR(\tau)}{d\tau}\right)^\gamma + R(\tau) = \kappa_0 \alpha(\tau), \end{cases} \quad (31)$$

и нам необходимо решить задачу

$$\Pi(T) = \int_0^T \left[\frac{(a(R(\tau)) - c)^2}{4b(R(\tau))} - \frac{1}{\kappa_0} \left(R(\tau) - \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma \right) \right] d\tau \Rightarrow \max_{R(\tau)}. \quad (32)$$

В данном случае функционал имеет вид

$$F(\tau, R, R') = \frac{(a(R(\tau)) - c)^2}{4b(R(\tau))} - \frac{1}{\kappa_0} \left(R(\tau) - \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma \right). \quad (33)$$

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{(a(R(\tau)) - c)^2}{4b(R(\tau))} - \frac{1}{\kappa_0} \left(R(\tau) - (\gamma - 1) \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma \right) = C. \quad (34)$$

Уравнение, определяющее C :

$$C = \frac{(a(R(T)) - c)^2}{4b(R(T))} - \frac{1}{\kappa_0} R(T).$$

Окончательно уравнение Эйлера имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\gamma - 1}{\kappa_0} \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^\gamma = \\ = \left[\frac{(a(R(T)) - c)^2}{4b(R(T))} - \frac{(a(R(\tau)) - c)^2}{4b(R(\tau))} \right] - \frac{1}{\kappa_0} [R(T) - R(\tau)]. \end{aligned} \quad (35)$$

С учетом естественного начального условия $R(0) = 0$ получим решение в виде

$$\tau = (\gamma - 1)^{1/\gamma} \times \quad (36)$$

$$\times \int_0^{R(\tau)} \frac{dz}{\left[\frac{\kappa_0}{4} \left(\frac{(a(R(T)) - c)^2}{b(R(T))} - \frac{(a(R(z)) - c)^2}{b(R(z))} \right) - (R(T) - R(z)) \right]^{1/\gamma}},$$

что дает явное выражение τ через $R = R(\tau)$.

Подставляя $\tau = T$, получим уравнение для определения $R(T)$:

$$T = (\gamma - 1)^{1/\gamma} \times \quad (37)$$

$$\times \int_0^{R(T)} \frac{dz}{\left[\frac{\kappa_0}{4} \left(\frac{(a(R(T)) - c)^2}{b(R(T))} - \frac{(a(R(z)) - c)^2}{b(R(z))} \right) - (R(T) - R(z)) \right]^{1/\gamma}}.$$

Частный случай

Рассмотрим частный случай, когда

$$q(\tau) = \frac{a_m - (a_m - a_0)e^{-\beta R(\tau)} - c}{4(b_m - (b_m - b_0)e^{-\beta R(\tau)})}. \quad (38)$$

Стационарное значение R_0 определяется уравнением

$$\begin{aligned} 2(a_m - (a_m - a_0)e^{-\beta R_0} - c)(a_m - a_0)e^{-\beta R_0} \times \\ \times \beta(b_m - (b_m - b_0)e^{-\beta R_0}) - \\ - (a_m - (a_m - a_0)e^{-\beta R_0} - c)^2 (b_m - b_0)e^{-\beta R_0} = \\ = 4(b_m - (b_m - b_0)e^{-\beta R_0})^2. \end{aligned}$$

Интеграл (37) приобретает вид

$$\begin{aligned} T = (\gamma - 1)^{1/\gamma} \int_0^{R(T)} \left[\frac{\kappa_0}{4} \left(\frac{(a_m - (a_m - a_0)e^{-\beta R(T)} - c)^2}{b_m - (b_m - b_0)e^{-\beta R(T)}} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{(a_m - (a_m - a_0)e^{-\beta R(z)} - c)^2}{b_m - (b_m - b_0)e^{-\beta R(z)}} \right) - (R(T) - z) \right]^{-1/\gamma} dz. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Астафьева Е.В., Тертугов А.Ф. Математическая модель влияния рекламы на деятельность фирмы // Четвертая Всерос. конф. по финансово-актуарной математике и смежным вопросам: Тез. докл. Красноярск, 2005. С. 19 – 20.
2. Астафьева Е.В., Тертугов А.Ф. Модель рекламной компании, когда цена продажи зависит от рекламы // Обработка данных и управление в сложных системах. Вып. 6. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 13 – 20.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 30 мая 2005 г.