ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ОБЩЕНАУЧНЫЙ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

№ 293 Декабрь 2006

Серия «Информатика. Кибернетика. Математика»

Свидетельства о регистрации: бумажный вариант № 018694, электронный вариант № 018693
выданы Госкомпечати РФ 14 апреля 1999 г.
ISSN: печатный вариант – 1561-7793; электронный вариант – 1561-803X
от 20 апреля 1999 г. Международного центра ISSN (Париж)

СОДЕРЖАНИЕ

FEDERAL AGENCY OF EDUCATION

VESTNIC
TOMSK STATE UNIVERSITY

GENERAL SCIENTIFIC PERIODICAL

№ 293 December 2006

Series «Mathematics. Cybernetics. Informatics»

Certification of registration: printed version № 018694, electronic version № 018693
Issued by Russian Federation state committee for publishing and printing on April, 14, 1999.
ISSN: printed version – 1561-7793; electronic version – 1561-803X
on April, 20, 1999 by International centre ISSN (Paris)

CONTENTS

УДК 519.2

Е.Е. Змеева, А.Ф. Терпугов

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ПРОДАЖИ СКОРОПОРТЯЩЕЙСЯ ПРОДУКЦИИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ «СРЕДНЕЙ СКОРОСТЬЮ» ПРОДАЖ

Исследуется математическая модель продажи скоропортящейся продукции с экспоненциальной «средней скоростью» продаж. Под экспоненциальной «средней скоростью» продаж в работе понимается следующее: в качестве процедуры управления ценой товара выступает равенство, с одной стороны которого – мгновенная скорость продаж, а с другой – экспоненциальный аналог средней скорости продаж. В рамках модели находятся основные вероятностные характеристики процесса изменения количества товара, выводится уравнение для определения среднего времени продажи товара при дополнительном предположении относительно экспоненциального распределения покупок.

На сегодняшний день на рынке существует множество фирм, производящих или продающих различные товары и услуги. Перед любыми фирмами встает вопрос сбыта продукции. Но особенно острым он является для фирм, которые производят товары, не подлежащие длительному хранению. Такие товары либо имеют ограниченный срок хранения, либо теряют свои товарные качества с течением времени. С математической точки зрения задачи подобного рода обычно рассматривались в рамках теории управления запасами, например [1]. В настоящее время теория управления запасами является достаточно подробно разработанным разделом экономико-математических методов. В рамках этой теории разработаны подходы к оптимизации работы пунктов хранения, исследованы самые разнообразные модели, которые отличаются по виду запасов, структурам системы хранения, способам контроля запасов. Разнообразными являются также и математические модели управления запасами: статистические и динамические, детерминированные и стохастические, стационарные и нестационарные, замкнутые и разомкнутые по спросу, со случайными поставками и временем поставок.

Однако методы, описанные в рамках теории управления запасами, с экономической точки зрения больше применимы для достаточно больших компаний. Более того, в этих задачах основной упор делается на оптимизацию процедуры хранения запасов. К самому процессу торговли такая оптимизация не имеет непосредственного отношения, так как для торговой компании (для процесса торговли) действуют совершенно другие критерии оптимальности – получение максимальной выгоды в единицу времени, возможность регулировать спрос, изменяя розничную цену, ограничения на время продажи и т.п. Обычно работы в этой области относятся к микроструктуре рынка [2, 3].

В последнее время появился ряд работ на стыке теории управления запасами и теории микроструктуры товарного рынка [4]. В настоящей работе исследуется математическая модель продажи скоропортящейся продукции с экспоненциальной «средней скоростью» продаж. В рамках модели находятся основные вероятностные характеристики процесса изменения количества товара, выводится уравнение для определения среднего времени продажи товара для экспоненциально распределенных покупок.

Постановка проблемы

Пусть имеется некоторая продукция (например, фрукты, овощи и т.д.), которая портится с течением времени (например, фрукты гниют). Продавец покупает партию такой продукции объема Q_0 по оптовой цене и продает ее по розничной цене c. Торговая сессия начинается в нулевой момент времени и заканчивается в момент времени T, т.е. она занимает интервал времени $[0, T]$. Обозначим через $Q(t)$ количество товара в момент времени t, будем также считать, что объем партии в начальный момент фиксирован, т.е. $Q(0)=Q_0$.

Относительно потока покупателей сделаем следующие предположения. Будем считать, что поток покупателей является пуассоновским потоком интенсивности $\lambda(c)$, которая зависит от текущей цены c. Покупатели приобретают товар независимо друг от друга, а сами величины покупок ξ будем считать случайными величинами с известными двумя начальными моментами $M\{\xi\}=a_1$ и $M\{\xi^2\}=a_2$. Для упрощения выводов, кроме этого, будем считать, что даже если вся партия товара продана, то совершаются некоторые фиктивные покупки (с практической точки зрения это означает, что если бы товар имелся в наличии, его бы купили).

В работе рассматривается следующая процедура управления ценой товара $c(t)$:

$$a_1\lambda(c(t))=\frac{\kappa Q(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}. \qquad (1)$$

Найдем характеристики величины количества товара в диффузионном приближении. Как показано в [5], процесс $Q(t)$ может быть приближенно описан следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dQ(t)=-a_1\lambda(c)dt+\sqrt{a_2\lambda(c)}dw(t),$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский случайный процесс.

С учетом (1) последнее уравнение принимает следующий вид:

$$dQ(t)=-\frac{\kappa Q(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}dt+$$
$$+\sqrt{\frac{a_2}{a_1}\frac{\kappa Q(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}}dw(t). \qquad (2)$$

Найдем основные вероятностные характеристики процесса $Q(t)$ в этом случае.

Математическое ожидание процесса изменения количества товара

Обозначим $M\{Q(t)\} = \overline{Q}(t)$. Усредняя уравнение (2) с учетом того, что приращения винеровского случайного процесса независимы и имеют нулевое математическое ожидание, получим следующее дифференциальное уравнение, определяющее $\overline{Q}(t)$:

$$d\overline{Q}(t) = -\frac{\kappa \overline{Q}(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}\, dt .$$

Это уравнение решается стандартным методом разделение переменных, в результате получим

$$\overline{Q}(t) = C\,\frac{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}{\exp\{\kappa(T-t)\}} .$$

Неизвестная константа C определяется из граничного условия $\overline{Q}(0) = Q_0$, таким образом, окончательно

$$\overline{Q}(t) = Q_0\,\frac{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}{\exp\{\kappa T\}-1}\exp\{\kappa t\}, \qquad (3)$$

заметим, что, в частности, $\overline{Q}(T) = 0$.

Дисперсия процесса изменения количества товара

Для нахождения дисперсии процесса $Q(t)$ воспользуемся формулой Ито [6]. Если процесс $Q(t)$ определяется уравнением

$$dQ(t) = a(Q,t)dt + b(Q,t)dw(t),$$

то процесс $y(t) = f(Q,t)$ также будет являться диффузионным и удовлетворять следующему уравнению:

$$df(Q,t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + a(Q,t)\frac{\partial f}{\partial Q} + \frac{b^2(Q,t)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Q^2}\right]dt + $$
$$+ b(Q,t)\frac{\partial f}{\partial Q}\,dw(t).$$

В нашем случае возьмем $df(Q,t) = Q^2$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial Q} = 2Q$, $\frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} = 2$ и формула Ито дает

$$df(Q,t) =$$
$$= -\left[\frac{2\kappa Q^2(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1} + \frac{a_2}{a_1}\frac{\kappa Q(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}\right]dt +$$
$$+ 2Q(t)\sqrt{\frac{a_2}{a_1}\frac{\kappa Q(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}}\,dw(t). \qquad (4)$$

Обозначим $M\{Q^2(t)\} = Q_2(t)$. Тогда, усредняя (4) и учитывая (3), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = -2Q_2(t)\frac{\kappa}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1} +$$
$$+ \frac{a_2}{a_1}\frac{\kappa\exp\{\kappa t\}}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}Q_0 .$$

Решение этого уравнения стандартным методом вариации произвольных постоянных [7] с учетом начального условия $Q_2(0) = Q_0^2$ приводит к следующему результату:

$$Q_2(t) = \left(\frac{a_2}{a_1}\frac{1-\exp\{-\kappa t\}}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1} + Q_0\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\exp\{\kappa t\}}{\exp\{\kappa t\}-1}\frac{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}{\exp\{\kappa(T-t)\}}\right)^2 Q_0 .$$

Теперь достаточно легко определить дисперсию процесса $Q(t)$, используя стандартную формулу

$$D\{Q(t)\} = D_Q(t) = Q_2(t) - \overline{Q}^2(t) =$$
$$= \frac{a_2}{a_1}\frac{\exp\{\kappa t\}-1}{(\exp\{\kappa T\}-1)^2}(\exp\{\kappa T\} - \exp\{\kappa t\})Q_0 . \qquad (5)$$

Плотность вероятности процесса изменения количества товара

Из полученного выше следует, что процесс $Q(t)$ начинается в Q_0 и заканчивается в 0 с вероятностью 1. Снова воспользуемся формулой Ито, только сейчас выберем в качестве $f(Q,t) = \exp\{-pQ\}$, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial Q} = -p\exp\{-pQ\},\ \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} = p^2\exp\{-pQ\},$$

следовательно,

$$df(Q,t) =$$
$$= -\left[\frac{\kappa p Q(t)\exp\{-pQ\}}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1} + \frac{a_2}{a_1}\frac{\kappa p^2 Q(t)\exp\{-pQ\}}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}\right]dt -$$
$$- p\exp\{-pQ\}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}\frac{\kappa Q(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}}\,dw(t). \qquad (6)$$

Рассмотрим преобразование Лапласа от плотности вероятностей $p(Q,t)$ значений процесса $Q(t)$ в момент времени t – функцию $\Phi(p,t) = M\{\exp\{-pQ\}\}$. Тогда, усредняя (6), получим следующее линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\left(\exp\{\kappa(T-t)\}-1\right)\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\kappa p\left(1+\frac{a_2}{2a_1}p\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p}=0\,. \quad (7)$$

Введем обозначение $\beta=2a_1/a_2$, тогда решение уравнения (7) методом характеристик приводит к следующему выражению для $\Phi(p,t)$:

$$\Phi(p,t)=\exp\left\{-\frac{p\beta Q_0\left(\exp\{\kappa T\}-\exp\{\kappa t\}\right)}{p(\exp\{\kappa t\}-1)+\beta\exp\{\kappa T\}-1}\right\}.$$

Согласно таблицам обратного преобразования Лапласа [8, 9]:

$$\exp\left\{\frac{1}{a(p+\beta)}\right\}-1\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{aQ}}\exp\{-bQ\}I_1\left(2\sqrt{Q/a}\right).$$

Окончательно в нашем случае после достаточно громоздких преобразований получим

$$p(Q,t)=\exp\left\{-\frac{\beta Q_0\left(\exp\{\kappa T\}-\exp\{\kappa t\}\right)}{\exp\{\kappa t\}-1}\right\}\times$$
$$\times\left[\delta(Q)+\frac{\beta}{\exp\{\kappa t\}-1}\exp\left\{-\frac{\beta Q(\exp\{\kappa T\}-1)}{\exp\{\kappa t\}-1}\right\}\times\right.$$
$$\times\sqrt{(\exp\{\kappa T\}-\exp\{\kappa t\})Q_0(\exp\{\kappa T\}-1)}\times$$
$$\left.\times I_1\left(\frac{2\beta}{\exp\{\kappa t\}-1}\sqrt{\left(\exp\{\kappa T\}-\exp\{\kappa t\}\right)QQ_0\left(\exp\{\kappa T\}-1\right)}\right)\right].$$

Отметим особую роль слагаемого

$$\delta(Q)\exp\left\{-\frac{\beta Q_0\left(\exp\{\kappa T\}-\exp\{\kappa t\}\right)}{\exp\{\kappa t\}-1}\right\},$$

содержащего δ-функцию. Это слагаемое возникает, так как величина покупки является случайной, и, следовательно, не исключен вариант, при котором некоторый покупатель приобретает весь оставшийся товар, в этом случае процесс торговли для продавца закончится. С математической точки зрения это означает, что, начиная с некоторого момента времени t^* ($Q(t^*)=0$), коэффициенты сноса и диффузии процесса $Q(t)$ тождественно равны 0, следовательно, для $\forall\ \ t>t^*\ \ Q(t)\equiv 0$.

Вывод уравнения для определения среднего времени продаж при экспоненциальном распределении величины покупки

Теперь, задав конкретное распределение величины покупки, получим уравнение для определения среднего времени продаж. Обозначим через $m(Q,t)$ среднее время, оставшееся до окончания продажи, если в момент времени t количество товара было Q. Далее для экспоненциально распределенных покупок имеем

$$p_\xi(z)=\frac{1}{a_1}\exp\left\{-\frac{z}{a_1}\right\},$$

заметим также, что, согласно сделанным предположениям, можно считать, что $\lambda=\lambda(Q,t)$.

Рассмотрим промежуток времени длиной Δt. За этот интервал времени возможны следующие существенные события, вероятность которых отлична от $o(\Delta t)$.

а) С вероятностью $1-\lambda(Q,t)\Delta t+o(\Delta t)$ покупки не было. В этом случае время, оставшееся до окончания продаж, будет равно $m(Q,t+\Delta t)$.

б) С вероятностью $\lambda(Q,t)\Delta t+o(\Delta t)$ сделана покупка. Если величина этой покупки ξ будет меньше Q, то время, оставшееся до окончания продажи товара, будет равно $m(Q-\xi,t+\Delta t)$, если же $\xi\ge Q$, то весь товар будет продан, а время, оставшееся до окончания продажи, будет, естественно, равно 0.

Тогда с точностью до $o(\Delta t)$ можно записать следующее соотношение:

$$m(Q,t)=\Delta t+(1-\lambda(Q,t)\Delta t)m(Q,t+\Delta t)+$$
$$+\frac{\lambda(Q,t)\Delta t}{a_1}\int_0^Q m(Q-z,t+\Delta t)\exp\{-z/a_1\}dz+o(\Delta t).$$

Разложим функцию $m(Q,t+\Delta t)$ в ряд Тейлора:

$$m(Q,t+\Delta t)=m(Q,t)+\frac{\partial m(Q,t)}{t}\Delta t+o(\Delta t),$$

далее, после ряда преобразований, получим с точностью до $o(\Delta t)$

$$m(Q,t)=\Delta t+(1-\lambda(Q,t)\Delta t)m(Q,t)+$$
$$+\frac{\lambda(Q,t)\Delta t}{a_1}\int_0^Q m(Q-z,t+\Delta t)\exp\{-z/a_1\}dz+o(\Delta t).$$

Сокращая $m(Q,t)$ и переходя к переделу при $\Delta t\to 0$, окончательно имеем

$$\frac{\partial m(Q,t)}{\partial t}=$$
$$=\lambda(Q,t)m(Q,t)-\frac{\lambda(Q,t)}{a_1}\int_0^Q m(Q-z,t+\Delta t)e^{-z/a_1}dz-1.$$

Учитывая условие (1), окончательно

$$\frac{\partial m(Q,t)}{\partial t}=\frac{\kappa Q(t)}{a_1\left(\exp\{\kappa(T-t)-1\}\right)}m(Q,t)-$$
$$-\frac{\kappa Q(t)}{a_1^2\left(\exp\{\kappa(T-t)-1\}\right)}\int_0^Q m(Q-z,t+\Delta t)e^{-z/a_1}dz-1\,. \quad (8)$$

Для решения последнего уравнения введем функцию

$$\mathrm{M}(q,t)=\int_0^\infty m(Q,t)e^{-qQ}dQ\,,$$

которая является преобразованием Лапласа от функции $m(Q,t)$ по аргументу Q, т.е. $\mathrm{M}(q,t)\Leftrightarrow m(Q,t)$. Далее по свойствам преобразования Лапласа имеем

$$\frac{1}{a_1}\int_0^\infty e^{-\frac{z}{a_1}-qz}dz \Leftrightarrow \frac{1}{a_1q+1}\,,$$

$$\frac{1}{a_1}\int_0^Q m(Q-z,t+\Delta t)e^{-z/a_1}dz \Leftrightarrow \frac{\mathrm{M}(q,t)}{a_1q+1}\,.$$

Теперь, учитывая следующее свойство преобразования Лапласа, если $f(Q)\Leftrightarrow\Psi(q)$, то $Qf(Q)\Leftrightarrow\partial\Psi(q)/\partial q$, умножая уравнение (8) на $\exp\{-qQ\}$ и интегрируя по Q в пределах $[0,\infty)$, после ряда преобразований получим

$$\frac{\partial\mathrm{M}(q,t)}{\partial t}-\frac{\kappa}{a_1(\exp\{\kappa(T-t)\})}\frac{q}{(a_1q+1)}\frac{\partial\mathrm{M}(q,t)}{\partial q}+$$
$$+\frac{\kappa}{a_1(\exp\{\kappa(T-t)\})}\frac{\mathrm{M}(q,t)}{(a_1q+1)^2}=-\frac{1}{q}\,.$$

Последнее уравнение является линейным неоднородным уравнением в частных производных первого порядка. К сожалению, в явном виде найти решение этого уравнения, а следовательно, и преобразования Лапласа от среднего времени продаж не удается. Последовательное решение последнего уравнения стандартными методами приводит к следующему результату:

$$\Phi\left(qe^q\,\frac{\exp\{\kappa(T-t)\}}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1},\frac{a_1q+1}{a_1q}\exp\{-\mathrm{M}(q,t)\}\right)=0\,,$$

где $\Phi(\cdot)$ – некоторая аналитическая функция.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рубальский Г.Б.* Вероятностные и вычислительные методы оптимального управления запасами. М.: Знание, 1987.
2. *Biasis B., Foucalt T., Salanie F.* Floors, Dealer Markets and Limit Order Markets // Journal of Financial Markets. 1998. № 1. P. 253–284.
3. *Vayanoc D.* Strategic Trading and Welfare in a Dinamic Market // Review of Economic Studies. 1999. Vol. 66. P. 219–254.
4. *Новицкая Е.В., Терпугов А.Ф.* Оптимизация розничной продажи скоропортящейся продукции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. 93 с.
5. *Змеев О.А., Новицкая Е.В.* Вероятностные характеристики длительности торговой сессии и оценка ее параметров // Обработка данных и управление в сложных системах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 66–75.
6. *Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988. 174 с.
7. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1980. 284 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969. Т. 1. 343 с.
9. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 465 с.

Статья представлена кафедрой прикладной информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 30 мая 2006 г.