

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
**ВЕСТНИК**  
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ОБЩЕНАУЧНЫЙ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

№ 293

Декабрь

2006

Серия «Информатика. Кибернетика. Математика»

Свидетельства о регистрации: бумажный вариант № 018694, электронный вариант № 018693  
выданы Госкомпечати РФ 14 апреля 1999 г.  
ISSN: печатный вариант – 1561-7793; электронный вариант – 1561-803X  
от 20 апреля 1999 г. Международного центра ISSN (Париж)

**СОДЕРЖАНИЕ**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Галажинская О.Н. Продажа товара нетерпеливым продавцом при ступенчатом изменении цены .....	5
Демин Н.С., Маркелова А.В. Исследование экзотического опциона продажи в биномиальной модели в случае притока и оттока капитала .....	12
Демин Н.С., Рожкова С.В. Информационный анализ в совместной задаче фильтрации, интерполяции и экстраполяции по непрерывно-дискретным наблюдениям с памятью .....	18
Демин Н.С., Трунов А.И. Исследование опциона продажи в случае квантильного хеджирования .....	25
Змеева Е.Е., Терпугов А.Ф. Исследование математической модели процесса продажи скоропортящейся продукции с экспоненциальной «средней скоростью» продаж .....	31
Китаева А.В., Терпугов А.Ф. Модель фонда социального страхования при релейном управлении капиталом и экспоненциально распределенных страховых выплатах и выплатах по социальным программам .....	35
Лившиц К.И., Шифердекер И.Ю. Диффузионная аппроксимация математической модели деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом .....	38
Масяйкин С.А. Построение переговорного множества при конкурентном взаимодействии двух страховых компаний, функционирующих по модели, предложенной О.А. Змеевым .....	45
Морозова А.С., Моисеева С.П., Назаров А.А. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации .....	49
Поддубный В.В., Сухарева Е.А. Исследование динамической модели рынка вальрасовского типа со многими товарами .....	53
Решетникова Г.Н. Синтез и моделирование системы управления поставками .....	59
Семенкин Е.С., Медведев А.В., Ворожейкин А.Ю. Модели и алгоритмы для поддержки принятия решений инвестиционного анализа .....	63
Смагин В.И. Локально-оптимальное управление при расхождении встречных судов .....	71
Чаусова Е.В. Динамическая сетевая модель управления запасами с интервально заданным нестационарным спросом и интервальными коэффициентами потерь запаса .....	75

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

Головчинер О.Н., Дмитриев Ю.Г. Статистическое оценивание функционала с учетом симметрии распределения .....	84
Горбенко К.А. Кумулятивный поток .....	88
Дмитриев Ю.Г., Зенкова Ж.Н. Ядерная оценка плотности неравноплечно симметричного распределения .....	96
Карлыханова Т.А., Моисеева С.П., Назаров А.А. Исследование системы $MAP/M/\infty$ методом моментов .....	99
Кашковский Д.В. Последовательная идентификация параметров авторегрессии со случайными коэффициентами .....	105
Лопухова С.В., Назаров А.А. Исследование MAP-потока методом асимптотического анализа $N$ -го порядка .....	110
Назаров А.А., Цой С.А. Применение характеристических функций для асимптотического исследования сетей связи с динамическим протоколом случайного множественного доступа .....	116
Поддубный В.В., Шевелев О.Г., Бормашов Д.А. Сравнение качества подходов к кластеризации текстов на основе гипергеометрического критерия .....	120
Смагин С.В. Управление выходом линейной дискретной системы с мультипликативными возмущениями .....	126
Цой С.А. Применение характеристических функций для асимптотического исследования сетей связи со статическими протоколами случайного множественного доступа .....	129

**ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

Бабанов А.М. Развитие формальной системы теории семантически значимых отображений .....	135
Бабанов А.М., Магур П.С. Исследование функциональных отображений тернарного отношения с целью определения условий нормальной формы Бойса–Кодда .....	140
Бабанов А.М., Синченко Н.И. К вопросу о трансформации «IS-A»-иерархий из EER-модели в реляционную модель .....	143
Костюк Ю.Л., Абдуллин Ю.Э., Чертов А.А. Первичная векторизация многоцветных растров с использованием триангуляции и процедуры постобработки .....	147
Костюк Ю.Л., Гульбин К.Г., Пешехонов С.В. Построение поверхностной триангуляции и выделение пространственных фигур по данным лазерного сканирования .....	151
Моисеев А.Н. Контроллер интерфейса пользователя с повышенной степенью повторной используемости .....	156
Нагул Н.В. О сохранении свойств многоосновных алгебраических систем .....	158
Останин С.А. Задержки проявления неисправностей при контроле работы автомата в режиме функционирования .....	165

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ .....	171
АННОТАЦИИ СТАТЕЙ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ .....	174

FEDERAL AGENCY OF EDUCATION  
**VESTNIC**  
**TOMSK STATE UNIVERSITY**  
GENERAL SCIENTIFIC PERIODICAL

№ 293

December

2006

Series «**Mathematics. Cybernetics. Informatics**»

Certification of registration: printed version № 018694, electronic version № 018693  
Issued by Russian Federation state committee for publishing and printing on April, 14, 1999.  
ISSN: printed version – 1561-7793; electronic version – 1561-803X  
on April, 20, 1999 by International centre ISSN (Paris)

**CONTENTS**

**MATHEMATICAL MODELING**

<b>Galaginskaya O.N.</b> The selling of single good by impatient seller with discrete changes of price .....	5
<b>Dyomin N.S., Markelova A.V.</b> Research of the exotic put option incase of capital inflow and outflow in binomial model .....	12
<b>Dyomin N.S., Rozhkova S.V.</b> Information analysis for joint filtering-interpolation-extrapolation problems by continuous-discrete observations with memory .....	18
<b>Dyomin N.S., Trunov A.I.</b> Research of the put option in case of quantile hedging .....	25
<b>Zmeyeva Ye.Ye., Terpugov A.F.</b> Investigation of mathematicAL model of selling of quickly spoiled food with an exponential average speed of selling .....	31
<b>Kitaeva A.V., Terpugov A.F.</b> The model of the social insurance fund on the relay management of capital and exponential distributed insurance payments and payments on social programs .....	35
<b>Livshits K.I., Shiferdeker I.Yu.</b> Diffuse approximation of mathematical model of incomercial fund functioning under the relay control of its capital .....	38
<b>Masjaykin S.A.</b> The construction of negotiated set at competition of two insurance companies functioning according to model suggested O.A. Zmeev .....	45
<b>Morozova A.S., Moiseeva C.P., Nazarov A.A.</b> Investigation of the economic-mathematical model of discount for patrons influence on income of trading company .....	49
<b>Poddubny V.V., Sukhareva E.A.</b> The research of dynamic model of walrasian market with many goods .....	53
<b>Reshetnikova G.N.</b> Syntesis and modelling of the system for supply control .....	59
<b>Semenkin E.S., Medvedev A.V., Vorozheykin A.Yu.</b> models and algorithms for decision support of investment analyst .....	63
<b>Smagin V.I.</b> Local-optimal control with divergence counter ships .....	71
<b>Chausova E.V.</b> Dynamic Network Inventory control model with interval assigned nonstationary demand and interval assigned storage loss rates. .....	75

**PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS**

<b>Golovchiner O.N., Dmitriev Yu.G.</b> Statistical estimation of a functional subject to distribution symmetry .....	84
<b>Gorbenko K.A.</b> Cumulative stream .....	88
<b>Dmitriev U.G., Zenkova Zh.N.</b> Kernel estimation of density function for unequal-arm symmetric distribution .....	96
<b>Nazarov A.A., Karlyhanova T.A., Moiseeva S.P.</b> Research of system $MAP / M / \infty$ by the method of moments .....	99
<b>Kashkovsky D.</b> Sequential identification of parameters of random coefficient autoregression .....	105
<b>Lopuchova S.V., Nazarov A.A.</b> Research of Markovian arrival process by the asymptotical analysis method of the N-th order .....	110
<b>Nazarov A.A., Tsoy S.A.</b> Generic function application for asymptotic analysis of carrier sense multiple access with collision detection networks with dynamic protocol .....	116
<b>Poddubny V.V., Shevelov O.G., Bormashov D.A.</b> A Comparision of texts clusterization methods quality on the base of hypergeometrical criterion .....	120
<b>Smagin S.V.</b> Output control of linear discrete system with multiplicative noise .....	126
<b>Tsoy S.A.</b> Generic function application for asymptotic analysis of carrier sense multiple access with collision detection networks with static protocols .....	129

**INFORMATICS AND PROGRAMMING**

<b>Babanov A.M.</b> Development of formal system for the semantically significant mappings theory .....	135
<b>Babanov A.M., Magur P.S.</b> Research of the ternary relation functional mappings with the purpose of conditions definition for the Boyes-Codd normal form .....	140
<b>Babanov A.M., Sinchenko N.I.</b> On the transformation of «IS-A»-hierarchies in EER-model into relational schema .....	143
<b>Kostyuk Yu.L., Abdulin Yu.E., Chertov A.A.</b> Triangulation-based vectorization of multicolor raster images and postprocessing algorithms .....	147
<b>Kostyuk Yu.L., Gulbin K.G., Peshehonov S.V.</b> Surface tin construction and spatial figures extraction using laser scan data .....	151
<b>Moiseev A.N.</b> Human interface controller with high-level code reuse .....	156
<b>Nagul N.V.</b> About the preservation of the many-sorted algebraic systems' properties .....	158
<b>Ostainin S.A.</b> Fault latencies of concurrent checking FSMs .....	165
<b>BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS</b> .....	171
<b>SUMMARIES OF THE ARTICLES IN ENGLISH</b> .....	174

## ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ПРОДАЖИ СКОРОПОРТЯЩЕЙСЯ ПРОДУКЦИИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ «СРЕДНЕЙ СКОРОСТЬЮ» ПРОДАЖ

Исследуется математическая модель продажи скоропортящейся продукции с экспоненциальной «средней скоростью» продаж. Под экспоненциальной «средней скоростью» продаж в работе понимается следующее: в качестве процедуры управления ценой товара выступает равенство, с одной стороны которого – мгновенная скорость продаж, а с другой – экспоненциальный аналог средней скорости продаж. В рамках модели находятся основные вероятностные характеристики процесса изменения количества товара, выводится уравнение для определения среднего времени продажи товара при дополнительном предположении относительно экспоненциального распределения покупок.

На сегодняшний день на рынке существует множество фирм, производящих или продающих различные товары и услуги. Перед любыми фирмами встает вопрос сбыта продукции. Но особенно острым он является для фирм, которые производят товары, не подлежащие длительному хранению. Такие товары либо имеют ограниченный срок хранения, либо теряют свои товарные качества с течением времени. С математической точки зрения задачи подобного рода обычно рассматривались в рамках теории управления запасами, например [1]. В настоящее время теория управления запасами является достаточно подробно разработанным разделом экономико-математических методов. В рамках этой теории разработаны подходы к оптимизации работы пунктов хранения, исследованы самые разнообразные модели, которые отличаются по виду запасов, структурам системы хранения, способам контроля запасов. Разнообразными являются также и математические модели управления запасами: статистические и динамические, детерминированные и стохастические, стационарные и нестационарные, замкнутые и разомкнутые по спросу, со случайными поставками и временем поставок.

Однако методы, описанные в рамках теории управления запасами, с экономической точки зрения больше применимы для достаточно больших компаний. Более того, в этих задачах основной упор делается на оптимизацию процедуры хранения запасов. К самому процессу торговли такая оптимизация не имеет непосредственного отношения, так как для торговой компании (для процесса торговли) действуют совершенно другие критерии оптимальности – получение максимальной выгоды в единицу времени, возможность регулировать спрос, изменяя розничную цену, ограничения на время продажи и т.п. Обычно работы в этой области относятся к микроструктуре рынка [2, 3].

В последнее время появился ряд работ на стыке теории управления запасами и теории микроструктуры товарного рынка [4]. В настоящей работе исследуется математическая модель продажи скоропортящейся продукции с экспоненциальной «средней скоростью» продаж. В рамках модели находятся основные вероятностные характеристики процесса изменения количества товара, выводится уравнение для определения среднего времени продажи товара для экспоненциально распределенных покупок.

### Постановка проблемы

Пусть имеется некоторая продукция (например, фрукты, овощи и т.д.), которая портится с течением времени (например, фрукты гниют). Продавец покупает партию такой продукции объема  $Q_0$  по оптовой цене и продает ее по розничной цене  $c$ . Торговая сессия начинается в нулевой момент времени и заканчивается в момент времени  $T$ , т.е. она занимает интервал вре-

мени  $[0, T]$ . Обозначим через  $Q(t)$  количество товара в момент времени  $t$ , будем также считать, что объем партии в начальный момент фиксирован, т.е.  $Q(0) = Q_0$ .

Относительно потока покупателей сделаем следующие предположения. Будем считать, что поток покупателей является пуассоновским потоком интенсивности  $\lambda(c)$ , которая зависит от текущей цены  $c$ . Покупатели приобретают товар независимо друг от друга, а сами величины покупок  $\xi$  будем считать случайными величинами с известными двумя начальными моментами  $M\{\xi\} = a_1$  и  $M\{\xi^2\} = a_2$ . Для упрощения выводов, кроме этого, будем считать, что даже если вся партия товара продана, то совершаются некоторые фиктивные покупки (с практической точки зрения это означает, что если бы товар имелся в наличии, его бы купили).

В работе рассматривается следующая процедура управления ценой товара  $c(t)$ :

$$a_1 \lambda(c(t)) = \frac{\kappa Q(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\} - 1}. \quad (1)$$

Найдем характеристики величины количества товара в диффузионном приближении. Как показано в [5], процесс  $Q(t)$  может быть приближенно описан следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dQ(t) = -a_1 \lambda(c) dt + \sqrt{a_2 \lambda(c)} dw(t),$$

где  $w(t)$  – стандартный винеровский случайный процесс.

С учетом (1) последнее уравнение принимает следующий вид:

$$dQ(t) = -\frac{\kappa Q(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\} - 1} dt + \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \frac{\kappa Q(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\} - 1}} dw(t). \quad (2)$$

Найдем основные вероятностные характеристики процесса  $Q(t)$  в этом случае.

### Математическое ожидание процесса изменения количества товара

Обозначим  $M\{Q(t)\} = \bar{Q}(t)$ . Усредняя уравнение (2) с учетом того, что приращения винеровского случайного процесса независимы и имеют нулевое математическое ожидание, получим следующее дифференциальное уравнение, определяющее  $\bar{Q}(t)$ :

$$d\bar{Q}(t) = -\frac{\kappa\bar{Q}(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1} dt.$$

Это уравнение решается стандартным методом разделение переменных, в результате получим

$$\bar{Q}(t) = C \frac{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}{\exp\{\kappa(T-t)\}}.$$

Неизвестная константа  $C$  определяется из граничного условия  $\bar{Q}(0) = Q_0$ , таким образом, окончательно

$$\bar{Q}(t) = Q_0 \frac{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}{\exp\{\kappa T\}-1} \exp\{\kappa t\}, \quad (3)$$

заметим, что, в частности,  $\bar{Q}(T) = 0$ .

### Дисперсия процесса изменения количества товара

Для нахождения дисперсии процесса  $Q(t)$  воспользуемся формулой Ито [6]. Если процесс  $Q(t)$  определяется уравнением

$$dQ(t) = a(Q, t)dt + b(Q, t)dW(t),$$

то процесс  $y(t) = f(Q, t)$  также будет являться диффузионным и удовлетворять следующему уравнению:

$$df(Q, t) = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + a(Q, t) \frac{\partial f}{\partial Q} + \frac{b^2(Q, t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} \right] dt + b(Q, t) \frac{\partial f}{\partial Q} dW(t).$$

В нашем случае возьмем  $df(Q, t) = Q^2$ . Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial Q} = 2Q, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} = 2 \text{ и формула Ито дает}$$

$$df(Q, t) = - \left[ \frac{2\kappa Q^2(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1} + \frac{a_2}{a_1} \frac{\kappa Q(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1} \right] dt +$$

$$+ 2Q(t) \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \frac{\kappa Q(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}} dW(t). \quad (4)$$

Обозначим  $M\{Q^2(t)\} = Q_2(t)$ . Тогда, усредняя (4) и учитывая (3), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = -2Q_2(t) \frac{\kappa}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1} + \frac{a_2}{a_1} \frac{\kappa \exp\{\kappa t\}}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1} Q_0.$$

Решение этого уравнения стандартным методом вариации произвольных постоянных [7] с учетом начального условия  $Q_2(0) = Q_0^2$  приводит к следующему результату:

$$Q_2(t) = \left( \frac{a_2}{a_1} \frac{1 - \exp\{-\kappa t\}}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1} + Q_0 \right) \times \left( \frac{\exp\{\kappa t\}}{\exp\{\kappa T\}-1} \frac{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}{\exp\{\kappa(T-t)\}} \right)^2 Q_0.$$

Теперь достаточно легко определить дисперсию процесса  $Q(t)$ , используя стандартную формулу

$$D\{Q(t)\} = D_Q(t) = Q_2(t) - \bar{Q}^2(t) = \frac{a_2}{a_1} \frac{\exp\{\kappa t\}-1}{(\exp\{\kappa T\}-1)^2} (\exp\{\kappa T\} - \exp\{\kappa t\}) Q_0. \quad (5)$$

### Плотность вероятности процесса изменения количества товара

Из полученного выше следует, что процесс  $Q(t)$  начинается в  $Q_0$  и заканчивается в 0 с вероятностью 1. Снова воспользуемся формулой Ито, только сейчас выберем в качестве  $f(Q, t) = \exp\{-pQ\}$ , тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial Q} = -p \exp\{-pQ\}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} = p^2 \exp\{-pQ\},$$

следовательно,

$$df(Q, t) = - \left[ \frac{\kappa p Q(t) \exp\{-pQ\}}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1} + \frac{a_2}{a_1} \frac{\kappa p^2 Q(t) \exp\{-pQ\}}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1} \right] dt - p \exp\{-pQ\} \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \frac{\kappa Q(t)}{\exp\{\kappa(T-t)\}-1}} dW(t). \quad (6)$$

Рассмотрим преобразование Лапласа от плотности вероятностей  $p(Q, t)$  значений процесса  $Q(t)$  в момент времени  $t$  – функцию  $\Phi(p, t) = M\{\exp\{-pQ\}\}$ . Тогда, усредняя (6), получим следующее линейное дифферен-

циальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$(\exp\{\kappa(T-t)\}-1)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \kappa p \left(1 + \frac{a_2}{2a_1} p\right) \frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0. \quad (7)$$

Введем обозначение  $\beta = 2a_1/a_2$ , тогда решение уравнения (7) методом характеристик приводит к следующему выражению для  $\Phi(p, t)$ :

$$\Phi(p, t) = \exp\left\{-\frac{p\beta Q_0(\exp\{\kappa T\}-\exp\{\kappa t\})}{p(\exp\{\kappa t\}-1)+\beta\exp\{\kappa T\}-1}\right\}.$$

Согласно таблицам обратного преобразования Лапласа [8, 9]:

$$\exp\left\{\frac{1}{a(p+\beta)}\right\}-1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{aQ}} \exp\{-bQ\} I_1(2\sqrt{Q/a}).$$

Окончательно в нашем случае после достаточно громоздких преобразований получим

$$p(Q, t) = \exp\left\{-\frac{\beta Q_0(\exp\{\kappa T\}-\exp\{\kappa t\})}{\exp\{\kappa t\}-1}\right\} \times \\ \times \left[\delta(Q) + \frac{\beta}{\exp\{\kappa t\}-1} \exp\left\{-\frac{\beta Q(\exp\{\kappa T\}-1)}{\exp\{\kappa t\}-1}\right\} \times \right. \\ \times \sqrt{(\exp\{\kappa T\}-\exp\{\kappa t\})Q_0(\exp\{\kappa T\}-1)} \times \\ \left. \times I_1\left(\frac{2\beta}{\exp\{\kappa t\}-1} \sqrt{(\exp\{\kappa T\}-\exp\{\kappa t\})Q_0(\exp\{\kappa T\}-1)}\right)\right].$$

Отметим особую роль слагаемого

$$\delta(Q) \exp\left\{-\frac{\beta Q_0(\exp\{\kappa T\}-\exp\{\kappa t\})}{\exp\{\kappa t\}-1}\right\},$$

содержащего  $\delta$ -функцию. Это слагаемое возникает, так как величина покупки является случайной, и, следовательно, не исключен вариант, при котором некоторый покупатель приобретает весь оставшийся товар, в этом случае процесс торговли для продавца закончится. С математической точки зрения это означает, что, начиная с некоторого момента времени  $t^*$  ( $Q(t^*)=0$ ), коэффициенты сноса и диффузии процесса  $Q(t)$  тождественно равны 0, следовательно, для  $\forall t > t^*$   $Q(t) \equiv 0$ .

### Вывод уравнения для определения среднего времени продаж при экспоненциальном распределении величины покупки

Теперь, задав конкретное распределение величины покупки, получим уравнение для определения среднего времени продаж. Обозначим через  $m(Q, t)$  среднее

время, оставшееся до окончания продажи, если в момент времени  $t$  количество товара было  $Q$ . Далее для экспоненциально распределенных покупок имеем

$$p_\xi(z) = \frac{1}{a_1} \exp\left\{-\frac{z}{a_1}\right\},$$

заметим также, что, согласно сделанным предположениям, можно считать, что  $\lambda = \lambda(Q, t)$ .

Рассмотрим промежуток времени длиной  $\Delta t$ . За этот интервал времени возможны следующие существенные события, вероятность которых отлична от  $o(\Delta t)$ .

а) С вероятностью  $1 - \lambda(Q, t)\Delta t + o(\Delta t)$  покупки не было. В этом случае время, оставшееся до окончания продаж, будет равно  $m(Q, t + \Delta t)$ .

б) С вероятностью  $\lambda(Q, t)\Delta t + o(\Delta t)$  сделана покупка. Если величина этой покупки  $\xi$  будет меньше  $Q$ , то время, оставшееся до окончания продажи товара, будет равно  $m(Q - \xi, t + \Delta t)$ , если же  $\xi \geq Q$ , то весь товар будет продан, а время, оставшееся до окончания продажи, будет, естественно, равно 0.

Тогда с точностью до  $o(\Delta t)$  можно записать следующее соотношение:

$$m(Q, t) = \Delta t + (1 - \lambda(Q, t)\Delta t)m(Q, t + \Delta t) + \\ + \frac{\lambda(Q, t)\Delta t}{a_1} \int_0^Q m(Q - z, t + \Delta t) \exp\{-z/a_1\} dz + o(\Delta t).$$

Разложим функцию  $m(Q, t + \Delta t)$  в ряд Тейлора:

$$m(Q, t + \Delta t) = m(Q, t) + \frac{\partial m(Q, t)}{t} \Delta t + o(\Delta t),$$

далее, после ряда преобразований, получим с точностью до  $o(\Delta t)$

$$m(Q, t) = \Delta t + (1 - \lambda(Q, t)\Delta t)m(Q, t) + \\ + \frac{\lambda(Q, t)\Delta t}{a_1} \int_0^Q m(Q - z, t + \Delta t) \exp\{-z/a_1\} dz + o(\Delta t).$$

Сокращая  $m(Q, t)$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , окончательно имеем

$$\frac{\partial m(Q, t)}{\partial t} = \\ = \lambda(Q, t)m(Q, t) - \frac{\lambda(Q, t)}{a_1} \int_0^Q m(Q - z, t + \Delta t) e^{-z/a_1} dz - 1.$$

Учитывая условие (1), окончательно

$$\frac{\partial m(Q, t)}{\partial t} = \frac{\kappa Q(t)}{a_1(\exp\{\kappa(T-t)-1\})} m(Q, t) - \\ - \frac{\kappa Q(t)}{a_1^2(\exp\{\kappa(T-t)-1\})} \int_0^Q m(Q - z, t + \Delta t) e^{-z/a_1} dz - 1. \quad (8)$$

Для решения последнего уравнения введем функцию

$$M(q, t) = \int_0^{\infty} m(Q, t) e^{-qQ} dQ,$$

которая является преобразованием Лапласа от функции  $m(Q, t)$  по аргументу  $Q$ , т.е.  $M(q, t) \Leftrightarrow m(Q, t)$ . Далее по свойствам преобразования Лапласа имеем

$$\frac{1}{a_1} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{a_1} - qz} dz \Leftrightarrow \frac{1}{a_1 q + 1},$$

$$\frac{1}{a_1} \int_0^Q m(Q - z, t + \Delta t) e^{-z/a_1} dz \Leftrightarrow \frac{M(q, t)}{a_1 q + 1}.$$

Теперь, учитывая следующее свойство преобразования Лапласа, если  $f(Q) \Leftrightarrow \Psi(q)$ , то  $Qf(Q) \Leftrightarrow \partial \Psi(q) / \partial q$ , умножая уравнение (8) на  $\exp\{-qQ\}$  и интегрируя по

$Q$  в пределах  $[0, \infty)$ , после ряда преобразований получим

$$\frac{\partial M(q, t)}{\partial t} - \frac{\kappa}{a_1 (\exp\{\kappa(T-t)\})} \frac{q}{(a_1 q + 1)} \frac{\partial M(q, t)}{\partial q} + \frac{\kappa}{a_1 (\exp\{\kappa(T-t)\})} \frac{M(q, t)}{(a_1 q + 1)^2} = -\frac{1}{q}.$$

Последнее уравнение является линейным неоднородным уравнением в частных производных первого порядка. К сожалению, в явном виде найти решение этого уравнения, а следовательно, и преобразования Лапласа от среднего времени продаж не удастся. Последовательное решение последнего уравнения стандартными методами приводит к следующему результату:

$$\Phi \left( q e^q \frac{\exp\{\kappa(T-t)\}}{\exp\{\kappa(T-t)\} - 1}, \frac{a_1 q + 1}{a_1 q} \exp\{-M(q, t)\} \right) = 0,$$

где  $\Phi(\cdot)$  – некоторая аналитическая функция.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рубальский Г.Б. Вероятностные и вычислительные методы оптимального управления запасами. М.: Знание, 1987.
2. Biais B., Foucault T., Salanie F. Floors, Dealer Markets and Limit Order Markets // Journal of Financial Markets. 1998. № 1. P. 253–284.
3. Vayanos D. Strategic Trading and Welfare in a Dinamic Market // Review of Economic Studies. 1999. Vol. 66. P. 219–254.
4. Новицкая Е.В., Терпугов А.Ф. Оптимизация розничной продажи скоропортящейся продукции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. 93 с.
5. Змеев О.А., Новицкая Е.В. Вероятностные характеристики длительности торговой сессии и оценка ее параметров // Обработка данных и управление в сложных системах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 66–75.
6. Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988. 174 с.
7. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1980. 284 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969. Т. 1. 343 с.
9. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 465 с.

Статья представлена кафедрой прикладной информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 30 мая 2006 г.