ISSN 1561-7793

Вестник

Томского государственного университета

ПРИЛОЖЕНИЕ

№ 1(I) СЕНТЯБРЬ 2002

Материалы научных конференций, симпозиумов, школ, проводимых в ТГУ

Издание Томского государственного университета

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ОБЩЕНАУЧНЫЙ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Свидетельства о регистрации: бумажный вариант № 018694, электронный вариант № 018693
выданы Госкомпечати РФ 14 апреля 1999 г.
ISSN: печатный вариант – 1561-7793; электронный вариант – 1561-803X
от 20 апреля 1999 г. Международного Центра ISSN (Париж)

№ 1 (I) ПРИЛОЖЕНИЕ Сентябрь 2002

ДОКЛАДЫ
IV Всероссийской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» и Сибирской научной школы-семинара «Проблемы компьютерной безопасности» (Томск, ТГУ, 10 – 13 сентября 2002 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

Секция I
СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Секция 2

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Секция 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Секция 1

СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

УДК 519.2

НАХОЖДЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ И ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ РИСКОВ

Д.Д. Ахмедова*, О.А. Змеев**

Томский государственный университет, г. Томск
**Анжеро-Судженский филиал Кемеровского государственного университета, г. Анжеро-Судженск*

E-mail: *dina@fpmk.tsu.ru, **zoa@asf.ru

Рассматривается модель страховой компании с нестационарным входящим потоком страховых рисков. Считается, что число рисков ограничено. Находятся характеристики капитала и числа страховых рисков компании.

Ключевые слова: *модель, страховая компания, капитал, застрахованные риски, статистические характеристики.*

В настоящее время широкий интерес вызывают математические модели так называемой актуарной математики, изучающей различные аспекты страхового дела. В работах [2–4] предложены и исследованы модели страховых компаний при различных условиях, однако в них считается, что входящий поток застрахованных рисков стационарный. В данной работе рассматривается модель страховой компании при условии, что входящий поток рисков нестационарный и число рисков ограничено.

Пусть в момент времени t состояние страховой компании характеризуется двумя величинами: капиталом компании $S(t)$ и числом застрахованных рисков $k(t)$. Будем считать, что число потенциальных клиентов компании ограничено, то есть не может превысить числа N. В компанию поступает поток новых рисков, который мы будем считать пуассоновским потоком событий переменной интенсивности $(N-k(t))\lambda(t)$. Будем также считать, что вид $\lambda(t)$ известен (например, сезонные колебания страхования транспорта и т.д.) и что каждый приходящий риск вносит в капитал компании случайную величину ξ с $M\{\xi\}=a_1(t)$ и $M\{\xi^2\}=a_2(t)$. Так как величина первого страхового взноса – это прерогатива компании и может устанавливаться по её усмотрению, то будем считать, что $a_1(t)$ и $a_2(t)$ также зависят от времени и являются величинами, которыми можно управлять.

Будем далее считать, что каждый из застрахованных рисков выплачивает дополнительные взносы в размере η с $M\{\eta\}=b_1$ и $M\{\eta^2\}=b_2$. Взносы осуществляются независимо друг от друга с интенсивностью $\mu_1 k(t)$.

Далее, могут наступать страховые случаи. Будем считать, что с каждым риском может наступить страховой случай с интенсивностью $\mu_2 k(t)$ и эти страховые случаи для различных рисков независимы. При наступлении страхового случая компания выплачивает страховое возмещение в размере ζ с $M\{\zeta\}=c_1$ и $M\{\zeta^2\}=c_2$.

Наконец, с интенсивностью $\mu k(t)$ страховое время некоторых рисков заканчивается, и они покидают компанию независимо от поведения других рисков.

Найдем статистические характеристики процессов $S(t)$ и $k(t)$, определим оптимальные в каком-то смысле $a_1(t)$ и $a_2(t)$. Заметим, что так как $\lambda(t)$ зависит от t, то эти характеристики также будут зависеть от t.

Вообще говоря, величина страхового взноса $a_1(t)$ влияет на интенсивность потока входящих рисков, так как уменьшение $a_1(t)$ приводит к увеличению $\lambda(t)$ и, наоборот, при увеличении $a_1(t)$ число желающих застраховаться уменьшается. Поэтому в общем случае надо считать, что λ зависит от $a_1(t)$ и t, то есть $\lambda = \lambda(a_1, t)$. Для конкретизации будем считать, что

$$\lambda(t) = F(a_1(t))\lambda_0(t), \tag{1}$$

где $F(0) = 1$, $F(+\infty) = 0$ и $F(a_1)$ монотонно убывает с ростом a_1, а $\lambda_0(t)$ имеет в этом случае смысл максимальной интенсивности потока рисков, желающих застраховаться.

Рассмотрим два близких момента t и $t + \Delta t$. Тогда можно считать, что

$$k(t+\Delta t) = k(t) + \Delta k(t), \tag{2}$$

где, в силу сделанных предположений,

$$\Delta k(t) = \begin{cases} +1, & \text{с вероятностью } (N - k(t))\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t), \\ -1, & \text{с вероятностью } \mu k(t)\Delta t + o(\Delta t), \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - ((N - k(t))\lambda(t) + \mu k(t))\Delta t + o(\Delta t). \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим $M\{k(t)\} = k_1(t)$. Тогда, усредняя (2) по флуктуациям $\Delta k(t)$, получим

$$k_1(t+\Delta t) = k_1(t) + (\lambda(t) - \mu k_1(t))\Delta t + o(\Delta t).$$

Отсюда легко получить, что

$$\frac{dk_1(t)}{dt} + (\mu + \lambda(t))k_1(t) = N\lambda(t). \tag{4}$$

Будем считать, что число застрахованных рисков в момент времени t_0 нам известно и равно $k(t_0)$. Тогда очевидно, что $k_1(t_0) = k(t_0)$. Решение уравнения (4) имеет вид

$$k_1(t) = k(t_0)e^{-\mu(t-t_0) - \int_{t_0}^{t}\lambda(x)dx} + N\int_{t_0}^{t}\lambda(z)e^{-\mu(t-z) - \int_{z}^{t}\lambda(x)dx}dz. \tag{5}$$

Рассмотрим случай, когда страховая компания функционирует достаточно долго. Этому соответствует ситуация, когда $t_0 \to -\infty$. После этого предельного перехода формула (5) примет вид

$$k_1(t) = N\int_{-\infty}^{t}\lambda(z)e^{-\mu(t-z) - \int_{z}^{t}\lambda(x)dx}dz. \tag{6}$$

Обозначим $M\{k^2(t)\} = k_2(t)$ и $D_k(t) = k_2(t) - k_1^2(t)$. Из соотношения (2) имеем

$$k^2(t+\Delta t) = k^2(t) + \Delta k^2(t) + 2k(t)\Delta k(t). \tag{7}$$

Усредним (7) по флуктуациям $\Delta k(t)$, считая траекторию $k(u)$ известной для $t_0 \le u \le t$. Тогда имеем

$$M\{k^2(t+\Delta t)/k(u)\} = k^2(t) + 1((N - k(t))\lambda(t) + \mu k(t))\Delta t +$$

$$+2k(t)((N - k(t))\lambda(t) - \mu k(t))\Delta t + o(t).$$

Далее, усредняя теперь это соотношение по значениям $k(t)$, получим уравнение для $k_2(t)$:

$$\frac{dk_2(t)}{dt} + 2(\mu + \lambda(t))k_2(t) = N\lambda(t) + (\mu - \lambda(t))k_1(t) + 2N\lambda(t)k_1(t). \tag{8}$$

Выведем уравнение для дисперсии. Имеем

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = \frac{dk_2(t)}{dt} - 2k_1(t)\frac{dk_1(t)}{dt}.$$

С учетом (4)

$$2k_1(t)\frac{dk_1(t)}{dt} = 2k_1(t)\left[N\lambda(t) - (\mu + \lambda(t))k_1(t)\right].$$

Вычитая это соотношение из (8), получаем уравнение для дисперсии числа рисков компании:

$$\frac{dD_k(t)}{dt}+2(\mu+\lambda(t))D_k(t)=N\lambda(t)+(\mu-\lambda(t))k_1(t). \tag{9}$$

С учетом того, что число застрахованных рисков в момент времени t_0 нам известно, естественно считать $D_k(t_0)=0$. Решение уравнения (9)

$$D_k(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\left(N\lambda(z)+k_1(z)(\mu-\lambda(z))e^{-2\mu(t-z)-2\int\limits_z^t\lambda(x)dx}\right)dz \tag{10}$$

при $t_0\to-\infty$ имеет вид

$$D_k(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}N\lambda(z)e^{-2\mu(t-z)-2\int\limits_z^t\lambda(x)dx}dz+\int\limits_{-\infty}^{t}(\mu-\lambda(z))\times$$

$$\times\left(\int\limits_{-\infty}^{t}N\lambda(u)e^{-\mu(t-u)-\int\limits_u^t\lambda(x)dx}du\right)e^{-2\mu(t-z)-2\int\limits_z^t\lambda(x)dx}dz. \tag{11}$$

Найдем функцию ковариации процесса $k(t)$. Обозначим $\tilde{C}(t_1,t_2)=M\{k(t_1)k(t_2)\}$, тогда $C_k(t_1,t_2)=\tilde{C}(t_1,t_2)-k_1(t_1)k_1(t_2)$. Пусть $t_2>t_1$, тогда

$$k(t_2+\Delta t_2)=k(t_2)+\Delta k(t_2),$$

$$k(t_1)k(t_2+\Delta t_2)=k(t_1)k(t_2)+k(t_1)\Delta k(t_2).$$

Считая реализацию $k(t)$ фиксированной для $-\infty<t\le t_2$ и усредняя по $\Delta k(t)$, получим

$$M\{k(t_1)k(t_2)/k(u)\}=k(t_1)k(t_2)+k(t_1)\big[(N-k(t_2))\lambda(t_2)-\mu k(t_2)\big]\Delta t_2+o(\Delta t_2),$$

а затем и по реализациям процесса $k(t)$ получим

$$\begin{aligned}\tilde{C}(t_1,t_2+\Delta t_2)&=\tilde{C}(t_1,t_2)+N\lambda(t_2)k_1(t_1)\Delta t_2-\\&-(\lambda(t_2)-\mu)\tilde{C}(t_1,t_2)\Delta t_2+o(\Delta t_2),\end{aligned} \tag{12}$$

отсюда

$$\frac{d\tilde{C}(t_1,t_2)}{dt}+(\mu+\lambda(t_2))\tilde{C}(t_1,t_2)=N\lambda(t_2)k_1(t_1). \tag{13}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial(k_1(t_1)k_1(t_2))}{\partial t_2}=k_1(t_1)\frac{dk_1(t_2)}{dt_2},$$

$$k_1(t_1)\frac{dk_1(t_2)}{dt_2}=k_1(t_1)\big[N\lambda(t_2)-(\mu+\lambda(t_2))k_1(t_2)\big]. \tag{14}$$

Вычитая (14) из (13), получим уравнение для функции ковариации $k(t)$:

$$\frac{\partial C_k(t_1,t_2)}{\partial t_2}+(\mu+\lambda(t_2))C_k(t_1,t_2)=0. \tag{15}$$

Так как $C(t_1,t_1)=D_k(t_1)$, то в общем виде выражение для ковариации можно записать так:

$$C_k(t_1,t_2)=D_k(\min(t_1,t_2))e^{-\mu|t_2-t_1|-\int\limits_{\min(t_1,t_2)}^{\max(t_1,t_2)}\lambda(x)dx}. \tag{16}$$

Процесс $k(t)$ является управляющим процессом для капитала компании, так как все изменения капитала связаны с застрахованными рисками, их приходом и уходом. Поэтому все характеристики капитала $S(t)$ выражаются через характеристики $k(t)$.

Выведем теперь характеристики капитала компании. Рассмотрим промежуток времени $[t, t+\Delta t]$ и обозначим через $\Delta S(t)$ изменение капитала на этом промежутке. В силу математической модели компании имеем

$$\Delta S(t) = \begin{cases} \xi, & \text{с вероятностью } (N-k(t))\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t), \\ \eta, & \text{с вероятностью } \mu_1 k(t)\Delta t + o(\Delta t), \\ -\zeta, & \text{с вероятностью } \mu_2 k(t)\Delta t + o(\Delta t), \\ 0, & \text{с вероятностью } 1\text{-}\left((N-k(t))\lambda(t) + \mu_1 k(t) + \mu_2 k(t)\right)\Delta t + o(\Delta t). \end{cases} \tag{17}$$

Основное соотношение имеет вид

$$S(t+\Delta t) = S(t) + \Delta S(t). \tag{18}$$

Пусть траектория $k(t)$ фиксирована. Тогда

$$M\{\Delta S(t)/k(t)\} = M\{\xi\}(N-k(t))\lambda(t)\Delta t + \\ + M\{\eta\}\mu_1 k(t)\Delta t - M\{\zeta\}\mu_2 k(t)\Delta t + o(\Delta t); \tag{19}$$

$$M\{\Delta S(t)/k(t)\} = a_1(t)(N-k(t))\lambda(t)\Delta t + \\ + (b_1\mu_1 - c_1\mu_2)k(t)\Delta t + o(\Delta t) \tag{20}$$

и

$$M\{S(t+\Delta t)/k(t)\} = M\{S(t)/k(t)\} + a_1(t)(N-k(t))\lambda(t)\Delta t + \\ + (b_1\mu_1 - c_1\mu_2)k(t)\Delta t + o(\Delta t). \tag{21}$$

Обозначим $M\{S(t)\} = S_1(t)$. Далее, проводя аналогичные преобразования, можем записать выражения для математического ожидания капитала компании:

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = Na_1(t)\lambda(t) + (b_1\mu_1 - c_1\mu_2 - a_1(t)\lambda(t))k_1(t). \tag{22}$$

Тогда, считая, что $S_1(0) = S_0$, решение последнего уравнения запишем в виде

$$S_1(t) = S_0 + \int_0^t Na_1(u)\lambda(u)\,du - \int_0^t k_1(u)a_1(u)\lambda(u)\,du + \\ + (b_1\mu_1 - c_1\mu_2)\int_0^t k_1(u)\,du. \tag{23}$$

Выведем уравнение для дисперсии капитала компании. Имеем

$$S^2(t+\Delta t) = S^2(t) + 2S(t)\Delta S(t) + \Delta S^2(t). \tag{24}$$

Так как

$$\Delta S^2(t) = \begin{cases} \xi^2, & \text{с вероятностью } (N-k(t))\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t), \\ \eta^2, & \text{с вероятностью } \mu_1 k(t)\Delta t + o(\Delta t), \\ \zeta^2, & \text{с вероятностью } \mu_2 k(t)\Delta t + o(\Delta t), \\ 0\ , & \text{с вероятностью } 1\text{-}\left((N-k(t))\lambda(t) + \mu_1 k(t) + \mu_2 k(t)\right)\Delta t + o(\Delta t), \end{cases} \tag{25}$$

то при фиксированном $k(t)$

$$M\{\Delta S^2(t)/k(t)\} = \left[a_2(t)(N-k(t))\lambda(t) + (\mu_1 b_2 + \mu_2 c_2)k(t)\right]\Delta t + o(t). \tag{26}$$

Поэтому, усредняя (24) при фиксированной траектории $k(t)$,

$$M\{S^2(t+\Delta t)/k(t)\} = M\{S^2(t)/k(t)\} + 2M\{S(t)/k(t)\}M\{\Delta S(t)/k(t)\} + M(\Delta S^2(t)/k(t)), \tag{27}$$

где учтено, что при фиксированной траектории $k(t)$ величины $S(t)$ и $\Delta S(t)$ независимы.

Отсюда имеем

$$
\begin{aligned}
&M\left\{S^2(t+\Delta t)/k(t)\right\}=M\left\{S^2(t)/k(t)\right\}+2M\left\{S(t)/k(t)\right\}\times\\
&\times\left[a_1(t)(N-k(t))\lambda(t)+\ (b_1\mu_1-c_1\mu_2)k(t)\right]\Delta t+\\
&+\left[a_2(t)(N-k(t))\lambda(t)+(\mu_1 b_2+\mu_2 c_2)k(t)\right]\Delta t+o(\Delta t).
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&\frac{dM\left\{S^2(t)/k(t)\right\}}{dt}=2\times\left[\int_0^t Na_1(u)\lambda(u)\,du-\int_0^t k(u)a_1(u)\lambda(u)\,du+\right.\\
&\left.+(b_1\mu_1-c_1\mu_2)\int_0^t k(u)\,du\right]\times\left[a_1(t)(N-k(t))\lambda(t)+\ (b_1\mu_1-c_1\mu_2)k(t)\right]+\\
&+\left[a_2(t)(N-k(t))\lambda(t)+(\mu_1 b_2+\mu_2 c_2)k(t)\right].
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Обозначим $M\left\{S^2(t)\right\}=S_2(t)$. Тогда, усредняя последнее выражение по траекториям $k(t)$, получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{dS_2(t)}{dt}=2\times\left[\int_0^t Na_1(u)\lambda(u)\,du-\int_0^t k_1(u)a_1(u)\lambda(u)\,du+\right.\\
&\left.+(b_1\mu_1-c_1\mu_2)\int_0^t k_1(u)\,du\right]\times\left[a_1(t)(N-k_1(t))\lambda(t)+\ (b_1\mu_1-c_1\mu_2)k_1(t)\right]+\\
&+\left[a_2(t)(N-k_1(t))\lambda(t)+(\mu_1 b_2+\mu_2 c_2)k_1(t)\right].
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Пусть $D_s(t)=S_2(t)-S_1^2(t)$ есть дисперсия капитала в момент времени t. Тогда

$$
\frac{dD_s(t)}{dt}=\frac{dS_2(t)}{dt}-2S_1(t)\frac{dS_2(t)}{dt}.
\tag{31}
$$

Принимая все известные нам выражением и рассматривая, для простоты, лишь случай $S_0=0$, получим

$$
\begin{aligned}
&2S_1(t)\frac{dS_1(t)}{dt}=2\left[Na_1(t)\lambda(t)+k_1(t)\left(b_1\mu_1-c_1\mu_2-a_1(t)\lambda(t)\right)\right]\times\\
&\times\left[\int_0^t Na_1(u)\lambda(u)\,du-\int_0^t a_1(u)\lambda(u)k_1(u)\,du+(b_1\mu_1-c_1\mu_2)\int_0^t k_1(u)\,du\right].
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&\frac{D_s(t)}{dt}=Na_2(t)\lambda(t)+\left(b_2\mu_1+c_2\mu_2-a_2(t)\lambda(t)\right)k_1(t)+\\
&+2\left(b_1\mu_1-c_1\mu_2-a_1(t)\lambda(t)\right)\int_0^t C_k(t,u)\left[b_1\mu_1-c_1\mu_2-a_1(u)\lambda(u)\right]du.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Так как при $t=0$ капитал считается точно известным, то $D_s(t)=0$. Интегрируя последнее выражение, получаем

$$
\begin{aligned}
&D_s(t)=N\int_0^t a_2(u)\lambda(u)\,du+(b_2\mu_1+c_2\mu_2)\int_0^t k_1(u)\,du-\\
&-\int_0^t k_1(u)a_2(u)\lambda(u)\,du+2(b_1\mu_1-c_1\mu_2)^2\int_0^t\int_0^z C_k(z,u)\,du\,dz-\\
&-2(b_1\mu_1-c_1\mu_2)\int_0^t\int_0^z C_k(z,u)\left[a_1(u)\lambda(u)+a_1(z)\lambda(z)\right]du\,dz+\\
&+2\int_0^t\int_0^z C_k(z,u)a_1(u)\lambda(u)a_1(z)\lambda(z)\,du\,dz.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Найдем еще величину $C_{sk}(t)=M\{S(t)k(t)\}-S_1(t)k_1(t)$, то есть ковариацию между значениями капитала и числом застрахованных рисков в один и тот же момент времени.

Пусть реализация $k(t)$ фиксирована. Тогда

$$k(t)M\{S(t)/k(t)\}=k(t)\int_0^t Na_1(u)\lambda(u)du-k(t)\int_0^t k(u)a_1(u)\lambda(u)du+$$

$$+k(t)(b_1\mu_1-c_1\mu_2)\int_0^t k(u)du.$$

Отсюда, усредняя по реализациям процесса $k(t)$, получим

$$M\{S(t)k(t)\}=k_1(t)\int_0^t Na_1(u)\lambda(u)du-\int_0^t \tilde{C}(t,u)a_1(u)\lambda(u)du+$$

$$+(b_1\mu_1-c_1\mu_2)\int_0^t \tilde{C}(t,u)du. \tag{35}$$

С другой стороны,

$$S_1(t)k_1(t)=k_1(t)\int_0^t Na_1(u)\lambda(u)du-\int_0^t k_1(t)k_1(u)a_1(u)\lambda(u)du+$$

$$+(b_1\mu_1-c_1\mu_2)\int_0^t k_1(t)k_1(u)du. \tag{36}$$

Вычитая (36) из (35), получим функцию ковариации между значениями капитала и числа застрахованных рисков в один и тот же момент времени:

$$C_{sk}(t)=(b_1\mu_1-c_1\mu_2)\int_0^t C_k(t,u)du-\int_0^t C_k(t,u)a_1(u)\lambda(u)du, \tag{37}$$

где $C_k(t,u)$ выражается формулой (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Panjer H.H., Willmot G.E.* Insurance Risk Models. – Society of actuaries, 1992. – 442 с.
2. *Змеев О.А.* // Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика. – 1999. – С.67-72.
3. *Ахмедова Д.Д., Терпугов А.Ф.* Математическая модель функционирования страховой компании с учетом расходов на рекламу // Изв. вузов. Физика. – 2001. – №1. – С. 25-28.
4. *Ахмедова Д.Д., Змеев О.А.* Оптимизация расходов на рекламу при деятельности страховой компании // Изв. вузов. Физика. – 2001. – №6. – С.3-6.