ISSN 0234-0879

Российская академия наук

Математическое моделирование

том 16 номер 2 / 2004

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том **16** номер **2** год **2004**

СОДЕРЖАНИЕ

© Российская академия наук
Институт математического моделирования, 2004 г.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2004г., том 16, номер 2, стр. 43-53

ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ФОНДА СОЦИАЛЬНОГО СТРАХОВАНИЯ ПРИ РЕЛЕЙНО-ГИСТЕРЕЗИСНОМ УПРАВЛЕНИИ КАПИТАЛОМ

© *О.А. Змеев*

Томский государственный университет

Предлагается математическая модель фонда социального страхования при релейно-гистерезисном управлении капиталом такого фонда. Рассмотрен случай, когда выплаты по страховым случаям образуют пуассоновский поток событий и являются одинаково распределенными независимыми случайными величинами с экспоненциальной функцией распределения. В рамках сделанных предположений найдена стационарная плотность распределения капитала, предложена процедура, позволяющая определить параметры управления, которые обеспечивают заданные вероятностные характеристики работы фонда.

ACTIVITY OF SOCIAL INSURANCE FOUNDATION AT RELAY-HYSTERESIS CONTROL OF THE CAPITAL

O.A. Zmeyev

Tomsk state university

A mathematical model is proposed for social insurance foundation at relay-hysteresis control of capital of such a foundation. The case is considered when payments for insured accidents form a Poisson flow of events and are uniformly distributed independent random variables with exponential distribution function. The stationary capital distribution density is determined in the frameworks of the assumptions. The procedure is proposed for determination of the control parameters providing for the prescribed probability characteristics of operation of the foundation.

Введение

Фонды социального страхования РФ созданы на основании постановления Совета Министров РФ и фонда независимых профсоюзов. В отличие от обычных страховых компаний в задачу фонда входит не только оплата страховых случаев (временная нетрудоспособность, пособия по беременности и родам и т.д.), но и систематические выплаты по реализации региональных и отраслевых программ по охране здоровья работников, санаторно-курортному лечению, обслуживанию детей и т.д.

Построению и исследованию математических моделей фондов социального страхования в последние годы посвящен ряд работ, в которых идеи классической модели страхования применяются [1, 2] с учетом особенности работы таких фондов [3-5]. В данной работе предлагается более адекватная модель работы фонда, при релейно-гистерезисном управлении капиталом такого фонда. Рассмотрен случай, когда выплаты по страховым случаям образуют пуассоновский поток событий и являются одинаково распределенными независимыми случайными величинами с экспоненциальной функцией распределения. В рамках сделанных предположений найдена стационарная плотность распределения капитала, предложена процедура, позволяющая определить параметры управления, которые обеспечивают заданные вероятностные характеристики работы фонда.

Математическая модель деятельности фонда

Основной характеристикой состояния фонда является его капитал $S(t)$ в момент времени t. С этим капиталом происходят следующие изменения:

1. В фонд поступают средства от предприятий и организаций. Мы будем считать, что они поступают непрерывно во времени со скоростью c_0.

2. Фонд выделяет часть своих средств на социальные программы. Мы будем считать, что эти средства также выделяются непрерывно во времени, однако скорость их выделения $c^*(S)$ зависит от величины капитала S в данный момент времени.

Величину $c_0-c^*(S)$ мы в дальнейшем будем обозначать как $c(S)$. Таким образом, $c(S)$ есть скорость изменения капитала за счет детерминированных расходов и она зависит от величины капитала S. Именно в наличии слагаемого $c^*(S)$ и зависимости $c(S)$ от S и заключается отличие данной модели от классических [1, 2].

3. Происходят страховые выплаты. Будем считать, что поток страховых выплат является пуассоновским потоком постоянной интенсивности λ, и сами страховые выплаты ξ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с экспоненциальным распределением

$$p_\xi(x)=\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right),\quad x\geq 0. \tag{1}$$

Кроме того, будем считать, что достижение порога $S(t)=0$ не приводит к разорению фонда, и даже при $S(t)<0$ он продолжает функционировать, только происходят задержки по страховым выплатам.

Релейно-гистерезнсное управление капиталом

Рассмотрим следующий вариант управления капиталом фонда, который можно назвать релейно-гистерезисным управлением. Он состоит в следующем.

Устанавливаются два пороговых значения величины капитала – S_1 и S_2. При $S<S_1$ выплаты на социальные нужды не производятся, то есть всегда $c=c_0$. При $S>S_2$ всегда производятся выплаты со скоростью $c^*=c_0-c_1$, то есть $c(S)=c_1$. А вот в области $S_1<S<S_2$ выплаты производятся или нет в зависимости от того, как траектория $S(t)$ вошла в эту область: если $S(t)$ вошла через границу S_1, то берется $c=c_0$, если же она вошла через границу S_2, то берется $c(S)=c_1$. Другими словами, выплаты на социальные нужды начинаются, когда впервые выполнится неравенство $S(t)\geq S_2$, и заканчиваются, когда станет $S(t)<S_1$. Область $S_1<S<S_2$ и представляет собой гистерезис в управлении выплатами на социальные нужды.

Стационарная плотность вероятностей величины капитала

Найдем плотность вероятностей $p(S)$ величины капитала S во всех этих областях. Начнём с области $S>S_2$. В ней плотность вероятностей $p(S)$ будем обозначать как $p_2(S)$. Заметим, что в этой области всегда $c(S)=c_1$.

Выведем явное выражение $p_2(S)$. Пусть мы имеем некоторый момент времени t. Тогда получить значение капитала, равное S, можно двумя путями.

1. В момент времени $t-\Delta t$ значение капитала было равно $S-c_1\Delta t$ и за интервал времени Δt не было страховых выплат. Вероятность этой ситуации равна $1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$.

2. С вероятностью $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ за интервал времени Δt пришлось сделать страховую выплату, равную x, так что в момент времени $t-\Delta t$ значение капитала было равно $S-c_1\Delta t+x$.

Поэтому, используя идеологию вывода обратных уравнений Колмогорова для марковских процессов [6], можем записать

$$p_2(S) = p_2(S - c_1\Delta t)(1 - \lambda\Delta t) + \lambda\Delta t \int_0^\infty p_2(S + x)p_\xi(x)dx + o(\lambda\Delta t). \tag{2}$$

Разложим $p_2(S - c_1\Delta t)$ в ряд Тейлора

$$p_2(S - c_1\Delta t) = p_2(S) - p_2'(S)c_1\Delta t + o(\Delta t)$$

и подставим в (2)

$$p_2(S) = (p_2(S) - p_2'(S)c_1\Delta t)(1 - \lambda\Delta t) + \lambda\Delta t \int_0^\infty p_2(S + x)p_\xi(x)dx + o(\lambda\Delta t).$$

Сокращая $p_2(S)$, деля на Δt и устремляя Δt к нулю, получим уравнение

$$c_1 p_2'(S) + \lambda p_2(S) = \lambda \int_0^\infty p_2(S + x)p_\xi(x)dx. \tag{3}$$

Рассмотрим лишь экспоненциальные страховые выплаты. Тогда получаем

$$\int_0^\infty p_2(S + x)p_\xi(x)dx = \int_0^\infty p_2(S + x)\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\exp\left(\frac{S}{a}\right)\int_S^\infty p_2(y)e^{-y/a}\,dy,$$

и уравнение (3) приобретает вид

$$c_1 p_2'(S)e^{-S/a} + \lambda p_2(S)e^{-S/a} = \frac{\lambda}{a}\int_S^\infty p_2(y)e^{-y/a}\,dy.$$

Дифференцируя по S и сокращая сомножитель $\exp(-S/a)$, получим следующее уравнение для $p_2(S)$:

$$p_2''(S) + \frac{a\lambda - c_1}{ac_1}p_2'(S) = 0. \tag{4}$$

Обозначим для краткости

$$\frac{a\lambda - c_1}{ac_1} = \kappa_1.$$

Заметим, что $\kappa_1 > 0$. Тогда общее решение уравнения (4) имеет вид

$$p_2(S) = C_2 e^{-\kappa_1 S} + D_2. \tag{5}$$

Подстановкой этого решения обратно в уравнение (3) можно убедиться в том, что оно удовлетворяет ему при любых C_2 и D_2.

Учитывая естественное условие $\lim\limits_{S\to\infty} p_2(S) = 0$, получаем, что $D_2=0$. Для удобства дальнейших записей, возьмём C_2 в виде $C_2 = C\cdot e^{\kappa_1 S_2}$. Тогда окончательно выражение для $p_2(S)$ примет вид

$$p_2(S) = C \cdot e^{-\kappa_1(S-S_2)}, \quad S > S_2. \tag{6}$$

Заметим, что $p_2(S)$ монотонно убывает с ростом S.

Перейдём теперь к рассмотрению самой сложной области $S_1<S<S_2$. Здесь возможны два варианта: $c=c_0$ или $c=c_1$.

Рассмотрим сначала случай $c=c_0$. Соответствующую этому плотность вероятностей будем обозначать $p_{01}(S)$.

Снова рассмотрим бесконечно малый интервал времени Δt. Однако, в отличие от предыдущего случая, значение $c=c_0$ сохранится лишь в том случае, когда скачки вниз осуществляются из области $S_1< S<S_2$, так как при скачках из области $S>S_2$ устанавливается значение $c=c_1$. Поэтому величина $S+x$ должна быть меньше S_2, то есть $S+x<S_2$, $x<S_2-S$. Тогда рассмотрение переходов за интервал времени Δt приводит к уравнению

$$p_{01}(S) = p_{01}(S - c_0\Delta t)(1-\lambda\Delta t) + \lambda\Delta t \int\limits_0^{S_2-S} p_{01}(S+x)p_\xi(x)dx + o(\Delta t).$$

Теми же рассуждениями, что и выше, легко показывается, что $p_{01}(S)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$c_0 p'_{01}(S) + \lambda p_{01}(S) = \lambda \int\limits_0^{S_2-S} p_{01}(S+x)p_\xi(x)dx. \tag{7}$$

Для экспоненциально распределенных страховых выплат тем же приемом, что и выше, можно свести это уравнение к дифференциальному

$$p''_{01}(S) - \frac{c_0 - a\lambda}{ac_0} p'_{01}(S) = 0. \tag{8}$$

Обозначим для краткости

$$\frac{c_0 - a\lambda}{ac_0} = \kappa_0.$$

Заметим, что $\kappa_0 > 0$. Тогда общее решение уравнения (8) имеет вид

$$p_{01}(S) = D_{01} - C_{01} e^{\kappa_0 S}. \tag{9}$$

Знак «минус» перед вторым слагаемым взят для удобства окончательного результата. Нахождение связи между константами D_{01} и C_{01} приведено в приложении 1. Таким образом, окончательно

$$p_{01}(S) = C_{01}\left(\frac{c_0}{\lambda a} e^{\kappa_0 S_2} - e^{\kappa_0 S}\right). \tag{10}$$

Заметим, что, так как $c_0>\lambda a$, то $c_0/\lambda a>1$. Далее, так как $\kappa_0>0$ и $S_2>S_1$, то $e^{\kappa_0 S_2} > e^{\kappa_0 S}$. Поэтому выражение, стоящее в скобках, положительно и должно быть $C_{01}>0$. Отметим еще, что $p_{01}(S)$ монотонно убывает с ростом S.

Найдём теперь плотность вероятностей величины капитала S в области $S_1<S<S_2$, но при $c=c_1$. Обозначать её будем через $p_{11}(S)$. Рассматривая переходы за интервал времени Δt, можем записать соотношение

$$p_{11}(S) = (1-\lambda\Delta t)p_{11}(S-c_1\Delta t) + \lambda\Delta t\left[\int_0^{S_2-S} p_{11}(S+x)p_\xi(x)dx + \int_{S_2-S}^{\infty} p_2(S+x)p_\xi(x)dx\right] + o(\Delta t),$$

откуда обычным образом получаем

$$c_1 p'_{11}(S) + \lambda p_{11}(S) = \lambda\left[\int_0^{S_2-S} p_{11}(S+x)p_\xi(x)dx + \int_{S_2-S}^{\infty} p_2(S+x)p_\xi(x)dx\right]. \tag{11}$$

Для экспоненциально распределённых выплат, теми же рассуждениями, что и выше, получим

$$p''_{11}(S) + \kappa_1 p'_{11}(S) = 0, \tag{12}$$

откуда общее решение для $p_{11}(S)$ имеет вид

$$p_{11}(S) = -C_{11}\,e^{-\kappa_1 S} + D_{11}, \tag{13}$$

с неизвестными пока константами C_{11} и D_{11}. Процедура определения этих констант приведена в приложении 1. Окончательно выражение для $p_{01}(S)$ принимает вид

$$p_{01}(S) = C\frac{\left(\frac{\lambda a}{c_1}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-e^{-\kappa_0(S_2-S)}\right)}{\left(\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1(S_2-S_1)}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-1\right)}\cdot e^{\kappa_1(S_2-S_1)}. \tag{14}$$

Рассмотрим, наконец, область $S<S_1$, плотность вероятностей капитала в которой будем обозначать $p_0(S)$. Теми же рассуждениями, что и выше, можно получить, что в ней $p_0(S)$ имеет вид

$$p_0(S) = C_0\,e^{\kappa_0 S} + D_0. \tag{15}$$

Но так как при $S\to-\infty$ $p_0(S)$ должна стремиться к нулю, то следует положить $D_0=0$. Для удобства запишем $p_0(S)$ в виде

$$p_0(S) = \overline{C}_0\,e^{\kappa_0(S-S_1)} \tag{16}$$

и рассмотрим границу $S=S_1$. Тогда получаем

$$p_{01}(S_1) = (1-\lambda\Delta t)p_0(S_1-c_0\Delta t) + o(\Delta t),$$

откуда, после предельного перехода $\Delta t\to 0$ получаем условие сшивания на границе $S=S_1$:

$$p_0(S_1) = p_{01}(S_1). \tag{17}$$

Оно дает нам $\overline{C}_0$:

$$\overline{C}_0 = C\frac{\left(\frac{\lambda a}{c_1}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-e^{-\kappa_0(S_2-S_1)}\right)}{\left(\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1(S_2-S_1)}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-1\right)}\cdot e^{\kappa_1(S_2-S_1)}.$$

Обозначая S_2-S_1 через ΔS, получаем окончательный результат

$$p_0(S)=C\frac{\left(\frac{\lambda a}{c_1}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-e^{-\kappa_0\Delta S}\right)}{\left(\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1\Delta S}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-1\right)}e^{\kappa_1\Delta S}\cdot e^{\kappa_0(S-S_1)},\quad S<S_1,$$

$$p_{01}(S)=C\frac{\left(\frac{\lambda a}{c_1}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-e^{-\kappa_0(S_2-S)}\right)}{\left(\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1(S_2-S_1)}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-1\right)}\cdot e^{\kappa_1\Delta S},\quad S_1<S<S_2, \tag{18}$$

$$p_{11}(S)=C\frac{e^{\kappa_1(S_2-S_1)}-e^{\kappa_1(S_2-S)}}{\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1(S_2-S_1)}-1},\quad S_1<S<S_2,$$

$$p_2(S)=C\cdot e^{-\kappa_1(S-S_2)},\quad S>S_2.$$

Осталось получить явное выражение для константы C. Оно находится из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{S_1}p_0(S)dS+\int_{S_1}^{S_2}\left[p_{01}(S)+p_{11}(S)\right]dS+\int_{S_2}^{\infty}p_2(S)dS=1. \tag{19}$$

Вычисляя входящие сюда интегралы, получим следующее уравнение для S:

$$C\cdot\left[\frac{1}{\kappa_1}+\frac{1}{\kappa_0}\cdot\frac{\left(\frac{\lambda a}{c_1}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-e^{-\kappa_0\Delta S}\right)}{\left(\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1\Delta S}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-1\right)}\cdot e^{\kappa_1\Delta S}+\frac{\left(\frac{\lambda a}{c_1}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}\Delta S-\frac{1}{\kappa_0}\left(1-e^{-\kappa_0\Delta S}\right)\right)}{\left(\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1\Delta S}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-1\right)}\cdot e^{\kappa_1\Delta S}+\right. \tag{20}$$

$$\left.+\frac{e^{\kappa_1\Delta S}\Delta S-\frac{1}{\kappa_1}\left(e^{\kappa_1\Delta S}-1\right)}{\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1\Delta S}-1}\right]=1.$$

Отсюда легко определить C, по крайней мере, численно.

Вероятностные характеристики

Вычислим две наиболее важные вероятностные характеристики деятельности фонда.

Вероятность неплатежеспособности. При выполнении условия $S<0$ фонд вынужден прекратить выплаты по страховым случаям. Вероятность этого равна

$$\pi_0=\int_{-\infty}^{0}p_0(S)dS=C\cdot\frac{\left(\frac{\lambda a}{c_1}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-e^{-\kappa_0\Delta S}\right)}{\kappa_0\left(\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1\Delta S}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-1\right)}\cdot e^{\kappa_1\Delta S-\kappa_0 S_1}. \tag{21}$$

Вероятность выплаты социальных пособий. Фонд производит выплаты на социальные нужды при выполнении условия $S>S_0$. Вероятность этого равна

$$\pi_1 = \int_{S_2}^{\infty} p_2(S)dS + \int_{S_1}^{S_2} p_{11}(S)dS = C\left[\frac{1}{\kappa_1} + \frac{e^{\kappa_1 \Delta S}\Delta S - \frac{1}{\kappa_1}\left(e^{\kappa_1 \Delta S} - 1\right)}{\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1 \Delta S} - 1}\right]. \qquad (22)$$

Зная C, эти величины можно найти численно. Задаваясь величиной ΔS, а также величинами π_0 и π_1, из уравнений (30) и (31) можно найти величины c_1 и S_1.

Релейное управление

Рассмотрим подробнее частный случай, когда S_1=S_2=S_0, то есть когда гистерезис в управлении отсутствует. В этом случае величина ΔS=0 и остаются только $p_0(S)$ и $p_2(S)$. Легко видеть, что общая плотность вероятностей капитала фонда в этом случае имеет вид

$$p(S) = \begin{cases} C \cdot \exp\left(-\dfrac{\lambda a - c_1}{c_1 a}(S - S_0)\right), & \text{при } S > S_0, \\ C \cdot \exp\left(\dfrac{c_0 - \lambda a}{c_0 a}(S - S_0)\right), & \text{при } S < S_0. \end{cases} \qquad (23)$$

Константу C найдём из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(S)dS = \int_{-\infty}^{0} p_0(S)dS + \int_{0}^{\infty} p_1(S)dS = 1.$$

Вычисляя входящие сюда интегралы, получаем окончательно

$$C = \frac{(\lambda a - c_1)(c_0 - \lambda a)}{\lambda a^2 (c_0 - c_1)} > 0. \qquad (24)$$

Тем самым $p(S)$ определена полностью.

Характеристики капитала

Найдем математическое ожидание величины капитала фонда в стационарном режиме. Представляя S в виде S=S_0+η, можем написать

$$p(\eta) = \begin{cases} C \cdot \exp\left(-\dfrac{\lambda a - c_1}{c_1 a}\eta\right), & \text{при } \eta > 0, \\ C \cdot \exp\left(\dfrac{c_0 - \lambda a}{c_0 a}\eta\right), & \text{при } \eta < 0. \end{cases}$$

Поэтому математическое ожидание величины η равно

$$M\{\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta p(\eta)d\eta = C\left[\frac{(ac_1)^2}{(a\lambda - c_1)^2} - \frac{(ac_0)^2}{(c_0 - a\lambda)^2}\right].$$

Подставляя сюда явное выражение для C и упрощая, получаем

$$M\{\eta\} = \frac{a(2c_0c_1 - \lambda a(c_0 + c_1))}{(a\lambda - c_1)(c_0 - \lambda a)} \qquad (25)$$

и $M\{S\} = S_0 + M\{\eta\}$.

Вероятностные характеристики

Фонд производит выплаты на социальные нужды при выполнении условия $S>S_0$. Вероятность этого равна

$$\pi_1 = P\{S > S_0\} = C \cdot \int_{S_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{a\lambda - c_1}{ac_1}(S - S_0) \right) dS = C \cdot \frac{ac_1}{a\lambda - c_1}.$$

Подставляя сюда явное выражение для C, получаем

$$\pi_1 = \frac{(c_0 - \lambda a)c_1}{\lambda a(c_0 - c_1)}. \tag{26}$$

При выполнении условия $S<0$ фонд вынужден прекратить выплаты по страховым случаям. Вероятность этого равна

$$\pi_0 = P\{S < 0\} = C \int_{-\infty}^{0} \exp\left(\frac{c_0 - \lambda a}{c_0 a}(S - S_0) \right) dS = C \cdot \frac{c_0 a}{c_0 - \lambda a} \exp\left(-\frac{c_0 - \lambda a}{c_0 a} S_0 \right).$$

Подставляя сюда явное выражение для C, получаем

$$\pi_0 = \frac{c_0(\lambda a - c_1)}{\lambda a(c_0 - c_1)} \exp\left(-\frac{c_0 - \lambda a}{c_0 a} S_0 \right). \tag{27}$$

Одним из возможных вариантов управления капиталом фонда является тот, когда c_1 и S_0 выбираются из условия, чтобы π_0 и π_1 приняли некоторые заранее выбранные значения (естественно, удовлетворяющие условию $\pi_0 + \pi_1 < 1$). Тогда уравнения (26) и (27) превращаются в систему уравнений для определения величин c_1 и S_0.

Из (27) можно получить значение c_1:

$$c_1 = \frac{\pi_1 \lambda a c_0}{c_0 - (1 - \pi_1)\lambda a}. \tag{28}$$

Зная c_1, можно найти и величину S_0:

$$S_0 = \frac{c_0 a}{c_0 - \lambda a} \cdot \ln\left[\frac{c_0(\lambda a - c_1)}{\pi_0(\lambda a - c_1)} \right]. \tag{29}$$

Тем самым параметры c_1 и S_0 определяются полностью.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрена деятельность фонда социального страхования. Построена и исследована математическая модель деятельности фонда при релейно-гистерезисном управлении капиталом такого фонда. Рассмотрен случай, когда выплаты по страховым случаям образуют пуассоновский поток событий и являются одинаково распределенными независимыми случайными величинами с экспоненциальной функцией распределения. В рамках сделанных предположений найдена стационарная плотность распределения капитала, предложена процедура, позволяющая определить параметры управления, которые обеспечивают заданные вероятностные характеристики работы фонда.

Полученные результаты позволяют в рамках релейного или релейно-гистерезисного управления капиталом фонда социального страхования определить пороговые значения такого управления, обеспечивающие заданные вероятностные характеристики деятельности фонда. В качестве примера в работе рассмотрена процедура, обеспечивающая заданные уровни вероятности выделения средств на социальные программы и вероятности прекращения выплат по страховым случаям.

Приложение 1

Вернемся к уравнению (9), в котором D_{01}и C_{01} не могут быть произвольными ввиду того, что в интеграле уравнения (7) в верхнем пределе стоит S_2–S, а не +∞. Для нахождения связи между ними подставим общее решение (9) обратно в уравнение (7). Имеем

$$p'_{01}(S) = -C_{01}\frac{c_0 - \lambda a}{ac_0}e^{\kappa_0 S},$$

$$\int_0^{S_2-S} D_{01}\cdot\frac{1}{a}e^{-x/a}\,dx = D_{01}\left(1-e^{-S_2/a+S/a}\right),$$

$$\int_0^{S_2-S}\exp\left(\frac{c_0-\lambda a}{ac_0}(S+x)\right)\cdot\frac{1}{a}e^{-x/a}\,dx = \exp\left(\frac{c_0-\lambda a}{ac_0}S\right)\cdot\frac{1}{a}\int_0^{S_2-S}\exp\left(-\frac{\lambda}{c_0}x\right)dx =$$

$$=\frac{c_0}{\lambda a}\left[e^{\kappa_0 S}-e^{-\lambda S_2/c_0}\cdot e^{S/a}\right].$$

Подставляя все эти выражения в уравнение (7), после приведения подобных, получим

$$C_{01}\frac{c_0}{a}e^{-\lambda S_2/c_0}\cdot e^{S/a} - D_{01}\lambda e^{-S_2/a}\cdot e^{S/a} = 0,$$

и для тождественного равенства этого выражения нулю надо, чтобы коэффициент при $e^{S/a}$ обращался в нуль. Отсюда находится D_{01} через C_{01}

$$D_{01} = C_{01}\cdot\frac{c_0}{\lambda a}e^{\kappa_0 S_2}, \tag{30}$$

так что $p_{01}(S)$ имеет вид (10).

Для определения констант в уравнении (13) используем сначала условие на границе S=S_1. Заметим, что пересечение этой границы траекторией процесса $S(t)$ снизу, то есть из области S<S_1, даёт значение c=c_0, а не c=c_1. Поэтому эта граница может быть пересечена только сверху. Но тогда, рассматривая интервал времениΔt, получим

$$p_{11}(S_1) = \lambda\Delta t\left[\int_0^{S_2-S_1} p_{11}(S+x)p_\xi(x)dx + \int_{S_2-S_1}^{\infty} p_2(S+x)p_\xi(x)dx\right] + o(\Delta t),$$

и, устремляя Δt к нулю, получим условие

$$p_{11}(S_1) = 0. \tag{31}$$

Отсюда $D_{11} = C_{11}e^{-\kappa_1 S_1}$ и

$$p_{11}(S) = C_{11}\left(e^{-\kappa_1 S_1} - e^{-\kappa_1 S}\right). \tag{32}$$

Так как S>S_1, то $e^{-\kappa_1 S_1} > e^{-\kappa_1 S}$, и выражение, стоящее в скобках, положительно. Поэтому C_{11}>0. Заметим, что $p_{11}(S)$ монотонно возрастает с ростом S.

Для нахождения связи между C_{11} и C_2 решение (32) надо подставить обратно в интегро-дифференциальное уравнение (11). Имеем

$$p'_{11}(S)=C_{11}\kappa_1 e^{-\kappa_1 S},$$

$$\int\limits_{S_2-S}^{\infty} p_2(S+x)p_\xi(x)dx=C_2\int\limits_{S_2-S}^{\infty}\exp\left(\frac{c_1-\lambda a}{ac_1}(S+x)\right)\cdot\frac{1}{a}e^{-x/a}\,dx=$$

$$=C_2 e^{-\kappa_1 S}\cdot\frac{1}{a}\int\limits_{S_2-S}^{\infty}\exp\left(-\frac{\lambda}{c_1}x\right)dx=C_2\frac{c_1}{\lambda a}\exp\left(-\frac{\lambda}{c_1}S_2\right)\cdot e^{S/a}.$$

Вычислим теперь $\int\limits_0^{S_2-S}p_{11}(S+x)p_\xi(x)dx$. Первое слагаемое даёт

$$C_{11}e^{-\kappa_1 S_1}\int\limits_0^{S_2-S}\frac{1}{a}e^{-x/a}\,dx=C_{11}e^{-\kappa_1 S_1}-C_{11}e^{-\kappa_1 S_1-S_2/a}\cdot e^{S/a}.$$

Второе слагаемое

$$-C_{11}\int\limits_0^{S_2-S}\exp\left(\frac{c_1-\lambda a}{ac_1}(S+x)\right)\frac{1}{a}e^{-x/a}\,dx=-C_{11}e^{-\kappa_1 S}\cdot\frac{1}{a}\int\limits_0^{S_2-S}\exp\left(-\frac{\lambda}{c_1}x\right)dx=$$

$$=-C_{11}\frac{c_1}{\lambda a}e^{-\kappa_1 S}+C_{11}\frac{c_1}{\lambda a}\exp\left(-\frac{\lambda}{c_1}S_2\right)e^{S/a}.$$

После подстановки этих соотношений в (11) и приведения подобных, получаем условие

$$-\lambda C_{11}e^{-\kappa_1 S_1}+C_{11}\frac{c_1}{a}e^{-\lambda S_2/c_1}+C_2\frac{c_1}{a}e^{-\lambda S_2/c_1}=0,$$

откуда и получаем связь C_2 и C_{11}:

$$C_2=C_{11}\left[\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1(S_2-S_1)}-1\right],$$

или

$$C_{11}=C_2\Big/\left[\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1(S_2-S_1)}-1\right]=Ce^{\kappa_1 S_2}\Big/\left[\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1(S_2-S_1)}-1\right]. \tag{33}$$

Заметим, что выражение, стоящее в квадратных скобках, больше нуля, так как $\lambda a>c_1$, и, так как $\kappa_1>0$ и $S_2>S_1$, то $\exp(\kappa_1(S_2-S_1))>1$. Итак

$$p_{11}(S)=C\frac{e^{\kappa_1(S_2-S_1)}-e^{\kappa_1(S_2-S)}}{\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1(S_2-S_1)}-1},\quad S_1<S<S_2. \tag{34}$$

Для нахождения константы C_{01} рассмотрим условие на границе $S=S_2$. При $S>S_2$ мы имеем $p_2(S)$. При $S<S_2$ пересечь границу могут процессы с $c=c_0$ и $c=c_1$. Поэтому, рассматривая интервал Δt, получим

$$p_2(S_2)=(1-\lambda\Delta t)[p_{01}(S_2-c_0\Delta t)+p_{11}(S_2-c_1\Delta t)]+o(\Delta t), \tag{35}$$

откуда, после предельного перехода $\Delta t \to 0$, получим условие

$$p_2(S_2) = p_{01}(S_2) + p_{11}(S_2). \tag{36}$$

Подстановка решений даёт

$$C = C\frac{e^{\kappa_1(S_2-S_1)}-1}{\dfrac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1(S_2-S_1)}-1} + C_{01}\left(\frac{c_0}{\lambda a}-1\right)e^{\kappa_0 S_2}, \tag{37}$$

откуда и находится константа C_{01}:

$$C_{01} = C\frac{\left(\dfrac{\lambda a}{c_1}-1\right)e^{\kappa_1(S_2-S_1)}\cdot e^{-\kappa_0 S_2}}{\left(\dfrac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1(S_2-S_1)}-1\right)\left(\dfrac{c_0}{\lambda a}-1\right)}, \tag{38}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Panjer H.H., Willmot G.E.* Insurance Risk Models. – Society of Actuaries, 1992, 442 p.
2. *Такач Л.* Комбинаторные методы в теории случайных процессов. – М.: Изд-во «Мир», 1971, 263 с.
3. *Адашкин Л.Ф.* Математическая модель фонда социального страхования (диффузионное приближение). – Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование». Анжеро-Судженск, 15 ноября 2002 г., Томск: Изд-во «Твердыня», 2002, с.14-18.
4. *Змеев О.А.* Математические модель фонда социального страхования с детерминированными расходами на социальные программы (диффузионное приближение) // Изв. вузов Физика, 2003, №3, с. 83-87.
5. *Змеев О.А.* Математические модель фонда социального страхования со случайными расходами на социальные программы (диффузионное приближение) // Изв. вузов Физика, 2003, №3, с. 88-93.
6. *Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1988, 174 с.

Поступила в редакцию 17.12.02.