ISSN 0021-3411

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

ФИЗИКА

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

ФИЗИКА МАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА

ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

4·2000

ИЗДАНИЕ
ТОМСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ

Известия высших учебных заведений

ФИЗИКА

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издается с января 1958 г.

Том 43 **Апрель** **№ 4**

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 519.2

Р.Т.ВАЛЕЕВ, А.Ф.ТЕРПУГОВ

РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК "ЯПОНСКИХ СВЕЧЕК" В МОДЕЛИ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕН САМУЭЛЬСОНА

Находятся точные распределения вероятностей для статистик, характеризующих так называемые японские свечки, применяемые при анализе фондового и финансового рынка.

Технические методы анализа фондового и финансового рынка получили в настоящее время очень широкое распространение. Наряду с методами, имеющими теоретическое обоснование, такими, как метод скользящего среднего, метод осцилляторов, имеется целый ряд методов, для которых техническое обоснование отсутствует. К таким методам относится и популярный метод "японских свечек". Несмотря на то, что этому методу посвящены уже целые монографии [1, 2], автору не удалось найти в научной литературе каких-либо теоретических обоснований этого метода.

Данная работа представляет собой попытку рассчитать характеристики свечи в непрерывном времени в модели изменения цен Самуэльсона.

Описание модели

Пусть торговая сессия начинается в момент времени $t=0$ и заканчивается в момент времени $t=T$. Цену финансового актива в момент времени t обозначим как S_t. Величинами, определяющими "японскую свечку", являются следующие:

– S_0 – цена открытия;

– S_t – цена закрытия;

– $S_{\max} = \max\limits_{0\le t\le T} S_t$ – максимальная цена за период сессии;

– $S_{\min} = \min\limits_{0\le t\le T} S_t$ – минимальная цена за период сессии.

Для теоретического исследования перейдем от процесса S_t к процессу

$$h_t = \ln(S_t/S_0).$$

Тогда "японская свечка" характеризуется величинами h_T, $h_{\max}$ и $h_{\min}$, так как $h_0=0$.

Для вероятностного описания свечи надо в общем случае найти совместную плотность вероятностей $p(h_{\max}, h_{\min}, h_T)$ указанных выше величин.

Мы решим эту задачу в модели изменения цен Самуэльсона [3], когда считается, что процесс h_t является диффузионным случайным процессом, который записывается в виде

$$dh_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\, dw_t, \tag{1}$$

где μ – коэффициент сноса; σ – коэффициент волатильности, а w_t – стандартный винеровский случайный процесс.

Основное уравнение

Обозначим через $P(x,t)$ вероятность того, что $\max\limits_{t\le\tau\le T} h_\tau \le B$, $\min\limits_{t\le\tau\le T} h_\tau \ge A$, $h_\tau \le C$ при условии, что $h_t = x$, и выведем уравнение для $P(x,t)$. Сдвигаясь по времени на бесконечно малый интервал Δt и учитывая, что при этом x также изменится на бесконечно малую величину Δx с вероятностью 1, получим

$$P(x,t) = M\{P(x+\Delta x,\ t+\Delta t)\}. \tag{2}$$

Считая функцию $P(x,t)$ дважды дифференцируемой по аргументу x и однократно по аргументу t, получим

$$P(x,t) = P(x,t) + M\left\{\Delta t\frac{\partial P}{\partial t} + \Delta x\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\Delta x^2\right\} + o(\Delta t).$$

Так как $\Delta x = \Delta h_t$, то, согласно свойству диффузионных процессов,

$$M\{\Delta x\} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t;\ M\{\Delta x^2\} = \sigma^2\Delta t,$$

так что

$$P(x,t) = P(x,t) + \Delta t\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right] + o(\Delta t).$$

Сокращая $P(x,t)$, деля на Δt и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получим уравнение для $P(x,t)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0. \tag{3}$$

Так как сессия начинается при $t = 0$ и при этом $h_0 = 0$, то нас интересует лишь $P(0,0)$. В силу определения $P(x,t)$ должны выполняться следующие граничные условия:

$$P(B,t) = P(A,t) = 0 \quad \text{для} \quad 0 \le t \le T,$$
$$P(x,T) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > C, \\ 1, & \text{если } x \le C, \end{cases} \tag{4}$$

так что нашей задачей является решение уравнения (3) с граничными условиями (4), то есть решение дифференциального уравнения второго порядка параболического типа в полосе.

Стандартизация уравнения и его решение

Для решения уравнения (3) перейдем от переменной t к переменной τ по формуле

$$\tau = \sigma^2(T - t).$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt} = -\sigma^2\frac{\partial}{\partial \tau},$$

то, введя обозначение $(\mu - \sigma^2/2)/\sigma^2 = \mu_0$, приведем уравнения (3) к виду

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} - \mu_0\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \tag{5}$$

с граничными условиями

$$P(B,\tau) = P(A,\tau) = 0 \tag{6}$$

и начальным условием

$$P(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > C, \\ 1, & \text{если } x \le C. \end{cases} \tag{7}$$

Для нахождения $P(x,\tau)$ забудем сначала про граничные условия (6) и рассмотрим решение задачи

$$\frac{\partial P}{\partial \tau}-\mu_0\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=0 \tag{8}$$

в области $\tau\geq 0$, $-\infty<x<+\infty$ и при начальном условии

$$P(x,0)=\begin{cases}0, & \text{если } x>C,\\ 1, & \text{если } x\leq C.\end{cases} \tag{9}$$

Для решения этой задачи найдем сначала функцию Грина уравнения (8), то есть решим уравнение (8) с начальным условием $P(x,0)=\delta(x)$.

Обозначим

$$\widetilde{P}(x,s)=\int\limits_0^\infty P(x,\tau)e^{-s\tau}d\tau,$$

$$\overline{P}(w,s)=\int\limits_{-\infty}^\infty \widetilde{P}(x,s)e^{-iwx}dx.$$

Тогда, делая преобразование Лапласа в уравнении (8), получим

$$s\widetilde{P}(x,s)-\mu_0\frac{d\widetilde{P}(x,s)}{dx}-\frac{1}{2}\frac{d^2\widetilde{P}(x,s)}{dx^2}=\delta(x). \tag{10}$$

Находя теперь преобразование Фурье от этого выражения, получим

$$s\overline{P}(w,s)-\mu_0(-iw)\overline{P}(w,s)-\frac{(-iw)^2}{2}\overline{P}(w,s)=1,$$

откуда

$$\overline{P}(w,s)=\left(s+iw\mu_0+\frac{w^2}{2}\right)^{-1}. \tag{11}$$

Отсюда по таблицам обратного преобразования Лапласа и обратного преобразования Фурье [4]

$$\widetilde{P}(w,\tau)=\int\limits_{-\infty}^\infty P(x,\tau)e^{iwx}dx=\exp\left(-iw\mu_0\tau-\frac{w^2\tau^2}{2}\right),$$

$$P(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{(x+\mu_0\tau)^2}{2\tau}\right),$$

то есть функция Грина уравнения (8) есть

$$G(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{(x+\mu_0\tau)^2}{2\tau}\right). \tag{12}$$

Отсюда решение уравнения (8) с начальным условием (9) имеет вид

$$P(x,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{C}1\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{(x-u+\mu_0\tau)^2}{2\tau}}du=\Phi\left(\frac{c-x-\mu_0\tau}{\sqrt{\tau}}\right), \tag{13}$$

где $\Phi(\cdot)$ есть функция Лапласа

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Легко убедиться непосредственной проверкой, что формула (13) действительно есть решение уравнения (8) с начальным условием (9).

Вернемся теперь к исходной задаче. Для ее решения перейдем к функции

$$Q(x,\tau)=P(x,\tau)-\Phi\left(\frac{C-x-\mu_0\tau}{\sqrt{\tau}}\right), \tag{14}$$

которая удовлетворяет тому же уравнению, что и функция $P(x,\tau)$, то есть

$$\frac{\partial Q}{\partial\tau}-\mu_0\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=0, \tag{15}$$

но с нулевым начальным условием

$$Q(x,0)=0$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned}Q(B,\tau)&=-\Phi\left(\frac{C-B-\mu_0\tau}{\sqrt{\tau}}\right),\\ Q(A,\tau)&=-\Phi\left(\frac{C-A-\mu_0\tau}{\sqrt{\tau}}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

Для нахождения $Q(x,\tau)$ перейдем к ее преобразованию Лапласа по аргументу τ, то есть

$$\overline{Q}(x,s)=\int_0^\infty Q(x,\tau)e^{-s\tau}d\tau.$$

Применяя преобразование Лапласа и уравнение (15), получим, что $\overline{Q}(x,s)$ удовлетворяет уравнению

$$s\overline{Q}(x,s)-\mu_0\frac{d\overline{Q}}{dx}-\frac{1}{2}\frac{d^2\overline{Q}}{dx^2}=0. \tag{17}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2+2\mu_0\lambda-2s=0$$

имеет корни

$$\lambda_1(s)=\sqrt{\mu_0^2+2s}-\mu_0,\quad \lambda_2(s)=-\sqrt{\mu_0^2+2s}-\mu_0. \tag{18}$$

Заметим, что при любых значениях безразмерного параметра μ_0 $\lambda_1(s)>0$ и $\lambda_2(s)<0$, так как при $s>0$ $\sqrt{\mu_0^2+2s}>|\mu_0|$.

Поэтому общее решение уравнения (17) имеет вид

$$\overline{Q}(x,s)=C_1(s)e^{\lambda_1(s)x}+C_2(s)e^{\lambda_2(s)x}. \tag{19}$$

Для нахождения функций $C_1(s)$ и $C_2(s)$ воспользуемся граничными условиями (16). Для этого предварительно вычислим преобразование Лапласа от функции $\Phi\left(\frac{a-\mu_0\tau}{\sqrt{\tau}}\right)$. Имеем

$$I(a)=\int_0^\infty\Phi\left(\frac{a-\mu_0\tau}{\sqrt{\tau}}\right)e^{-s\tau}d\tau. \tag{20}$$

Дифференцируя по параметру a, получим

$$I'(a)=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(a-\mu_0\tau)^2}{2\tau}-s\tau} d\tau = e^{a\mu_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{a^2}{2\tau}-\left(s+\frac{\mu_0^2}{2}\right)\tau} d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\mu_0^2+2s}} \exp\left(a\mu_0-\sqrt{a^2\left(\mu_0^2+2s\right)}\right),$$

где использованы формулы (3.471.9), (8.469.3) из [5]

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\beta}{x}-\gamma x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-2\sqrt{\beta\gamma}}.$$

Итак,

$$I'(a)=\frac{1}{\sqrt{{\mu_0}^2+2s}} \exp\left(a\mu_0-|a|\sqrt{\mu_0^2+2s}\right). \tag{21}$$

Возвращаясь к функции $I(a)$, получим

$$I(a)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0^2+2s}\left(\mu_0+\sqrt{\mu_0^2+2s}\right)} e^{a\left(\mu_0+\sqrt{\mu_0^2+2s}\right)} & \text{при } a\le 0, \\ \dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0^2+2s}\left(\mu_0-\sqrt{\mu_0^2+2s}\right)} e^{a\left(\mu_0-\sqrt{\mu_0^2+2s}\right)} & \text{при } a\ge 0, \end{cases} \tag{22}$$

где использовано, что $I(a)\to 0$ при $a\to-\infty$.

Учитывая, что $C-B<0$ и $C-A>0$, так как по смыслу всегда $A\le C\le B$, получим, что

$$\begin{gathered} \overline{Q}(B,S)=-\frac{\exp(C-B)\left(\mu_0+\sqrt{\mu_0^2+2s}\right)}{\sqrt{\mu_0^2+2s}\left(\mu_0+\sqrt{\mu_0^2+2s}\right)}, \\ \overline{Q}(A,S)=-\frac{1}{s}-\frac{\exp(C-A)\left(\mu_0-\sqrt{\mu_0^2+2s}\right)}{\sqrt{\mu_0^2+2s}\left(\mu_0-\sqrt{\mu_0^2+2s}\right)}. \end{gathered} \tag{23}$$

Эти выражения и могут быть использованы для нахождения неизвестных функций $C_1(s)$ и $C_2(s)$, так как теперь из (19) мы имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} C_1(s)e^{\lambda_1(s)B}+C_2 e^{\lambda_2(s)B}=\overline{Q}(B,s), \\ C_1(s)e^{\lambda_1(s)A}+C_2(s)e^{\lambda_2(s)A}=\overline{Q}(A,s). \end{gathered} \tag{24}$$

Отсюда

$$\begin{gathered} C_1(s)=\frac{\overline{Q}(B,s)\, e^{\lambda_2(s)A}-\overline{Q}(A,s)e^{\lambda_2(s)B}}{e^{\lambda_1(s)B+\lambda_2(s)A}-e^{\lambda_2(s)B+\lambda_1(s)A}}, \\ C_2(s)=\frac{\overline{Q}(A,s)e^{\lambda_1(s)B}-\overline{Q}(B,s)e^{\lambda_1(s)A}}{e^{\lambda_1(s)B+\lambda_2(s)A}-e^{\lambda_2(s)B+\lambda_1(s)A}}, \end{gathered} \tag{25}$$

так что окончательно

$$\overline{Q}(x,s)=\overline{Q}(B,s)\frac{e^{\lambda_2(s)A+\lambda_1(s)x}-e^{\lambda_1(s)A+\lambda_2(s)x}}{e^{\lambda_1(s)B+\lambda_2(s)A}-e^{\lambda_2(s)B+\lambda_1(s)A}}+\overline{Q}(A,s)\frac{e^{\lambda_1(s)B+\lambda_2(s)x}-e^{\lambda_2(s)B+\lambda_1(s)x}}{e^{\lambda_1(s)B+\lambda_2(s)A}-e^{\lambda_2(s)B+\lambda_1(s)A}}. \quad (26)$$

К сожалению, найти обратное преобразование Лапласа от этого выражения не представляется возможным из-за знаменателя стоящих в нем дробей.

Некоторые точные распределения

Итак, найти совместную плотность вероятностей $p(h_{\max},h_{\min},h_\tau)$ в явном аналитическом виде, по-видимому, невозможно. Но можно найти точный вид двумерных плотностей вероятностей $p(h_{\max},h_\tau)$ и $p(h_{\min},h_\tau)$.

Найдем $p(h_{\max},h_\tau)$. Так как $h_{\min}$ нас теперь не интересует, то это соответствует тому, что нижнюю границу полосы – параметр A – надо устремить к $-\infty$. Так как $h_2(s)<0$ и $h_1(s)>0$, то при этом $e^{\lambda_2(s)A}\to+\infty$ и $e^{\lambda_1(s)A}\to 0$. Поэтому

$$\lim_{A\to-\infty}\overline{Q}(x,s)=\overline{Q}(B,s)e^{\lambda_1(s)(x-B)}, \quad (27)$$

и в этом случае

$$\overline{Q}(0,s)=\overline{Q}(B,s)e^{-\lambda_1(s)B}=-\frac{1}{\sqrt{\mu_0^2+2s}}\frac{e^{C\left(\mu_0+\sqrt{\mu_0^2+2s}\right)}}{\mu_0+\sqrt{\mu_0^2+2s}}e^{-2B\sqrt{\mu_0^2+2s}}. \quad (28)$$

По смыслу $\overline{Q}(0,s)$ есть преобразование Лапласа по параметру τ от вероятности

$$P\{h_{\max}\le B,h_\tau\le C\},$$

где $h_{\max}=\max\limits_{T-\tau\le t\le T}h_t$. Так как совместная плотность вероятностей

$$p(h_{\max},h_\tau)=\frac{\partial^2P\{h_{\max}\le B,h_\tau\le C\}}{\partial B\partial C},$$

где $B=h_{\max},C=h_\tau$, то преобразование Лапласа от $p(h_{\max},h_\tau)$ есть

$$\frac{\partial^2\overline{Q}(0,s)}{\partial C\partial B}=2e^{h_\tau\left(\mu_0+\sqrt{\mu_0^2+2s}\right)-2h_{\max}\sqrt{\mu_0^2+2s}}=$$
$$=2e^{h_\tau\mu_0+(h_\tau-2h_{\max})\sqrt{\mu_0^2+2s}}=\overline{p}(h_{\max},h_\tau), \quad (29)$$

где $B=h_{\max},C=h_\tau$. Находя обратное преобразование Лапласа, получим

$$p(h_{\max},h_\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi\tau^3}}(2h_{\max}-h_\tau)\exp\left(-\frac{(2h_{\max}-h_\tau)^2}{2\tau}+h_\tau\mu_0-\frac{\mu_0^2}{2}\tau\right). \quad (30)$$

В частности, при $\tau=\sigma^2T=\tau_0$ (что соответствует $t=0$)

$$p(h_{\max},h_\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi\tau_0^3}}(2h_{\max}-h_\tau)\exp\left(-\frac{(2h_{\max}-h_\tau)^2}{2\tau_0}+h_\tau\mu_0-\frac{\mu_0^2}{2}\tau_0\right).$$

Сами величины $h_{\max}$ и h_τ определены в области

$$-\infty<h_\tau\le h_{\max},\quad h_{\max}\ge 0.$$

Отсюда легко находятся и одномерные плотности вероятностей величин $h_{\max}$ и h_τ. Найдем $p(h_\tau)$. Пусть $h_\tau<0$. Тогда

$$p(h_t)=\int_0^\infty p(h_{\max},h_\tau)dh_{\max}=\sqrt{\frac{2}{\pi\tau_0^3}}\,e^{h_\tau\mu_0-\frac{\mu_0^2}{2}\tau_0}\int_0^\infty(2h_{\max}-h_\tau)\exp\left(-\frac{(2h_{\max}-h_\tau)^2}{2\tau_0}\right)dh_{\max}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0}}\exp\left(-\frac{h_\tau^2}{2\tau_0}+h_\tau\mu_0-\frac{\mu_0^2}{2}\tau_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0}}\exp\left(-\frac{(h_\tau-\mu_0\tau_0)^2}{2\tau_0}\right).$$

Если же $h_\tau>0$, то

$$p(h_\tau)=\int_{h_\tau}^\infty p(h_{\max},h_\tau)dh_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0}}\exp\left(-\frac{(h_\tau-\mu_0\tau_0)^2}{2\tau_0}\right).$$

Таким образом, всегда

$$p(h_\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0}}\exp\left(-\frac{(h_\tau-\mu_0\tau_0)^2}{2\tau_0}\right), \tag{31}$$

что, впрочем, совершенно естественно.

В частности,

$$M\{h_\tau\}=\mu_0\tau=\frac{\mu-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}\sigma^2T,$$

$$D\{h_\tau\}=\tau_0=\sigma^2T,$$

что также вполне естественно.

Найдем теперь $p(h_{\max})$. Имеем

$$p(h_{\max})=\int_{-\infty}^{h_{\max}}p(h_{\max},h_\tau)dh_\tau=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi\tau_0^3}}\int_{-\infty}^{h_{\max}}(2h_{\max}-h_\tau)\exp\left(-\frac{(2h_{\max}-h_\tau)^2}{2\tau_0}+h_\tau\mu_0-\frac{\mu_0^2}{2}\tau_0\right)dh_\tau.$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$p(h_{\max})=\sqrt{\frac{2}{\pi\tau_0}}\exp\left(-\frac{(h_{\max}-\mu_0h_\tau)^2}{2\tau_0}\right)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mu_0\,e^{2h_{\max}\mu_0}\,\Phi\left(-\frac{h_{\max}+\mu_0\tau_0}{\sqrt{\tau_0}}\right) \tag{32}$$

в области $h_{\max}\geq 0$. В частности, при $\mu_0=0$

$$p(h_{\max})=\sqrt{\frac{2}{\pi\tau_0}}\exp\left(-\frac{h_{\max}^2}{2\tau_0}\right),\qquad h_{\max}\geq 0. \tag{33}$$

Аналогично, чтобы найти $p(h_\tau,h_{\min})$, надо сделать предельный переход $B\to+\infty$. Тогда $e^{\lambda_1(s)B}\to+\infty$, $e^{\lambda_2(s)B}\to 0$, и мы получаем

$$\lim_{B\to+\infty}\overline{Q}(x,s)=\overline{Q}(A,s)e^{\lambda_2(s)(x-A)}, \tag{34}$$

и при $x=0$

$$\overline{Q}(0,s)=\overline{Q}(A,s)e^{-\lambda_2(s)A}=$$

$$=-\left[\frac{1}{s}+\frac{e^{(C-A)\left(\mu_0-\sqrt{\mu_0^2+2s}\right)}}{\sqrt{\mu_0^2+2s}\left(\mu_0-\sqrt{\mu_0^2+2s}\right)}\right]e^{A\left(\mu_0+\sqrt{\mu_0^2+2s}\right)} \tag{35}$$

По смыслу $\overline{Q}(0,s)$ в этом случае есть преобразование Лапласа по параметру τ от вероятности $P\{h_\tau \le C, h_{\min} \ge A\}$, где $h_{\min} = \min\limits_{T-\tau<t\le T} h_t$. В этом случае совместная плотность вероятностей

$$p(h_\tau, h_{\min}) = -\frac{\partial^2 P\{h_\tau \le C, h_{\min} \ge A\}}{\partial C\,\partial A}\quad, \tag{36}$$

где $C=h_\tau$, $A=h_{\min}$ и преобразование Лапласа (по параметру τ) от $p(h_\tau, h_{\min})$ есть

$$-\frac{\partial^2 \overline{Q}(0,s)}{\partial C\,\partial A}=2\exp\left(h_\tau\mu_0+(2h_{\min}-h_\tau)\sqrt{\mu_0^2+2s}\right), \tag{37}$$

где $C=h_\tau$, $A=h_{min}$. Находя обратное преобразование Лапласа, получим

$$p(h_\tau, h_{\min})=\sqrt{\frac{2}{\pi\tau^3}}(h_\tau-2h_{\min})\exp\left(-\frac{(h_\tau-2h_{\min})^2}{2\tau}+h_\tau\mu_0-\frac{\mu_0^2}{2}\tau\right), \tag{38}$$

что совершенно аналогично формуле (30). Эта плотность вероятностей определена в области

$$-\infty<h_{\min}\le h_\tau,\quad h_{\min}\le 0.$$

Дальнейшее аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nison S. Japanese Candlestick Charting Techniques.– New York: New York Institute of Finance, 1991.– 315 p.
2. Nison S. Beyond Candlesticks. John Wiley.– New York, 1994.– 280 p.
3. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.I. Факты и модели.– М.: Фазис, 1998. – 489 с.
4. Бейтман Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.I.– М.: Наука, 1969.– 343с.
5. Градштейн Л.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Физматгиз, 1963.– 1100 с.

Томский госуниверситет

Поступила в редакцию 20.12.99.