

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

Научный журнал

2007

№1

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС 77-29497
от 27 сентября 2007 г.



ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Председатель научно-редакционного совета
Горцев А.М., д.т.н.

НАУЧНО-РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА

Агибалов Г.П., д.т.н.; Дмитриев Ю.Г., д.ф.-м.н.; Домбровский В.В., д.т.н.; Змеев О.А., д.ф.-м.н.; Конев В.В., д.ф.-м.н.; Костюк Ю.Л., д.т.н.; Кошкин Г.М., д.ф.-м.н.; Матросова А.Ю., д.т.н.; Назаров А.А., д.т.н.; Параев Ю.И., д.т.н., заслуженный деятель науки РФ; Поддубный В.В., д.т.н.; Смагин В.И., д.т.н. (зам. председателя научной редакции); Сущенко С.П., д.т.н.; Тарасенко Ф.П., д.т.н., заслуженный деятель науки РФ; Терпугов А.Ф., д.ф.-м.н., заслуженный деятель науки РФ (зам. председателя научной редакции); Цой С.А., к.ф.-м.н. (ответственный секретарь)

Адрес редакции: 634050, г. Томск, проспект Ленина, д. 36

E-mail: vesnik_uvti@mail.tsu.ru

В журнале публикуются результаты теоретических и прикладных исследований вузов, научно-исследовательских, проектных и производственных организаций в области управления, вычислительной техники и информатики в технических, экономических и социальных системах.

Тематика публикаций журнала:

- УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ
- МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
- ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ
- ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ
- ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ
- ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ И АВТОМАТЫ
- МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ

Периодичность выхода журнала: 4 номера в год

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Ново-Соборная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортес*

К-ОКП ОК-005-93, код продукции 952000

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 10.12.2007.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 16,12. Уч.-изд. л. 18,05. Тираж 300 экз. Заказ № 41.

Отпечатано в типографии «М-Принт», г. Томск, ул. Пролетарская, 38/1

УДК 519.865

В.В. Поддубный, О.В. Романович**МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЭЙЛЕРА С УРАВНИВАНИЕМ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Рассматривается задача численного интегрирования обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной, с переменным, в том числе случайным запаздыванием аргумента. Получена интерполяционная модификация вычислительной схемы Эйлера с уравниванием, пригодная для решения дифференциальных уравнений с произвольными, в том числе случайно изменяющимися и как угодно малыми запаздываниями, когда становится неприменимым известный метод шагов. Показано, что сохраняется второй порядок точности этой модификации как для итерационной структуры алгоритма метода Эйлера с уравниванием, так и для ее первого приближения (метода Хьюна).

Проблема численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом при постоянных или переменных, но строго положительных конечных запаздываниях решается сравнительно просто с использованием алгоритмов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания на основе известного метода шагов [1]. Однако эта проблема резко усложняется в случае, если переменные запаздывания (в том числе случайные) могут принимать как угодно малые значения. В этом случае метод шагов неприменим. А поскольку любые методы численного интегрирования дифференциальных уравнений оперируют с конечным, отличным от нуля шагом интегрирования, не обязательно соизмеримым с произвольно изменяющимися запаздываниями, в процессе численного интегрирования приходится прибегать к интерполяции решения в точках, где значения решения не были вычислены.

В [4] предложен алгоритм такой интерполяции для случая произвольного, в том числе как угодно близкого к нулю, постоянного запаздывания, модифицирующий известную схему метода Эйлера с уравниванием второго порядка точности. В данной работе этот подход развивается и распространяется на случай переменных запаздываний, в том числе случайных и как угодно малых. При этом проводится оценка порядка точности модифицированного для случая переменного запаздывания итерационного метода Эйлера с уравниванием. Показывается, что модифицированный итерационный метод Эйлера с уравниванием, как и его первое приближение (метод Хьюна), сохраняют второй порядок точности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим начальную задачу для обыкновенного (в общем случае нелинейного) дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной, с переменным запаздыванием $\tau(t)$:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), y(t - \tau(t))), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

с заданными начальными условиями

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \max \tau(t), t_0); \quad y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

где $\varphi(t)$ – начальная функция, y_0 – начальное значение решения, причем $\varphi(t_0)$ не обязательно равно y_0 .

Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывна, функция $f(t, y, z)$ непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет условиям Липшица по второму аргументу. Тогда, как известно [1], решение начальной задачи для дифференциального уравнения (1) существует и единственно. В случае возможного скачка начального условия ($\varphi(t_0) \neq y_0$), а также в случае, если начальная функция $\varphi(t)$ не удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), решение $y(t)$ при $t > t_0$ испытывает скачки производной первого рода. Непрерывное и всюду дифференцируемое решение возможно лишь в случае, если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию

$$d\varphi(t_0 - 0)/dt = f(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0 - \tau(t_0))).$$

При постоянном, заранее известном τ для интегрирования дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом (1) при начальных условиях (2) можно использовать известный метод шагов [1]. Однако в случае переменного $\tau = \tau(t)$, тем более случайно изменяющегося во времени, метод шагов не применим. В этом случае задача интегрирования нелинейного дифференциального уравнения (1) существенно усложняется. Существует множество вычислительных схем решения начальной задачи для нелинейного дифференциального уравнения с переменным запаздыванием [2]. Однако по большей части эти методы либо носят частный характер, либо весьма сложны в реализации.

В данной работе предлагается метод численного решения начальной задачи для дифференциального уравнения (1), обобщающий метод Эйлера с уравниванием при отсутствии запаздывания [3] и при постоянном запаздывании [4] на случай переменного (в том числе случайного и как угодно малого) запаздывания $\tau(t)$.

Для дальнейшего анализа необходимо конкретизировать свойства функции $\tau(t)$.

Пусть $\tau(t)$ случайно изменяется во времени. В простейшем случае такое случайное изменение можно описать кусочно-постоянной случайной функцией, порождаемой случайным временным рядом $\tau_k, k = 1, 2, \dots$, в котором все τ_k неотрицательны, статистически независимы и имеют одинаковую плотность распределения $p(\tau_k)$. Например, $p(\tau_k) = 1/\tau_{\max}$ – равномерное в интервале $[0, \tau_{\max} > 0]$ распределение. Тогда при любом разбиении $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ интервала интегрирования $[t_0, T]$ на n примыкающих друг к другу интервалов $[t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{1, n-1}$, имеем $\tau(t)$ в виде случайного «меандра»:

$$\tau(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \cdot 1(t_k \leq t < t_{k+1}), \quad t \in [t_0, T). \quad (3)$$

Поскольку любое запаздывание τ_k с некоторой отличной от нуля вероятностью может оказаться меньше любого заданного $\varepsilon > 0$, хорошо известный для решения дифференциального уравнения с запаздыванием метод шагов [1] оказывается, вообще говоря, неприменимым (для его применимости необходимо, чтобы $\min \tau(t) > 0$). В связи с этим для интегрирования дифференциального уравнения

со случайно изменяющимся запаздыванием приходится применять вычислительные методы, использующие интерполяцию значений решения в точках, где не были вычислены значения решения при применении той или иной вычислительной схемы интегрирования.

Методы первого порядка точности (метод ломаных Эйлера и подобные ему) не используются при интегрировании дифференциальных уравнений, в том числе дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в силу его низкой точности (медленной сходимости к точному решению с уменьшением шага интегрирования). Поэтому рассмотрим схему второго порядка точности – метод Эйлера с уравниванием [3, 5], называемый также итерационным методом Эйлера [5], методом Эйлера с пересчетом [6], симметричной схемой Эйлера [7], и его упрощенный (неитерационный) вариант – метод Хьюна [8] (он же – усовершенствованный метод Эйлера – Коши [9]). Модифицируем эту схему для решения дифференциального уравнения с произвольным, в том числе и как угодно малым запаздыванием, введя в нее возможность интерполяции.

2. Обобщение метода Эйлера с уравниванием и метода Хьюна на случай переменного запаздывания

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1) при произвольных изменениях запаздывания во времени: $\tau = \tau(t)$. Разобьем интервал $[t_0, T]$ на n примыкающих друг к другу подынтервалов равной длины $h = (T - t_0)/n$ разбиением: $t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_n = T$, где $t_k = t_0 + kh$, $k = \overline{1, n}$. Проинтегрируем формально дифференциальное уравнение (1) на интервале $[t_0, t]$ с учетом начальных условий (2):

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, y(t), y(t - \tau(t))) dt.$$

Используя это выражение при $t = t_k$ и $t = t_{k+1}$, получаем рекуррентное соотношение

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t), y(t - \tau(t))) dt. \quad (4)$$

Считая функцию $f(t, y(t), y(t - \tau(t)))$ непрерывной функцией своих аргументов, представим приближенно при малом шаге интегрирования h значение интеграла в правой части точного соотношения (4) по формуле трапеции:

$$y(t_{k+1}) \cong y(t_k) + \frac{h}{2} (f(t_k, y(t_k), y(t_k - \tau(t_k))) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}), y(t_{k+1} - \tau(t_{k+1}))))). \quad (5)$$

Обозначая $y_k = y(t_k)$, $\tau_k = \tau(t_k)$, представим рекуррентное уравнение (5), определяющее приближенное решение уравнения (1) при начальных условиях (2), в виде

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(t_k, y_k, y(t_k - \tau_k)) + f(t_{k+1}, y_{k+1}, y(t_{k+1} - \tau_{k+1}))), \quad k = \overline{0, n}, \quad (6)$$

с начальным условием y_0 в момент времени t_0 и начальной функцией $\varphi(t_k - \tau_k)$ при $t_k - \tau_k < t_0$ и $\varphi(t_{k+1} - \tau_{k+1})$ при $t_{k+1} - \tau_{k+1} < t_0$.

В случае автономного уравнения (1) функция $f(t, y(t), y(t - \tau(t)))$ не зависит явно от t : $f = f(y(t), y(t - \tau(t)))$. В этом случае уравнение (6) принимает более простой вид:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(y_k, y(t_k - \tau_k)) + f(y_{k+1}, y(t_{k+1} - \tau_{k+1}))), \quad k = \overline{0, n}. \quad (7)$$

Ограничимся в дальнейшем случае автономного уравнения (1). Это не нарушает общности рассуждений, так как любое неавтономное уравнение вида (1) можно свести к автономной системе уравнений, расширив состояние $y_1(t) = y(t)$ дополнительным состоянием $y_2(t) \equiv t$, так что расширенное состояние примет вид двумерного вектора состояния $\tilde{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$. Тогда уравнение (1) станет системой уравнений автономного вида $d\tilde{y}(t)/dt = \tilde{f}(\tilde{y}(t), \tilde{y}(t - \tau(t)))$, где $\tilde{f} = f((\tilde{y}(t), y_1(t - \tau(t))))y_2(t)$ – двумерная вектор-функция.

Для автономного дифференциального уравнения в качестве начальной функции $\varphi(t)$ удобно взять функцию $\varphi(t) \equiv y^*$, тождественно равную постоянному равновесному значению решения (точке покоя) y^* , обращающему в нуль правую часть автономного дифференциального уравнения $dy^*/dt = f(y^*, y^*) = 0$.

Уравнение (7) обобщает известное соотношение метода Эйлера с уравниванием на случай переменного τ_k . Как и в схеме Эйлера с уравниванием, уравнение (6) будем решать при каждом фиксированном k относительно y_{k+1} методом последовательных приближений (простых итераций), используя в качестве начального приближения $y_{k+1}^{(0)}$ решение по схеме метода Эйлера, использующего вычисление интеграла в правой части (3) по формуле прямоугольников:

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(y_k, y(t_k - \tau_k)), \quad (8)$$

$$y_{k+1}^{(v+1)} = y_k + \frac{h}{2}(f(y_k, y(t_k - \tau_k)) + f(y_{k+1}^{(v)}, y^{(v)}(t_{k+1} - \tau_{k+1}))), \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Окончание процесса последовательных приближений происходит по достижении требуемой абсолютной точности решения ε :

$$|y_{k+1}^{(v+1)} - y_{k+1}^{(v)}| < \varepsilon. \quad (10)$$

Упрощенным вариантом итерационной схемы (9–10) является ее первое приближение $y_{k+1}^{(1)}$ (обобщение метода Хьюна [8]).

Поскольку τ_k может принимать любое неотрицательное значение, не обязательно кратное шагу h , моменты времени $t_k - \tau_k$ также не обязательно будут кратными h . Для приближенного вычисления значения $y(t_{k+1} - \tau_{k+1})$ через значения в точках, ближайших слева и справа к точке $t_{k+1} - \tau_{k+1}$, но кратных h , проведем линейную интерполяцию решений внутри соответствующих отрезков длиной h :

$$\begin{aligned}
 y(t_{k+1} - \tau_{k+1}) &\cong \frac{\tau_{k+1}}{h} y_k + \left(1 - \frac{\tau_{k+1}}{h}\right) y_{k+1}, \quad 0 \leq \tau_{k+1} < h; \\
 y(t_{k+1} - \tau_{k+1}) &\cong \left(1 - \frac{t_{k+1} - \tau_{k+1} - t_m}{h}\right) y_m + \frac{t_{k+1} - \tau_{k+1} - t_m}{h} y_{m+1}, \\
 h &\leq \tau_{k+1} \leq t_{k+1} - t_0, \quad t_{k+1} - \tau_{k+1} \in [t_m, t_{m+1}]; \\
 y(t_{k+1} - \tau_{k+1}) &= y^*, \quad \tau_{k+1} < t_k - t_0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Как видим, интерполяция производится на том (первом при $0 \leq \tau_{k+1} < h$ или m -м при $h \leq \tau_{k+1} \leq t_{k+1} - t_0$) интервале, куда попадает $t_{k+1} - \tau_{k+1}$.

Интерполяционная схема (11) обобщает на случай переменного запаздывания τ_k интерполяционную схему, предложенную в [4] для постоянного запаздывания τ .

3. Порядок точности обобщенного метода Эйлера с уравниванием и интерполяцией

Найдем теперь порядок точности обобщенного на случай уравнений с переменным запаздыванием метода Эйлера с уравниванием и его упрощенного варианта – метода Хьюна. Воспользуемся определениями порядка точности и порядка аппроксимации вычислительных схем решения дифференциальных уравнений, приведенными, например, в [6]. Порядком аппроксимации (соответственно порядком точности) вычислительной схемы называют минимальную степень шага h в разложении в ряд Маклорена невязки вычислительной схемы метода численного решения (соответственно невязки численного решения). Невязкой вычислительной схемы называется разность между левой и правой частями схемы метода на точном решении, деленная на величину шага h на каждом k -м шаге решения. Невязкой решения называется разность между приближенным и точным решением на каждом k -м шаге решения. Можно показать, что порядок точности совпадает с порядком аппроксимации. Поэтому порядок аппроксимации часто называют также порядком точности. Конструктивный алгоритм вычисления порядка аппроксимации вытекает из определения невязки метода.

Запишем выражение для невязки метода Эйлера с уравниванием в соответствии с определением, обозначив точное решение дифференциального уравнения для k -го шага (в k -й момент времени) через $u_k = u(t_k)$, где $u(t)$ является точным решением уравнения (1). Очевидно, u_k подчиняется точному интегральному аналогу (4) дифференциального уравнения (1). Для автономного уравнения (1) рекуррентное соотношение (4) принимает вид

$$u_{k+1} = u_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(u(t), u(t - \tau(t))) dt, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{12}$$

Невязка метода Эйлера с уравниванием и интерполяцией при случайных запаздываниях вида (3) принимает вид

$$\Psi_k(h) = \{u_{k+1} - u_k - (h/2)[f(u_k, u(t_k - \tau_k)) + f(u_{k+1}, u(t_{k+1} - \tau_{k+1}))]\}/h, \tag{13}$$

где от шага h на k -м шаге зависят u_{k+1} через верхний предел $t_{k+1} = t_k + h$ точного равенства (12) и $u(t_{k+1} - \tau_{k+1})$ по формулам (11), куда вместо всех y подставляет-

ся u . При этом следует иметь в виду, что от h на k -м шаге зависят только u_{k+1} и $t_{k+1} = t_k + h$. Величины h , стоящие в знаменателях формул (11), относятся не к k -му интервалу, а к более ранним интервалам, поэтому они в расчете порядка точности участия не принимают.

Разложив в ряд Маклорена правую часть равенства (12), получим с точностью до членов 4-го порядка малости

$$u_{k+1} = u_k + f_k h + \left(f'_{1k} f_k + f'_{2k} c_m \right) \frac{h^2}{2!} + \left[f''_{11k} f_k^2 + 2f''_{12k} f_k c_m + f''_{22k} c_m^2 + f'_1 \left(f'_{1k} f_k + f'_{2k} c_m \right) \right] \frac{h^3}{3!} + O(h^4), \quad (14)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} f_k &= f(u_k, u(t_k - \tau_k)), \quad f'_{1k} = \partial f(u_k, u(t_k - \tau_k)) / \partial u_k, \\ f'_{2k} &= \partial f(u_k, u(t_k - \tau_k)) / \partial u(t_k - \tau_k), \quad f''_{11k} = \partial^2 f(u_k, u(t_k - \tau_k)) / \partial u_k^2, \\ f''_{12k} &= \partial^2 f(u_k, u(t_k - \tau_k)) / \partial u_k \partial u(t_k - \tau_k), \quad f''_{22k} = \partial^2 f(u_k, u(t_k - \tau_k)) / \partial u(t_k - \tau_k)^2, \\ c_m &= (u_{m+1} - u_m) / h_m, \quad t_k - \tau_{k+1} \in [t_m, t_{m+1}]. \end{aligned} \quad (15)$$

В последнем равенстве через h_m обозначена длина m -го, более раннего, чем k -й, интервала $[t_m, t_{m+1}]$.

Разлагая аналогичным образом в ряд Маклорена функцию

$$f(u_{k+1}, u(t_{k+1} - \tau_{k+1}))$$

во втором слагаемом выражения (13) как сложную функцию h , с учетом (12) и (11) (с заменой u на u) и с учетом обозначений (15) получим

$$\begin{aligned} f(u_{k+1}, u(t_{k+1} - \tau_{k+1})) &= f_k + \left(f'_{1k} f_k + f'_{2k} c_m \right) h + \\ &+ \left[f''_{11k} f_k^2 + 2f''_{12k} f_k c_m + f''_{22k} c_m^2 + f'_1 \left(f'_{1k} f_k + f'_{2k} c_m \right) \right] \frac{h^2}{2!} + O(h^3). \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя выражения (14) и (16) с учетом обозначений (15) в (13), приведем $\Psi_k(h)$ к виду

$$\Psi_k(h) = \frac{1}{12} \left[f''_{11k} f_k^2 + 2f''_{12k} f_k c_m + f''_{22k} c_m^2 + f'_1 \left(f'_{1k} f_k + f'_{2k} c_m \right) \right] h^2 + O(h^3). \quad (17)$$

Из разложения (17) видно, что порядок точности метода Эйлера с уравнением и интерполяцией остался равным 2.

Аналогичным образом можно получить разложением в ряд Маклорена по степеням h на k -м шаге невязку метода Хьюна

$$\begin{aligned} \Psi_k(h) &= \{ u_{k+1} - u_k - (h/2) [f(u_k, u(t_k - \tau_k)) + \\ &+ f(u_k + hf(u_k, u(t_k - \tau_k)), u(t_{k+1} - \tau_{k+1}))] \} / h. \end{aligned} \quad (18)$$

Проводя разложение второго слагаемого в (18) как сложной функции h и используя разложение (14), с учетом обозначений (15) получим

$$\Psi_k(h) = \frac{1}{12} \left[-f''_{11k} f_k^2 - 2f''_{12k} f_k c_m - f''_{22k} c_m^2 + 2f'_1 \left(f'_{1k} f_k + f'_{2k} c_m \right) \right] h^2 + O(h^3). \quad (19)$$

Отсюда видно, что порядок точности метода Хьюна с интерполяцией также остается равным двум. Заметим, что в случае линейных дифференциальных уравнений, для которых функция f линейна по своим аргументам, вторые производные в выражениях (17) и (19) обращаются в нуль, и мы видим, что функция $\Psi_k(h)$ для метода Хьюна оказывается при малых h ровно в 2 раза больше, чем для метода Эйлера с уравниванием, что свидетельствует все-таки о несколько меньшей скорости сходимости к точному решению вычислений по итерационной схеме Хьюна по сравнению с итерационной схемой Эйлера с уравниванием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964. 128 с.
2. Солодов А.В., Солодова Е.А. Системы с переменным запаздыванием. М.: Наука, 1980. 384 с.
3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 233 с.
4. Поддубный В.В. Численное решение дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием методом Эйлера с уравниванием и интерполяцией // Обработка данных и управление в сложных системах. Вып. 7. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. С. 165 – 174.
5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 324 с.
6. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
8. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.
9. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1953.

Статья представлена кафедрой прикладной информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 29 июня 2007 г.