ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 284 Декабрь 2004

МАТЕМАТИКА

УДК 547.54

И.А. Александров, Л.С. Копанева

ЛЕВНЕРОВСКИЕ СЕМЕЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА ОБЛАСТИ С СИММЕТРИЕЙ ПЕРЕНОСА

Дано интегральное представление семейства отображений верхней полуплоскости на области с симметрией переноса и указаны семейства областей Левнера, сходящиеся к рассмотренным

Дано интегральное представление семейства отображений верхней полуплоскости на области с симметрией переноса и указаны семейства областей Левнера, сходящиеся к рассмотренным областям.

В [1] показано, что конформное однолистное отображение $\omega:\Pi^+\to\mathbf{C}$ верхней полуплоскости Π^+ комплексной z-плоскости на область D_τ, представляющую собой верхнюю полуплоскость с исключенными идущими из бесконечности конгруэнтными попарно непересекающимися простыми дугами переменной длины и с симметрией переноса на 2π, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\omega}{d\tau}=\operatorname{ctg}\frac{\lambda(\tau)-\omega}{2},\ 0\le\tau\le\tau^0<\infty \qquad (1)$$

с начальным условием $\omega(0,z)=z,\ z\in\Pi^+$. Здесь $\lambda(\tau)$ – прообраз конца разреза, определенным образом параметризованного; $\operatorname{Im}\lambda(\tau)=0$ и $\omega(\tau,z+2\pi)=\omega(\tau,z)+2\pi$.

Следующую теорему можно рассматривать как обратную к указанному предложению. Она сформулирована в [2] (теорема 13), но не была сопровождена доказательством.

Теорема 1. Пусть отображение $\lambda:[0,\infty)\to\mathbf{R},\quad \lambda=\lambda(\tau)$, непрерывно. Тогда $\omega(\tau, z)$, где $\omega(\tau\ z)$ есть решение дифференциального уравнения (1) с начальным условием $\omega(0, z) = z$, $z = x + iy\in\Pi^+$, конформно и однолистно в Π^+ и, кроме того, таковым же является отображение $f(z)=\lim\limits_{\tau\to\infty}(\omega(\tau,z)-iz)$.

Доказательство. Проведем в уравнении (1) замены $\zeta=e^{i\omega}$, $\mu(\tau)=e^{i\lambda(\tau)}$. Поскольку $\operatorname{ctg}\frac{\lambda(\tau)-\omega}{2}=i\frac{e^{i\lambda(\tau)}+e^{i\omega}}{e^{i\lambda(\tau)}-e^{i\omega}}=$ $=i\frac{\mu(\tau)+\zeta}{\mu(\tau)-\zeta}$, то уравнение (1) примет вид

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=-\zeta\frac{\mu(\tau)+\zeta}{\mu(\tau)-\zeta}, \qquad (2)$$

где $|\mu(\tau)|=1,\ 0\le\tau<\infty$. Начальное условие запишется в виде $\zeta(0,z)=e^{iz}, z\in\Pi^+$, показывающем, что точка $\zeta(0,z)=e^{iy}e^{ix}$ принадлежит единичному кругу. В [3] (теорема 5) к исследованию разрешимости этой задачи Коши применен метод последовательных приближений, аналогичный методу Пикара, и установлено существование на $0 < \tau < \infty$ единственного решения задачи. Оно голоморфно в Π^+, однолистно отображает каждую вертикальную полосу шириной 2π, лежащую в Π^+, в единичный круг, а семейство функций $e^\tau\zeta(\tau, e^{iz})$ равномерно сходится внутри Π^+ к однолистной относительно e^{iz} функции.

Отображение $\omega(\tau,z)=-i\ln\zeta(\tau,e^{iz})$ однолистно относительно e^{iz}, $z\in\Pi^+$, и обладает симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π: $\omega(\tau,z+2\pi)=\omega(\tau,z)+2\pi$.

Пусть $f(\tau,z)=\omega(\tau,z)-i\tau$. Переходя в формуле $f(\tau,z)=$ $=-i\ln(e^\tau\zeta(\tau,e^{iz}))$ к пределу при $\tau\to\infty$, получим $\lim\limits_{\tau\to\infty}f(\tau,z)=$ $=f(z)=-i\ln q(e^{iz})$, где функция $q(\omega)=\lim\limits_{\tau\to\infty}e^\tau\zeta(\tau,\omega)$, $|\omega|<1$, однолистна в единичном круге. Теорема доказана.

Решение уравнения (2) при рассматриваемом начальном условии удовлетворяет условию (см., например, [4]) $\lim\limits_{e^{iz}\to0}e^{-iz}\zeta(\tau,e^{iz})=e^{-\tau}$, $z=x+iy$, в силу которого $\lim\limits_{y\to\infty}\ln(e^{-iz}e^{i\omega})=-\tau$ или, что то же самое, $\lim\limits_{y\to\infty}(f(z)-z)=0$. Теперь легко находим, что $\lim\limits_{y\to\infty}(f(z)-z)=0$.

Множество функций $f(z)$, полученных согласно теореме 1, плотно в классе $X_{2\pi}$, т.е. в классе всех голоморфных однолистных в верхней полуплоскости отображений $f:\Pi^+\to\mathbf{C}$, удовлетворяющих условиям $f(\Pi^+)$, есть односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси типа полуплоскости, $f(z+2k\pi)=$ $=f(z)+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, и $\lim\limits_{\operatorname{Im}z\to\infty}(f(z)-z)=0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1) при $\lambda(\tau)=\sigma\tau$. С помощью замены $\sigma\tau-\omega=2u$ оно сводится к уравнению $\frac{du}{d\tau}=\frac{\sigma-\operatorname{ctg}u}{2}$, $u(0)=-\frac{z}{2}$. Решение этого дифференциального уравнения неявно определяется равенством $\sigma u+\ln(\sigma\sin u-\cos u)+\frac{\sigma z}{2}-\ln\Big(-\sin\frac{z}{2}-$ $-\Big(-\sigma\sin\frac{z}{2}-\cos\frac{z}{2}\Big)\Big)=\frac{(1+\sigma^2)\,\tau}{2}$. Выполняя предельный переход при $\tau\to\infty$, получим отображение $f(z)=$ $=\frac{\sigma z}{\sigma+i}-\frac{1}{\sigma+i}\ln(1+\sin z)+\frac{2}{\sigma+i}\ln\frac{1-i\sigma}{2}$. При $\sigma=1$ отсюда получаем отображение $f(z)=\frac{1}{\sqrt2}e^{-i\frac{\pi}{4}}[z-\ln(1+\sin z)]-$ $-\frac{1}{\sqrt2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\Big(\ln2+i\frac{\pi}{2}\Big)$ верхней полуплоскости Π^+ на плоскость с разрезами по параллельным лучам под углом $-(\pi/4)$ к вещественной оси (рис. 1).

Применим теорему 1 к задаче об интегральном представлении подклассов класса $X_{2\pi}$. С этой целью проинтегрируем уравнение (1) для некоторого семейства функций λ(τ).

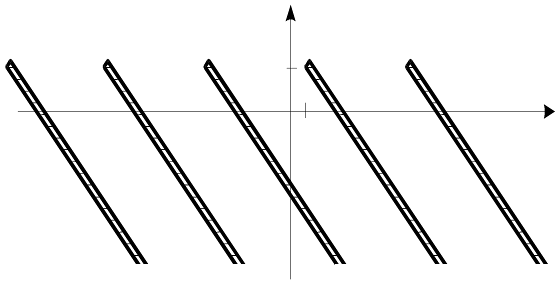

Рис. 1

В уравнении (1) управляющую функцию λ(τ) зададим в виде λ(τ) = – δτ + (α + β) χ(τ), 0 ≤ τ < ∞, где δ – вещественная постоянная, α и β – положительные числа, χ(τ) – вещественная функция, обращающаяся в нуль при τ = 0, которая будет выбрана далее. Перейдем в уравнении (1) от переменной ω к w по формуле ω = – δτ+ + βχ(τ)+w. Получим уравнение $\frac{dw}{d\tau}-\delta+\beta\chi'=\mathrm{ctg}\frac{\alpha\chi-w}{2}$, $w(0)=z$. Так как $\mathrm{ctg}\frac{\alpha\chi-w}{2}=i\frac{e^{i\alpha\chi}+e^{iw}}{e^{i\alpha\chi}-e^{iw}}$, то уравнение можно представить в виде

$$\frac{dw}{d\tau}=(\delta-\beta\chi')\frac{e^{i\varphi}-e^{iw}}{e^{i\alpha\chi}-e^{iw}}, \qquad (3)$$

где $e^{i\varphi}=\frac{\delta-\beta\chi'+i}{\delta-\beta\chi'-i}e^{i\alpha\chi}$, $\chi'=\frac{d\chi}{d\tau}$.

Подчиним функцию χ(τ) условию: $e^{i\varphi}=\gamma=\mathrm{const}$.

Найдем χ(τ), χ(0) = 0, проинтегрировав уравнение $\frac{\beta\chi'-\delta-i}{\beta\chi'-\delta+i}e^{i\alpha\chi}=\gamma$. Сделаем в нем замену $e^{i\alpha\chi}=\eta$, η(0) = 1. Получим $\frac{\eta'+2\bar{m}\eta}{\eta'-2m\eta}=\gamma, \eta'=\frac{d\eta}{d\tau}$, где $m=s(1+i\delta)$, $s=\frac{\alpha}{2\beta}$. Уравнение преобразуется к виду $\frac{\eta-\gamma}{\eta(\eta+\varepsilon\gamma)}d\eta=-2\bar{m}d\tau$, $\eta(0)=1$, где $\varepsilon=\frac{m}{\bar{m}}=\frac{1+i\delta}{1-i\delta}$. Исключим из рассмотрения случай, когда εγ = – 1.

В результате интегрирования уравнения имеем

$$(1+\bar{\varepsilon})\ln(\eta+\varepsilon\gamma)-\bar{\varepsilon}\ln\eta+2\bar{m}\tau=$$
$$=(1+\bar{\varepsilon})\ln(1+\varepsilon\gamma),\ \ln 1=0. \qquad (4)$$

Это уравнение неявно задает функцию $\chi(\tau)=-\frac{i}{\alpha}\ln\eta(\tau)$.

Так как $1+\bar{\varepsilon}=1+\frac{\bar{m}}{m}=\frac{2s}{m}=\frac{2}{1+i\delta},\bar{\varepsilon}=\frac{1-i\delta}{1+i\delta}$, то после умножения левой и правой частей уравнения (4) на 1+iδ получим формулу $2\ln(\eta+\varepsilon\gamma)-(1-i\delta)\ln\eta+2s(1+\delta^2)\tau=2\ln(1+\varepsilon\gamma)$, показывающую, что ее левая часть имеет предел при τ → ∞ равный 2ln(1+εγ) и что η(τ) → – εγ при τ → ∞.

При сделанном выборе функции χ(τ) уравнение (3) примет вид $\frac{dw}{d\tau}=-\frac{2\eta i(\gamma-e^{iw})}{(\eta-\gamma)(\eta-e^{iw})}$, $w(0)=z$, поскольку $\beta\chi'-\delta+i=\frac{2\eta i}{\eta-\gamma}$. Заменим в нем переменную w на ζ по формуле ζ = e^{iw}. Получим $\frac{d\zeta}{d\tau}=\frac{2\eta\zeta(\gamma-\zeta)}{(\eta-\gamma)(\eta-\zeta)}$, $\zeta(0)=e^{iz}$. Перейдем от переменной τ к η, воспользовавшись формулой $d\tau=-\frac{\eta-\gamma}{2\bar{m}\eta(\eta+\varepsilon\gamma)}d\eta$. Получим уравнение $\frac{d\zeta}{d\eta}=-\frac{\zeta(\gamma-\zeta)}{\bar{m}(\eta+\varepsilon\gamma)(\eta-\zeta)},\zeta|_{\eta=1}=e^{iz}$. Заменим в нем η на v по формуле $v=1/(\eta+\varepsilon\gamma)$ и поменяем ролями переменные ζ и v. В результате получим линейное относительно v уравнение

$$\frac{dv}{d\zeta}=-\frac{\bar{m}(\varepsilon\gamma+\zeta)}{(\gamma-\zeta)\zeta}v+\frac{\bar{m}}{\zeta(\gamma-\zeta)},\ v|_{\zeta=e^{iz}}=\frac{1}{1+\varepsilon\gamma}.$$

Решим его. Соответствующее однородное уравнение $\frac{dv}{d\zeta}=-\frac{\bar{m}(\varepsilon\gamma+\zeta)}{(\gamma-\zeta)\zeta}v$ имеет общее решение $v=C\frac{(\gamma-\zeta)^{(1+\varepsilon)\bar{m}}}{\zeta^{\varepsilon\bar{m}}}=C\frac{(\gamma-\zeta)^{2s}}{\zeta^m}$, содержащее произвольную постоянную C. Заменяя ее функцией C (ζ), получим для этой функции методом вариации уравнение $\frac{(\gamma-\zeta)^{2s}}{\zeta^m}\frac{dC}{d\zeta}=\frac{\bar{m}}{(\gamma-\zeta)\zeta}$. Его общее решение имеет вид $C=\bar{m}\int_{e^{iz}}^{\zeta}\frac{u^{m-1}}{(\gamma-u)^{2s+1}}du+D, D=\mathrm{const}$, а общим решением рассматриваемого неоднородного уравнения будет

$$v=\left[\bar{m}\int_{e^{iz}}^{\zeta}\frac{u^{m-1}}{(\gamma-u)^{2s+1}}du+D\right]\frac{(\gamma-\zeta)^{2s}}{\zeta^m}.$$

Постоянную D находим из условия $v(e^{iz})=\frac{1}{1+\varepsilon\gamma}$:

$$D=\frac{e^{imz}}{(1+\varepsilon\gamma)(\gamma-e^{iz})^{2s}}.$$

Таким образом, для ω(τ, z) имеем уравнение

$$\frac{1}{v+\varepsilon\gamma}\frac{\zeta^m}{(\gamma-u)^{2s}}=\bar{m}\int_{e^{iz}}^{\zeta}\frac{u^{m-1}}{(\gamma-u)^{2s+1}}du+$$
$$+\frac{e^{imz}}{(1+\varepsilon\gamma)(\gamma-e^{iz})^{2s}}, \qquad (5)$$

в котором ζ = e^{iw}, w = ω + δτ − βχ(τ), $s=\alpha/2\beta$, m = =(1+iδ), ε = (1+iδ) / (1 – iδ), γ = $e^{i\varphi}$.

Преобразуем правую часть уравнения (5). Воспользовавшись легко проверяемым равенством $t^m/(\gamma-t)^2 = \bar{m}\int_0^t\frac{u^{m-1}(\varepsilon\gamma+u)}{(\gamma-u)^{2s+1}}du$, получаем

$$\frac{e^{imz}}{(\gamma-e^{iz})^{2s}}=\bar{m}\int_{\delta x+y\to 0}^{e^{iz}}\frac{u^{m-1}(\varepsilon\gamma+u)}{(\gamma-u)^{2s+1}}du.$$

При нахождении нижнего предела интеграла учтено, что $e^{imz}=e^{is(1+i\delta)(x+iy)}=e^{-s(\delta x+y)}e^{is(x-\delta y)}$ и, следовательно, $e^{imz}\to 0$ при δx+y → ∞. Правая часть уравнения (5) представляется в виде суммы интегралов

$$\bar{m}\int_{e^{iz}}^{\zeta}\frac{u^{m-1}}{(\gamma-u)^{2s+1}}du+\frac{\bar{m}}{1+\varepsilon\gamma}\int_{\delta x+y\to\infty}^{e^{iz}}\frac{u^{m-1}(\varepsilon\gamma+u)}{(\gamma-u)^{2s+1}}du,$$

которая после предельного перехода при $\zeta \to 0$ принимает значение $\overline{m} \int\limits_{\delta x+y\to\infty}^{e^{iz}} \frac{u^{m-1}(u-1)}{(1+\varepsilon\gamma)(\gamma-u)^{2s+1}}\,du$.

Обратимся к левой части уравнения (5), обозначив через U ее логарифм. Имеем

$$U=\ln\frac{\zeta^m}{(v+\varepsilon\gamma)(\gamma-\zeta)^{2s}} = imw - \ln(v+\varepsilon\gamma) - 2s\ln(\gamma-\zeta) =$$
$$= -im(\omega+\delta\tau) - im\beta\chi - \ln(v+\varepsilon\gamma) - 2s\ln(\gamma-\zeta) =$$
$$= m\left\{ i(\omega-i\tau) - \frac{2s}{m}\ln(\gamma-\zeta) - (1-i\delta)\tau - \frac{1}{m}\ln(v+\varepsilon\gamma) - i\beta\chi \right\}.$$

В соответствии с теоремой 1 существует функция $f(z)\in X_{2\pi}$ такая, что

$$\lim_{\tau\to\infty}\left[i(\omega-i\tau) - \frac{2s}{m}\ln(\gamma-\zeta)\right] = if(z) - \frac{2s}{m}\ln\gamma .$$

Найдем $\lim\limits_{\tau\to\infty}\left[(1-i\delta)\tau + \frac{1}{m}\ln(v+\varepsilon\gamma) + i\beta\chi\right] = H$. Из (4) следует, что $(1-i\delta)\tau + \frac{1}{m}\ln(v+\varepsilon\gamma) + i\beta\chi = \frac{1}{m}\ln v + \frac{1}{m}\ln(v+\varepsilon\gamma)$ и поэтому $H = \frac{1}{m}\ln(-\varepsilon\gamma) + \frac{1}{m}\ln(1+\varepsilon\gamma)$. Теперь имеем

$$\lim_{\tau\to\infty} U = m\left(if(z) - \frac{2s}{m}\ln\gamma\right) - \ln(-\varepsilon\gamma) - \ln(1+\varepsilon\gamma) =$$
$$= mif(z) - (2s+1)\ln\gamma - \ln(-1) - \ln(1+\varepsilon\gamma) - \ln m + \ln\overline{m}.$$

В результате выполненных предельных переходов в уравнении (5) при $\tau\to\infty$ получаем

$$\left[e^{if(z)}\right]^m \frac{1}{\gamma^{2s+1}} \frac{1}{1+\varepsilon\gamma} \frac{\overline{m}}{m} e^{-\ln(-1)} = \overline{m} \int\limits_{\delta x+y\to\infty}^{e^{iz}} \frac{u^{m-1}(1-u)}{(1-\overline{\gamma}u)^{2s+1}}\,du$$

и окончательно $\left[e^{if(z)}\right]^m = m \int\limits_{\delta x+y\to\infty}^{e^{iz}} \frac{u^{m-1}(1-u)}{(1-\overline{\gamma}u)^{2s+1}}\,du$.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть α и β – положительные числа, δ – вещественная постоянная, $s = \alpha / 2\beta$, $m = s(1+i\delta)$, y, $|\gamma| = 1$, – комплексная постоянная, $\gamma \neq (1- i\delta) / (1+ i\delta)$. Тогда функция $f(z) = -i\ln\left[m \int\limits_{\delta x+y\to\infty}^{e^{iz}} \frac{u^{m-1}(1-u)}{(1-\overline{\gamma}u)^{2s+1}}\,du \right]^{\frac{1}{m}}$ однолистно и конформно отображает верхнюю полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π.

В частности, при $\delta = 0$, $s = 1$, $\gamma = 1$ получаем отображение $f(z) = \frac{z}{2} + i\ln\sin\frac{z}{2} + \frac{\pi}{2} + i\ln 2$ полуплоскости Π^+ на плоскость с исключенными замкнутыми областями $D_k = D + 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, где $\partial D = \{w \in \mathrm{C} : 2w = t + i\ln(1-\cos t) + \pi + i\ln 2,\ -2\pi < t \le 0\}$ (рис. 2).

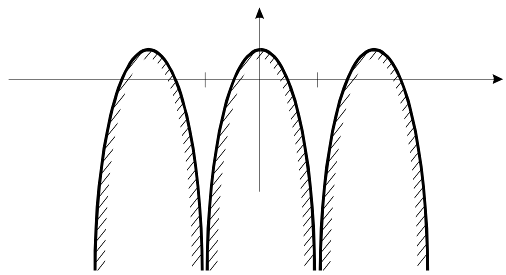

Рис. 2

В работе [1] в случае, если $\lambda(\tau) = \lambda_0 = \text{const}$, из дифференциального уравнения (1) получено отображение $f(z) = \lambda_0 + 2\,i\,\ln\left(2\cos\frac{z-\lambda_0}{2}\right)$ полуплоскости Π^+ на плоскость с разрезами $l_k = l + 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, $l = \{w\in \mathrm{C} : -\infty < \operatorname{Im} w < 2\ln 2, \operatorname{Re} w = \lambda_0\}$ (рис. 3).

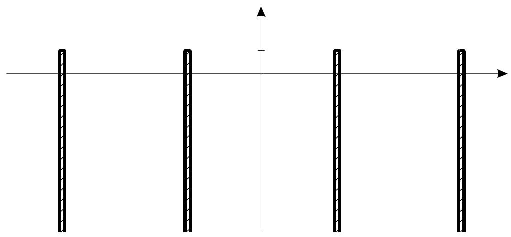

Рис. 3

Это отображение связанно с известным отображением Лобачевского [5].

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Копанева Л.С.* Параметрические представления отображений с симметрией переноса // Исследования по математическому анализу и алгебры. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. С. 135–144.
2. *Копанева Л.С.* Геометрические и экстремальные задачи для отображений с симметрией переноса // Кандидатская диссертация, Томск, 2003. 85 с.
3. *Сыркашев А.Н.* О вариационном и параметрическом методах в теории однолистных функций // Вестник ТГУ, № 280, 2003. С. 86–96.
4. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
5. *Лобачевский Н.И.* Полн. собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. Т. 3.

Статья представлена кафедрой математического анализа и лабораторией математического анализа научно-исследовательской части Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 28 октября 2004 г.