УДК 536.24

П.П. Пермяков

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА ПРИ ТЕХНОГЕННОМ ЗАГРЯЗНЕНИИ МЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 03-05-65408.

Рассматриваются методы параметрической идентификации математической модели тепломассообмена в техногенно загрязненных мерзлых грунтах и приводятся результаты численного эксперимента по восстановлению теплового потока и функции количества незамерзшей воды.

Освоение новых районов криолитозоны проводится с нарушением напочвенных покровов и техногенным загрязнением (промстоками, рассолами, нефтепродуктами, радионуклидами и другими экологически опасными загрязнителями) грунта, что приводит к уничтожению растительности и образованию термокарста, солифлюксии, оползней и других нежелательных мерзлотных явлений. В связи с этим стали актуальными вопросы усовершенствования математической модели тепломассопереноса с учетом реального процесса промерзания и протаивания порового раствора грунта. Задачи с фазовым переходом относятся к классу нелинейных с сильноменяющимися коэффициентами и являются одними из главнейших проблем теплофизики и теоретической теплотехники. Прежде всего это связано с неопределенностью многих параметров в системе (граничных условий, теплоемкости, теплопроводности, функции количества незамерзшей воды, коэффициента диффузии и т.д.), а также несоответствиями допущений при восстановлении характеристик и построении математических моделей. Традиционный подход с использованием значений характеристик, полученных из эксперимента, часто приводит к неверным результатам [1–4].

В данной работе приведены алгоритмы сплайн-идентификации граничных условий теплообмена на поверхности однородного мерзлого грунта и результаты численного эксперимента по восстановлению параметров при его техногенном нарушении.

Для простоты изложения рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности с учетом фазового перехода поровой воды [5]:

$$c\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{1}{r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^{\nu}\frac{\partial T}{\partial r}\right), 0<r<R, 0<\tau\le\tau_{\max}; \qquad (1)$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial r}=0, r=R, 0<\tau<\tau_{\max}; \qquad (2)$$

$$T(r,0)=T_0(r), 0\le r\le R, \tau=0; \qquad (3)$$

$$c=c(T)=$$

$$=\left(c_{\text{ск}}+c_{\text{л}}W_0+\left(c_{\text{в}}-c_{\text{л}}\right)W_{\text{нв}}(T)+L\frac{\partial W_{\text{нв}}(T)}{\partial T}\right)\rho,$$

$$\lambda=\lambda(T)=\lambda_{\text{м}}+\left(\lambda_{\text{т}}-\lambda_{\text{м}}\right)\frac{W_{\text{нв}}(T)-W_{\text{пс}}}{W_0-W_{\text{пс}}},$$

где c – объемная теплоемкость грунта, Дж/(м^3·К); T – температура, К; τ – время, с; $\tau_{\max}$ – наибольшее значение временной переменной, с; r – пространственная координата, м; R – координата массива, м; $\lambda_{\text{м}}$, $\lambda_{\text{т}}$ – теплопроводности мерзлых, талых пород, Вт/(м·К);. L – объемная теплота фазового перехода, Дж/м^3; $T_0(r)$ – начальное распределение температур, К; $c_{\text{ск}}$, $c_{\text{л}}$, $c_{\text{в}}$ – удельные теплоемкости грунта, льда и воды, Дж/(кг·К); ρ – объемная плотность минерального скелета, кг/м^3; W_0, $W_{\text{пс}}$ – начальная и прочносвязанная влажности, %; $W_{\text{нв}}(T)$ – функция количества незамерзшей воды, которая в случае техногенного загрязнения грунта зависит и от засоленности $W_{\text{нв}}(T, C)$, %; $\nu = 0, 1$ – соответствуют декартовой и цилиндрической координатам.

Требуется восстановить одно из следующих граничных условий (при $r = 0$):

$$T(R,\tau)=T_{\text{п}}(\tau), 0<\tau\le\tau_{\max}, \qquad (4)$$

$$-\lim_{r\to 0} r^{\nu}\lambda\frac{\partial T}{\partial r}=r^{\nu}q(\tau), 0<\tau\le\tau_{\max}, \qquad (5)$$

$$-\lim_{r\to 0} r^{\nu}\lambda\frac{\partial T}{\partial r}=r^{\nu}\alpha(\tau)\left(T-T_{\text{c}}\right), 0<\tau\le\tau_{\max}, \qquad (6)$$

где искомым параметром $u(\tau)$ может быть одна из функций $\{T_{\text{п}}(\tau), q(\tau), \alpha(\tau)\}$; $T_{\text{п}}(\tau)$ – температура поверхно-сти, К; $q(\tau)$ – плотность теплового потока, Вт/м^2; $\alpha(\tau)$ – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м·К); T_{c} – температура внешней среды, К.

Для восстановления искомого параметра нужны дополнительные замеры температуры внутри исследуемого образца в точках r_i $(0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_{n_r} < R)$:

$$T(r_i,\tau)=T_i^{\text{э}}(\tau), i=\overline{1,n_{\text{т}}}. \qquad (7)$$

Данную задачу сформулируем как задачу оптимального управления: найти функцию $u(\tau)$из минимума целевого функционала:

$$J(u)=\sum_{i=1}^{n_T}\int_0^{\tau_{\max}} p_i(\tau)\left(T(r_i,\tau)-T^{\text{э}}(r_i,\tau)\right)^2+$$

$$+\int_0^{\tau_{\max}} p(\tau)\left(T(\xi(\tau))-T_{\text{ф}}\left(\xi^{\text{э}}(\tau)\right)\right)^2, 0\le\xi^{\text{э}}(\tau)R, \qquad (8)$$

$$\xi^{\text{э}}(\tau)=\sup_{\tau\in[0,\tau_{\max}]}\left(T(u,\tau)\right)=T_{\text{ф}}\left(\xi^{\text{э}}(\tau)\right),$$

где $p_i(\tau)$, $p(\tau)$ – весовые множители с размерностью К$^{-2}$·с$^{-1}$; $T(r_i, \tau)$, $T^{\text{э}}(r_i, \tau)$ – расчетная и замеренная температуры в i-й точке горного массива; $T(\xi(\tau))$, $T_{\text{ф}}(\xi^{\text{э}}(\tau))$ – соответственно расчетные и заданные температуры на фронте фазового перехода $\xi^{\text{э}}(\tau)$; $n_{\text{т}}$ – число точек измерения.

Доказательству единственности решения граничных обратных задач теплопроводности посвящено достаточно много работ, более подробно этот вопрос рассмотрен в [6].

Минимизация целевого функционала (8) проводится с помощью хорошо известных градиентных методов, характеризующихся эффективным началом итерационного процесса из некоторого «грубого» начального приближения и снижением скорости сходимости при приближении к минимуму [6]. Этим требованиям отвечают градиентные методы спуска, в частности методы скорейшего спуска и сопряженных градиентов. В этом случае приближения вычисляются по формуле

$$u_{s+1}(\tau)=u_s(\tau)-\beta_s p_s(\tau), s=0,1,...,n.$$

Направление спуска $p_s(\tau)$ и коэффициент β_s определяются в зависимости от методов:

1) скорейшего спуска

$$p_s = J'(u_s),\ \beta_s : J(u_{s+1}) = \min J(u_s - \beta_s J'(u_s));$$

2) сопряженных градиентов

$$p_s = J'(u_s) + \gamma_s p_{s-1},\ \gamma_0 = 0,\ \gamma_s = \frac{\left\| J'(u_s)\right\|_{L_2}^2}{\left\| J'(u_{s-1})\right\|_{L_2}^2},$$

$$\beta_s : J(u_{s+1}) = \min J(u_s - \beta_s p_s),$$

где $\|...\|_{L_2}$ – норма в гильбертовом пространстве L_2.

Формулы для градиента функционала соответственно неизвестным параметрам будут иметь вид $J'(u) = \left(\frac{\partial J}{\partial u_{-1}}, \frac{\partial J}{\partial u_0}, ..., \frac{\partial J}{\partial u_{m_0+1}}\right)$:

$$\frac{\partial J}{\partial b_\alpha} = \int_0^{\tau_{\max}} B_\alpha(\tau) \frac{\partial}{\partial r}(\gamma\psi)\Big|_{r=0} d\tau,$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_\alpha} = \int_0^{\tau_{\max}} \psi B_\alpha(\tau)\Big|_{r=0} d\tau,$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_\alpha} = \int_0^{\tau_{\max}} B_\alpha(\tau)(T_c - T)\psi\Big|_{r=0} d\tau,\ 0 < \tau \le \tau_{\max},$$

$$\alpha = -1, 0, 1, ..., m_0 + 1.$$

Искомым параметром является $(m_0 + 3)$-мерный вектор $u = b = (b_{-1}, b_0, ..., b_{m_0+1})$:

$$u(\tau) = \sum_{\alpha=-1}^{m_0+1} b_\alpha B_\alpha(\tau),$$

где $B_\alpha(\tau)$ – заданный кубический сплайн по переменной τ, который имеет вид

$$B_\alpha(\tau) = B_0(\tau - \alpha\Delta\tau),$$

$$B_0(\tau) = \frac{1}{(\Delta\tau)^3}\Big[(\tau + 2\Delta\tau)_+^3 - 4(\tau + \Delta\tau)_+^3 + 6(\tau)_+^3 - $$

$$-4(\tau - \Delta\tau)_+^3 + (\tau - 2\Delta\tau)_+^3\Big],$$

$$(\tau - \xi)_+^3 = [\max(0, \tau - \xi]^3;$$

$\Delta\tau = \tau_m / m_0$ – заданный интервал времени.

Решение сопряженной задачи $\psi = \psi(r, \tau)$:

$$-\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 A_1\psi}{\partial r^2} - \frac{\partial A_2}{\partial r^2} + A_3\psi,\ 0 < r < R, 0 < \tau \le \tau_m,$$

$$\lambda r^\nu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi}{r^\nu}\right) = 0,\ r = R,\ 0 < \tau \le \tau_m,\ \ \psi(r, \tau_m) = 0,\ 0 \le r \le R,$$

$$\left.\begin{array}{c} \psi\big|_{r_i^-} = \psi\big|_{r_i^+}, \\ \lambda r^\nu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi}{r^\nu}\right)\Big|_{r_i^-} - \lambda^\beta r^\nu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi}{r^\nu}\right)\Big|_{r_i^+} = \\ = 2p(\tau)(T_i - T_i^э),\ i = \overline{1, n_т}, \\ 0 < \tau \le \tau_{\max}, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} \psi\big|_{\xi^-} = \psi\big|_{\xi^+}, \\ \lambda r^\nu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi}{r^n}\right)\Big|_{\xi^-} - \lambda r^\nu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi}{r^n}\right)\Big|_{\xi^+} = 2p(\tau)(T - T_ф), \\ 0 < \tau \le \tau_{\max}, \end{array}\right\}$$

где

$$A_1 = \lambda,\ A_2 = \frac{\partial\lambda}{\partial r} + \frac{1}{r^\nu}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r^\nu),$$

$$A_3 = \frac{1}{r^\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial T} r^\nu \frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{\partial c}{\partial T}\rho\frac{\partial T}{\partial\tau}.$$

Граничные условия при $r = 0$, соответствующие искомым параметрам, имеют вид

$$\psi(\tau) = 0,\ 0 < \tau \le \tau_{\max},$$

$$-\lambda r^\nu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi}{r^\nu}\right) = 0,\ 0 < \tau \le \tau_{\max},$$

$$-\lambda r^\nu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi}{r^\nu}\right) = -\alpha\psi,\ 0 < \tau \le \tau_{\max}.$$

Величина шага β_s методов скорейшего спуска и сопряженных градиентов находится по формуле

$$\beta_s = \frac{\sum_{i=1}^{n_T}\int_0^{\tau_{\max}} p_i(\tau)V_i(T_i - T_i^э)d\tau + \int_0^{\tau_{\max}} p(\tau)V_i(T(\xi^э(\tau)) - T_ф)d\tau}{\sum_{i=1}^{n_т} p_i(\tau)V_i^2 d\tau + \int_0^{\tau_{\max}} p(\tau)V_i^2(\xi^э(\tau))d\tau},$$

где $V = V(r, \tau)$ – решение краевой задачи для приращения:

$$c\frac{\partial V}{\partial\tau} = A_1\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + A_2\frac{\partial V}{\partial r} + A_3 V,\ 0 < r < R,\ 0 < \tau \le \tau_{\max},$$

$$\frac{\partial\lambda V}{\partial r} = 0,\ r = R,\ 0 < \tau \le \tau_{\max},$$

$$V(r, 0) = 0,\ 0 \le r \le R,$$

$$V\big|_{r_i^+} = V\big|_{r_i^+},\ \frac{\partial\lambda V}{\partial r}\Big|_{r_i^-} = \frac{\partial\lambda V}{\partial r}\Big|_{r_i^+},\ i = \overline{1, n_T},\ 0 < \tau \le \tau_{\max},$$

$$V\big|_{\xi^-} = V\big|_{\xi^+},\ \frac{\partial\lambda V}{\partial r}\Big|_{\xi^-} = \frac{\partial\lambda V}{\partial r}\Big|_{\xi^+},\ 0 < \tau \le \tau_{\max}.$$

Граничные условия в зависимости от искомых параметров имеют вид

$$V = \Delta T_п(\tau),\ 0 < \tau \le \tau_{\max},$$

$$-\frac{\partial\lambda V}{\partial r}\ \Delta q(\tau),\ 0 < \tau \le \tau_{\max},$$

$$-\frac{\partial\lambda V}{\partial r} = \alpha(\tau)(T^1 - T_c) - \alpha(\tau)V,\ 0 < \tau \le \tau_{\max}.$$

Численная реализация вышеуказанных краевых задач осуществляется методом конечных разностей. В каждом временном слое для численного определения температуры $T(r, \tau)$, сопряженной переменной $\psi(r, \tau)$ и приращения $V(r, \tau)$ будем иметь соответствующие трехдиагональные системы алгебраических уравнений: нелинейные для T и линейные – ψ и V. Решение этих систем производится методом прогонки (в сочетании с итерациями по коэффициенту при расчете T). Итерационный процесс минимизации останавливается по критерию невязки [5]. Аналогичным образом строятся алгоритмы идентификации остальных параметров (теплоемкости, теплопроводности, функции количества незамерзшей воды, коэффициента диффузии и т.д.).

Для проверки работоспособности предложенных алгоритмов были проведены тестовые численные эксперименты по решению модельной задачи с точными исходными данными. Проведен численный эксперимент при наличии возмущений различной природы в замеренных значениях. Характер возмущений не оказывает существенного влияния на качество восстановления искомых функций, и достаточно хорошо согласуется с другими известными квазистационарными методами. Лучший результат, как по скорости сходимости, так и по точности восстановления, имеет метод сопряженных градиентов.

3. В целом все предложенные алгоритмы идентификации тепло- и массообменных характеристик обладают хорошим регуляризирующим свойством при оптимальном выборе шагов дискретизации во времени и пространстве и применимы для обработки данных тепломассообменных экспериментальных исследований. Рассмотрим два иллюстративных примера по расчету плотности тепловых потоков и функции количества незамерзшей воды песка при засолении его хлоридом натрия.

Для восстановления теплового потока рассмотрены три ключевых участка: открытый участок с нарушениями растительного и напочвенного покровов, сосновый и лиственничный леса (рис 1).

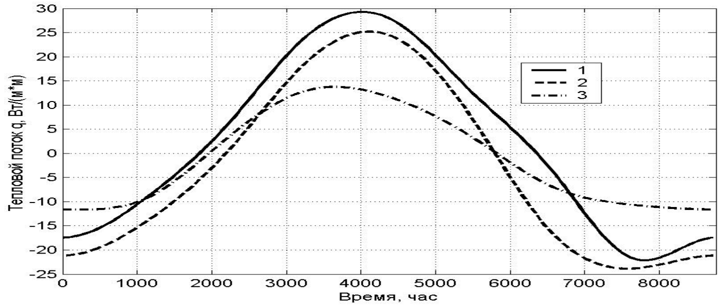

Рис. 1. Зависимость удельного теплового потока от времени:
1 – открытый участок с нарушениями растительного и напочвенного покровов;
2 – сосновый лес; *3* – лиственничный лес

Они отличаются друг от друга сложением грунта, растительным покровом, влажностью и температурным режимом. Были проведены многолетние круглогодичные наблюдения в разные времена [7, 8]. Отличительной особенностью лесного массива является его затененность деревьями, что влияет на формирования теплового режима и влагообменного процесса. Чем больше сомкнутость древостоя, тем меньше солнечной радиации проникает под полог леса. В период полного развертывания листвы затененность деревьями снижает приход солнечной радиации. Особенно в листопадных лесах (лиственничный) проникает лишь 40–50 % радиации (июнь–август). В зимнее время плотности теплового потока в сосновом лесу и открытом грунте отличаются друг от друга из-за высоты и структуры снега.

На рис. 2 представлена пространственная зависимость функции количества незамерзшей воды от температуры и засоленности.

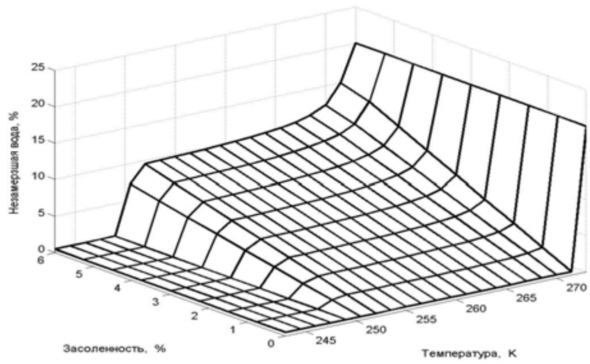

Рис. 2. Зависимость функции незамерзшей воды от температуры и засоленности

У чистого песка фазовый переход порового раствора происходит при температуре 273 К, а с увеличением засоленности большое количество порового раствора замерзает при температуре эвтектики 250,6 К. Из рисунка видно, что с повышением засоленности содержание незамерзшей воды увеличивается и соответственно резко меняются все теплофизические и массообменные характеристики загрязненного мерзлого грунта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фельдман Г.М.* Методы расчета температурного режима мерзлых грунтов. М.: Наука, 1973. 254 с.
2. *Чистотинов Л.В.* Миграция влаги в промерзающих неводонасыщенных грунтах. М.: Наука, 1973. 144 с.
3. *Crange B.W., Viskanta R., Stevenson W.H.* Diffusion of heat and solute during freezing of salt solution // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1976. Vol. 19. № 14. P. 373–384.
4. *Ентов В.М., Максимов А.М., Цыпкин Г.Г.* Образование двухфазной зоны при промерзании пористой среды. М.: ИПМ АН СССР. Препринт № 269, 1986. 56 с.
5. *Пермяков П.П.* Идентификация параметров математической модели тепловлагопереноса в мерзлых грунтах. Новосибирск: Наука, 1989. 86 с.
6. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
7. *Павлов А.В.* Теплообмен почвы с атмосферой в северных и умеренных широтах территории СССР. Якутск: Якутское кн. изд-во, 1975. 302 с.
8. *Гаврилова М.К.* Тепловой режим земной поверхности и грунтов поля и леса в период протаивания // Материалы VIII Всесоюзного междуведомственного совещания по геокриологии. Якутск, 1966. Вып. 4. С. 194–206.

Статья представлена отделом теплофизики и теплоэнергетики Института физико-технических проблем Севера (г. Якутск), поступила в научную редакци. «Кибернетика и информатика» 26 марта 2004 г.