

Вестник

Томского государственного университета

ПРИЛОЖЕНИЕ

№ 18

АВГУСТ 2006

*Материалы международных,
всероссийских и региональных
научных конференций,
симпозиумов, школ,
проводимых в ТГУ*



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НЕКОММЕРЧЕСКОГО ФОНДА ПРИ РЕЛЕЙНОМ УПРАВЛЕНИИ КАПИТАЛОМ

К.И. Лившиц, И.Ю. Шифердекер

Томский государственный университет

E-mail: kim47@mail.ru

Исследуются статистические характеристики математической модели деятельности некоммерческого фонда при экспоненциальном распределении поступающих платежей и релейном управлении капиталом фонда.

Ключевые слова: некоммерческий фонд, плотность распределения капитала фонда, период неплатежеспособности, период повышенных выплат.

Математическая модель изменения капитала фонда

Под некоммерческим фондом понимается организация, созданная для сбора и распределения денежных средств без получения прибыли. К некоммерческим могут быть отнесены, по-видимому, Фонды социального и обязательного медицинского страхования РФ, а также государство в целом, так как одной из основных функций государства является сбор посредством налогообложения денежных средств и их дальнейшее перераспределение. Построению и исследованию моделей фонда социального страхования посвящены, например, работы [1 – 3].

Основной характеристикой состояния фонда является его капитал $s(t)$ в момент времени t . В работе предполагается, что с капиталом $s(t)$ могут происходить следующие изменения:

1. В фонд поступают денежные средства. Будем считать, что моменты поступления денежных средств образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ . Поступающие денежные суммы (премии) являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с экспоненциальным распределением

$$\varphi(x) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{x}{a}\right), \quad x \geq 0. \quad (1)$$

2. Фонд расходует поступившие денежные средства. Будем считать, что расходование имеющихся средств происходит непрерывно во времени со скоростью $b(s)$, так что за время Δt выплата составляет $b(s)\Delta t$. Предполагается, что управление расходом денежных средств имеет релейный характер, т.е.

$$b(s) = \begin{cases} b_0, & s < s_0, \\ b_1, & s \geq s_0 \end{cases} \quad (2)$$

для некоторого порогового значения капитала s_0 . Так как фонд не имеет цели получения прибыли, то естественно считать, что $b_0 - \lambda a < 0$, а $b_1 - \lambda a > 0$. Таким образом, при $s < s_0$ фонд расходует в среднем меньше, чем собирает, а при $s \geq s_0$ расходует в среднем больше денежных средств, чем в него поступает.

Наконец, будем считать, что при $s < 0$ фонд не прекращает своей деятельности, но наступает период неплатежеспособности фонда, обязательства фонда выполняются по мере поступления денежных средств.

Плотность распределения капитала

Обозначим через $p(s, t)$ плотность распределения вероятностей капитала фонда s в момент времени t . Рассмотрим два близких момента времени t и $t + \Delta t$. В силу сделанных предположений изменение капитала за время Δt определяется следующим соотношением:

$$\Delta s(t) = \begin{cases} -b(s)\Delta t & \text{с вероятностью } (1 - \lambda\Delta t) + o(\Delta t), \\ x - b(s)\Delta t & \text{с вероятностью } \lambda\Delta t\varphi(x)dx + o(\Delta t). \end{cases} \quad (3)$$

Откуда по формуле полной вероятности [4]

$$p(s, t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)p(s + b(s)\Delta t, t) + \lambda\Delta t \int_0^\infty p(s + b(s)\Delta t - x)\varphi(x)dx + o(\Delta t). \quad (4)$$

Считая функцию $p(s, t)$ дифференцируемой по s и t , получим из (4), переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lambda p(s, t) = b(s) \frac{\partial p(s, t)}{\partial s} - \frac{\partial p(s, t)}{\partial t} + \lambda \int_0^\infty p(s - x, t)\varphi(x)dx. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) должно удовлетворять начальному условию

$$p(s, 0) = \delta(s) \quad (6)$$

и условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(s, t) ds = 1. \quad (7)$$

Пусть

$$\Phi(s, \omega) = \int_0^{\infty} p(s, t) e^{-\omega t} dt \quad (8)$$

– преобразование Лапласа функции $p(s, t)$. Относительно $\Phi(s, \omega)$ согласно (5) имеем уравнение

$$(\lambda + \omega)\Phi(s, \omega) = b(s) \frac{\partial \Phi(s, \omega)}{\partial s} + \lambda \int_{-\infty}^s \Phi(x, \omega) \varphi(s-x) dx + p(s, 0). \quad (9)$$

Перенесем начало отсчета в точку $s = s_0$ и будем считать, что $s_0 \gg 1$. Тогда при $s \in (-\infty; +\infty)$ можно считать, что $p(s, 0) = 0$. Наконец, рассмотрим симметричный случай, когда

$$b_0 = (1-\theta)\lambda a, \quad b_1 = (1+\theta)\lambda a, \quad (10)$$

где $0 < \theta < 1$. Тогда уравнение (9) переписывается в виде

$$(\lambda + \omega)\Phi(s, \omega) = (1-\theta)\lambda a \frac{\partial \Phi(s, \omega)}{\partial s} + \lambda \int_{-\infty}^s \Phi(x, \omega) \varphi(s-x) dx \quad (11)$$

в области $s < 0$, а в области $s > 0$, уравнение (9) имеет вид

$$(\lambda + \omega)\Phi(s, \omega) = (1+\theta)\lambda a \frac{\partial \Phi(s, \omega)}{\partial s} + \lambda \int_{-\infty}^s \Phi(x, \omega) \varphi(s-x) dx. \quad (12)$$

Рассмотрим область $s > 0$. С учетом (1) уравнение (12) приводится к дифференциальному уравнению

$$(1+\theta)\lambda a^2 \frac{\partial^2 \Phi(s, \omega)}{\partial s^2} + a(\theta\lambda - \omega) \frac{\partial \Phi(s, \omega)}{\partial s} - \omega \Phi(s, \omega) = 0. \quad (13)$$

Характеристическое уравнение уравнения (13) имеет вид

$$(1+\theta)\lambda a^2 z^2 + a(\theta\lambda - \omega)z - \omega = 0,$$

корни которого

$$z_{1,2}(\omega) = \frac{(\omega - \theta\lambda) \pm \sqrt{(\omega - \theta\lambda)^2 + 4(1+\theta)\lambda\omega}}{2(1+\theta)\lambda a}. \quad (14)$$

Откуда

$$\Phi(s, \omega) = c_1(\omega) e^{z_1(\omega)s} + c_2(\omega) e^{z_2(\omega)s}.$$

Так как в силу условия (7) $\Phi(s, \omega) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то $c_1(\omega) = 0$ и

$$\Phi(s, \omega) = c(\omega) e^{z_2(\omega)s}, \quad s \geq 0. \quad (15)$$

В области $s < 0$ с учетом (1) и (10) уравнение (12) переписывается в виде

$$(1-\theta)\lambda a^2 \frac{\partial^2 \Phi(s, \omega)}{\partial s^2} - a(\theta\lambda + \omega) \frac{\partial \Phi(s, \omega)}{\partial s} - \omega \Phi(s, \omega) = 0. \quad (16)$$

Характеристическое уравнение уравнения (16) имеет вид

$$(1-\theta)\lambda a^2 k^2 - a(\theta\lambda + \omega)k - \omega = 0,$$

корни которого

$$k_{1,2}(\omega) = \frac{(\omega + \theta\lambda) \pm \sqrt{(\omega + \theta\lambda)^2 + 4(1-\theta)\lambda\omega}}{2(1-\theta)\lambda a}. \quad (17)$$

Откуда в области $s < 0$

$$\Phi(s, \omega) = d_1(\omega) e^{k_1(\omega)s} + d_2(\omega) e^{k_2(\omega)s}.$$

Так как теперь в силу условия (7) $\Phi(s, \omega) \rightarrow \theta$, при $s \rightarrow -\infty$, то $d_2(\omega) = 0$ и

$$\Phi(s, \omega) = d(\omega) e^{k_1(\omega)s}, \quad s < 0. \quad (18)$$

Из условия $b_0 p(-0, t) = b_1 p(+0, t)$ при $s = 0$ имеем, далее, $(1 + \theta)c(\omega) = (1 - \theta)d(\omega)$. Наконец, условие нормировки (7) переписывается в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(s, \omega) ds = \frac{1}{\omega}$$

Откуда после некоторых преобразований

$$c(\omega) = \frac{2}{a[(1 - \theta)\sqrt{(\omega - \theta\lambda)^2 + 4(1 + \theta)\lambda\omega} + (1 + \theta)\sqrt{(\omega + \theta\lambda)^2 + 4(1 - \theta)\lambda\omega} - 2\theta(\omega + \lambda)]}. \quad (19)$$

Таким образом,

$$\Phi(s, \omega) = \begin{cases} (1 - \theta)c(\omega)e^{z_2(\omega)s}, & s \geq 0, \\ (1 + \theta)c(\omega)e^{k_1(\omega)s}, & s < 0. \end{cases} \quad (20)$$

Учитывая предельные соотношения между функцией $p(s, t)$ и ее преобразованием Лапласа $\Phi(s, \omega)$ [5]

$$p(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(s, t) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \Phi(s, \omega),$$

из соотношения (20) получим, что в стационарном режиме

$$p(s) = \begin{cases} \frac{\theta}{2(1 - \theta)a} e^{\frac{\theta s}{(1 - \theta)a}}, & s < 0, \\ \frac{\theta}{2(1 + \theta)a} e^{\frac{\theta s}{(1 + \theta)a}}, & s \geq 0. \end{cases} \quad (21)$$

или, переходя к старому началу координат в точке $s = 0$,

$$p(s) = \begin{cases} \frac{(\lambda a - b_0)(\lambda a - b_1)}{ab_0(b_0 - b_1)} e^{\frac{\lambda a - b_0}{b_0 a}(s - s_0)}, & s < s_0, \\ \frac{(\lambda a - b_0)(\lambda a - b_1)}{ab_1(b_0 - b_1)} e^{-\frac{b_1 - \lambda a}{b_1 a}(s - s_0)}, & s \geq s_0. \end{cases} \quad (22)$$

При конечных значениях t обратное преобразование Лапласа от выражения (20) является чрезвычайно громоздким. Поэтому приведем только его приближенное выражение при $\theta \ll 1$. При $s > 0$ и $\theta \ll 1$ приближенно имеем ($p = \omega + \lambda(2 + \theta)$)

$$\Phi(s, \omega) \approx \frac{\exp\left\{-\frac{s}{a} + \frac{s}{2\lambda(1 + \theta)a}(p - \sqrt{p^2 - 4\lambda^2(1 + \theta)})\right\}}{a\sqrt{p^2 - 4\lambda^2(1 + \theta)}}.$$

Откуда [6] при $s > 0$

$$p(s, t) = \frac{1}{a} e^{-\lambda(2 + \theta)t - \frac{s}{a}} I_0 \left[2\lambda\sqrt{1 + \theta} \left(t^2 + \frac{st}{\lambda(1 + \theta)a} \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (23)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [5].

При $s < 0$ и $\theta \ll 1$ приближенно можно записать ($p = \omega + \lambda(2 - \theta)$)

$$\Phi(s, \omega) \approx \frac{\exp\left\{-\frac{s}{a} + \frac{s}{2\lambda(1 - \theta)a}(p + \sqrt{p^2 - 4\lambda^2(1 - \theta)})\right\}}{a\sqrt{p^2 - 4\lambda^2(1 - \theta)}}.$$

Откуда [6] при $t + s \setminus \lambda(1 - \theta)a > 0$

$$p(s, t) = \frac{1}{a} e^{-\lambda(2 - \theta)t - \frac{s}{a}} I_0 \left[2\lambda\sqrt{1 - \theta} \left(t^2 + \frac{st}{\lambda(1 - \theta)a} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (24)$$

Зная плотность распределения капитала фонда, можно определить такие его характеристики, как вероятность неплатежеспособности фонда и вероятность повышенных выплат. Рассмотрим только стационарный режим.

Фонд не может производить текущие выплаты, когда его капитал становится отрицательным. Из соотношения (22) вероятность этого события

$$p_0 = p\{s < 0\} = \frac{(b_1 - \lambda a)}{(b_1 - b_0)} e^{-\frac{(\lambda a - b_0)}{b_0 a} s_0}. \quad (25)$$

Фонд производит повышенные выплаты, когда его капитал $s \geq s_0$. Из соотношения (22) вероятность этого события

$$p_1 = p\{s \geq s_0\} = \frac{(\lambda a - b_0)}{(b_1 - b_0)}. \quad (26)$$

Задавая вероятности p_0 и p_1 , можно определить теперь значения b_0 и b_1 , определяющие допустимые вероятности p_0 и p_1 .

Плотность распределения периода неплатежеспособности

Неплатежеспособность фонда наступает при $s < 0$. Обозначим через $t(s)$ – продолжительность периода неплатежеспособности фонда, если в начале периода капитал фонда равен s (естественно $s < 0$). Пусть прошло время Δt . За это время капитал фонда изменится на величину Δs и

$$t(s) = \Delta t + t(s + \Delta s). \quad (27)$$

Обозначим через

$$\Psi(u, s) = M\{e^{-u t(s)}\}$$

– характеристическую функцию величины $t(s)$. Из соотношения (27) имеем, очевидно,

$$\Psi(u, s) = e^{-u \Delta t} M_{\Delta s}\{\Psi(u, s + \Delta s)\}$$

или, учитывая (3), при малом Δt и $s < 0$

$$\Psi(u, s) = e^{-u \Delta t} \left[(1 - \lambda \Delta t) \Psi(u, s - b_0 \Delta t) + \lambda \Delta t \int_0^{-s} \Psi(u, s + x) \varphi(x) dx + \lambda \Delta t \int_{-s}^{\infty} \varphi(x) dx \right] + o(\Delta t),$$

так как при $z > 0$ $t(z) = 0$. Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение, определяющее $\Psi(u, s)$,

$$b_0 \frac{\partial \Psi(u, s)}{\partial s} + (u + \lambda) \Psi(u, s) - \lambda \int_0^{-s} \Psi(u, s + x) \varphi(x) dx - \lambda \int_{-s}^{\infty} \varphi(x) dx = 0. \quad (28)$$

При $\varphi(x)$, определяемой соотношением (1), уравнение (28) переходит в уравнение

$$b_0 \frac{\partial \Psi(u, s)}{\partial s} + (u + \lambda) \Psi(u, s) - \lambda \int_s^0 \frac{1}{a} e^{\frac{s-x}{a}} \Psi(u, x) dx = \lambda e^{\frac{s}{a}}. \quad (29)$$

Продифференцировав уравнение (29) по s и складывая получившееся уравнение с исходным, приведем его к виду

$$ab_0 \frac{\partial^2 \Psi(u, s)}{\partial s^2} + (ua + \lambda a - b_0) \frac{\partial \Psi(u, s)}{\partial s} - u \Psi(u, s) = 0. \quad (30)$$

Характеристическое уравнение уравнения (30) имеет вид

$$(1 - \theta) \lambda a^2 z^2 + (u + \lambda \theta) a z - u = 0,$$

корни которого

$$z_{1,2}(u) = \frac{-(u + \theta \lambda) \mp \sqrt{(u + \theta \lambda)^2 + 4(1 - \theta) \lambda u}}{2 \lambda a (1 - \theta)}. \quad (31)$$

Поэтому решение уравнения (30) имеет вид

$$\Psi(u, s) = c_1(u) e^{z_1(u)s} + c_2(u) e^{z_2(u)s}. \quad (32)$$

Коэффициент $c_1(u) = 0$, так как в противном случае $\Psi(u, s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow -\infty$, что противоречит требованию $|\Psi(u, s)| \leq 1$, накладываемому на характеристическую функцию [4]. Второй коэффициент $c_2(u)$ должен быть выбран так, чтобы решение $\Psi(u, s)$ (32) удовлетворяло исходному уравнению (29). Подставляя решение (32) в уравнение (39), окончательно получим

$$\Psi(u, s) = (1 - az_2(u))e^{z_2(u)s}. \quad (33)$$

Плотность распределения капитала s при условии, что $s < 0$, как вытекает из соотношений (22) и (25), в стационарном режиме имеет вид

$$p(s|s < 0) = \frac{\theta}{(1-\theta)a} e^{\frac{\theta}{(1-\theta)a}s}. \quad (34)$$

Поэтому безусловная характеристическая функция периода неплатежеспособности

$$\Psi(u) = \int_{-\infty}^0 \Psi(u, s) p(s|s < 0) ds = \frac{\theta(1 - az_2(u))}{(1-\theta)az_2(u) + \theta}.$$

Или

$$\Psi(u) = \frac{\theta}{1-\theta} \cdot \frac{p - \sqrt{p^2 - 4\lambda^2(1-\theta)}}{2\lambda - p + \sqrt{p^2 - 4\lambda^2(1-\theta)}},$$

где $p = u + \lambda(2 - \theta)$. После преобразований получим

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\theta}{u} - \frac{2\lambda^2\theta}{u(u + \lambda(2 - \theta) + \sqrt{(u + \lambda(2 - \theta))^2 - 4\lambda^2(1 - \theta)})}. \quad (35)$$

Вычисляя обратное преобразование Лапласа от выражения (35), получим, учитывая [6], что плотность распределения периода неплатежеспособности $p_0(t)$ имеет вид

$$p_0(t) = \lambda\theta - \frac{\lambda\theta}{\sqrt{1-\theta}} \int_0^t \frac{1}{x} I_1(2\lambda\sqrt{1-\theta}x) e^{-\lambda(2-\theta)x} dx, \quad (36)$$

где $I_1(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого порядка. Или, учитывая, что [7]

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} I_1(2\lambda\sqrt{1-\theta}x) e^{-\lambda(2-\theta)x} dx = \sqrt{1-\theta},$$

выражение (36) можно привести к виду

$$p_0(t) = \frac{\lambda\theta}{\sqrt{1-\theta}} \int_t^\infty \frac{1}{x} I_1(2\lambda\sqrt{1-\theta}x) e^{-\lambda(2-\theta)x} dx. \quad (37)$$

Соотношения (33), (35) и (37) позволяют определить также моменты периода неплатежеспособности. Дифференцируя, в частности, соотношение (33), получим

$$M\{t|s\} = -\frac{\partial \Psi(u, s)}{\partial u} \Big|_{u=0} = -\frac{s-a}{\theta\lambda a}, \quad (38)$$

а дифференцирование соотношения (35) дает, что безусловное среднее значение периода неплатежеспособности

$$M\{t\} = -\frac{\partial \Psi(u)}{\partial u} \Big|_{u=0} = \frac{1}{\lambda\theta^2}. \quad (39)$$

Плотность распределения периода повышенных выплат

Период повышенных выплат наступает, когда капитал фонда $s > s_0$. Обозначим через $t(s)$ – продолжительность периода повышенных выплат, если в начале периода капитал фонда равен s ($s \geq s_0$). Пусть прошло время Δt . За это время капитал фонда изменится на величину Δs и

$$t(s) = \Delta t + t(s + \Delta s). \quad (40)$$

Обозначим через

$$\Psi(u, s) = M \{ e^{-u(s)} \}$$

– характеристическую функцию величины $l(s)$. Из соотношения (40) имеем

$$\Psi(u, s) = e^{-u\Delta t} M_{\Delta t} \{ \Psi(u, s + \Delta s) \},$$

или, учитывая (3), при малом Δt в области $s > s_0$ получим

$$\Psi(u, s) = e^{-u\Delta t} \left[(1 - \lambda\Delta t) \Psi(u, s - b_1\Delta t) + \lambda\Delta t \int_0^\infty \Psi(u, s - b_1\Delta t + x) \varphi(x) dx \right] + o(\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение, определяющее $\Psi(u, s)$:

$$b_1 \frac{\partial \Psi(u, s)}{\partial s} + (u + \lambda) \Psi(u, s) - \lambda \int_0^\infty \Psi(u, s + x) \varphi(x) dx. \quad (41)$$

При $s = s_0$ величина $s_0 - b_1\Delta t < s_0$. Поэтому при $s = s_0$ имеем

$$\Psi(u, s) = e^{-u\Delta t} \left[(1 - \lambda\Delta t) + \lambda\Delta t \int_0^\infty \Psi(u, s + x) \varphi(x) dx \right] + o(\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим граничное условие

$$\Psi(u, s_0) = 1. \quad (42)$$

При $\varphi(x)$, определяемой соотношением (1), уравнение (41) переходит в уравнение

$$b_1 \frac{\partial \Psi(u, s)}{\partial s} + (u + \lambda) \Psi(u, s) - \lambda \int_s^\infty \Psi(u, x) \frac{1}{a} e^{\frac{s-x}{a}} dx = 0. \quad (43)$$

Дифференцируя уравнение (43) по s и вычитая из него получившееся уравнение, приведем уравнение (43) к виду

$$ab_1 \frac{\partial^2 \Psi(u, s)}{\partial s^2} - (b_1 - \lambda a - ua) \frac{\partial \Psi(u, s)}{\partial s} - u \Psi(u, s) = 0. \quad (44)$$

Характеристическое уравнение уравнения (44)

$$(1 + \theta) \lambda a^2 z^2 + (u - \lambda \theta) a z - u = 0$$

$$\text{имеет корни} \quad z_{1,2}(u) = \frac{-u + \theta \lambda \mp \sqrt{(u - \theta \lambda)^2 + 4(1 + \theta) \lambda u}}{2 \lambda a (1 + \theta)}, \quad (45)$$

а решение уравнения (44) имеет вид

$$\Psi(u, s) = c_1(u) e^{z_1(u)s} + c_2(u) e^{z_2(u)s}. \quad (46)$$

Коэффициент $c_2(u) = 0$, так как в противном случае $\Psi(u, s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow +\infty$, что противоречит требованию $|\Psi(u, s)| \leq 1$. Учитывая граничное условие (42), получим окончательно

$$\Psi(u, s) = e^{z_1(u)(s-s_0)}. \quad (47)$$

Плотность распределения капитала s при условии, что $s \geq s_0$, как вытекает из соотношений (22) и (26), в стационарном режиме имеет вид

$$p(s|s \geq s_0) = \frac{\theta}{(1 + \theta)a} e^{-\frac{\theta}{(1 + \theta)a}(s-s_0)}. \quad (48)$$

Поэтому безусловная характеристическая функция периода повышенных выплат

$$\Psi(u) = \int_{s_0}^\infty \Psi(u, s) p(s|s \geq s_0) ds = \frac{\theta}{\theta - (1 + \theta) a z_1(u)}$$

$$\text{или} \quad \Psi(u) = \frac{2 \lambda \theta}{u + \theta \lambda + \sqrt{(u + \lambda(2 + \theta))^2 - 4 \lambda^2 (1 + \theta)}}. \quad (49)$$

После несложных преобразований выражение (49) принимает вид

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\theta}{u} - \frac{2\lambda^2\theta(1+\theta)}{u(u+\lambda(2+\theta)+\sqrt{(u+\lambda(2+\theta))^2-4\lambda^2(1+\theta)}}.$$

Откуда, аналогично (37), плотность распределения периода повышенных выплат

$$p_1(t) = \lambda\theta\sqrt{1+\theta} \int_t^\infty \frac{1}{x} I_1(2\lambda\sqrt{1+\theta}x) e^{-\lambda(2+\theta)x} dx. \quad (50)$$

Соотношения (47), (49) и (50) позволяют определить также моменты периода повышенных выплат. Дифференцируя соотношение (47), получим, что условное среднее

$$M\{t|s\} = -\frac{\partial\Psi(u,s)}{\partial u}\bigg|_{u=0} = \frac{s-s_0}{\theta\lambda a}, \quad (51)$$

второй момент

$$M\{t^2|s\} = -\frac{\partial^2\Psi(u,s)}{\partial u^2}\bigg|_{u=0} = \frac{(s-s_0)^2}{\theta^2\lambda^2 a^2} + \frac{2(s-s_0)}{\theta^3\lambda^2 a},$$

и, следовательно, условная дисперсия

$$D\{t|s\} = \frac{2(s-s_0)}{\theta^3\lambda^2 a}. \quad (52)$$

Наконец, дифференцируя соотношение (49) или усредняя по распределению (48) соотношения (51) и (52), получим, что безусловное среднее периода повышенных выплат

$$M\{t\} = \frac{1+\theta}{\theta\lambda^2}, \quad (53)$$

а безусловная дисперсия периода повышенных выплат

$$D\{t\} = \frac{2(1+\theta)}{\lambda^2\theta^4}. \quad (54)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Змеев О.А. Математическая модель фонда социального страхования с детерминированными расходами на социальные программы (диффузионное приближение) // Изв. вузов. Физика. – 2003. – № 3. – С. 83 – 87.
2. Змеев О.А. Математическая модель фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах // Вестник ТГУ. – 2003. – № 280. – С. 130 – 136.
3. Вальц О.В., Змеев О.А. Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах и со случайными расходами на социальные программы // Вестник ТГУ. – 2004. – № 284. – С. 37 – 41.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 400 с.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. I. – М.: Наука, 1969. – 344 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.