

На правах рукописи



Пыльник Сергей Валерьевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА СОПРЯЖЕННОГО
МАССООБМЕНА В ОРОШАЕМОМ БИОФИЛЬТРЕ**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2008

Работа выполнена на кафедре математической физики физико-технического факультета ГОУ ВПО «Томский государственный университет»

Научный руководитель: Кандидат физико-математических наук,
доцент
Леонид Леонидович Миньков
(ГОУ ВПО «Томский государственный университет»)

Научный консультант: Doctor Rerum Naturalum
Johann Dueck
(Университет Эрланген-Нюрнберг,
г. Эрланген, Германия)

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук
Бубенчиков Алексей Михайлович
(ГОУ ВПО «Томский государственный университет»)

Доктор физико-математических наук
Воеводин Анатолий Федорович
(ИГиЛ СО РАН, г. Новосибирск)

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Ижевский государственный
технический университет» (г. Ижевск)

Защита состоится 23 декабря 2008 года в 14 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.13 при ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета по адресу:
634010, г. Томск, пр. Ленина 36.

Автореферат разослан « » _____ 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук



Ю.Ф. Христенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время все большее внимание уделяется такой проблеме, как очистка сточных вод предприятий и коммунального хозяйства. Аналитические прогнозы предсказывают, что в недалеком будущем вполне вероятны международные конфликты, связанные с дефицитом чистой воды. Территория РФ богата водными ресурсами, что в свою очередь может выдвинуть государство на выгодные позиции на мировом рынке воды. В то же время качество воды, поставляемой в жилой сектор большинства городов, оставляет желать лучшего.

Загрязненная вода способна к самовосстановлению в природных условиях, но интенсивность очищения этого ресурса невелика, в связи с чем необходимо использовать технологии очистки использованных вод. Существуют различные методы восстановления отработанных вод, такие как механические, химические, биологические. Последние представляют наибольший интерес, так как являются по сути безотходными.

Несмотря на довольно широкое использование биологических методов очистки на сегодняшний день, до сих пор не существует общепринятой единой теории, описывающей процессы биоводоочистки на фундаментальном уровне. По-видимому, это связано с все еще неполным пониманием процессов, протекающих в очистных установках, либо с трудностью учета их всех.

Основным технологическим приемом биологических методов является использование микроорганизмов, способных утилизировать широкий спектр загрязнений, растворенных в воде. В природе бактерии крайне редко встречаются в свободной форме – они, в основном, агрегируются, и их жизнедеятельность происходит в колониях. Данные колонии представляют собой слизистые, вязкотекучие образования из микроорганизмов (биопленки), прикрепившихся к поверхности раздела сред, и созданных ими внеклеточных полимеров.

При выявлении основных закономерностей, присущих развитию биопленки и появляется возможность менять характеристики процесса биоводоочистки с целью управления им. В основном, инженеров интересует возможность интенсификации очистки воды.

До недавнего времени оптимизация процессов биоочистки воды базировалась на эксперименте. Биологические эксперименты, как правило, длятся месяцами. Во время их проведения приходится варьировать достаточно большой набор различных параметров. Это, в свою очередь, создает дополнительные трудности.

Понимание основ механизмов переработки загрязненной воды и моделирование агрегата биопленки позволяет выявить определяющие факторы и наиболее плодотворно проводить физические эксперименты.

Именно моделированию биопленки уделяется серьезное внимание в различных работах. Описание явления водоочистки затруднено по следующим причинам: значительную роль в очистке воды играет процесс массообмена между жидкой средой и агрегациями микроорганизмов в биологических фильтрах, где он сопряжен с процессом диффузии загрязнений внутри самой биопленки, интенсивность которого является многофакторной величиной. К факторам, влияющим на интенсивность диффузии, относятся: потребление загрязнений, изменение концентрации биологически активных микроорганизмов и, как следствие, изменение толщины биопленки, ее эрозия.

Подавляющее большинство работ на сегодняшний день, например, такие как [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], в основном, акцентируют внимание на отдельных аспектах развития и функционирования биопленки, и лишь некоторые предпринимают попытки полного описания биопленки [12, 13, 14], а в ряде случаев, и описания биореакторов различной конфигурации [15, 16, 17]. Итак, при детальном рассмотрении механизма очистки воды с помощью биологических методов приходится сталкиваться с описанием процессов переноса вещества через межфазную границу в гетерогенных системах. Подобные задачи успешно решаются с помощью подходов развитых в физико-химической гидродинамике [1].

Цели и задачи исследований. Целями настоящей работы являются:

1. разработка физико-математических моделей, описывающих процессы переработки загрязнений с помощью биопленок с учетом биологических представлений об интенсивности протекания биохимических реакций;
2. экспериментальное и теоретическое определение коэффициента массопередачи от водной среды к биопленке и эрозии за счет обтекающего потока воды в зависимости от характеристик фильтрующей среды и числа Рейнольдса;
3. исследование поведения характеристик биопленки во время нестационарного периода ее формирования;
4. выявление возможных режимов функционирования биопленки в установившихся режимах;
5. получение приближенных аналитических решений, позволяющих выявить роль множества факторов в установлении основных режимов переработки субстрата;

6. создание физико-математической модели капельного биофильтра на основе подходов, использующихся в физико-химической гидродинамике [1], и ее верификация с помощью эксперимента.

Методы исследований. Решение рассматриваемых задач осуществлялось на основе численных, аналитических и экспериментальных подходов, применяемых при решении задач физико-химической гидродинамики, а именно:

1. с помощью методов математической физики получены приближенные решения:
 - а) задачи о стационарных режимах потребления субстрата в биопленке при квадратичном законе смертности микроорганизмов,
 - б) задачи о равновесной толщине биопленки,
 - в) задачи о нахождении коэффициента массопередачи субстрата от водной среды к биопленке,
 - г) задачи об очистке воды с помощью биофильтра;
2. методом конечных разностей решались дифференциальные уравнения для транспорта и потребления субстрата внутри биопленки, для баланса концентрации биомассы, для транспорта субстрата в полости биофильтра;
3. экспериментальными методами получено: решение задачи об эрозии биопленки за счет обтекающего потока жидкости, подтверждение теоретически полученного выражения для коэффициента массопередачи, а также подтверждение результатов расчета производительности биофильтра.

Научная новизна. Показана неприемлемость использования линейного закона отмирания активной биомассы в биопленке. Обнаружено, что описание устойчивого функционирования биопленки возможно при использовании квадратичного закона отмирания биомассы, выведенного с учетом влияния продуктов жизнедеятельности на метаболизм микроорганизмов.

Получена зависимость коэффициента массопередачи субстрата от водной среды к поверхности биопленки от числа Рейнольдса в условиях пленочного обтекания водой зерна пористой засыпки.

Экспериментально найдена зависимость параметра эрозии биопленки от удельного расхода раствора субстрата через пористую засыпку с заданными характеристиками в режиме пленочного течения.

Выявлены два принципиально разных режима функционирования биопленки при использовании квадратичного закона отмирания микроорганизмов: насыщенный – поток субстрата в биопленку

лимитируется скоростью переработки загрязнений внутри биопленки, ненасыщенный – поток субстрата в биопленку лимитируется диффузией.

Разработана физико-математическая модель капельного биофильтра, учитывающая биокинетику микроорганизмов, характеристики фильтрующей загрузки, концентрацию загрязнений в очищаемой с его помощью воде.

Основные положения, выносимые на защиту.

1) Зависимость коэффициента массопередачи субстрата из водной среды к поверхности биопленки от числа Рейнольдса в условиях пленочного обтекания водой зерна пористой засыпки.

2) Зависимость параметра эрозии биопленки от числа Рейнольдса при движении жидкости через пористую засыпку с заданными характеристиками в режиме пленочного течения.

3) Физико-математическая модель, описывающая жизнедеятельность биопленки, основанная на диффузионно-кинетическом подходе, учитывающая изменение толщины биопленки за счет ее роста и разрушения касательными напряжениями текущей жидкости (эрозия), с учетом квадратичного закона отмирания микроорганизмов.

4) Утверждение, что при выбранном квадратичном законе отмирания микроорганизмов существуют два принципиально разных режима функционирования биопленки: насыщенный – поток субстрата в биопленку лимитируется скоростью переработки нечистот внутри биопленки, ненасыщенный – поток субстрата в биопленку лимитируется диффузией.

5) Физико-математическая модель капельного биофильтра, учитывающая характеристики биореактора, такие как пористость среды, величина зерен загрузки, площадь поперечного сечения, а также характеристики очищаемой воды.

Достоверность. Достоверность полученных результатов работы обеспечивается строгостью используемых математических постановок задач, непротиворечивостью результатов и выводов. Результаты решений уравнений математических постановок являются достоверными в силу того, что они совпадают при использовании различных методов. Соблюдались все критерии, обеспечивающие устойчивость и сходимость решений. Приближенные аналитические решения проверялись с помощью численных решений, устойчивость и справедливость которых были установлены прежде. Правомерность предложенных гипотез и моделей проверялась путем сравнения результатов моделирования с данными собственных экспериментов по оценке скорости эрозии биопленки, по нахождению коэффициента массопередачи, по измерению степени очистки загрязненной воды с помощью капельного биофильтра.

Практическая значимость. Значимость диссертационной работы определяется возможностью практического использования результатов моделирования процессов, характерных для биологической очистки сточных вод и почв. Развита модель капельного биофильтра с учетом характеристик пористой загрузки позволяет оптимизировать процесс проектирования не только очистных сооружений, но и реакторов, в которых происходят процессы переноса вещества через межфазную границу гетерогенных систем.

Получены приближенные аналитические выражения для широкого диапазона параметров, описывающие режимы функционирования биопленки, формулы для подсчета глубины очистки воды, протекающей по полости капельного биофильтра. Получено выражение, описывающее зависимость коэффициента массопередачи от величины удельного расхода жидкости, протекающей по реактору, с заданными характеристиками.

Разработаны фундаментальные критерии перехода от одного режима функционирования биопленки к другому.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:
 I. Международных конференциях: Международная школа-конференция молодых ученых «Физика и химия наноматериалов» (Томск, ТГУ, 2005), IX Московская международная телекоммуникационная конференция молодых ученых и студентов «Молодежь и наука» (Москва, МИФИ, 2005), Международная конференция «Системы воды и почв» «Conference on Soil/Water-Systems» (Франция, Центр Собраний Бордо, 2005), III международная научно-практическая конференция «Экология речных бассейнов» (Владимир, ВГУ, 2005), XLIII Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, НГУ, 2005), Международная конференция «Биовосстановление почвы и грунтовой воды» (Польша, Краков, 2004), Европейский симпозиум по биотехнологии окружающей среды «ESEB 2004» (Бельгия, Оостенде, 2004), Международная конференция «Ракетные двигатели и проблемы их применения для освоения космического пространства» (Москва-Калуга, 2003), XLI Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, НГУ, 2003), Международная конференция «Байкальские чтения II по моделированию процессов в синергетических системах» (Улан-Удэ, Томск, 2002);
 II. Всероссийских конференциях: Всероссийская конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики» (Томск, НИИ ПММ, 2006), II Всероссийская конференция «Физика и химия высокоэнергетических систем» (Томск, ТГУ, 2006), Всероссийская

научная конференция молодых ученых «НАУКА. ТЕХНОЛОГИИ. ИННОВАЦИИ» (Новосибирск, НГТУ, 2006), Всероссийская конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики» (Томск, НИИ ПММ, 2004), VII Всероссийская научно-техническая конференция «Механика летательных аппаратов и современные материалы» (Томск, ТГУ, 2003), IX Всероссийская студенческая конференция «Экология и проблемы защиты окружающей среды» (Красноярск, КрасГУ, 2002).

Также основные результаты работы опубликованы в 4 журналах, относящихся к перечню Высшей аттестационной комиссии [1 – 4].

По теме диссертации опубликовано 28 работ, включая тезисы и материалы докладов всероссийских, региональных и международных конференций.

Вклад автора. При получении результатов представляемой к защите работы автором сделан определяющий вклад, заключающийся в выполнении всех расчетов с помощью методик приближенных вычислений. Основная часть приближенных аналитических решений для задачи о переработки субстрата биопленкой и для задачи очистки воды с помощью биофильтра также была получена автором. Автором совместно с научным консультантом – доктором И.Г. Диком (Johann Dueck) разработана методика проведения эксперимента для определения скорости эрозии биопленки, выращенной на зернах пористой засыпки. Автором частично проведены эксперименты по определению скорости эрозии биопленки и коэффициента массопередачи.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 5-ти глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации составляет 165 с. Список источников литературы – 13 с. и содержит 129 названий.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность и практическая значимость проводимых в диссертации исследований, сформулированы цели и задачи, перечислены новые научные результаты, представлены положения, выносимые на защиту, описана структура диссертации.

Первая глава носит обзорный характер. В ней описываются теоретические и экспериментальные исследования в области биологической очистки загрязненных вод. Рассмотрен феномен прикрепления микроорганизмов к несущей поверхности с последующим их размножением на ней и образованием биопленки. Проведен обзор работ, рассматривающих явления: (1) массопередачи растворенных в воде загрязнений к поверхности биопленки и (2) ее эрозии. Рассмотрены

материалы по моделированию биопленок с помощью диффузионно-кинетического подхода и с помощью метода клеточных автоматов и определена их специфика. Проведено ознакомление с основными видами биоочистных устройств, такими как аэротенки, биодиски и биофильтры. Изучены научные статьи, описывающие теоретические и экспериментальные исследования, направленные на оценку производительности биофильтров. На основе проведенного обзора были сформулированы выводы:

1. при моделировании роста биомассы целесообразно пользоваться кинетикой Михаэлиса-Ментен;
2. для режима пленочного течения в орошаемых биофильтрах не дается зависимости коэффициента массопередачи от характеристик течения, что требует проведения дополнительных теоретических и экспериментальных исследований;
3. согласно источникам литературы скорость уноса материала биопленки прямо пропорциональна ее толщине, коэффициент пропорциональности имеет различную запись в разных источниках литературы, общепринятой теории уноса не существует.
4. обширный перечень работ, направленных на теоретическое и экспериментальное исследование функционирования биофильтров с загрузкой характеризуется общей схемой моделирования процесса: рассматривается глобальный перенос раствора субстрата в тракте очистного устройства за счет течения жидкости, потребление и переработка субстрата происходят локально, в биопленках;
5. не выявлено фундаментальных зависимостей, описывающих процесс переработки нечистот в орошаемом биофильтре.

Во второй главе диссертации проводятся экспериментальные исследования с целью получения формул для: (1) коэффициента массопередачи растворенных в воде загрязнений и (2) закона эрозии биопленки в орошаемом биофильтре.

Методики проведения экспериментов основаны на взвешивании зерен пористой загрузки (колец Рашига, см. рис. 1), покрытых растворимым веществом (при определении коэффициента массопередачи), либо биопленкой (при определении закона эрозии биопленки).

После закладки покрытых колец случайным образом, в экспериментальную установку подавалась вода на определенное время. По прошествии этого времени кольца изымались, освобождались от излишней влаги и взвешивались, после чего вновь укладывались для дальнейшего проведения эксперимента. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 2.

Разница в схемах проведения эксперимента для определения коэффициента массопередачи и для определения закона эрозии демонстрируется посредством таблицы 1.

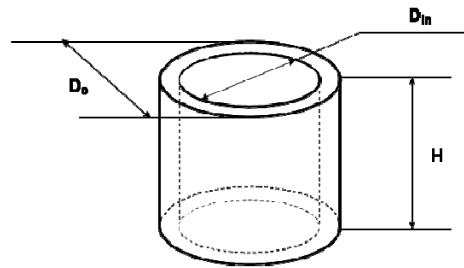


Рис. 1. Зерно пористой засыпки (кольцо Рашига).

D_o – внешний диаметр кольца, D_{in} – внутренний диаметр кольца, H – его высота.

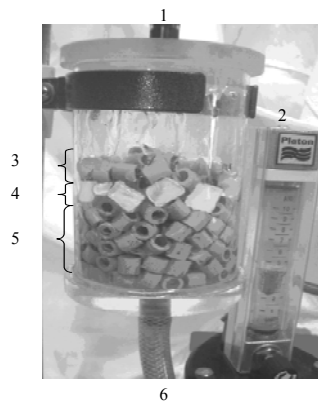


Рис. 2. Установка для измерения коэффициента массопередачи:

1 – вход, 2 – расходомер, 3 – защитный слой непокрытых колец, 4. – кольца с нанесенным покрытием, 5 – слой непокрытых колец, 6 – сток.

Таблица 1. Сравнительные характеристика проведения экспериментов

Категории	Массопередача	Эрозия
Материал покрытия	Медовосахарный раствор (1:2.5)	Биопленка
Интервалы времени, через которые прерывался процесс	30 секунд	2–3 суток
Время сушки образцов	3 минуты (переворачивание через 1.5 минуты после начала сушки)	15 минут (переворачивание через 7.5 минут после начала сушки)
Общая продолжительность эксперимента	90 секунд	До полного смывания биомассы (от 2.5 до 8 дней)

Во время проведения экспериментов было визуально отмечено, что при малых расходах жидкости поверхность колец омывалась не полностью. В связи с этим измерялась площадь омываемой поверхности кольца в зависимости от расхода жидкости.

Для этой цели на десять колец была нанесена разметка, состоящая из 24 одинаковых прямоугольных секторов. Перед закладкой в установку внешняя или внутренняя поверхность колец аккуратно смазывались тонким слоем чистого жидкого меда, на который наносилась мука.

После закладки колец в установку (рис. 2) подавалась вода на 5 секунд (для исследования внешней поверхности) и на 10 секунд (для исследования внутренней поверхности). После изъятия колец, подсчитывались чистые (промытые) прямоугольные сектора и частично оголенные сектора, причем общее количество вторых делилось пополам.

Сравнительный анализ выявляет следующие особенности, присущие процессу омывания колец жидкостью:

1. функция, описывающая долю омываемой поверхности, носит характер степенной зависимости от расхода воды, как для внешней стенки кольца, так и для внутренней. При этом внешняя поверхность при тех же расходах жидкости омывается более полно, чем внутренняя;
2. увеличение доли омываемой поверхности для внутренних стенок колец растет быстрее с увеличением расхода жидкости, чем для внешней.

Зависимость доли омываемой поверхности кольца от расхода жидкости в случае нанесения медовосахарного раствора на обе поверхности имеет вид:

$$S_w / S_{\text{tot}} = 0.0481 \cdot Q^{0.1567}. \quad (1)$$

В биотехнологии процессы массопередачи на внешней поверхности колец и на внутренней происходят одновременно. На рис. 3 представлен график зависимости коэффициента массопередачи в «среднем» по всей поверхности кольца с учетом (1). Степенная аппроксимация $\beta(Q)$, показанная на рис. 3, дает зависимость

$$\beta_w = 18.75 \cdot Q^{0.1134}. \quad (2)$$

Для теоретической оценки коэффициента массопередачи. За основу взята модель обтекания зерен засыпки пленкой жидкости с растворенными в ней загрязнениями. В результате для коэффициента массопередачи получено выражение:

$$\beta_w = 0.62 \left(\frac{g_0^2}{v R_0^4} \frac{Q_{\text{уд}}}{v(1-\varepsilon)} \right)^{1/9} D^{2/3}. \quad (3)$$

Здесь D – коэффициент диффузии субстрата в жидкости [$\text{см}^2/\text{сут}$]; $\tilde{g}$ – приведенное значение ускорения свободного падения, вызванное случайностью ориентацией зерен в пористой засыпке [$\text{см}/\text{сут}^2$];

$\bar{R}_0 = \left(\frac{D_o + D_{in}}{2} \right) \left(1 + \frac{H}{\pi(D_o + D_{in})} \right)$ – средний размер зерна засыпки, [см];

$Q_{уд}$ – расход жидкости на единицу площади поперечного сечения биофильтра [$\text{см}/\text{сут}$]; ε – пористость загрузки биофильтра; ν – вязкость жидкости [$\text{см}^2/\text{сут}$].

В критериальной форме оно записывается, как $Sh = \theta Sc^{1/3} Re^{1/9}$, где θ – константа.

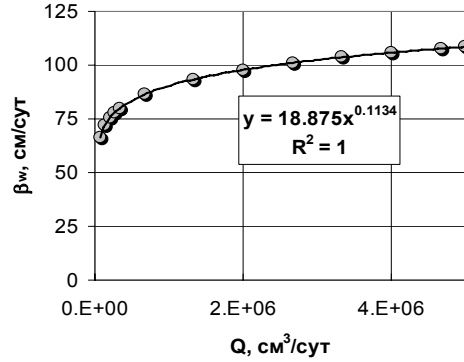


Рис. 3. Зависимость коэффициента массопередачи в случае двухстороннего покрытия кольца от расхода жидкости

Отличительной особенностью полученного выражения является то, что для пленочного режима обтекания биопленки зависимость массопередачи от числа Re много слабее, чем в случае режимов с достаточно большим расходом субстрата, при которых поровое пространство загрузки полностью заполнено жидкостью.

Сравнение полученного теоретического выражения с результатом эксперимента по определению коэффициента массопередачи дает зависимость:

$$\beta_w = 0.43 \left(\frac{\tilde{g}_0^2}{\nu \bar{R}_0^6} \frac{Q_{уд}}{\pi \nu (1 - \varepsilon)} \right)^{1/9} D^{2/3}, \quad (4)$$

$$\text{или в критериальной форме: } Sh = 0.43 \gamma^{2/9} Sc^{1/3} Re_t^{1/9} \quad (4a)$$

Согласно результатам эксперимента по определению закона эрозии биопленки было получено выражение для скорости утоньшения биопленки

$$\frac{dL_f}{dt} = -rL_f, \quad (5)$$

что является наиболее часто встречаемым в литературе [43–49]. Здесь L_f – толщина биопленки [см], t – время [сут], r – параметр эрозии [1/сут].

Для параметра эрозии r также найдено выражение в зависимости от расхода жидкости на единицу площади поперечного сечения биофильтра:

$$r = 2 \cdot 10^{-6} Q_{уд}, \quad (5)$$

В третьей главе диссертации строится физико-математическая модель биопленки в одномерном приближении на основе диффузионно-кинетического подхода. Результаты исследований, описанных во второй главе, используются при математической формулировке задачи. При моделировании биопленки процесс закрепления микроорганизмов опускается из рассмотрения и предполагается первичное отложение биомассы на элементах пористой засыпки.

Математическая модель биопленки представлена следующими уравнениями:

1. Уравнение транспорта субстрата и его потребления внутри биопленки

$$\frac{\partial S_f}{\partial t} = D_f \frac{\partial^2 S_f}{\partial z^2} - q_m \frac{S_f}{K_s + S_f} X_f \quad z \in (0; L_f) \quad (6)$$

с граничными условиями

$$D_f \frac{\partial S_f}{\partial z} \Big|_{z=L_f} = \beta_w (S_i - S_f); \quad \frac{\partial S_f}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (7)$$

2. Уравнение баланса биомассы

$$\frac{\partial X_f}{\partial t} = Yq_m \frac{S_f}{K_s + S_f} X_f - bX_f^2 \quad (8)$$

3. Уравнение, описывающее рост биопленки за счет потребления субстрата и ее разрушение, омываемым потоком жидкости

$$\frac{dL_f}{dt} = \frac{Yq_m}{\rho_B} \int_0^{L_f} \frac{S_f}{K_s + S_f} X_f - rL_f \quad (9)$$

Система уравнений (6), (8), (9) решается со следующими начальными условиями:

$$S_f(0, z) = S_{f,0} \quad X_f(0, z) = X_{f,0} \quad L_f(0) = L_{f,0} \quad (10)$$

Начальное условие для L_f можно трактовать как первичное отложение биомассы.

Вторая степень во втором слагаемом правой части уравнения (8) обусловлена влиянием продуктов собственной жизнедеятельности бактерий на их метаболизм. Если принять во внимание, что скорость отмирания биомассы $dX_f / dt \propto -P_f X_f$, где P_f – концентрация ядовитых веществ, и записав простое кинетическое соотношение $dP_f / dt = k_1 X_f - k_2 P_f$ (здесь скорость производства метаболитов пропорциональна концентрации микроорганизмов, а их распад или унос – их собственной концентрации) в квазистационарных условиях будем иметь $dX_f / dt \propto -X_f^2$.

Запись, подобную (8), имеет уравнение Моно-Ферхюльста [Ризниченко], которое справедливо для случаев, когда микроорганизмы находятся в среде с ограниченными питательными ресурсами. В свете предположений, имеющих место при выводе (8), мы принципиально не называем это уравнение уравнением Моно-Ферхюльста.

Особенностью записанной системы уравнений (6–9) является область значений параметров эрозии, при которых биопленка не может существовать. Переход в эту область начинается при достижении предельного параметра эрозии $r_{\lim}$. Выражение для этого параметра может

быть получено из анализа системы (6–9): $r_{\lim} = \frac{Yq_m}{\rho_B b} \left(\frac{S_l}{K_S + S_l} \right)^2$. На

практике действительно при достаточно больших расходах наблюдается отрыв биопленки и полный унос ее материала.

Расчеты проводились для значений кинетических констант широко распространенных в литературе и для различных начальных условий (5). При проведении численного эксперимента изучалось поведение характеристик биопленки, процесс их установления.

Для проведения математического анализа уравнения системы (6–9) осреднялись по координате z :

$$\frac{dX_f}{dt} = Yq_m \frac{S_f}{K_S + S_f} X_f - bX_f^2, \quad (11)$$

$$\frac{dS_f}{dt} = \frac{\beta'}{L_f} (S_l - S_f) - q_m \frac{S_f}{K_S + S_f} X_f, \quad (12)$$

$$\frac{dL_f}{L_f dt} = \frac{Yq}{\rho_B} \frac{S_f}{K_S + S_f} X_f - r, \quad (13)$$

Здесь $\beta' = \beta_w \frac{D_f}{D_f + L_f \beta_w}$ – коэффициент массопередачи, полученный с учетом диффузионного сопротивления внутри биопленки.

Для осредненных по толщине биопленки параметров получены

$$\text{следующие выражения } \bar{X}_f(\infty) = \sqrt{\frac{\rho_B r}{b}}, \quad \frac{\bar{S}_f(\infty)}{S_1} = \frac{K_S \sqrt{\frac{r}{r_{\text{lim}}}}}{K_S + S_1 \left(1 - \sqrt{\frac{r}{r_{\text{lim}}}}\right)},$$

$$L_f(\infty) = \frac{D_f}{2\beta_w} \left[\sqrt{1 + \frac{4Y\beta_w^2}{\rho_B r D_f} (S_1 - \bar{S}_f(\infty))} - 1 \right].$$

Характерное время установления концентрации активной биомассы, определяемое скоростью биохимической реакции, запишется как

$$t_{\bar{X}_f} = \frac{1}{Yq_m} \frac{K_S + \bar{S}_f(\infty)}{\bar{S}_f(\infty)}.$$

Исследуемые уравнения указывает на квазистационарную связь между

$$\bar{S}_f \text{ и } \bar{X}_f, \text{ которую можно записать как } \bar{S}_f \approx \left(1 + \frac{L_f}{\beta'} \frac{q_m}{K_S + \bar{S}_f(\infty)} \bar{X}_f\right)^{-1}.$$

Отсюда характерное время установления конечного значения концентрации субстрата такое же, что и для концентрации активной биомассы $t_{\bar{S}_f} \approx t_{\bar{X}_f}$.

Для толщины биопленки получено, что характерное время установления $t_{L_f} = 1/r$.

Динамика установления конечных характеристик биопленки зависит от ее начального состояния. Чем неблагоприятнее условия для протекания биохимических реакций, тем дольше установление величин. При малой толщине исходной пленки и низкой концентрации активной биомассы наблюдается проявление периода, в течение которого не происходит видимых изменений в биопленке. Этот период сменяется быстрым изменением характеристик пленки в направлении конечного состояния. При этом различные характеристики имеют различные времена установления к своим конечным значениям. Наиболее медленно устанавливается, обычно, толщина биопленки. Установление стационарного состояния биопленки в условиях сильной эрозии затруднено по сравнению со случаем слабого разрушения биопленки. Конечное состояние биопленки от начальных условий не зависит.

В четвертой главе изучается поведение характеристик биопленки при стационарном режиме. Изначально толщина биопленки полагается известной величиной, которая, например, может быть получена из эксперимента.

Из системы уравнений (6–8) в стационарном случае получается одно дифференциальное уравнение второго порядка с граничными условиями. Из рассмотрения был исключен транспорт субстрата из жидкости к биопленке. Концентрация субстрата на поверхности биопленки считается известной величиной.

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = \delta \left(\frac{S}{1+S} \right)^2, \quad (14)$$

$$x=0 \quad \frac{dS}{dx} = 0, \quad x=1 \quad S = S_L. \quad (15)$$

Здесь $x = z / L_f$ – безразмерная координата, $S = S_f / K_s$ – безразмерная

концентрация субстрата. Безразмерный параметр $\delta = \frac{Y q_m^2 L_f^2}{b K_s D_f}$ включает в

себя диффузионно-кинетические параметры, а также квадрат толщины биопленки; $S_L = S_i / K_s$ – безразмерная концентрация растворенного в потоке жидкости субстрата.

Получено несколько приближенных аналитических выражений, описывающих поток субстрата в биопленку в широком диапазоне параметров δ и S_L , а также определены области применимости каждого из решений (рис. 4).

$$\Psi_{(\sqrt{\delta})} = \sqrt{\delta} \left(\frac{S_L}{1+S_L} \right)^2 \quad (16)$$

$$\Psi_{(\sqrt{\delta})} = \sqrt{\delta} \quad (17)$$

$$\Psi_{(\sqrt{\delta})} = \sqrt{\delta} \left(\frac{12S_L}{12(S_L+1)+\delta} \right)^2 \quad (18)$$

$$\Psi_{(\sqrt{\delta})} = \sqrt{\delta} \left(\frac{2S_L}{\sqrt{\delta} + 2S_L} \right)^2 \quad (19)$$

$$\Psi_{(\sqrt{\delta})} = \sqrt{2 \left(1 + S_L - \frac{1}{1+S_L} - 2 \ln(1+S_L) \right)} \quad (20)$$

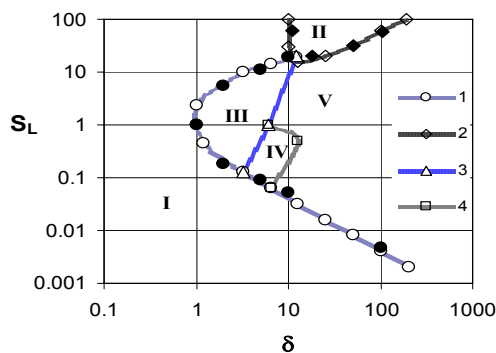


Рис. 4. Области наиболее предпочтительных аналитических решений.
I – формула (16), II – (17), III – (18), IV – (19), V – (20). 1 – (21), 2 – (22), 3 – (23), 4 – (24).

Здесь $\Psi_{(\sqrt{\delta})} = \sqrt{\frac{b}{K_s Y q_m^2 D_f}} J$ – безразмерный поток субстрата в

био пленку; J – его размерный аналог. Каждая из вышепредставленных формул справедлива в своей области. В совокупности данные формулы полностью покрывают область параметров, представленную на рис. 4.

Найдены выражения, описывающие границы областей применимости для каждой формулы:

$$S_L = \exp[\pm 1.7(\delta - 1)^{0.25}], \quad (21)$$

$$S_L = 0.5\delta^2/(\delta - 10), \quad (22)$$

$$S_L = 0.0013 \cdot \delta^{3.8}, \quad (23)$$

$$\delta = 4.5 + 31.7 \cdot S_L - 30.2 \cdot S_L^2. \quad (24)$$

На основе полученных выражений можно заключить, что продуктивность переработки субстрата био пленкой растет с увеличением толщины био пленки и концентрации раствора субстрата. С ростом концентрации субстрата в растворе био пленка насыщается субстратом. Степень насыщения био пленки не монотонно зависит от концентрации субстрата в растворе. Она высока как при низких, так и при высоких концентрациях субстрата, что обусловлено малостью скорости реакции в первом случае и слабой концентрационной чувствительности скорости реакции – во втором случае.

Максимальное значение перерабатываемого потока субстрата пропорционально толщине био пленки. В выражение для J входят также максимальная скорость биореакции q_m и скорость отмирания активной

биомассы, которые, естественно, влияют на толщину биопленки L_f . В связи с этим очевидна необходимость дальнейшего развития модели, включающей в себя баланс продуцирования активной биомассы и эрозию биопленки.

Привлечение к исследованию уравнения, описывающего поведение толщины биопленки, добавляет еще один параметр. В данном случае это безразмерный параметр эрозии $A = \frac{rb\rho_B}{(Yq_m)^2}$. В свою очередь, параметр δ ,

связанный с толщиной биопленки становится переменным, который необходимо искать. Система уравнений (14–15) с добавленным уравнением имеет вид:

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = \delta \left(\frac{S}{1+S} \right)^2, \quad (14)$$

$$x=0 \quad \frac{dS}{dx} = 0, \quad x=1 \quad S = S_L, \quad (15)$$

$$\int_0^1 \left(\frac{S}{1+S} \right)^2 dx - A = 0. \quad (25)$$

Получены следующие приближенные аналитические решения для потока субстрата и толщины биопленки. Первые два выражения позволяют вычислить поток субстрата и толщину биопленки при малых значениях эрозии.

$$\Psi = \sqrt{2 \left(1 + S_L - \frac{1}{1 + S_L} - 2 \ln(1 + S_L) \right)}, \quad (26)$$

$$\delta = \frac{2 \left(1 + S_L - \frac{1}{1 + S_L} - 2 \ln(1 + S_L) \right)}{A^2} \quad (27)$$

Следующие два выражения позволяют получить значения потока субстрата и толщины биопленки при высокой интенсивности эрозии.

$$\Psi = \sqrt{\frac{3S_L \left[1 - \sqrt{A} \frac{(S_L + 1)}{S_L} \right]}{(1 - \sqrt{A})}} A, \quad (28)$$

$$\delta = \frac{3S_L \left[1 - \sqrt{A} \frac{(S_L + 1)}{S_L} \right]}{A(1 - \sqrt{A})}. \quad (29)$$

Области применимости тех или иных формул представлены на рис. 5.

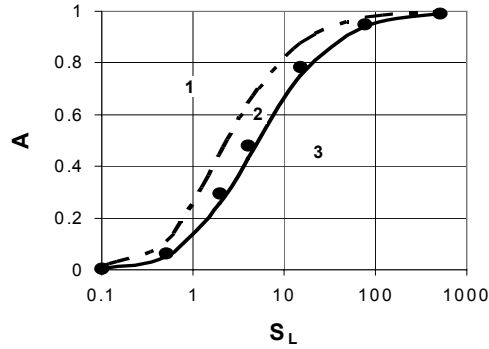


Рис. 5. Область применимости полученных приближенных решений. Пунктир – теоретическая кривая (30), сплошная линия соответствует (31), кружки – кривая (32). 1 – область, где не существует решения задачи (14), (15), (25); 2 – область применимости (28), (29); 3 – область применимости (26), (27).

Для границ областей получены выражения:

$$A_{lim} = \left(\frac{S_L}{1 + S_L} \right)^2, \quad (30)$$

$$A_{tr} = A_{lim} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\left((1 + S_L) - (1 + S_L)^{-1} - 2 \ln(1 + S_L) \right) (1 - A_{lim})}{S_L A_{lim}} \right)^2. \quad (31)$$

Анализ показал, что вместо (31) с приемлемой точностью можно использовать (32)

$$A_{tr} = \left(\frac{S_L}{S_L + 2} \right)^2. \quad (32)$$

Таким образом, обнаружены два режима существования стационарной биопленки, характеризующиеся различными степенями насыщения ее субстратом. Вычислена параметрическая граница между этими двумя стационарными режимами и граница существования стационарного режима вообще (достижения предельного коэффициента эрозии).

Показано, что насыщенные биопленки могут существовать только в узком диапазоне параметра эрозии – вблизи его предельного значения.

В пятой главе строится физико-математическая модель очистки воды в капельном биофилтре (рис. 6). Устройство капельного биофилтра представляет собой пространство, заполненное пористой фильтрующей средой. В рассматриваемом случае элементами пористой загрузки являются кольца Рашига. Вода с растворенными в ней нечистотами подается таким образом, чтобы на кольцах образовывалась пленка жидкости.

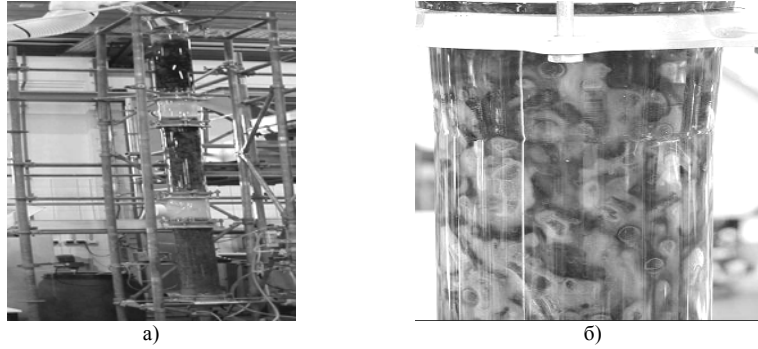


Рис. 6. Лабораторная установка биореактора:
а) крупный план; б) приближенный ракурс колец Рашига с наросшей биомассой.

Принципиальная схема реализации очистки дается на рис. 7. Исходя из представлений о пленочном режиме течения во второй главе, были получены выражения, описывающие зависимость коэффициента массопередачи и коэффициента эрозии от расхода жидкости на единицу площади поперечного сечения биофилтра. Математическая постановка модели капельного биофилтра представляет собой суперпозицию двух одномерных задач (рис. 7).

1. При описании транспорта субстрата в слое жидкости и его потребления биопленкой используется стационарное уравнение равенства потоков:

$$Q_2 \frac{dS_1(y)}{dy} = -\beta_w \frac{S_w}{S_{tot}} (S_1(y) - S_b(y)), \quad (33)$$

где: S_1 – концентрация субстрата в слое воды; S_b – концентрация субстрата на поверхности биопленки, Q_2 – расход раствора субстрата на единицу ширины жидкостной пленки. Отношение S_w / S_{tot} дает учет того обстоятельства, что не вся поверхность зерен засыпки омывается

водой. Величина концентрации субстрата на поверхности биопленки S_b является заранее неизвестной величиной.

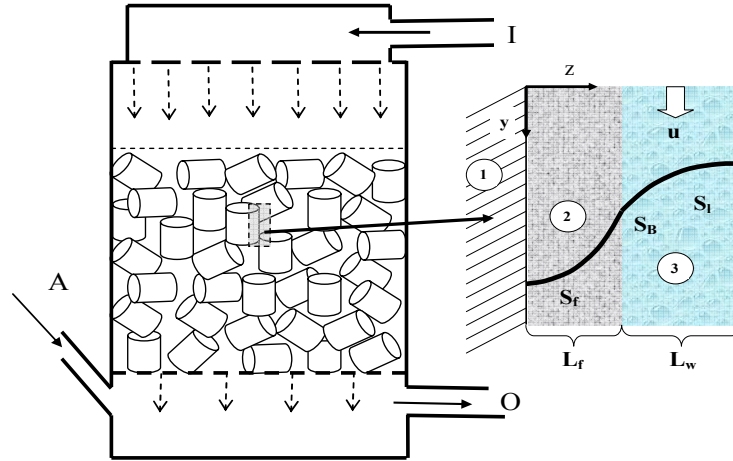


Рис. 7. Схематическое представление процесса очистки воды. I – втекающая вода, O – отходящая вода, A – приток воздуха.

2. Распределение концентрации субстрата в биопленке описывается уравнением:

$$D_f \frac{\partial^2 S_f}{\partial z^2} = q_m \frac{S_f}{K_s + S_f} X_f, \quad (34)$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial S_f}{\partial z} = 0 \quad z = 0, \text{ и } \beta_w (S_l - S_f(L_f)) = D_f \frac{\partial S_f}{\partial z} \quad z = L_f. \quad (35)$$

Здесь $S_f(L_f(y)) = S_b(y)$.

3. Скорость производства биомассы равна скорости отмирания микроорганизмов:

$$Yq_m \frac{S_f}{K_s + S_f} X_f = bX_f^2. \quad (36)$$

4. Скорость роста толщины биопленки равна скорости ее уноса:

$$\frac{Yq_m}{\rho_B} \int_0^{L_f} \frac{S_f}{K_s + S_f} X_f dz = rL_f. \quad (37)$$

Задача о потреблении субстрата биопленкой в рамках данной модели решалась при помощи приближенных аналитических методов, рассмотренных в четвертой главе. Уравнение (33) решалось численно.

В результате анализа полученных данных, удалось получить приближенное аналитическое выражение, описывающее падение концентрации субстрата в направлении потока жидкости:

$$\frac{S_1(y) - \langle S_f \rangle}{S_1(0) - \langle S_f \rangle} = \exp \left[-\frac{\beta_w}{Q_2} \frac{S_w}{S_{\text{tot}}} y \right]. \quad (38)$$

здесь $\beta_{\text{a.g.}} = \beta_w \left(1 + \frac{\beta_w L_f(0)}{D_f} \right)^{\frac{1}{2}}$ – среднегеометрическое коэффициента

массопередачи от водной среды к поверхности биопленки и массопередачи с учетом диффузионного сопротивления внутри

биопленки; $\langle S_f \rangle = \frac{K_s \sqrt{\rho_B r b}}{Y_{q_m}} \left(1 - \frac{\sqrt{\rho_B r b}}{Y_{q_m}} \right)^{-1}$ – средняя концентрация

субстрата в биопленке для любого сечения биофильтра.

Численный расчет показывает, что для высоких расходов $Q_{\text{уд}}$ эффективность водоочистки, т.е. отношение концентраций углерода на выходе и на входе в реактор, падает. Это связано с тем, что характерное время пребывания раствора субстрата в реакторе уменьшается, несмотря на то, что интенсивность массопередачи несколько увеличивается.

Результаты математического моделирования сравнивались с результатами собственного эксперимента по очистке воды с помощью биофильтра. Эксперимент был нацелен на измерение:

1. Содержания полного углерода в растворе субстрата. Взятие проб воды производилось на входе в реактор, на его выходе, и еще в двух пунктах на расстоянии 78 и 173 см от входа (рис. 7). У взятых проб воды отфильтровывались твердые комочки биопленки, вынесенные потоком. Вода исследовалась на содержание углерода (Total organic carbon) с использованием ТОС-анализатора фирмы Groeger&Obst (Германия);
2. Удельной массы биопленки. В тех же местах взятия проб, что и для анализа воды, вынималось 10 колец. Разница весов колец, покрытых биопленкой и без нее, дает массу биопленки. Далее, зная плотность влажной биомассы, можно рассчитать среднюю толщину биопленки.

Информация о данных экспериментальных измерений содержится в таблице 2. Анализ показал, что подход, основанный на использовании диффузионно-кинетических представлений, способен в широком диапазоне описывать процессы, имеющие место в частности при

биологической очистке воды. Результаты сравнения представлены на рис.8.

Таблица 2. Значения концентраций субстрата для различных расходов

№ измер.	$Q_{уд}$ (см/мин)	$S_1(y)$, мг/см ³			
		$y=0$, см	$y=78$, см	$y=173$, см	$y=268$, см
1.	3.28	0.058	0.031	0.022	0.0172
2.	4.47	0.026	0.016	0.012	0.0085
3.	5.26	0.0055	0.0042	0.0038	0.0035
4.	5.32	0.0096	0.0075	0.0059	0.0042
5.	5.82	0.0086	0.0061	0.0049	0.0040
6.	5.89	0.019	0.012	0.0084	0.0059
7.	6.56	0.014	0.0091	0.0062	0.0058
8.	10.63	0.0077	0.0062	0.0048	0.0047
9.	11.32	0.011	0.0092	0.0072	0.0055

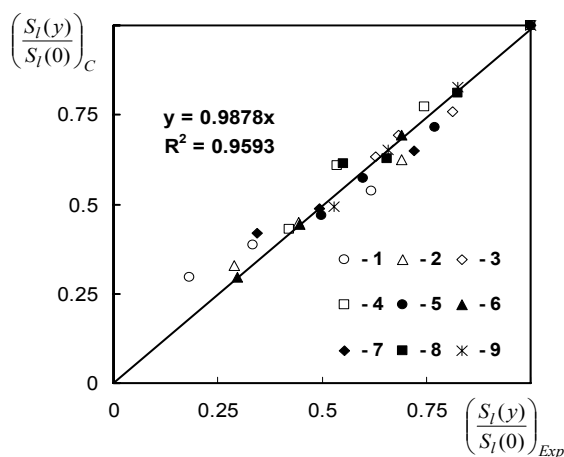


Рис. 8. Сопоставление полученной экспериментально (Exp) концентрации субстрата $S_1(y)$ отнесенной к входному значению $S_1(0)$ (мг/см³) в слое воды (ось абсцисс) и той же величины, рассчитанной теоретически (C) во всех точках забора проб: 1 – измерение 1.; 2 – измерение 2.; 3 – измерение 3.; 4 – измерение 4.; 5 – измерение 5; 6 – измерение 6; 7 – измерение 7; 8 – измерение 8; 9 – измерение 9.

В заключении диссертации подчеркиваются основные результаты и строятся выводы.

В приложениях описываются процедуры оценок погрешностей, возникающих при экспериментальных измерениях коэффициента

массопередачи и параметра эрозии, описанных во второй главе диссертации. Проведено исследование на сходимость численных решений задач, представленных в третьей главе диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Теоретически получено выражение для коэффициента массопередачи в режиме пленочного обтекания элементов пористой засыпки, при котором реализуется диффузионный пограничный слой. Проведено сравнение теоретической и экспериментальной зависимостей. Выявлено неполное омывание поверхности элементов пористой загрузки в режиме пленочного обтекания. Экспериментально получены количественные зависимости для этого явления.
2. Проведен эксперимент по определению закона эрозии биопленки, вызванной гидродинамическими напряжениями в жидкости, в условиях режима пленочного течения. Получена зависимость параметра эрозии от числа Рейнольдса, характеризующего течение жидкости через пористую среду биофильтра с заданными характеристиками.
3. Сформулирована физико-математическая модель функционирования биопленки с учетом изменения ее толщины во времени. Предложена биокинетическая схема, согласно которой постулируется квадратичный закон, описывающий убыль концентрации активной биомассы.
4. Показано, что период развития биопленки существенно зависит от начальных условий, в которых пребывала биопленка. Конечное состояние биопленки от начальных условий не зависит. Интенсивность эрозии влияет на характер развития биопленки.
5. Выявлено предельное значение параметра эрозии, при котором рост биопленки не может компенсировать ее разрушение касательными напряжениями текущей жидкости.
6. Получены выражения для эффективной скорости переработки субстрата (потока субстрата в биопленку) в широком диапазоне изменения параметров задачи для двух возможных режимов ее функционирования: диффузионного и кинетического. Найдены границы перехода из одного режима в другой.
7. Сформулирована и реализована физико-математическая модель для описания процесса водоочистки в орошаемом биофильтре, учитывающая массоперенос фильтрата в пористой среде. Получена приближенная аналитическая зависимость для профилей концентрации раствора субстрата от числа Рейнольдса вдоль биофильтра. Результаты моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными по профилям концентрации субстрата вдоль колонны лабораторного реактора.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Дик И.Г., Пыльник С.В. О скорости биохимической реакции в обтекаемой биопленке // Теоретические основы химической технологии, 2008. Т. 42. № 4. С. 1 – 6.
2. Пыльник С.В., Миньков Л.Л., Дик И.Г. О равновесной толщине биопленки // Теоретические основы химической технологии, 2007. Т. 52. № 4. С. 455 – 460.
3. Миньков Л.Л., Пыльник С.В., Дик И.Г. Стационарные режимы переработки субстрата в биопленке при квадратичном законе скорости отмирания микроорганизмов // Теоретические основы химической технологии, 2006. Т. 40, № 5. С. 533 – 539.
4. Дик И.Г., Пыльник С.В., Миньков Л.Л. Моделирование эволюции водоочищающей биопленки с учетом ее эрозии // Биофизика, 2005. Т. 50, № 3. С. 505 – 514.
5. Duek J., Ferdinandova E., Pylnik S., Minkov L. Modelling The Process Of Water Cleaning In A Biofilm // Eurasian Physical Technical Journal, 2007. – Vol. 4. – No. 1 (7). Pp. 4 – 20.
6. Дик И.Г., Горин А.В., Фердинандова Е., Пыльник С.В. Экспериментальное исследование массообмена в пленочном биофильтре // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Материалы конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. С. 497–499.
7. Дик И.Г., Пыльник С.В. О массообмене в пленочном биофильтре // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Материалы конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. С. 499 – 500.
8. Pylnik S., Dueck J. Calculation method of the water purification process in a bio filter // Ecology of River's Basins, ERB-2005, The second International Scientific Conference, Vladimir 2005, Pp. 475–479.
9. Dueck J., Pylnik S., Minkov L. Mathematical modeling of biofilm dynamics // Proceeding of the European Symposium on Environmental Biotechnology, ESEB 2004, Oostende, Belgium. 2004. Pp. 545 – 547.
10. Pylnik S. Mathematical modeling of biofilm dynamics // Mathematical modeling of biofilm dynamics. International Conference on Bioremediation of Soil and Groundwater, Crakow, Poland, September 5-8, 2004.
11. Дик И.Г., Пыльник С.В., Миньков Л.Л. Математическая модель для оптимизации регенерации воды // Международная конференция “Ракетные двигатели и проблемы их применения для освоения космического пространства” Тезисы докладов. Россия, Москва-Калуга, 2003. С.114-115.
12. Дик И.Г., Пыльник С.В., Миньков Л.Л. Моделирование эволюции биопленки с учетом ее эрозии // Труды Международной конференции “Байкальские чтения II по моделированию процессов в синергетических системах” 18-23 июля 2002. Улан-Удэ, Томск. Изд-во Том. ун-та, 2002. С.245-248.

СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. Физмагиз, 1959. 700 с.
2. Christensen B.E., Characklis W.G. Physical and chemical properties of biofilms. In: Characklis, W.G. and Marshall, K.C. (eds.): Biofilms. John Wiley, New York, 1990. Pp. 93 – 130.
3. Чупов В.В., Усова А.В., Яковенко И.И. Ковалентная иммобилизация клеток в полимерных гидрогелях. В сб. Иммобилизованные клетки в биотехнологии. Пущино, 1987, С. 114 – 123.
4. Ивановский Р.Н. Биознергетика и транспорт субстрата у бактерий. М., Изд-во МГУ, 2001.

5. *Horn H., Hempel D.C.* Substrate utilization and mass transfer in a autotrophic biofilm system: Experimental Results and numerical simulation // *Biotechnol. Bioengng.* 1997. 53 (4), Pp. 363 – 371.
6. *Horn H., Hempel D.C.* MassTransfer Coefficient for an Autotrophic and a Heterotrophic Biofilm System. *Wat. Sci. Tech.* 1995. 32 (8). Pp. 199 – 204.
7. *Picioreanu C., Loosdrecht M.C.M., Heijnen J.J.* A theoretical study on the effect of surface roughness on mass transport and transformation in biofilms. *Biotechn. Bioeng.* 2000. 68 (4). Pp. 355 – 369.
8. *Wilson E.J., Geankoplis C.J.* Mass transfer at very low Reynolds Numbers in Packed Beds // *Ind. Eng. Chem. Fundam.* 1966. 5 (1). Pp. 9 – 14.
9. *Wilderer P., Morgenroth M.* Influence of detachment on competition in biofilms // *Wat. Res.* 2000. V. 34, N. 2. Pp. 417 – 426.
10. *Stewart P.* A model for biofilm detachment // *Biotech. Bioengng.* 1993. 41. Pp. 117 – 117.
11. *Rittman B.E.* The effect of shear stress on biofilm loss rate // *Biotechnol. Bioeng.* 1982. 24. Pp. 501 – 506.
12. *Rittman B.E.* Detachment from biofilms // *Structure and function of biofilms.* New-York. Wiley. 1989. Pp. 49 – 58.
13. *Wanner O., Gujer W.* A multispecies biofilm model // *Biotechnol. Bioeng.* 1986. 28. Pp. 314 – 328.
14. *Wanner O., Reichert P.* Mathematical modeling of mixed-culture biofilms // *Biotechnol. Bioeng.* 1996. V.2., N.49. Pp. 172 – 184.
15. *Tiwari S.K., Bowers K.L.* Modelling Biofilm Growth for Porous Media Applications // *Mathematical and Computer Modelling.* 2001. 33. Pp. 299 – 319.
16. *Debus O.* Aerober Abbau von flüchtigen Abwasserinhaltsstoffen in Reaktoren mit membrangebundenem Biofilm. *Sekoulov I. (Edit.): Hamburger Berichte zur Siedlungswasserwirtschaft.* Hamburg: GFEU an der TUHH, 1993. – 3-930400-12-X.
17. *Hekmat D., Stephan M., Bauer R., Feuchtinger A., Vortmeyer D.* Modelling of multispecies biofilm population dynamics in a trickle-bed bioreactor used for waste gas treatment // *Process Biochemistry.* 2006. 41. Pp. 1409 – 1416.
18. *Hozalski R.M., Bouwer E.J.* Non-steady state simulation of BOM removal in drinking water biofilters: model development // *Wat. Res.* 2001. V. 35. N. 1. Pp. 198 – 210.