ОБРАБОТКА ДАННЫХ И УПРАВЛЕНИЕ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

ВЫПУСК 5

Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

ОБРАБОТКА ДАННЫХ И УПРАВЛЕНИЕ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

Выпуск 5

Под редакцией профессора А.Ф. Терпугова

Издательство Томского университета
2003

УДК 519.2
ББК 22.17
О 24

Обработка данных и управление в сложных системах:
О 24 Сборник статей / Под ред. А.Ф. Терпугова. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. Вып. 5. – 238 с.

ISBN 5-7511-1646-х

Сборник содержит статьи сотрудников и аспирантов факультета математики и информатики филиала Кемеровского университета в г. Анжеро-Судженске, посвященные статистической обработке временных рядов, актуарной математике, а также вопросам управления в системах массового обслуживания и в измерительных системах.

Для студентов, аспирантов, научных работников, занимающихся вопросами анализа временных рядов и управления в измерительных системах.

УДК 519.2
ББК 22.17

ISBN 5-7511-1646-х

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ФОНДА СОЦИАЛЬНОГО СТРАХОВАНИЯ С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ РАСХОДАМИ НА СОЦИАЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ ПРИ РЕЛЕЙНО-ГИСТЕРЕЗИСНОМ УПРАВЛЕНИИ КАПИТАЛОМ

О.А. ЗМЕЕВ

Описание объекта моделирования

Задачи, связанные с построением, исследованием математических моделей различного рода экономических объектов широко известны уже достаточно давно. Например, решение классической для актуарной математики задачи – построение математической модели работы страховой компании в целом – берет свое начало в докторской диссертации Лунберга, которая была представлена в начале прошлого века. В качестве основной характеристики для описания деятельности страховой компании в этой модели рассматривается капитал компании, а в качестве математической модели – так называемые процессы с независимым приращением капитала [1].

Но в реальности, кроме классических страховых компаний, по крайней мере у нас в стране, на рынке страховых услуг существуют объекты, в деятельности которых активную роль играет государство, выполняя с их помощью некоторые социальные функции и гарантии. В качестве отличительной особенности таких объектов отметим отказ от получения коммерческой выгоды от своей деятельности, что не совсем обычно для классических математических моделей страхования. К числу таких объектов можно отнести Государственные фонды социального страхования.

Фонды социального страхования РФ созданы на основании постановления Совета Министров РФ и фонда независимых профсоюзов. В отличие от обычных страховых компаний, в задачу фонда входит не только оплата страховых случаев (временная нетрудоспособность, пособия по беременности и родам и т.д.), но и систематические выплаты по реализации региональных и отраслевых программ по охране здоровья работников, санаторно-курортному лечению, обслуживанию детей и т.д.

С одной стороны, обеспечивая социальные гарантии работающих, фонд должен иметь задачу оплаты страховых случаев (временная нетрудоспособность, пособия по беременности и родам и т.д.). Такая деятельность практически не отличается от классического страхования, и для ее исследования вполне применимы соответствующие методы. А с другой – фонды обязаны систематически финансировать различные региональные и отраслевые программы по охране здоровья работников, санаторно-курортному лечению, обслуживанию детей и т.д. Такое «нерациональное» использование капитала в рамках классической теории страхования не исследовано.

Как уже было отмечено выше, в задачи фондов социального страхования не входит непосредственное накопление капитала; фонд обязан рационально использовать средства, поступающне ему от предприятий и организаций. Для решения задач математического моделирования деятельности фонда и оптимального управления капиталом необходимо внести изменения в классическую модель работы страховой компании.

Математическая модель деятельности фонда

Основной характеристикой состояния фонда является его капитал $S(t)$ в момент времени t. С этим капиталом происходят следующие изменения:

1. В фонд поступают средства от предприятий и организаций. Мы будем считать, что они поступают непрерывно во времени со скоростью c_0.

2. Фонд выделяет часть своих средств на социальные программы. Мы будем считать, что эти средства также выделяются непрерывно во времени, однако скорость их выделения $c^{\bullet}(S)$ зависит от величины капитала S в данный момент времени.

Величину $c_0 - c^*(S)$ мы в дальнейшем будем обозначать как $c(S)$. Таким образом, $c(S)$ есть скорость изменения капитала за счет детерминированных расходов, и она зависит от величины капитала S. Именно в наличии слагаемого $c^*(S)$ и зависимости $c(S)$ от S и заключается отличие данной модели от классической [2].

3. Происходят страховые выплаты. Будем считать, что поток страховых выплат – это пуассоновский поток постоянной интенсивности λ и сами страховые выплаты ξ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с экспоненциальным распределением

$$p_\xi(x) = \frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right), \quad x \geq 0. \qquad (1)$$

Кроме того, будем считать, что достижение порога $S(t) = 0$ не приводит к разорению фонда и даже при $S(t) < 0$ он продолжает функционировать, только происходят задержки по страховым выплатам.

Релейно-гистерезисное управление капиталом

Рассмотрим следующий вариант управления капиталом фонда, который можно назвать релейно-гистерезисным управлением. Он состоит в следующем.

Устанавливаются два пороговых значения величины капитала – S_1 и S_2. При $S < S_1$ выплаты на социальные нужды не производятся, то есть всегда $c = c_0$. При $S > S_2$ всегда производятся выплаты со скоростью $c^* = c_0 - c_1$, то есть $c(S) = c_1$. А вот в области $S_1 < S < S_2$ выплаты производятся или нет в зависимости от того, как траектория $S(t)$ вошла в эту область: если $S(t)$ вошла через границу S_1, то берется $c = c_0$, если же она вошла через границу S_2, то берется $c(S) = c_1$. Другими словами, выплаты на социальные нужды **начинаются**, когда впервые выполнится неравенство $S(t) \geq S_2$, и **заканчиваются**, когда станет $S(t) < S_1$. Область $S_1 < S < S_2$ и представляет собой гистерезис в управлении выплатами на социальные нужды.

Стационарная плотность вероятностей величины капитала

Найдем плотность вероятностей $p(S)$ величины капитала S во всех этих областях.

Начнём с области $S > S_2$. В ней плотность вероятностей $p(S)$ будем обозначать как $p_2(S)$. Заметим, что в этой области всегда $c(S) = c_1$.

Выведем явное выражение $p_2(S)$. Пусть мы имеем некоторый момент времени t. Тогда получить значение капитала, равное S, можно двумя путями.

1. В момент времени $t - \Delta t$ значение капитала было равно $S - c_1\Delta t$, и за интервал времени Δt не было страховых выплат. Вероятность этой ситуации равна $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$.

2. С вероятностью $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ за интервал времени Δt пришлось сделать страховую выплату, равную x, так что в момент времени $t - \Delta t$ значение капитала было равно $S - c_1\Delta t + x$.

Поэтому, используя идеологию вывода обратных уравнений Колмогорова для марковских процессов [3], можем записать:

$$p_2(S) = p_2(S - c_1\Delta t)(1 - \lambda\Delta t) + \lambda\Delta t\int_0^\infty p_2(S + x)p_\xi(x)dx + o(\lambda\Delta t). \qquad (2)$$

Разложим $p_2(S - c_1\Delta t)$ в ряд Тейлора

$$p_2(S - c_1\Delta t) = p_2(S) - p_2'(S)c_1\Delta t + o(\Delta t)$$

и подставим в (2)

$$p_2(S) = (p_2(S) - p_2'(S)c_1\Delta t)(1 - \lambda\Delta t) + \lambda\Delta t\int_0^\infty p_2(S + x)p_\xi(x)dx + o(\lambda\Delta t).$$

Сокращая $p_2(S)$, деля на Δt и устремляя Δt к нулю, получим уравнение

$$c_1 p_2'(S) + \lambda p_2(S) = \lambda\int_0^\infty p_2(S + x)p_\xi(x)dx. \qquad (3)$$

Рассмотрим лишь экспоненциальные страховые выплаты. Тогда получаем

$$\int_0^{\infty} p_2(S+x)p_{\xi}(x)dx = \int_0^{\infty} p_2(S+x)\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\exp\left(\frac{S}{a}\right)\int_S^{\infty} p_2(y)\mathrm{e}^{-y/a}\,dy,$$

и уравнение (3) приобретает вид

$$c_1 p_2'(S)\mathrm{e}^{-S/a} + \lambda p_2(S)\mathrm{e}^{-S/a} = \frac{\lambda}{a}\int_S^{\infty} p_2(y)\mathrm{e}^{-y/a}\,dy.$$

Дифференцируя по S и сокращая сомножитель $\exp(-S/a)$, получим следующее уравнение для $p_2(S)$:

$$p_2''(S) + \frac{a\lambda - c_1}{ac_1}p_2'(S) = 0. \tag{4}$$

Обозначим для краткости

$$\frac{a\lambda - c_1}{ac_1} = \kappa_1.$$

Заметим, что $\kappa_1 > 0$. Тогда общее решение уравнения (4) имеет вид

$$p_2(S) = C_2\,\mathrm{e}^{-\kappa_1 S} + D_2. \tag{5}$$

Подстановкой этого решения обратно в уравнение (3) можио убедиться в том, что оно удовлетворяет ему при любых C_2 и D_2.

Учитывая естественное условие $\lim\limits_{S\to\infty} p_2(S) = 0$, получаем, что $D_2 = 0$. Для удобства дальнейших записей возьмём C_2 в виде $C_2 = C\cdot\mathrm{e}^{\kappa_1 S_2}$. Тогда окончательно выражение для $p_2(S)$ примет вид

$$p_2(S) = C\cdot\mathrm{e}^{-\kappa_1(S-S_2)},\quad S > S_2. \tag{6}$$

Заметим, что $p_2(S)$ монотоино убывает с ростом S.

Перейдём теперь к рассмотрению самой сложной области $S_1 < S < S_2$. Здесь возможны два варианта: $c = c_0$ или $c = c_1$.

Рассмотрим сначала случай $c = c_0$. Соответствующую этому плотность вероятностей будем обозначать $p_{01}(S)$.

Снова рассмотрим бесконечно малый интервал времени Δt. Однако, в отличие от предыдущего случая, значение $c = c_0$ сохранится лишь в том случае, когда скачки вниз осуществляются из области $S_1 < S < S_2$, так как при скачках из области $S > S_2$ устанавливается значение $c = c_1$. Поэтому величина $S + x$ должна быть меньше S_2, то есть $S + x < S_2$, $x < S_2 - S$. Тогда рассмотрение переходов за интервал времени Δt приводит к уравнению

$$p_{01}(S) = p_{01}(S - c_0\Delta t)(1 - \lambda\Delta t) + \lambda\Delta t \int_0^{S_2 - S} p_{01}(S + x)p_\xi(x)dx + o(\Delta t).$$

Теми же рассуждениями, что и выше, легко показывается, что $p_{01}(S)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравиеиию

$$c_0 p'_{01}(S) + \lambda p_{01}(S) = \lambda \int_0^{S_2 - S} p_{01}(S + x)p_\xi(x)dx. \tag{7}$$

Для экспоненциально распределенных страховых выплат тем же приемом, что и выше, можно свести это уравнение к дифференциальному

$$p''_{01}(S) - \frac{c_0 - a\lambda}{ac_0} p'_{01}(S) = 0. \tag{8}$$

Обозначим для краткости

$$\frac{c_0 - a\lambda}{ac_0} = \kappa_0.$$

Заметим, что $\kappa_0 > 0$. Тогда общее решение уравнения (8) имеет вид

$$p_{01}(S) = D_{01} - C_{01}\,\mathrm{e}^{\kappa_0 S}. \tag{9}$$

Знак «минус» перед вторым слагаемым взят для удобства окончательного результата.

Однако теперь D_{01} и C_{01} не могут быть произвольными ввиду того, что в интеграле уравнения (7) в верхнем пределе стоит $S_2 - S$, а не $+\infty$. Для нахождеиия связи между ними подставим общее решение (9) обратно в уравнение (7). Имеем

$$p'_{01}(S) = -C_{01}\frac{c_0 - \lambda a}{ac_0}e^{\kappa_0 S},$$

$$\int_0^{S_2-S} D_{01}\cdot\frac{1}{a}e^{-x/a}\,dx = D_{01}\left(1 - e^{-S_2/a+S/a}\right),$$

$$\int_0^{S_2-S}\exp\left(\frac{c_0-\lambda a}{ac_0}(S+x)\right)\cdot\frac{1}{a}e^{-x/a}\,dx = \exp\left(\frac{c_0-\lambda a}{ac_0}S\right)\cdot\frac{1}{a}\int_0^{S_2-S}\exp\left(-\frac{\lambda}{c_0}x\right)dx =$$

$$= \frac{c_0}{\lambda a}\left[e^{\kappa_0 S} - e^{-\lambda S_2/c_0}\cdot e^{S/a}\right].$$

Подставляя все эти выражения в уравнение (7), после приведения подобных получим

$$C_{01}\frac{c_0}{a}e^{-\lambda S_2/c_0}\cdot e^{S/a} - D_{01}\lambda e^{-S_2/a}\cdot e^{S/a} = 0,$$

и для тождественного равенства этого выражения нулю надо, чтобы коэффициент при $e^{S/a}$ обращался в нуль. Отсюда находится D_{01} через C_{01}

$$D_{01} = C_{01}\cdot\frac{c_0}{\lambda a}e^{\kappa_0 S_2}, \tag{10}$$

так что $p_{01}(S)$ имеет вид

$$p_{01}(S) = C_{01}\left(\frac{c_0}{\lambda a}e^{\kappa_0 S_2} - e^{\kappa_0 S}\right). \tag{11}$$

Заметим, что так как $c_0 > \lambda a$, то $c_0/\lambda a > 1$. Далее, так как $\kappa_0 > 0$ и $S_2 > S_1$, то $e^{\kappa_0 S_2} > e^{\kappa_0 S}$. Поэтому выражение, стоящее в скобках, положительно и должно быть $C_{01} > 0$

Отметим еще, что $p_{01}(S)$ монотонно убывает с ростом S. Сам коэффициент C_{01} будет определён позднее.

Найдём теперь плотность вероятностей величины капитала S в области $S_1 < S < S_2$, но при $c = c_1$. Обозначать её будем через $p_{11}(S)$.

Рассматривая переходы за интервал времени Δt, можем записать соотношение:

$$p_{11}(S) = (1 - \lambda\Delta t)p_{11}(S - c_1\Delta t) +$$

$$+\lambda\Delta t\left[\int\limits_0^{S_2-S} p_{11}(S+x)p_\xi(x)dx + \int\limits_{S_2-S}^{\infty} p_2(S+x)p_\xi(x)dx\right] + o(\Delta t),$$

откуда обычным образом получаем

$$c_1 p'_{11}(S) + \lambda p_{11}(S) = \lambda\left[\int\limits_0^{S_2-S} p_{11}(S+x)p_\xi(x)dx + \int\limits_{S_2-S}^{\infty} p_2(S+x)p_\xi(x)dx\right]. \qquad (12)$$

Для экспоненциально распределённых выплат теми же рассуждениями, что и выше, получим

$$p''_{11}(S) + \kappa_1 p'_{11}(S) = 0, \qquad (13)$$

откуда общее решение для $p_{11}(S)$ имеет вид

$$p_{11}(S) = -C_{11}\,e^{-\kappa_1 S} + D_{11}, \qquad (14)$$

с неизвестными пока константами C_{11} и D_{11}.

Для их определения используем сначала условие на границе $S = S_1$. Заметим, что пересечение этой границы траекторией процесса $S(t)$ снизу, то есть из области $S < S_1$, даёт значение $c = c_0$, а не $c = c_1$. Поэтому эта граница может быть пересечена только сверху. Но тогда, рассматривая интервал времени Δt, получим

$$p_{11}(S_1) = \lambda\Delta t\left[\int\limits_0^{S_2-S_1} p_{11}(S+x)p_\xi(x)dx + \int\limits_{S_2-S_1}^{\infty} p_2(S+x)p_\xi(x)dx\right] + o(\Delta t),$$

и, устремляя Δt к нулю, имеем условие

$$p_{11}(S_1) = 0. \qquad (15)$$

Отсюда $D_{11} = C_{11}\,e^{-\kappa_1 S_1}$ и

$$p_{11}(S) = C_{11}\left(e^{-\kappa_1 S_1} - e^{-\kappa_1 S}\right). \qquad (16)$$

Так как $S > S_1$, то $e^{-\kappa_1 S_1} > e^{-\kappa_1 S}$ и выражение, стоящее в скобках, положительно. Поэтому $C_{11} > 0$. Заметим, что $p_{11}(S)$ монотонно возрастает с ростом S.

Для нахождения связи между C_{11} и C_2 решение (16) надо подставить обратно в интегродифференциальное уравнение (12). Имеем

$$p'_{11}(S) = C_{11}\kappa_1 e^{-\kappa_1 S},$$

$$\int_{S_2-S}^{\infty} p_2(S+x)p_\xi(x)dx = C_2 \int_{S_2-S}^{\infty} \exp\left(\frac{c_1-\lambda a}{ac_1}(S+x)\right)\cdot\frac{1}{a}e^{-x/a}\,dx =$$

$$= C_2 e^{-\kappa_1 S}\cdot\frac{1}{a}\int_{S_2-S}^{\infty}\exp\left(-\frac{\lambda}{c_1}x\right)dx = C_2\frac{c_1}{\lambda a}\exp\left(-\frac{\lambda}{c_1}S_2\right)\cdot e^{S/a}.$$

Вычислим теперь $\int_0^{S_2-S} p_{11}(S+x)p_\xi(x)dx$. Первое слагаемое даёт

$$C_{11}e^{-\kappa_1 S_1}\int_0^{S_2-S}\frac{1}{a}e^{-x/a}\,dx = C_{11}e^{-\kappa_1 S_1} - C_{11}e^{-\kappa_1 S_1 - S_2/a}\cdot e^{S/a}.$$

Второе слагаемое

$$-C_{11}\int_0^{S_2-S}\exp\left(\frac{c_1-\lambda a}{ac_1}(S+x)\right)\frac{1}{a}e^{-x/a}\,dx = -C_{11}e^{-\kappa_1 S}\cdot\frac{1}{a}\int_0^{S_2-S}\exp\left(-\frac{\lambda}{c_1}x\right)dx =$$

$$= -C_{11}\frac{c_1}{\lambda a}e^{-\kappa_1 S} + C_{11}\frac{c_1}{\lambda a}\exp\left(-\frac{\lambda}{c_1}S_2\right)e^{S/a}.$$

После подстановки этих соотношений в (12) и приведения подобных получаем условие

$$-\lambda C_{11}e^{-\kappa_1 S_1} + C_{11}\frac{c_1}{a}e^{-\lambda S_2/c_1} + C_2\frac{c_1}{a}e^{-\lambda S_2/c_1} = 0,$$

откуда и находим связь C_2 и C_{11}:

$$C_2 = C_{11}\left[\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1(S_2-S_1)} - 1\right],$$

или

$$C_{11} = C_2 \Big/ \left[\frac{\lambda a}{c_1} e^{\kappa_1 (S_2 - S_1)} - 1 \right] = C e^{\kappa_1 S_2} \Big/ \left[\frac{\lambda a}{c_1} e^{\kappa_1 (S_2 - S_1)} - 1 \right]. \qquad (17)$$

Заметим, что выражение, стоящее в квадратных скобках, больше нуля, так как $\lambda a > c_1$, и так как $\kappa_1 > 0$ и $S_2 > S_1$, то $\exp(\kappa_1(S_2 - S_1)) > 1$.

Итак,

$$p_{11}(S) = C \frac{e^{\kappa_1(S_2 - S_1)} - e^{\kappa_1(S_2 - S)}}{\frac{\lambda a}{c_1} e^{\kappa_1(S_2 - S_1)} - 1}, \quad S_1 < S < S_2. \qquad (18)$$

Для нахождения константы C_{01} рассмотрим условие на границе $S = S_2$. При $S > S_2$ мы имеем $p_2(S)$. При $S < S_2$ пересечь границу могут процессы с $c = c_0$ и $c = c_1$. Поэтому, рассматривая интервал Δt, получим

$$p_2(S_2) = (1 - \lambda \Delta t)[p_{01}(S_2 - c_0 \Delta t) + p_{11}(S_2 - c_1 \Delta t)] + O(\Delta t), \qquad (19)$$

откуда после предельного перехода $\Delta t \to 0$, получим условие

$$p_2(S_2) = p_{01}(S_2) + p_{11}(S_2). \qquad (20)$$

Подстановка решений даёт

$$C = C \frac{e^{\kappa_1(S_2 - S_1)} - 1}{\frac{\lambda a}{c_1} e^{\kappa_1(S_2 - S_1)} - 1} + C_{01} \left(\frac{c_0}{\lambda a} - 1 \right) e^{\kappa_0 S_2}, \qquad (21)$$

откуда и находится константа C_{01}:

$$C_{01} = C \frac{\left(\frac{\lambda a}{c_1} - 1 \right) e^{\kappa_1(S_2 - S_1)} \cdot e^{-\kappa_0 S_2}}{\left(\frac{\lambda a}{c_1} e^{\kappa_1(S_2 - S_1)} - 1 \right) \left(\frac{c_0}{\lambda a} - 1 \right)}, \qquad (22)$$

и окончательно выражение для $p_{01}(S)$ принимает вид

$$p_{01}(S) = C \frac{\left(\frac{\lambda a}{c_1} - 1 \right) \left(\frac{c_0}{\lambda a} - e^{-\kappa_0(S_2 - S)} \right)}{\left(\frac{\lambda a}{c_1} e^{\kappa_1(S_2 - S_1)} - 1 \right) \left(\frac{c_0}{\lambda a} - 1 \right)} \cdot e^{\kappa_1(S_2 - S_1)}. \qquad (23)$$

Рассмотрим, наконец, область $S < S_1$, плотность вероятностей капитала в которой будем обозначать $p_0(S)$. Теми же рассуждениями, что и выше, можно получить, что в ней $p_0(S)$ имеет вид

$$p_0(S) = C_0\,\mathrm{e}^{\kappa_0 S} + D_0. \tag{24}$$

Но так как при $S \to -\infty$ $p_0(S)$ должна стремиться к нулю, то следует положить $D_0 = 0$. Для удобства запишем $p_0(S)$ в виде

$$p_0(S) = \overline{C}_0\,\mathrm{e}^{\kappa_0 (S - S_1)} \tag{25}$$

и рассмотрим границу $S = S_1$. Тогда получаем

$$p_{01}(S_1) = (1 - \lambda\Delta t)p_0(S_1 - c_0\Delta t) + O(\Delta t),$$

откуда после предельного перехода $\Delta t \to 0$ находим условие сшивания на границе $S = S_1$:

$$p_0(S_1) = p_{01}(S_1). \tag{26}$$

Оно дает нам $\overline{C}_0$:

$$\overline{C}_0 = C\frac{\left(\dfrac{\lambda a}{c_1} - 1\right)\left(\dfrac{c_0}{\lambda a} - \mathrm{e}^{-\kappa_0(S_2 - S_1)}\right)}{\left(\dfrac{\lambda a}{c_1}\mathrm{e}^{\kappa_1(S_2 - S_1)} - 1\right)\left(\dfrac{c_0}{\lambda a} - 1\right)} \cdot \mathrm{e}^{\kappa_1(S_2 - S_1)}.$$

Обозначая $S_2 - S_1$ через ΔS, получаем окончательный результат

$$p_0(S) = C\frac{\left(\dfrac{\lambda a}{c_1} - 1\right)\left(\dfrac{c_0}{\lambda a} - \mathrm{e}^{-\kappa_0\Delta S}\right)}{\left(\dfrac{\lambda a}{c_1}\mathrm{e}^{\kappa_1\Delta S} - 1\right)\left(\dfrac{c_0}{\lambda a} - 1\right)}\mathrm{e}^{\kappa_1\Delta S}\cdot\mathrm{e}^{\kappa_0(S - S_1)}, \quad S < S_1,$$

$$p_{01}(S) = C\frac{\left(\dfrac{\lambda a}{c_1} - 1\right)\left(\dfrac{c_0}{\lambda a} - \mathrm{e}^{-\kappa_0(S_2 - S)}\right)}{\left(\dfrac{\lambda a}{c_1}\mathrm{e}^{\kappa_1(S_2 - S_1)} - 1\right)\left(\dfrac{c_0}{\lambda a} - 1\right)}\cdot\mathrm{e}^{\kappa_1\Delta S}, \quad S_1 < S < S_2, \tag{27}$$

$$p_{11}(S) = C\frac{e^{\kappa_1(S_2-S_1)} - e^{\kappa_1(S_2-S)}}{\frac{\lambda a}{c_1} e^{\kappa_1(S_2-S_1)} - 1}, \quad S_1 < S < S_2,$$

$$p_2(S) = C \cdot e^{-\kappa_1(S-S_2)}, \quad S > S_2.$$

Осталось получить явное выражение для константы C. Оно находится из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{S_1} p_0(S)dS + \int_{S_1}^{S_2} [p_{01}(S) + p_{11}(S)]dS + \int_{S_2}^{\infty} p_2(S)dS = 1. \quad (28)$$

Вычисляя входящие сюда интегралы, получнм следующее уравнение для S:

$$C \cdot \left[\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_0} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda a}{c_1} - 1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a} - e^{-\kappa_0 \Delta S}\right)}{\left(\frac{\lambda a}{c_1} e^{\kappa_1 \Delta S} - 1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a} - 1\right)} \cdot e^{\kappa_1 \Delta S} + \frac{\left(\frac{\lambda a}{c_1} - 1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a} \Delta S - \frac{1}{\kappa_0}\left(1 - e^{-\kappa_0 \Delta S}\right)\right)}{\left(\frac{\lambda a}{c_1} e^{\kappa_1 \Delta S} - 1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a} - 1\right)} \cdot e^{\kappa_1 \Delta S} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{\kappa_1 \Delta S} \Delta S - \frac{1}{\kappa_1}\left(e^{\kappa_1 \Delta S} - 1\right)}{\frac{\lambda a}{c_1} e^{\kappa_1 \Delta S} - 1} \right] = 1. \quad (29)$$

Отсюда легко определить C, по крайней мере численно.

Вероятностные характеристики

Вычислим две наиболее важные вероятностные характеристики деятельности фонда.

<u>Вероятность неплатежеспособности.</u>

При выполнении условия $S < 0$ фонд вынужден прекратить выплаты по страховым случаям. Вероятность этого равна

$$\pi_0 = \int_{-\infty}^{0} p_0(S)dS = C\cdot\frac{\left(\frac{\lambda a}{c_1}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-e^{-\kappa_0\Delta S}\right)}{\kappa_0\left(\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1\Delta S}-1\right)\left(\frac{c_0}{\lambda a}-1\right)}\cdot e^{\kappa_1\Delta S-\kappa_0 S_1}. \tag{30}$$

<u>Вероятность выплаты социальных пособий.</u>

Фонд производит выплаты на социальные нужды при выполнении условия $S > S_0$. Вероятность этого равна

$$\pi_1 = \int_{S_2}^{\infty} p_2(S)dS + \int_{S_1}^{S_2} p_{11}(S)dS = C\left[\frac{1}{\kappa_1}+\frac{e^{\kappa_1\Delta S}\Delta S-\frac{1}{\kappa_1}\left(e^{\kappa_1\Delta S}-1\right)}{\frac{\lambda a}{c_1}e^{\kappa_1\Delta S}-1}\right]. \tag{31}$$

Зная C, эти величины можно найти численно. Задаваясь величиной ΔS, а также величинами π_0 и π_1, из уравнений (30) и (31) можно найти величины c_1 и S_1.

Релейное управление

Рассмотрим подробнее частный случай, когда $S_1 = S_2 = S_0$, то есть когда гистерезис в управлении отсутствует. В этом случае $\Delta S = 0$ и остаются только $p_0(S)$ и $p_2(S)$. Легко видеть, что общая плотность вероятностей капитала фонда в этом случае имеет вид

$$p(S) = \begin{cases} C\cdot\exp\left(-\frac{\lambda a - c_1}{c_1 a}(S-S_0)\right), & \text{при } S > S_0, \\ C\cdot\exp\left(\frac{c_0-\lambda a}{c_0 a}(S-S_0)\right), & \text{при } S < S_0. \end{cases} \tag{32}$$

Константу C найдём из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(S)dS = \int_{-\infty}^{0} p_0(S)dS + \int_{0}^{\infty} p_1(S)dS = 1.$$

Вычисляя входящие сюда интегралы, получаем окончательно

$$C = \frac{(\lambda a - c_1)(c_0-\lambda a)}{\lambda a^2(c_0-c_1)} > 0. \tag{33}$$

Тем самым $p(S)$ определена полностью.

Характеристики капитала

Найдем математическое ожидание величины капитала фонда в стационарном режиме. Представляя S в виде $S = S_0 + \eta$, можем записать:

$$p(\eta) = \begin{cases} C \cdot \exp\left(-\dfrac{\lambda a - c_1}{c_1 a}\eta\right), & \text{при} \quad \eta > 0, \\ C \cdot \exp\left(\dfrac{c_0 - \lambda a}{c_0 a}\eta\right), & \text{при} \quad \eta < 0. \end{cases}$$

Поэтому математическое ожидание величины η равно

$$M\{\eta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta p(\eta) d\eta = C\left[\frac{(ac_1)^2}{(a\lambda - c_1)^2} - \frac{(ac_0)^2}{(c_0 - a\lambda)^2}\right].$$

Подставляя сюда явное выражение для C и упрощая, получаем

$$M\{\eta) = \frac{a(2c_0c_1 - \lambda a(c_0 + c_1))}{(a\lambda - c_1)(c_0 - \lambda a)} \tag{34}$$

и $M\{S\} = S_0 + M\{\eta\}$.

Вероятностые характеристики

Фонд производит выплаты на социальные нужды при выполнении условия $S > S_0$. Вероятность этого равна

$$\pi_1 = P\{S > S_0\} = C \cdot \int_{S_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{a\lambda - c_1}{ac_1}(S - S_0)\right) dS = C \cdot \frac{ac_1}{a\lambda - c_1}.$$

Подставляя сюда явное выражение для C, получаем

$$\pi_1 = \frac{(c_0 - \lambda a)c_1}{\lambda a(c_0 - c_1)}. \tag{35}$$

При выполнении условия $S < 0$ фонд вынужден прекратить выплаты по страховым случаям. Вероятность этого равна

$$\pi_0 = P\{S < 0\} = C \int_{-\infty}^{0} \exp\left(\frac{c_0 - \lambda a}{c_0 a}(S - S_0)\right) dS = C \cdot \frac{c_0 a}{c_0 - \lambda a} \exp\left(-\frac{c_0 - \lambda a}{c_0 a} S_0\right).$$

Подставляя сюда явное выражение для C, получаем

$$\pi_0 = \frac{c_0(\lambda a - c_1)}{\lambda a(c_0 - c_1)} \exp\left(- \frac{c_0 - \lambda a}{c_0 a} S_0 \right). \tag{36}$$

Одним из возможных вариантов управления капиталом фонда является тот, когда c_1 и S_0 выбираются из условия, чтобы π_0 и π_1 приняли некоторые заранее выбранные значения (естественно, удовлетворяющие условию $\pi_0 + \pi_1 < 1$). Тогда уравнения (35) и (36) превращаются в систему уравнений для определения величин c_1 и S_0.

Из (35) можно получить значение c_1:

$$c_1 = \frac{\pi_1 \lambda a c_0}{c_0 - (1 - \pi_1)\lambda a}. \tag{37}$$

Зная c_1, можно найти и величину S_0:

$$S_0 = \frac{c_0 a}{c_0 - \lambda a} \cdot \ln\left[\frac{c_0(\lambda a - c_1)}{\pi_0(\lambda a - c_1)} \right]. \tag{38}$$

Тем самым параметры c_1 и S_0 определяются полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М.: Мнр, 1971. 265с.
2. Panjer H.H., Willmot G.E. Insurance Risk Models. Society of Actuaries, 1992. 442 p.
3. Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск.: Изд-во Том. ун-та, 1988. 174 с.