УДК 517.54

А.Н. Сыркашев

О ВАРИАЦИОННОМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ МЕТОДАХ В ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрены взаимосвязи вариационного и параметрического методов, выведены вариационные формулы в различных классах однолистных функций, приведены случаи интегрирования уравнения Левнера – Куфарева.

Метод внутренних вариаций Шиффера – Голузина и метод параметрических представлений Левнера играют значительную роль в геометрической теории функций комплексного переменного. Они занимают видное место в литературе [1 – 6] и составляют содержание многочисленных статей с исследованием и решением экстремальных задач теории однолистных отображений. Были предложены различные варианты объединения этих методов, существенно обогатившие практику решения экстремальных задач.

Данная работа касается взаимосвязей рассматриваемых методов с подходом к затрагиваемым вопросам по возможности с наиболее простых позиций. Известные теоремы получают новые варианты доказательств, а известные формулы – новые выводы. Вниманию читателя предоставляются на этом фоне отдельные оригинальные факты как научного, так и научно-методического характера. Используемая система обозначений позволяет воспринимать весь материал как единое целое, хотя и не всегда повторяет обозначения оригинальных источников.

В §1 приведена теорема Г.М. Голузина с доказательством К. Поммеренке [7]. Как следствие, представлена вариационная формула Шиффера – Голузина в классе S голоморфных однолистных в круге $E=\{z: |z| < 1\}$ функций $f(z)$, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, дан новый вывод вариационной формулы в подклассе S^* класса S звездообразных функций $f(z)$ (т.е. таких, что $f(E)$ является областью, звездообразной относительно нуля), а также получена одна вариационная формула в классе S.

В §2 представлено уравнение Левнера – Куфарева, доказана теорема о существовании и свойствах его решения.

В §3 приведены различные случаи интегрирования уравнения Левнера – Куфарева: как классические (формула Базилевича [8], интегральное представление класса S^*), так и оригинальные (при некоторых частных видах уравнения Левнера – Куфарева).

В §4 посредством уравнения Левнера – Куфарева получены вариационные формулы в плотном подклассе класса S функций, предельных для решений этого уравнения.

В §5 приведены варианты объединения рассматриваемых методов, предложенные Н.А. Лебедевым [9] и П.П. Куфаревым [10], а также одна вариационная формула М. Шиффера [11].

§1. ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ В КЛАССЕ *S*

Метод внутренних вариаций был предложен М. Шиффером в 1943 году. Позднее Г.М. Голузин представил свой вариант этого метода, получив вариационные формулы при меньших предположениях об отображениях. Представленная ниже вариационная формула является основной в методе Г.М. Голузина. К. Поммеренке упростил доказательство теоремы 1.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$, $0 \in D$, – односвязная область в w-плоскости, и $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, – функция, однолистно и конформно отображающая круг E на D. Пусть $D(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, – семейство областей, сходящееся к D как к ядру относительно точки $w = 0$ при $\varepsilon \to 0$. Функции $w = f_\varepsilon(z)$, $f_\varepsilon(0) = 0$, $f_\varepsilon'(0) > 0$, однолистно и конформно отображающие E на $D(\varepsilon)$, согласно теореме Каратеодори о ядре, равномерно внутри E сходятся к $f(z)$ при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим через $K(r, R)$, $0 < r < R$, кольцо $\{z: r < |z| < R\}$. Предположим, что функция $w = g(z, \varepsilon)$ при каждом фиксированном ε голоморфная и однолистная по z в кольце $K(r, 1)$, во-первых, отображает это кольцо на двусвязную область $\Delta(\varepsilon)$, которая при объединении с ограниченной компонентой дополнения совпадает с $D(\varepsilon)$, и, во-вторых, имеет разложение по степеням ε вида

$$g(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon z f'(z)\, q(z) + \gamma(z, \varepsilon),$$

где $\gamma(z, \varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри $K(r, 1)$ и $q(z)$ – голоморфная в $K(r, 1)$ функция, имеющая разложение в ряд Лорана вида $q(z) = T(z) + S(z)$, где

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}, \quad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n .$$

Теорема 1. В классе S имеет место вариационная формула

$$f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon z f'(z)\left[q(z) - T(z) + \overline{T\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\overline{c}_0 - c_0}{2} - \frac{f(z)}{z f'(z)} \frac{c_0 + \overline{c}_0}{2} \right] + o(z,\varepsilon). \qquad (1)$$

Доказательство. Функция $\varphi(z, \varepsilon)$, неявно определяемая при фиксированном ε уравнением

$$g(z, \varepsilon) = f_\varepsilon(\varphi(z, \varepsilon)), \; z \in K(r, 1),$$

голоморфна и однолистна. При каждом ε она продолжается на окружность $\{z: |z| = 1\}$ и переводит ее в единичную же окружность. По принципу симметрии Римана – Шварца $\varphi(z, \varepsilon)$ голоморфно продолжается в кольцо $K(r, 1/r)$. В этом кольце при соответствующем выборе ветви логарифма функция

$$\psi(z,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{\varphi(z,\varepsilon)}{z}$$

голоморфна и раскладывается в ряд Лорана

$$\psi(z,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}(\varepsilon)}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\varepsilon) z^n .$$

Так как $\operatorname{Re} \psi(z, \varepsilon) = 0$ на единичной окружности, то

$$\operatorname{Re} b_0(\varepsilon) = 0, \quad b_n(\varepsilon) = \overline{-b_{-n}(\varepsilon)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Введем функции

$$p(z,\varepsilon) = \frac{f_\varepsilon(z) - f(z)}{\varepsilon z f'(z)},$$

$$q(z,\varepsilon) = \frac{g(z,\varepsilon) - f(z)}{\varepsilon z f'(z)},$$

голоморфные по z соответственно в E, $K(r, 1)$ при фиксированном ε, и функцию

$$h(z,\varepsilon)=\frac{\varepsilon z\psi(z,\varepsilon)f'(z)}{g(z,\varepsilon)-f_\varepsilon(z)}-1,$$

голоморфную в $K(r, 1)$ при фиксированном ε. Нетрудно проверить, что введенные функции связаны между собой равенством

$$\psi(z,\varepsilon)=[q(z,\varepsilon)-p(z,\varepsilon)][1+h(z,\varepsilon)]$$

и что $\lim\limits_{\varepsilon\to0}h(z,\varepsilon)=0$ равномерно внутри $K(r, 1)$. Очевидно,

$$p(z,\varepsilon)=q(z,\varepsilon)-\psi(z,\varepsilon)+[q(z,\varepsilon)-p(z,\varepsilon)]h(z,\varepsilon).$$

Найдем предел при $\varepsilon\to0$ каждого слагаемого в сумме, стоящей в правой части равенства.

Легко увидеть, что $\lim\limits_{\varepsilon\to0}q(z,\varepsilon)=q(z)$ равномерно внутри $K(r, 1)$.

Фиксируем $\rho^2\in(r,1)$. Тогда $r<\rho^2<\rho<1$. Умножим почленно последнее равенство на $z^{n-1}/2\pi i$, $n = 0, 1, \ldots$ и, переставив слагаемые, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{\psi(z,\varepsilon)}{z^{1-n}}+\frac{1}{2\pi i}\frac{p(z,\varepsilon)}{z^{1-n}}-\frac{1}{2\pi i}\frac{q(z,\varepsilon)}{z^{1-n}}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{q(z,\varepsilon)-p(z,\varepsilon)}{z^{1-n}}h(z,\varepsilon).$$

Интегрируя полученное равенство по окружности $\gamma=\{z\colon |z|=\rho^2\}$ и оценивая модуль левой части, приходим к неравенству

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\psi(z,\varepsilon)}{z^{1-n}}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{p(z,\varepsilon)}{z^{1-n}}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{q(z,\varepsilon)}{z^{1-n}}dz\right|\le$$
$$\le\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{|q(z,\varepsilon)-p(z,\varepsilon)|}{|z|^{1-n}}|h(z,\varepsilon)|ds\le M(\varepsilon)\rho^{2n}\lambda_1(\varepsilon),$$

где $$M(\varepsilon)=\max_{\rho^2\le|z|\le\rho}|q(z,\varepsilon)-p(z,\varepsilon)|,$$
$$\lambda_1(\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|h\left(\rho^2e^{i\theta},\varepsilon\right)\right|d\theta,$$

причем $\lambda_1(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to0$.

Пользуясь интегральной теоремой Коши ($n = 1,2,\ldots$) и интегральной формулой Коши ($n = 0$), находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{p(z,\varepsilon)}{z^{1-n}}dz=\begin{cases}0, & n=1,2,...,\\ A(\varepsilon), & n=0,\end{cases}$$

где $$A(\varepsilon)=\lim_{z\to0}p(z,\varepsilon)=\frac{f'(0,\varepsilon)-f'(0)}{\varepsilon f'(0)}$$

и вещественно.

Известно, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\psi(z,\varepsilon)}{z^{1-n}}dz=b_{-n}(\varepsilon)=-\overline{b_n(\varepsilon)},\qquad n=0,1,...,$$
$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{q(z,\varepsilon)}{z^{1-n}}dz=c_{-n},\qquad n=0,1,...\ .$$

Значит при $n = 1, 2, \ldots$

$$\left|\overline{b_n(\varepsilon)}+c_{-n}\right|\le M(\varepsilon)\rho^{2n}\lambda_1(\varepsilon),$$

а при $n = 0$

$$\left|\overline{b_0(\varepsilon)}-A(\varepsilon)+c_0\right|\le M(\varepsilon)\lambda_1(\varepsilon).$$

Поскольку $\operatorname{Re} b_0(\varepsilon)=\operatorname{Im}A(\varepsilon)=0$, то

$$\left|\overline{b_0(\varepsilon)}+A(\varepsilon)-\bar c_0\right|\le M(\varepsilon)\lambda_1(\varepsilon).$$

Легко увидеть, что

$$\left|\overline{b_0(\varepsilon)}+\frac{c_0-\bar c_0}{2}\right|\le M(\varepsilon)\lambda_1(\varepsilon).$$

Переходим к оценке разности

$$R(z,\varepsilon)=\psi(z,\varepsilon)-\left[T(z)+\frac{c_0-\bar c_0}{2}-\overline{T\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right]=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n(\varepsilon)+\overline{c_{-n}}\right)z^n+b_0(\varepsilon)-\frac{c_0-\bar c_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\overline{b_n(\varepsilon)}+c_{-n}\right)}{z^n}$$

на окружности $\{z\colon |z|=\rho\}$. Имеем

$$|R(z,\varepsilon)|\le M(\varepsilon)\lambda_1(\varepsilon)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{2n}\left(\rho^n+\rho^{-n}\right)\right]<$$
$$<\frac{1+\rho}{1-\rho}M(\varepsilon)\lambda_1(\varepsilon).$$

Эта оценка позволяет найти предел $R(z,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to0$. Используя неравенство

$$\max_{\rho^2\le|z|\le\rho}|q(z,\varepsilon)-p(z,\varepsilon)|\le\max_{\rho^2\le|z|\le\rho}|\psi(z,\varepsilon)|+$$
$$+\max_{\rho^2\le|z|\le\rho}|q(z,\varepsilon)-p(z,\varepsilon)|\max_{\rho^2\le|z|\le\rho}|h(z,\varepsilon)|,$$

находим, что

$$M(\varepsilon)\le K(\varepsilon)+M(\varepsilon)\lambda_2(\varepsilon),$$

где

$$K(\varepsilon)=\max_{\rho^2\le|z|\le\rho}|\psi(z,\varepsilon)|<\infty,$$
$$\lambda_2(\varepsilon)=\max_{\rho^2\le|z|\le\rho}|h(z,\varepsilon)|,$$

и $\lambda_2(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to0$ равномерно на γ. Таким образом, $M(\varepsilon)$ ограничена при $\varepsilon\to0$. Значит $\lim\limits_{\varepsilon\to0}R(z,\varepsilon)=0$ равномерно внутри $K(r, 1)$, то есть

$$\lim_{\varepsilon\to0}\psi(z,\varepsilon)=T(z)+\frac{c_0-\bar c_0}{2}-\overline{T\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$$

равномерно внутри $K(r, 1)$.

В итоге получаем

$$p(z)=\lim_{\varepsilon\to0}p(z,\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0}q(z,\varepsilon)-\lim_{\varepsilon\to0}\psi(z,\varepsilon)+$$
$$+\lim_{\varepsilon\to0}\left[q(z,\varepsilon)-p(z,\varepsilon)\right]h(z,\varepsilon)=$$
$$=q(z)-T(z)+\frac{\bar c_0-c_0}{2}+\overline{T\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$$

равномерно внутри E. Таким образом,

$$f_\varepsilon(z)=f(z)+\varepsilon zf'(z)\left[S(z)+\frac{\bar c_0-c_0}{2}+\overline{T\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right]+o(z,\varepsilon).$$

Легко увидеть, что

$$f'_\varepsilon(0)=1+\varepsilon\frac{c_0+\bar c_0}{2}+o(\varepsilon).$$

Функция

$$f(z,\varepsilon)=\frac{f_\varepsilon(z)}{f'_\varepsilon(0)}$$

принадлежит классу S. Подсчет дает формулу (1), что и требовалось.

Приведем примеры использования теоремы 1. Представим вывод вариационной формулы, предложенной М. Шиффером [12] и полученной позднее Г.М. Голузиным [13] как следствие теоремы 1.

Теорема 2. В классе S имеет место вариационная формула

$$f(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon f(z)\sum_{k=1}^{m}\left\{A_k H^2(z_k)\frac{f(z)}{f(z)-f(z_k)}-\right.$$
$$\left.-\frac{A_k}{2}L(z,z_k)-\frac{\overline{A}_k}{2}L\left(z,\frac{1}{\overline{z}_k}\right)\right\}+o(z,\varepsilon),$$

где z_k, $k=1,2,\ldots,m$, $m\in\mathbb{N}$, – различные точки из E, A_k – произвольные комплексные постоянные,

$$H(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)},\quad L(z,a)=H(z)\frac{z+a}{z-a}+1.$$

Доказательство. Напишем вариационную формулу (1) для

$$q(z)=\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{H^2(z_k)f^2(z)}{zf'(z)\big(f(z)-f(z_k)\big)},\ f(z)\in S.$$

Выделяя главную часть $T(z)$ разложения функции $q(z)$ в ряд Лорана в кольце $K(r,1)$, где $r=\max\limits_{1\le k\le m}|z_k|$, находим

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}q(z)z^{n-1}dz=\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=z_k}\left(q(z)z^{n-1}\right)=\sum_{k=1}^{m}A_k z_k{}^n,$$

и для $T(z)$ имеем

$$T(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}=\sum_{k=1}^{m}A_k\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z_k}{z}\right)^n=\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{z_k}{z-z_k}.$$

Свободный член правильной части разложения $q(z)$ равен

$$c_0=\lim_{z\to 0}\big[q(z)-T(z)\big]=\sum_{k=1}^{m}A_k.$$

Для завершения доказательства остается записать формулу (1) с указанными $q(z)$, $T(z)$, c_0.

Приведем ещё один пример применения теоремы Голузина для получения вариационной формулы в классе S.

Теорема 3. В классе S имеет место вариационная формула

$$f(z,\varepsilon)=f(z)+$$
$$+\varepsilon f(z)\sum_{k=1}^{m}\left\{A_k H^3(z_k)\frac{3f(z_k)f(z)-2f^2(z)}{\big(f(z)-f(z_k)\big)^2}-\right.$$
$$-A_k\Big[M(z,z_k)-\big(1+N(z_k)\big)L(z,z_k)\Big]+$$
$$\left.+\overline{A}_k\left[M\left(z,\frac{1}{\overline{z}_k}\right)+\left(1+\overline{N(z_k)}\right)L\left(z,\frac{1}{\overline{z}_k}\right)\right]\right\}+o(z,\varepsilon),$$

где z_k, $k=1,2,\ldots,m$, $m\in\mathbb{N}$, – различные точки из E, A_k – произвольные комплексные постоянные,

$$H(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)},\quad L(z,a)=H(z)\frac{z+a}{z-a}+1,$$
$$N(z)=\frac{zf''(z)}{f'(z)},\quad M(z,a)=H(z)\frac{az}{(z-a)^2}.$$

Доказательство. Запишем вариационную формулу (1) для

$$q(z)=\sum_{k=1}^{m}A_k H^3(z_k)\frac{3f(z_k)f(z)-2f^2(z)}{H(z)\big(f(z)-f(z_k)\big)^2},\quad f(z)\in S.$$

Это можно сделать, поскольку функция $g(z,\varepsilon)$, соответствующая выбранной $q(z)$, удовлетворяет условиям теоремы 1. Для этого достаточно показать, что функция

$$\omega(w)=w+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{w^2(3w_k-2w)}{(w-w_k)^2},$$

голоморфная в $\mathbb{C}\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{m}\overline{U(w_k,\rho)},\rho=\frac{1}{2}\min\limits_{k\ne l}|w_k-w_l|$, однолистна в этой области при достаточно малых ε.

Пусть w', w'' – различные точки указанной области. Тогда имеет место равенство

$$\omega(w')-\omega(w'')=(w'-w'')\times$$
$$\times\left\{1-\varepsilon\sum_{k=1}^{m}A_k\left[2+w_k{}^3\frac{w'+w''-2w_k}{(w'-w_k)^2(w''-w_k)^2}\right]\right\}$$

и следующие неравенства

$$\left|2+w_k{}^3\frac{w'+w''-2w_k}{(w'-w_k)^2(w''-w_k)^2}\right|\le$$
$$\le 2+\frac{|w_k|^3}{|w'-w_k||w''-w_k|}\left(\frac{1}{|w'-w_k|}+\frac{1}{|w''-w_k|}\right)\le$$
$$\le 2+\frac{2|w_k|^3}{\rho^3}\le M_k,$$
$$|\omega(w')-\omega(w'')|\ge|w'-w''|\left|1-\varepsilon\sum_{k=1}^{m}|A_k|M_k\right|\ge K|w'-w''|,$$

последнее из которых влечет однолистность $\omega(w)$.

Выделяя главную часть разложения функции $q(z)$ в ряд Лорана в кольце $K(r,1)$, где $r=\max\limits_{1\le k\le m}|z_k|$, находим

$$T(z)=\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{z_k z}{(z-z_k)^2}-2\sum_{k=1}^{m}A_k\big(1+N(z_k)\big)\frac{z_k}{z-z_k}.$$

Свободный член правильной части разложения равен

$$c_0=-2\sum_{k=1}^{m}A_k\big(1+N(z_k)\big).$$

Для завершения доказательства теоремы остается записать формулу (1) с указанными $q(z)$, $T(z)$, c_0.

Представим новый вывод вариационной формулы в классе звездообразных функций, впервые полученной И.А. Александровым [14].

Теорема 4. В классе S^* имеет место вариационная формула

$$f(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon f(z)\sum_{k=1}^{m}\Big\{A_k\big[H(z_k)K(z,z_k)-$$

$$-L(z,z_k)\big]-\overline{A}_k\left[\overline{H(z_k)}K\left(z,\frac{1}{\overline{z}_k}\right)+L\left(z,\frac{1}{\overline{z}_k}\right)\right]\Big\}+o(z,\varepsilon),$$

где z_k , $k = 1, 2, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, – различные точки из E, A_k – произвольные комплексные постоянные и

$$H(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)},\quad K(z,a)=H(z)+\frac{z+a}{z-a},$$

$$L(z,a)=H(z)\frac{z+a}{z-a}+1.$$

Доказательство. Образуем функцию

$$g(z,\varepsilon)=f(z)\exp(\varepsilon\varphi(z)),\; f(z)\in S^*,$$

где

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{m}\left(B_k\frac{z+z_k}{z-z_k}+\overline{B}_k\frac{1+\overline{z}_kz}{1-\overline{z}_kz}\right),\quad z\in E,$$

и B_k , $k = 1, 2, \ldots, m$, – комплексные постоянные. Она при каждом фиксированном ε голоморфна по z в $K(r, 1)$, $r=\max\limits_{1\le k\le m}|z_k|$. Поскольку $g(z, \varepsilon)$ дифференцируема по ε при $\varepsilon=0$ равномерно внутри кольца $K(r, 1)$, то в этом кольце имеет место разложение

$$g(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon f(z)\,\varphi(z)+\gamma(z,\varepsilon),$$

где $\gamma(z, \varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри $K(r, 1)$.

Пусть z', z'' – различные точки из $K(r, 1)$. В силу однолистности $f(z)$ при достаточно малых ε справедливы следующие неравенства:

$$|\,g(z',\varepsilon)-g(z'',\varepsilon)\,|\ge$$

$$\ge|\,|f(z')-f(z'')|-\varepsilon\,|f(z')\,\varphi(z')-f(z'')\,\varphi(z'')|\,|\ge$$

$$\ge K-\varepsilon\,|f(z')\,\varphi(z')-f(z'')\,\varphi(z'')|>0,$$

откуда следует однолистность $g(z, \varepsilon)$.

Покажем, что внешняя граничная компонента образа кольца $K(r, 1)$ при отображении $w = g(z, \varepsilon)$ ограничивает звездообразную относительно нуля область. Тогда образ круга E при отображении $w = f(z, \varepsilon)$ будет звездообразной относительно нуля областью, и функция $f(z, \varepsilon)$ попадет в класс S^*. Имеем

$$\mathrm{Re}\frac{zg'(z,\varepsilon)}{g(z,\varepsilon)}=\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}+\varepsilon\,\mathrm{Re}\big(z\varphi'(z)\big)=$$

$$=\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}-2\varepsilon\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{m}\left[B_k\frac{z_kz}{(z-z_k)^2}-\overline{B_k}\frac{\overline{z}_kz}{(1-\overline{z}_kz)^2}\right].$$

Рассмотрим это равенство при $z = re^{i\theta}$. Поскольку первое слагаемое в правой части равенства положительно при любых r и θ, в силу звездообразности функции $f(z)$, и поскольку

$$\lim_{r\to1}\mathrm{Re}\left[re^{i\theta}\varphi'\left(re^{i\theta}\right)\right]=-4\,\mathrm{Re}\left[i\,\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{m}B_k\frac{z_ke^{i\theta}}{\left(e^{i\theta}-z_k\right)^2}\right]=0,$$

то при достаточно малых ε и при r, близких к единице, сумма в правой части рассматриваемого равенства положительна. Значит действительно образ кольца $K(r, 1)$ при объединении с ограниченной компонентой дополнения является звездообразной относительно $w = 0$ областью.

Применим теорему 1 к функции $g(z, \varepsilon)$. Имеем $q(z) = \varphi(z)/H(z)$ и находим, что

$$T(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{2B_kz_k}{H(z_k)(z-z_k)},$$

$$c_0=\lim_{z\to0}\big[q(z)-T(z)\big]=\sum_{k=1}^{m}\left(\overline{B}_k-B_k+\frac{2B_k}{H(z_k)}\right).$$

Для завершения доказательства теоремы остается записать формулу (1) при указанных $q(z)$, $T(z)$, c_0 и заменить B_k на $A_kH(z_k)$.

§2. УРАВНЕНИЕ ЛЕВНЕРА – КУФАРЕВА

В теории однолистных функций важную роль играет уравнение Левнера – Куфарева

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=-\zeta p(\zeta,\tau),\quad 0\le\tau<\tau^0,\; 0<\tau^0\le\infty,\qquad(2)$$

где $p(\zeta, \tau)$ – заданная в $E\times T$, $T = [0, \tau^0)$, функция, при каждом фиксированном τ принадлежащая классу C (классу Каратеодори) голоморфных в E функций $p(z)$, $p(0) = 1$, $\mathrm{Re}\,p(z) > 0$, и непрерывная по совокупности переменных в цилиндре $E\times T$. Множество всех таких функций $p(\zeta, \tau)$ обозначим через $\mathsf{P}(C,T)$.

Решения уравнения (2), обращающиеся при $\tau = t$, $0 \le t < \tau^0$, в z, обозначим через $\zeta = \zeta(\tau, t, z)$. В случае, если $t = 0$, вместо $\zeta(\tau, 0, z)$ будем писать $\zeta(\tau, z)$. Очевидно, $\zeta(\tau, t, 0) = 0$.

Теорема 5. Какова бы ни была фиксированная точка t, $t \in T$, уравнение Левнера – Куфарева (2)

а) на интервале $T \cap (t - \ln[(1 + |z|)^2 / 4|z|], \tau^0)$ имеет, и притом единственное, решение $\zeta(\tau, t, z)$, $z \in E$;

б) если τ_1, $t \le \tau_1 \le \tau^0$, конечно, то $\zeta(\tau_1, t, z)$ осуществляет однолистное конформное отображение круга E на некоторую область $B(\tau_1, t) \subset E$, причем $\zeta(\tau_1, t, 0) = 0$, $\zeta_z'(\tau_1, t, 0) = e^{t-\tau_1}$;

в) если $\tau^0 = \infty$, то функция

$$f(z)=\lim_{\tau\to\infty}e^{\tau-t}\zeta(\tau,t,z)=z+\ldots$$

голоморфна и однолистна в E.

Доказательство. а) Уравнение (2) вместе с начальным условием $\zeta\,|_{\tau=t} = z$, $z \in E\backslash\{0\}$ равносильно интегральному уравнению

$$\zeta=z\exp\left\{-\int_t^{\tau}p(\zeta,\tau)\,d\tau\right\},\qquad(3)$$

решение которого будем искать методом последовательных приближений. Для этого рассмотрим последовательность голоморфных в E при фиксированном τ, $\tau > t$, функций

$$\zeta_0=0,$$

$$\zeta_n=\zeta_n(\tau,t,z)=z\exp\left\{-\int_t^{\tau}p\big(\zeta_{n-1}(\tau,t,z),\tau\big)\,d\tau\right\},$$

$$n=1,2,\ldots,$$

и уравнение

$$\frac{dv}{d\tau} = -vP(-v), \quad v\big|_{\tau=t} = |z|, \tag{4}$$

где $P(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$.

Решение уравнения (4)

$$v(\tau) = 1 + A - A\sqrt{1+\frac{2}{A}}, \quad t < \tau < \infty,$$

где
$$A = \frac{(1-|z|)^2}{2|z|} e^{\tau - t},$$

положительно, монотонно убывает с ростом τ и строго меньше единицы на (t, ∞).

Поскольку $P(-v(\tau)) \le 1$, то с учетом (4) имеем

$$|\zeta_1| = |z| \exp\left\{-\int_t^\tau d\tau\right\} \le |z| \exp\left\{-\int_t^\tau P(-v(\tau))\, d\tau\right\} = v(\tau).$$

Далее, используя (4) и известное неравенство для функций $p(z)$ класса C

$$P(-|z|) \le \operatorname{Re} p(z) \le P(|z|),$$

по индукции получаем

$$|\zeta_n| = |z| \exp\left\{-\operatorname{Re}\int_t^\tau p(\zeta_{n-1}, \tau)\, d\tau\right\} \le$$
$$\le |z| \exp\left\{-\int_t^\tau P(-|\zeta_{n-1}|)\, d\tau\right\} \le$$
$$\le |z| \exp\left\{-\int_t^\tau P(-v(\tau))\, d\tau\right\} = v(\tau).$$

С другой стороны,

$$|\zeta_n| \ge |z| \exp\left\{-\int_t^\tau P(|\zeta_{n-1}|)\, d\tau\right\} \ge |z| \exp\left\{-\int_t^\tau P(v(\tau))\, d\tau\right\} =$$
$$= v(\tau) \exp\left\{-\int_t^\tau \left[P(v(\tau)) - P(-v(\tau))\right] d\tau\right\} =$$
$$= v(\tau) \exp\left\{-\int_t^\tau \frac{4v(\tau)}{1-v^2(\tau)}\, d\tau\right\} = v(\tau) \exp\{2(x(\tau) - a)\},$$

где $x(\tau) = P(v(\tau))$, $a = x(t) = P(|z|)$. Таким образом, имеем оценки

$$v(\tau) \exp\{2(x(\tau) - a)\} \le |\zeta_n(\tau, t, z)| \le v(\tau), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Установим теперь оценку сверху для модуля функции

$$\delta_n = \delta_n(\tau, t, z) = 1 - \frac{\zeta_n(\tau, t, z)}{\zeta_{n+1}(\tau, t, z)}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Представим δ_n в виде

$$\delta_n = -\int_t^\tau \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\zeta_n}{\zeta_{n+1}}\right) d\tau =$$
$$= -\int_t^\tau \frac{\zeta_n{}^2}{\zeta_{n+1}} \delta_{n-1} \frac{p(\zeta_n, \tau) - p(\zeta_{n-1}, \tau)}{\zeta_n - \zeta_{n-1}}\, d\tau,$$

откуда, используя (5) и известное неравенство для функций класса C

$$|p(z_1) - p(z_2)| \le \frac{2|z_1 - z_2|}{(1-|z_1|)(1-|z_2|)}, \tag{6}$$

получаем

$$|\delta_n(\tau, t, z)| \le \int_t^\tau |\delta_{n-1}| \exp\{-2(x(\tau) - a)\} \frac{2v(\tau)}{(1-v(\tau))^2}\, d\tau. \tag{7}$$

При возрастании τ от t до τ^0 величина x убывает от a до $x(\tau^0)$. В неравенстве (7) произведем замену переменного τ на x. Будем иметь

$$|\delta_n| \le -\int_a^x |\delta_{n-1}| \exp\{-2(x-a)\} x\, dx,$$

где $\delta_n = \delta_n(x, a, z) = \delta_n(\tau(x), \tau(a), z)$. Выполнив в последнем неравенстве замену по формуле

$$\rho = \rho(x) = \int_x^a e^{-2(y-a)} y\, dy,$$

получим искомую равномерную внутри E оценку

$$|\delta_n| \le \int_0^\rho |\delta_{n-1}|\, d\rho \le \frac{\rho^n}{n!},$$

откуда, используя (5), заключаем, что

$$|\zeta_{n+1}(\tau, t, z) - \zeta_n(\tau, t, z)| \le v(\tau) \frac{\rho^n}{n!} < \frac{\rho^n(x(\tau^0))}{n!},$$

где $\rho(x(\tau^0))$ зависит только от z.

Таким образом, последовательность $(\zeta_n(\tau, t, z))_{n \in \mathbb{N}}$ голоморфных функций равномерно внутри E сходится. Ее предельная функция $\zeta = \zeta(\tau, t, z)$ по теореме Вейерштрасса голоморфна в E при фиксированном τ, $\tau > t$, и, как легко показать, удовлетворяет уравнению (3).

При $\tau < t$ решение уравнения (3) также будет предельной функцией для рассмотренной последовательности $(\zeta_n(\tau, t, z))_{n \in \mathbb{N}}$. Это можно доказать повторением проведенных рассуждений, взяв вместо $v(\tau)$ решение $u(\tau)$ уравнения

$$\frac{du}{d\tau} = -uP(u), \quad u\big|_{\tau=t} = |z|,$$

существующее при $\tau \in (t - \ln[(1+|z|)^2 / 4|z|], t)$, и вместо неравенства (5) использовав оценки

$$u(\tau) \exp\{2(y(\tau) - b)\} \le |\zeta_n(\tau, t, z)| \le u(\tau),$$

где $y(\tau) = P(-u(\tau))$, $b = y(t) = P(-|z|)$. Тогда, соответственно, получим неравенство

$$|\delta_n| \le \int_0^\chi |\delta_{n-1}|\, d\chi,$$

где
$$\chi(y) = \int_y^b e^{-2(\lambda - b)} \frac{d\lambda}{\lambda},$$

опираясь на которое, легко завершить доказательство сходимости последовательности $(\zeta_n(\tau, t, z))_{n \in \mathbb{N}}$ при $\tau \in T \cap (t - \ln[(1+|z|)^2 / 4|z|], t)$.

Обычным образом устанавливается единственность решения уравнения (3).

б) Пусть при некотором τ_1, $0 \le t < \tau_1 < \tau^0$, в E нашлись точки z_1, z_2, $z_1 \ne z_2$, в которых

$\zeta(\tau_1, t, z_1) = \zeta(\tau_1, t, z_2)$. Тогда, в силу единственности решения, имеем $\zeta(\tau, t, z_1) = \zeta(\tau, t, z_2)$ при $\tau \in T \cap (t - \ln[(1+s)^2/4s], \tau^0)$, $s = \max(|z_1|, |z_2|)$, откуда при $\tau = t$ получаем $z_1 = z_2$, что противоречит предположению. Следовательно, $\zeta(\tau, t, z)$ однолистна в E и конформно отображает E на односвязную область $B(\tau, t)$. Равенства в утверждении б) непосредственно следуют из (3).

в) Из (3) находим

$$e^{\tau - t}\zeta = z\exp\int_t^\tau \left(1 - p(\zeta, \tau)\right)d\tau.$$

Если $\tau^0 = \infty$, то при $\tau \to \infty$ интеграл справа равномерно относительно z внутри E сходится, поскольку, в силу (6), оценки $|\zeta| \le v(\tau)$ и явного представления $v(\tau)$, справедливо

$$\left|1 - p(\zeta, \tau)\right| \le \frac{2v(\tau)}{1 - v(\tau)} = \sqrt{1 + \frac{2}{A}} < \frac{1}{A}.$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{\tau \to \infty} e^{\tau - t}\zeta(\tau, t, z) = f(z), 0 \le t < \infty,$$

и функция $f(z) = z + \ldots$ как отличный от постоянной равномерный предел голоморфных однолистных функций голоморфна и однолистна в E. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть функция $p(\zeta, t)$ непрерывна по совокупности переменных в $E \times T$, голоморфна по ζ в E при каждом t, $0 \le t < \infty$, и имеет в E положительную вещественную часть. Тогда решение $\zeta = \zeta(t, z)$ уравнения

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\zeta p(\zeta, t), \quad \zeta|_{t=0} = z \in E, \tag{8}$$

голоморфно и однолистно в E при любом t.

Доказательство. Положим $p(0, t) = a(t) + ib(t)$, имеем $a(t) > 0$ и

$$p(\zeta, t) = ib(t) + a(t)p^*(\zeta, t),$$

где $p^*(\zeta, t) \in \mathrm{P}(C, T)$. При этом уравнение (8) примет вид

$$\frac{1}{a(t)}\left[\frac{d\ln\zeta}{dt} + ib(t)\right] = -p^*(\zeta, t).$$

Выполнив замену переменного по формулам

$$\tau = \tau(t) = \int_0^t a(t)\,dt, \zeta_1 = \zeta\exp\left\{i\int_0^t b(t)\,dt\right\},$$

придем к уравнению Левнера – Куфарева

$$\frac{d\ln\zeta_1}{d\tau} = -p^*\left(\zeta_1\exp\left\{-i\int_0^\tau \frac{b(t(\tau))}{a(t(\tau))}d\tau\right\}, t(\tau)\right), \zeta_1|_{\tau=0} = z,$$

решение которого по теореме 5 голоморфно и однолистно в E. Значит этими же свойствами обладает решение

$$\zeta(t, z) = \zeta_1(\tau(t), z)\exp\left\{-i\int_0^t b(t)\,dt\right\}$$

уравнения (8), что и требовалось доказать.

§3. НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛЕВНЕРА – КУФАРЕВА

1. Автономное уравнение Левнера – Куфарева

Пользуясь тем, что наряду с функцией $p(z)$ из класса C этому же классу принадлежит и функция $1/p(z)$, рассмотрим уравнение Левнера – Куфарева в виде

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\frac{\zeta}{p(\zeta)}, \quad \zeta|_{\tau=0} = z \in E. \tag{9}$$

Согласно теореме 5, решение $\zeta = \zeta(\tau, z)$ задачи (9) при каждом фиксированном τ, $0 < \tau < \infty$, голоморфно и однолистно в E. Правая часть рассматриваемого уравнения не зависит от τ, и, следовательно, оно равносильно некоторой автономной (динамической) системе двух дифференциальных уравнений для двух функций вещественного переменного. Нетрудно увидеть, что решение $\zeta(\tau, z)$ задачи (9) дается в неявном виде формулой

$$\ln\frac{\zeta(\tau, z)}{z} + \int_z^{\zeta(\tau, z)} \frac{p(\zeta) - 1}{\zeta}d\zeta + \tau = 0.$$

Функция $e^\tau\zeta(\tau, z) \in S$. Этому же классу принадлежит функция

$$f(z) = \lim_{\tau \to \infty} e^\tau\zeta(\tau, z) = z\exp\left\{\int_0^z \frac{p(\zeta) - 1}{\zeta}d\zeta\right\}.$$

Для нее $\dfrac{zf'(z)}{f(z)} = p(z)$, и значит $f(z)$ отображает круг E на звездообразную относительно нуля область. Множество получаемых указанным способом функций $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, составляет весь класс S^*.

Теорема 6. Если $p(z, \varepsilon) = p(z) + \varepsilon T(z) + \gamma(z, \varepsilon)$ – вариационная формула в классе C, где $\gamma(z, \varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри E, $\gamma(z, \varepsilon)/z$ и $T(z)/z$ голоморфны в E, то

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon f(z)\int_0^z T(u)\frac{du}{u} + o(z, \varepsilon) -$$

вариационная формула в классе S^*.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(z,\varepsilon) \in S^*$, соответствующую функции $p(z, \varepsilon) \in C$, то есть $\dfrac{zf'(z,\varepsilon)}{f(z,\varepsilon)} = p(z, \varepsilon)$. Имеет место тождество

$$\frac{zf'(z,\varepsilon)}{f(z,\varepsilon)} = \frac{zf'(z)}{f(z)} + \varepsilon T(z) + \gamma(z, \varepsilon),$$

где $f(z) \in S^*$. Разделив обе его части на z и проинтегрировав полученное по z от z_0, $z_0 \ne 0$, до z вдоль пути, не содержащего нуль, приходим к равенству

$$\frac{f(z,\varepsilon)}{f(z_0,\varepsilon)} = \frac{f(z)}{f(z_0)}\exp\left\{\varepsilon\int_{z_0}^z \frac{T(u)}{u}du + \gamma_1(z, \varepsilon)\right\},$$

где $\gamma_1(z, \varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри E. Умножив обе части этого равенства на z_0 и перейдя к пределу при $z_0 \to 0$, получим

$$f(z,\varepsilon) = f(z)\exp\left\{\varepsilon\int_0^z \frac{T(u)}{u}du + \gamma_2(z, \varepsilon)\right\},$$

где $\gamma_2(z,\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри E. Для доказательства теоремы остается разложить последнее тождество по степеням ε.

Следствие 2. В классе S^* имеет место вариационная формула

$$f(z,\varepsilon)=f(z)+$$
$$+\varepsilon f(z)\sum_{k=1}^{m}\left\{A_k\left[\frac{z+z_k}{z-z_k}H(z)+1-H(z_k)\frac{2z}{z-z_k}\right]-\right.$$
$$\left.-\overline{A}_k\left[\frac{1+\overline{z}_k z}{1-\overline{z}_k z}H(z)-1+\overline{H(z_k)}\frac{2\overline{z}_k z}{1-\overline{z}_k z}\right]\right\}+$$
$$+i\varepsilon A\{zf'(z)-f(z)\}+o(z,\varepsilon),$$

где z_k, $k=1,2,\ldots,m$, $m\in\mathbb{N}$, – различные точки из E, A_k – произвольные комплексные постоянные, A – произвольная вещественная постоянная, $H(z)=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$.

Для доказательства следствия достаточно применить теорему 6 для вариационной формулы

$$p(z,\varepsilon)=p(z)+\varepsilon z\frac{d}{dz}\left\{\sum_{k=1}^{m}\left[A_k\frac{z+z_k}{z-z_k}\left(p(z)-p(z_k)\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\overline{A}_k\frac{1+\overline{z}_k z}{1-\overline{z}_k z}\left(p(z)+\overline{p(z_k)}\right)\right]+iAp(z)\right\}+o(z,\varepsilon)$$

в классе C.

Следствие 3. В классе S^* имеет место вариационная формула

$$f(z,\varepsilon)=f(z)-\varepsilon(a+ib)\left(zf'(z)-f(z)\right)+o(z,\varepsilon),$$

где $a\in(0,1), b\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $f(z)\in S^*$ и $p(z)=zf'(z)/f(z)$ – соответствующая функция класса C. Легко увидеть, что при $\varepsilon>0$ классу C принадлежит функция

$$p(z,\varepsilon)=p\left((1-ia\varepsilon)e^{-ib\varepsilon}z\right)=$$
$$=p(z)-\varepsilon(a+ib)zp'(z)+o(\varepsilon).$$

Применив к этой вариационной формуле теорему 6, получим требуемое.

2. Уравнение, приводящееся к однородному

Теорема 7. Пусть $p(z)\in C$, и α, $\alpha\ge 0$, – произвольная постоянная. Тогда классу S^* принадлежит функция

$$f(z)=z\exp\left\{\int_0^z\frac{p(t)-1}{\alpha p(t)+1}\frac{dt}{t}\right\}.$$

Доказательство. Согласно теореме 5, решение $\zeta=\zeta(\tau,z)$ задачи

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=-\frac{\zeta}{p\left(e^{-\alpha\tau}\zeta\right)},\quad \zeta\big|_{\tau=0}=z\in E, \tag{10}$$

однолистно и голоморфно в круге E при каждом фиксированном τ. При $\alpha=0$ уравнение (10) примет вид (9), рассмотренный в предыдущем пункте. Пусть $\alpha>0$. Произведя в (10) замену переменного $x=e^{\alpha\tau}$, получим однородное уравнение

$$\frac{d\zeta}{dx}=-\frac{\dfrac{\zeta}{x}}{\alpha p\left(\dfrac{\zeta}{x}\right)},\quad \zeta\big|_{x=1}=z,$$

в котором, в свою очередь, замена $t(x,z)=\zeta(x,z)/x$ дает

$$\frac{dx}{x}=-\frac{\alpha p(t)}{\alpha p(t)+1}\frac{dt}{t},\qquad t\big|_{x=1}=z.$$

Интегрируя последнее равенство и возвращаясь к переменному τ, имеем

$$\alpha\tau=\int_{e^{-\alpha\tau}\zeta(\tau,z)}^{z}\frac{\alpha p(t)}{\alpha p(t)+1}\frac{dt}{t}. \tag{11}$$

Перепишем (11) в виде

$$\ln z-\ln\zeta(\tau,z)-\int_{e^{-\alpha\tau}\zeta(\tau,z)}^{z}\frac{dt}{\left(1+\alpha p(t)\right)t}=0,$$

или после потенцирования в виде

$$\frac{e^{\tau}\zeta(\tau,z)}{z}=\exp\left\{\tau-\int_{e^{-\alpha\tau}\zeta(\tau,z)}^{z}\frac{dt}{\left(1+\alpha p(t)\right)t}\right\}.$$

Из последнего выражения и (11) получаем

$$e^{\tau}\zeta(\tau,z)=z\exp\left\{\int_{e^{-\alpha\tau}\zeta(\tau,z)}^{z}\frac{p(t)-1}{\alpha p(t)+1}\frac{dt}{t}\right\},$$

где функция $e^{\tau}\zeta(\tau,z)\in S$. Переходя к пределу при $\tau\to\infty$, получим требуемое. Легко увидеть, что $\operatorname{Re}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}>0$.

3. Формула Базилевича

Теорема 8. Пусть $p_0(\zeta)$, $p_1(\zeta)$ – голоморфные в E функции с положительными вещественными частями. Тогда классу S принадлежит функция

$$f(z)=\left\{\frac{p_0(0)}{p_1(0)}\int_0^z p_1(v)v^{p_0(0)-1}e^{\int_0^v\frac{p_0(u)-p_0(0)}{u}du}dv\right\}^{\frac{1}{p_0(0)}}.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (8) с функцией

$$p(\zeta,t)=\frac{1}{\left(1-e^{-t}\right)p_0(\zeta)+e^{-t}p_1(\zeta)},0\le t\le\infty,$$

После замены переменного $x=e^{t}$ уравнение примет вид

$$\frac{dx}{d\zeta}=-(x-1)\frac{p_0(\zeta)}{\zeta}-\frac{p_1(\zeta)}{\zeta},\zeta\big|_{x=1}=z\in E.$$

Проинтегрировав его, получим формулу

$$x=1-\int_z^{\zeta}\frac{p_1(v)}{v}e^{-\int_v^{\zeta}\frac{p_0(u)}{u}du}dv, \tag{12}$$

неявно задающую решение $\zeta=g(x,z)=c_1(x)z+\ldots$. Коэффициент $c_1(x)$ находим из уравнения

$$dx=-\left[(x-1)p_0(0)+p_1(0)\right]d\ln c_1(x).$$

Легко увидеть, что

$$c_1(x)=\left[\frac{p_1(0)}{p_0(0)x+p_1(0)-p_0(0)}\right]^{\frac{1}{p_0(0)}}.$$

Ветвь обобщенной степенной функции выбираем из условия $c_1(1) = 1$. Поскольку $\operatorname{Re} p_0(0) > 0$, то $c_1(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Из (12) следует

$$xg(x,z)^{p_0(0)}=g(x,z)^{p_0(0)}+$$
$$+\int\limits_{g(x,z)}^{z}\frac{p_1(v)}{v^{1-p_0(0)}}e^{\int\limits_{g(x,z)}^{v}\frac{p_0(u)-p_0(0)}{u}du}dv.$$

Разделив обе части последнего равенства на $xc_1(x)^{p_0(0)}$ и перейдя к пределу при $x \to \infty$, получим искомую формулу Базилевича.

4. Уравнение, приводящееся к уравнению Бернулли

Теорема 9. Пусть $p_0(\zeta)$, $p_1(\zeta)$ – голоморфные в E функции с положительными вещественными частями и α, $0 \le \alpha < 1$, – произвольная постоянная. Тогда классу S принадлежит функция

$$f(z)=\left[\frac{p_0(0)}{p_0(0)+p_1(0)}\left(z^{(1-\alpha)p_0(0)}e^{(1-\alpha)\int\limits_0^z\frac{p_0(u)-p_0(0)}{u}du}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(1-\alpha)\int\limits_0^z p_1(v)v^{(1-\alpha)p_0(0)-1}e^{(1-\alpha)\int\limits_0^v\frac{p_0(u)-p_0(0)}{u}du}dv\right)\right]^{\mu},$$

где $\mu = 1/((1-\alpha)p_0(0))$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (8) с функцией

$$p(\zeta,t)=\frac{1}{p_0(\zeta)+e^{(\alpha-1)t}p_1(\zeta)},0\le t\le\infty,$$

После замены переменного $y = e^t$ уравнение примет вид

$$\frac{dy}{d\zeta}=-\frac{p_0(\zeta)}{\zeta}y-\frac{p_1(\zeta)}{\zeta}y^{\alpha},y\big|_{\zeta=z}=1,$$

и является относительно y уравнением Бернулли. Заменой $x = y^{1-\alpha}$ приведем его к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dx}{d\zeta}=-(1-\alpha)\frac{p_0(\zeta)}{\zeta}x-(1-\alpha)\frac{p_1(\zeta)}{\zeta},x\big|_{\zeta=z}=1,$$

проинтегрировав которое, получим формулу

$$x=e^{-(1-\alpha)\int\limits_z^{\zeta}p_0(u)\frac{du}{u}}-(1-\alpha)\int\limits_z^{\zeta}\frac{p_1(v)}{v}e^{(1-\alpha)\int\limits_{\zeta}^{v}\frac{p_0(u)}{u}du}dv,\qquad(13)$$

неявно задающую решение $\zeta = g(x, z) = c_1(x)z + \dots$. Коэффициент $c_1(x)$ находим из уравнения

$$dx=-(1-\alpha)\left[p_0(0)x+p_1(0)\right]d\ln c_1(x).$$

Он имеет вид

$$c_1(x)=\left[\frac{p_0(0)+p_1(0)}{p_0(0)x+p_1(0)}\right]^{\frac{1}{(1-\alpha)p_0(0)}}.$$

Ветвь обобщенной степенной функции выбираем из условия $c_1(1) = 1$. Поскольку $\operatorname{Re} p_0(0) > 0$, то $c_1(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Из (13) следует

$$xg(x,z)^{(1-\alpha)p_0(0)}=z^{(1-\alpha)p_0(0)}e^{(1-\alpha)\int\limits_{g(x,z)}^{z}\frac{p_0(u)-p_0(0)}{u}du}+$$
$$+(1-\alpha)\int\limits_{g(x,z)}^{z}p_1(v)v^{(1-\alpha)p_0(0)-1}e^{(1-\alpha)\int\limits_{g(x,z)}^{v}\frac{p_0(u)-p_0(0)}{u}du}dv.$$

Разделив последнее равенство на $xc_1(x)^{(1-\alpha)p_0(0)}$ и перейдя к пределу при $x \to \infty$, получим требуемое.

Заметим, что из выведенной интегральной формулы можно получить формулу Базилевича, положив $\alpha = 0$ и $p_2(z) = p_0(z) + p_1(z)$.

§4. ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ В КЛАССЕ *S*(*C*, *T*)

Уравнение Левнера – Куфарева порождает некоторый подкласс функций класса S, являющихся предельными для решений этого уравнения.

Пусть для $f(z) \in S$ найдется такая функция $p(\zeta, \tau) \in \mathrm{P}(C,T)$, что $f(z)=\lim\limits_{\tau\to\infty}e^{\tau}\zeta(\tau,z)$, где $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения Левнера – Куфарева

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=-\zeta p(\zeta,\tau),\quad \zeta\big|_{\tau=0}=z\in E.\qquad(14)$$

Множество всех таких функций $f(z)$ обозначим через $S(C, T)$. Оно содержит подкласс S' функций класса S, отображающих круг E на области, полученные из плоскости проведением разреза по обобщенно жордановой кривой, и является плотным подклассом класса S.

Теорема 10. Пусть $f(z) \in S(C, T)$. Тогда при достаточно малых ε классу S принадлежит функция

$$f(z,\varepsilon)=f(z)+$$
$$+\varepsilon\int\limits_0^{\infty}\left\{\omega_1(\tau)\left[f(z)-f'(z)\frac{\zeta(\tau,z)}{\zeta'_z(\tau,z)}p\big(\zeta(\tau,z),\tau\big)\right]-\right.$$
$$\left.-i\omega_2(\tau)f'(z)\frac{\zeta^2(\tau,z)}{\zeta'_z(\tau,z)}p'_{\zeta}\big(\zeta(\tau,z),\tau\big)\right\}d\tau+o(z,\varepsilon),$$

где вещественные функции $\omega_1(\tau)$, $\omega_2(\tau)$, $\tau \in T$, непрерывны за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, $|e^{\tau}\omega_1(\tau)|$, $|\omega_2(\tau)|$ ограничены на T, и $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения (14).

Доказательство. Согласно следствию 1, решение $\zeta = \zeta(\tau, z, \varepsilon)$ дифференциального уравнения

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=-\big(1+\varepsilon\omega_1(\tau)\big)\zeta p\left(\zeta e^{i\omega_2(\tau)\varepsilon},\tau\right),\zeta\big|_{\tau=0}=z,$$

голоморфно по z. Это уравнение равносильно системе двух дифференциальных уравнений для двух функций вещественного переменного. Правая часть этого уравнения непрерывно дифференцируема по ε, и ее производная, как легко увидеть, ограничена. Следовательно, по теореме о зависимости решений от параметра [15. С. 121] $\zeta = \zeta(\tau, z, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема по ε. Запишем разложение $\zeta = \zeta(\tau, z, \varepsilon)$ по степеням ε:

$$\zeta(\tau,z,\varepsilon)=\zeta(\tau,z)+\varepsilon Q(\tau,z)+\alpha(\tau,z,\varepsilon),$$

где $\alpha(\tau, z, \varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри $E\times T$, и $\alpha(\tau, z, \varepsilon)$ ограничено внутри $E\times T\times(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$; $Q(0, z) = 0$. Разложим по степеням ε левую и правую части тождества:

$$\frac{d\ln\zeta(\tau,z,\varepsilon)}{d\tau} = -\left(1+\varepsilon\omega_1(\tau)\right)p\left(\zeta(\tau,z,\varepsilon)e^{i\omega_2(\tau)\varepsilon},\tau\right).$$

Получим

$$\frac{d\ln\zeta(\tau,z)}{d\tau}+\varepsilon\frac{d}{d\tau}\frac{Q(\tau,z)}{\zeta(\tau,z)} =$$
$$= -\left(1+\varepsilon\omega_1(\tau)\right)\left\{p\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)+\right.$$
$$\left.+\varepsilon p'_\zeta\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)\left[Q(\tau,z)+i\omega_2(\tau)\zeta(\tau,z)\right]\right\}+o(z,\varepsilon).$$

Сравнивая теперь коэффициенты при ε, приходим к равенству

$$\frac{d}{d\tau}\frac{Q(\tau,z)}{\zeta(\tau,z)} = -p'_\zeta\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)Q(\tau,z)-R(\tau,z),$$

где
$$R(\tau,z) = \omega_1(\tau)p\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)+$$
$$+i\omega_2(\tau)\zeta(\tau,z)p'_\zeta\left(\zeta(\tau,z),\tau\right).$$

Оно показывает, что отношение $Q(\tau, z) / \zeta(\tau, z)$ является решением обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{d\tau}+\zeta(\tau,z)p'_\zeta\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)y = -R(\tau,z), \quad y(0)=0.$$

Дифференцируя тождество

$$\frac{d}{d\tau}\ln\zeta(\tau,z) = -p\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)$$

по z, получаем формулу

$$p'_\zeta\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)\zeta'_z(\tau,z) = -\frac{d}{d\tau}\frac{\zeta'_z(\tau,z)}{\zeta(\tau,z)},$$

позволяющую записать рассматриваемое уравнение в виде

$$\frac{dy}{d\tau}-\frac{d}{d\tau}\left(\ln\frac{\zeta'_z(\tau,z)}{\zeta(\tau,z)}\right)y = -R(\tau,z), \quad y(0)=0.$$

Решив его, находим $Q(\tau, z)$ и, следовательно,

$$\zeta(\tau,z,\varepsilon)=\zeta(\tau,z)-\varepsilon\zeta'_z(\tau,z)\int_0^\tau\frac{\zeta(t,z)}{\zeta'_z(t,z)}R(t,z)\,dt+\alpha(\tau,z,\varepsilon).$$

Функция $\zeta = \zeta(\tau, z, \varepsilon)$, $\zeta'(\tau, 0, \varepsilon) =0$, однолистно и конформно отображает круг E в себя. Легко найти, что

$$\zeta'_z(\tau,0,\varepsilon) = e^{-\tau}\left(1-\varepsilon\int_0^\tau\omega_1(t)\,dt\right)+o(\varepsilon).$$

Классу S принадлежат функция

$$f(z,\tau,\varepsilon) = \frac{\zeta(\tau,z,\varepsilon)}{\zeta'_z(\tau,0,\varepsilon)} = e^\tau\zeta(\tau,z)+$$
$$+\varepsilon\left\{e^\tau\zeta(\tau,z)\int_0^\tau\omega_1(t)\,dt-\right.$$
$$\left.-e^\tau\zeta'_z(\tau,z)\int_0^\tau\frac{\zeta(t,z)}{\zeta'_z(t,z)}R(t,z)\,dt\right\}+o(z,\varepsilon)$$

и функции

$$f(z,\varepsilon) = \lim_{\tau\to\infty}f(z,\tau,\varepsilon), \quad f(z) = \lim_{\tau\to\infty}e^\tau\zeta(\tau,z).$$

Перейдя в последнем равенстве к пределу при $\tau \to \infty$, получим искомую вариационную формулу.

Приведем две вариационные формулы, полученные посредством уравнения Левнера – Куфарева.

Теорема 11. Пусть функция $p(\zeta, \tau, \varepsilon)$ при каждом фиксированном ε, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, принадлежит классу $\mathsf{P}(C,T)$, непрерывно дифференцируема по ε в $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ и имеет разложение в окрестности $\varepsilon = 0$ вида

$$p(\zeta, \tau, \varepsilon) = p(\zeta, \tau) + \varepsilon T(\zeta, \tau) + \gamma(\zeta, \tau, \varepsilon),$$

где $\gamma(\zeta, \tau, \varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри $E\times T$. Тогда в классе $S(C, T)$ имеет место вариационная формула

$$f(z,\varepsilon) = f(z)-\varepsilon f'(z)\int_0^\infty\frac{\zeta(\tau,z)}{\zeta'_z(\tau,z)}T\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)d\tau+o(\varepsilon),$$

где $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения (14).

Доказательство. Пусть $\zeta(\tau, z, \varepsilon)$ – решение задачи

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta p(\zeta,\tau,\varepsilon), \quad \zeta|_{\tau=0} = z\in E,$$

которая равносильна системе двух уравнений для двух функций вещественного переменного. По теореме о зависимости решений от параметра [15. С. 121] $\zeta = \zeta(\tau, z, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируемо по ε. В круге E для него имеет место разложение по степеням ε вида,

$$\zeta(\tau, z, \varepsilon) = \zeta(\tau, z) + \varepsilon Q(\tau, z) + \alpha(\tau, z, \varepsilon),$$

где $\alpha(\tau, z, \varepsilon)$ ограничено внутри $E\times T\times(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, и $\alpha(\tau, z, \varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри $E\times T$. Раскладывая левую и правую части тождества

$$\zeta'_\tau(\tau,z,\varepsilon) = -\zeta(\tau,z,\varepsilon)p\left(\zeta(\tau,z,\varepsilon),\tau,\varepsilon\right)$$

по степеням ε и сравнивая коэффициенты при ε, получим

$$Q'_\tau(\tau,z)+\left[p\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)+\zeta(\tau,z)p'_\zeta\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)\right]Q(\tau,z)=$$
$$=-\zeta(\tau,z)T\left(\zeta(\tau,z),\tau\right).$$

Пользуясь тождеством

$$\zeta'_\tau(\tau,z) = -\zeta(\tau,z)p\left(\zeta(\tau,z),\tau\right),$$

находим, что

$$-\left[p\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)+\zeta(\tau,z)p'_\zeta\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)\right] = \frac{d\ln\zeta'_z(\tau,z)}{d\tau}.$$

Видим, что $Q(\tau, z)$ является решением линейного неоднородного уравнения

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{d\ln\zeta'_z(\tau,z)}{d\tau}y-\zeta(\tau,z)T\left(\zeta(\tau,z),\tau\right), y(0)=0.$$

Решив это уравнение, находим $Q(\tau, z)$, и, следовательно,

$$\zeta(\tau,z,\varepsilon) = \zeta(\tau,z)-$$
$$-\varepsilon\zeta'_\tau(\tau,z)\int_0^\tau\frac{\zeta(t,z)}{\zeta'_z(t,z)}T\left(\zeta(t,z),t\right)dt+\alpha(\tau,z,\varepsilon).$$

Классу S принадлежат функции $e^\tau\zeta(\tau, z, \varepsilon)$ при любом фиксированном τ и $f(z,\varepsilon) = \lim_{\tau\to\infty}e^\tau\zeta(\tau,z,\varepsilon)$. Таким образом, умножив обе части последнего равенства на e^{τ} и перейдя к пределу при $\tau \to \infty$, получим искомую вариационную формулу.

Теорема 12. Пусть функция $p(\zeta, \tau, \varepsilon)$ при каждом фиксированном ε, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, принадлежит классу $\mathrm{P}(C,T)$, непрерывно дифференцируема по ε в $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ и имеет разложение в окрестности $\varepsilon = 0$ вида

$$p(\zeta, \tau, \varepsilon) = p(\zeta, \tau) + \varepsilon T(\zeta, \tau) + \gamma(\zeta, \tau, \varepsilon),$$

где $\gamma(\zeta, \tau, \varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри $E\times T$. Тогда в классе $S(C, T)$ имеет место вариационная формула

$$f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon f(z)\int_0^{\infty}\left(\frac{\zeta'_{\tau}(\tau,z)}{\zeta(\tau,z)}\right)^2 T\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)d\tau + o(z,\varepsilon),$$

где $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\frac{\zeta}{p(\zeta,\tau)}, \quad \zeta\big|_{\tau=0} = z \in E. \tag{15}$$

Доказательство. Поскольку наряду с функцией $p(\zeta, \tau)$ классу $\mathrm{P}(C,T)$ принадлежит и функция $1/p(\zeta, \tau)$, для любой $f(z) \in S(C, T)$ найдется такая функция $p(\zeta, \tau) \in \mathrm{P}(C,T)$, что $f(z) = \lim\limits_{\tau\to\infty} e^{\tau}\zeta(\tau,z)$, где $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения (15).

Пусть $\zeta(\tau, z, \varepsilon)$ является решением задачи

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\frac{\zeta}{p(\zeta,\tau,\varepsilon)}, \zeta\big|_{\tau=0} = z \in E.$$

и имеет в E, как и при доказательстве предыдущей теоремы, разложение по степеням ε вида

$$\zeta(\tau, z, \varepsilon) = \zeta(\tau, z) + \varepsilon Q(\tau, z) + \alpha(\tau, z, \varepsilon).$$

Раскладывая левую и правую части тождества

$$p\left(\zeta(\tau,z,\varepsilon),\tau,\varepsilon\right)\zeta'_{\tau}(\tau,z,\varepsilon) = -\zeta(\tau,z,\varepsilon)$$

по степеням ε и сравнивая коэффициенты при ε, получим равенство

$$p\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)Q'_{\tau}(\tau,z) + \left[1+\zeta'_{\tau}(\tau,z)\,p'_{\zeta}\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)\right]Q(\tau,z) = -\zeta'_{\tau}(\tau,z)T\left(\zeta(\tau,z),\tau\right).$$

Пользуясь тождеством

$$p\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)\zeta'_{\tau}(\tau,z) = -\zeta(\tau,z),$$

находим, что

$$\left[1+\zeta'_{\tau}(\tau,z)\,p'_{\zeta}\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)\right] = -\frac{\left(p\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)\zeta'_{\tau}(\tau,z)\right)'_{\tau}}{\zeta'_{\tau}(\tau,z)} = 1,$$

$$p\left(\zeta(\tau,z),\tau\right) = -\frac{\zeta(\tau,z)}{\zeta'_{\tau}(\tau,z)}.$$

Видим, что $Q(\tau, z)$ является решением линейного неоднородного уравнения

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{\zeta'_{\tau}(\tau,z)}{\zeta(\tau,z)}y + \frac{\zeta'_{\tau}(\tau,z)^2}{\zeta(\tau,z)}T\left(\zeta(\tau,z),\tau\right), y(0) = 0.$$

Решив это уравнение, находим $Q(\tau, z)$, и, следовательно,

$$\zeta(\tau,z,\varepsilon) = \zeta(\tau,z) + \varepsilon\zeta(\tau,z)\int_0^{\tau}\left(\frac{\zeta'_t(t,z)}{\zeta(t,z)}\right)^2 T\left(\zeta(t,z),t\right)dt + \alpha(\tau,z,\varepsilon).$$

Классу S принадлежит функция $e^{\tau}\zeta(\tau, z, \varepsilon)$ при любом фиксированном τ и $f(z,\varepsilon) = \lim\limits_{\tau\to\infty} e^{\tau}\zeta(\tau,z,\varepsilon)$. Таким образом, умножив обе части последнего равенства на e^{τ} и перейдя к пределу при $\tau \to \infty$, получим искомую вариационную формулу.

§5. ОБЪЕДИНЕННЫЕ МЕТОДЫ

Метод внутренних вариаций при решении экстремальных задач приводит к некоторым дифференциально-функциональным уравнениям для экстремальных функций. Качественный анализ уравнений показывает, что часто эти функции отображают единичный круг на плоскость, разрезанную по кусочно-аналитической кривой. Для таких функций $f(z)$ всегда найдется $p(\zeta, \tau) \in \mathrm{P}(C,T)$, такая, что

$$f(z) = \lim_{\tau\to\infty} e^{\tau}\zeta(\tau,z),$$

где $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения Левнера – Куфарева. Это привело к мысли комбинировать вариационный и параметрический методы. Разные способы объединения методов были предложены Н.А. Лебедевым [10] и П.П. Куфаревым [11]. Теорема 13 представляет содержание метода Н.А. Лебедева, а теорема 14 – П.П. Куфарева. Теорема 15, предложенная М. Шиффером [12] для такого же типа функций, приведена в новой редакции в терминах параметрического метода.

Теорема 13. Пусть $f(z) \in S(\mathrm{C}, T)$. Тогда при достаточно малых ε классу S принадлежит функция

$$f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon f(z)\sum_{k=1}^{m}\left\{A_k H^2\left(\zeta(\tau,z_k)\right)\frac{f(z)}{f(z)-f(z_k)} - \frac{A_k}{2}L\left(\zeta(\tau,z),\zeta(\tau,z_k)\right) - \frac{\overline{A}_k}{2}L\left(\zeta(\tau,z),\frac{1}{\overline{\zeta(\tau,z_k)}}\right)\right\} + o(z,\varepsilon),$$

где z_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, – различные точки из E, A_k – произвольные комплексные постоянные, $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения (14),

$$H(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}, L(z,a) = H(z)\frac{z+a}{z-a} + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $w=f_0(\zeta)\in S$. Фиксируем в круге E точки $\zeta_k = \zeta(\tau, z_k)$, $k = 1,2,\ldots m$. В силу однолистности решения уравнения Левнера – Куфарева, все они различны. Согласно теореме 2, классу S принадлежит функция

$$f(\zeta,\varepsilon) = f_0(\zeta) + \varepsilon f_0(\zeta)\sum_{k=1}^{m}\left\{A_k H^2(\zeta_k)\frac{f_0(\zeta)}{f_0(\zeta)-f_0(\zeta_k)} - \frac{A_k}{2}L(\zeta,\zeta_k) - \frac{\overline{A}_k}{2}L\left(\zeta,\frac{1}{\overline{\zeta}_k}\right)\right\} + o(\zeta,\varepsilon).$$

Сделав здесь замену $\zeta=\zeta(\tau, z)$ и $f(z)=f_0(\zeta(\tau, z))$, получим искомую вариационную формулу.

Пусть $f(z)=z+c_2z^2+\ldots\in S$ отображает круг E на область $B_0=\mathbb{C}\backslash L$, где L – кусочно-гладкая кривая, с параметрическим уравнением $w=\varphi(t)$, $0\le t\le\infty$. Функция $\varphi(t)$ такова, что область B_τ, полученная из плоскости проведением разреза $w=\varphi(t)$, $\tau\le t\le\infty$, односвязна. Будем считать параметризацию семейства областей B_τ стандартной, то есть функция $w=\Psi(z,\tau)$, $\Psi(z,0)=f(z)$, однолистно и конформно отображающая E на B_τ, нормирована разложением

$$\Psi(z,\tau)=e^{\tau}(z+c_2(\tau)z^2+\ldots).$$

Обратную к $\Psi(z,\tau)$ функцию обозначим через $F(w,\tau)$. Очевидно, $F(0,\tau)=0$, $F'(0,\tau)=e^{-\tau}$.

Теорема 14. В классе S имеет место вариационная формула

$$f(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\left\{A_kH^2(z_k,\tau)\frac{f^2(z)}{f(z)-f(z_k)}-\right.$$
$$\left.-\frac{A_k}{2}Q(z,z_k,\tau)-\frac{\overline{A}_k}{2}Q\left(z,\frac{1}{\overline{z}_k},\tau\right)\right\}+o(z,\varepsilon),$$

где z_k, $k=1,2,\ldots,m$, $m\in\mathbb{N}$, – различные точки из E, A_k – произвольные комплексные постоянные,

$$H(z,\tau)=\frac{z\Psi'_z(z,\tau)}{\Psi(z,\tau)}=\frac{F(f(z),\tau)}{f(z)F'_w(f(z),\tau)},$$

$$Q(z,a,\tau)=\frac{1}{2}\frac{F(f(z),\tau)}{F'_w(f(z),\tau)}\frac{a+F(f(z),\tau)}{a-F(f(z),\tau)}-\frac{f(z)}{2}.$$

Доказательство. Согласно теореме 2, отображение круга E на некоторую близкую к B_τ область B_τ^* имеет вид

$$\Psi^*(z,\tau)=\Psi(z,\tau)+$$
$$+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\left\{A_kH^2(z_k,\tau)\frac{\Psi^2(z,\tau)}{\Psi(z,\tau)-\Psi(z_k,\tau)}+\right.$$
$$\left.+A_kK(z,z_k,\tau)+\overline{A}_kK\left(z,\frac{1}{\overline{z}_k},\tau\right)\right\}+o(z,\varepsilon),$$

где $$K(z,a,\tau)=\frac{1}{2}\left[z\Psi'_z(z,\tau)\frac{a+z}{a-z}-\Psi(z,\tau)\right].$$

Функция $w^*(w,\tau)=\Psi^*(F(w,\tau),\tau)$, с одной стороны, отображает область B_τ на B_τ^*, с другой – B_0 на область B_0^*, близкую к B_0. Разложение $w^*(w,\tau)$ по степеням ε имеет вид

$$w^*(w,\tau)=w+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\left\{A_k\left[\frac{F(w_k,\tau)}{w_kF'_w(w_k,\tau)}\right]^2\frac{w^2}{w-w_k}+\right.$$
$$+\frac{A_k}{2}\left[\frac{F(w,\tau)}{F'_w(w,\tau)}\frac{z_k+F(w,\tau)}{z_k-F(w,\tau)}-w\right]+$$
$$\left.+\frac{\overline{A}_k}{2}\left[\frac{F(w,\tau)}{F'_w(w,\tau)}\frac{1+\overline{z}_kF(w,\tau)}{1-\overline{z}_kF(w,\tau)}-w\right]\right\}+o(\varepsilon).$$

Заменив в этой формуле w на $f(z)$, получим искомую формулу.

Теорема 15. В классе S имеет место вариационная формула

$$f^*(z)=f(z)+e^{-\tau}\left[2e^{i\theta}-c_2(\tau)\right]f^2(z)+$$
$$+e^{-2\tau}\left[3e^{2i\theta}-4e^{i\theta}c_2(\tau)+2c_2{}^2(\tau)-c_3(\tau)\right]f^3(z)+$$
$$+o\left(z,e^{-2\tau}\right),$$

где $0\le\theta<2\pi$, $\lim\limits_{\tau\to\infty}\left[e^{2\tau}o\left(e^{-2\tau}\right)\right]=0$, и $c_k(\tau)$, $k=2,3$, – коэффициенты тейлоровского разложения производящей для $f(z)$ функции $\Psi(z,\tau)$.

Доказательство. Пусть

$$\Phi(z,\tau',\tau'')=F(\Psi(z,\tau'),\tau''),\ \tau'<\tau''.$$

Запишем функцию

$$g(z)=\frac{e^{\tau}\Phi(z,0,\tau)}{\left[1-e^{i\theta}\Phi(z,0,\tau)\right]^2}.$$

Она голоморфна и однолистна в E как композиция голоморфных и однолистных функций. Легко увидеть, что $g(0)=0$, $g'(0)=1$. Таким образом, $g(z)\in S$. Вычисления показывают, что

$$\Phi(z,0,\tau)=e^{-\tau}\left[f(z)-e^{-\tau}c_2(\tau)f^2(z)+\right.$$
$$\left.+e^{-2\tau}\left(2c_2{}^2(\tau)-c_3(\tau)\right)f^3(z)+\ldots\right].$$

Подставляя это выражение в разложение функции $g(z)$ по степеням $\Phi(z,0,\tau)$, получим искомую вариационную формулу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
2. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
3. *Хейман В.К.* Многолистные функции. М.: ИЛ, 1960. 182 с.
4. *Бабенко К.И.* К теории экстремальных задач для однолистных функций класса S // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1972. Т.101. С.1–318.
5. *Pommerenke Ch.* Univalent Functions. Göttingen, 1975.
6. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: ТГУ, 2001. 220 с.
7. *Pommerenke Ch.* On a variational method for univalent functions // Michigan Math. J. 1970. V. 17. P. 1–3.
8. *Базилевич И.Е.* Обобщение одной интегральной формулы для подкласса однолистных функций // Матем. сб. 1964. Т. 100. С. 628–630.
9. *Лебедев Н.А.* Метод вариаций в конформном отображении // ДАН СССР. 1951. Т. 76. № 1. С. 25–27.
10. *Куфарев П.П.* Об одном методе исследования экстремальных задач теории однолистных функций // ДАН СССР. 1956. Т. 107. № 5. С. 633–635.
11. *Schiffer M.* On the coefficient problem for schlicht functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V.134. No. 1. P. 95–101.
12. *Schiffer M.* Variation of the Green function and theory of the p–valued functions // Amer. Journ. Math. 1943. V. 65. P. 341–360.
13. *Голузин Г.М.* Метод вариаций в конформном отображении // Матем. сб. 1946. Т. 19. С. 203–236.
14. *Александров И.А.* Вариация звездообразных функций // Вопросы математики. Тр. Том. ун-та. 1961. Т. 155. С. 61–71.
15. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 280 с.

Статья представлена кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 15 октября 2003 г.