УДК 515.122.532

Я.С. Гриншпон

НОРМАЛЬНОСТЬ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОЙ ТОПОЛОГИИ РАЗДЕЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Исследуется свойство нормальности вполне регулярной топологии раздельной непрерывности в случае произведения сепарабельного метрического пространства на себя и в случае произведения паракомпактного пространства на разреженное пространство.

Пусть X и Y – произвольные вполне регулярные пространства. В [1] Найт, Моран и Пим определили на множестве $X \times Y$ топологическое пространство $X \tilde{\otimes} Y$, удовлетворяющее следующему условию: $X \tilde{\otimes} Y$ вполне регулярно, и для любого вполне регулярного пространства Z отображение $f : X \times Y \to Z$ раздельно непрерывно тогда и только тогда, когда $f : X \tilde{\otimes} Y \to Z$ непрерывно. Пространство $X \tilde{\otimes} Y$ будем называть произведением пространств X и Y с вполне регулярной топологией раздельной непрерывности. В [1 и 2] приведены некоторые достаточные условия нормальности вполне регулярной топологии раздельной непрерывности в случае, когда хотя бы один из сомножителей обладает свойством типа счетности (счетность или локальная счетность). В данной работе исследована нормальность для произведения широких классов топологических пространств с вполне регулярной топологией раздельной непрерывности.

КВАДРАТ СЕПАРАБЕЛЬНОГО МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть X – сепарабельное метрическое пространство, $D : X \to X \times X$ – отображение, заданное по правилу $D(x) = (x, x)$. Множество $D(X)$ будем называть диагональю пространства X.

Лемма 1. Пусть X – метрическое пространство. Тогда диагональ пространства X дискретна в $X \tilde{\otimes} X$.

Доказательство. Пусть $a \in X$. Так как множества $\{(a,x); x \in X\} \cup \{(x,a); x \in X\} \setminus \{D(a)\}$ и $D(X \setminus \{a\})$ замкнуты в метрическом пространстве $X \times X \setminus \{D(a)\}$, то существует непрерывная функция $f : X \times X \setminus \{D(a)\} \to [0;1]$, которая равна нулю в точке (x, y), как только $x = a$ или $y = a$, и равна единице на диагонали. Продолжим функцию f на $X \times X$, положив $f(a,a) = 0$. Тогда f раздельно непрерывна и значит непрерывна относительно топологии $X \tilde{\otimes} X$. Следовательно, любая точка в пространстве $D(X)$ с топологией, наследуемой из пространства $X \tilde{\otimes} X$, изолирована.

Лемма 2. Пусть Y – топологическое пространство со счетной базой без изолированных точек. Тогда существуют всюду плотные в Y множества A и B, такие, что $A \cap B = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ – база пространства Y. Для каждого натурального n обозначим через a_n и b_n две произвольные различные точки из множества $U_n \setminus \{a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$. Тогда множества $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, очевидно, будут искомыми.

Пусть X и Y – метрические пространства и V – произвольная окрестность точки (x, y) в пространстве $X \tilde{\otimes} Y$. Назовем крестовым радиусом окрестности V число $r(V)$, вычисляемое по правилу $r(V) = \sup\{\varepsilon > 0; \{x\} \times U_Y(y, \varepsilon) \cup U_X(x, \varepsilon) \times \{y\} \subset V\}$, где $U_X(x, \varepsilon)$ – шар радиуса ε с центром в точке x в пространстве X.

Заметим, что если даны две окрестности V_0 и V_1 точек (x_0, y_0) и (x_1, y_1) соответственно, причем $\min\{r(V_0), r(V_1)\} > \max\{\rho_X(x_0, x_1), \rho_Y(y_0, y_1)\}$ (*), то $V_0 \cap V_1 \neq \varnothing$.

Теорема 3. Пусть X – сепарабельное метрическое пространство, содержащее полное подпространство без изолированных точек. Тогда пространство $X \tilde{\otimes} X$ не является нормальным.

Доказательство. Пусть $Y \subset X$ – полное сепарабельное метрическое пространство без изолированных точек. Обозначим тогда $F_0 = D(A)$ и $F_1 = D(Y \setminus A) \supset D(B)$, где A и B – множества из леммы 2. Так как диагональ пространства X замкнута и дискретна (лемма 1), то F_0 и F_1 замкнуты в пространстве $X \tilde{\otimes} X$. Покажем, что F_0 и F_1 нельзя отделить окрестностями в пространстве $X \tilde{\otimes} X$.

Пусть G_0 и G_1 – произвольные окрестности множеств F_0 и F_1 соответственно. Тогда для каждого $y \in Y$ существует такое открытое в $X \tilde{\otimes} X$ множество V_y, что $D(y) \in V_y \subset G_i$, где $i = 0$ или $i = 1$.

Для каждого натурального n обозначим: $Y_n = \{y \in Y; r(V_y) \geq 1/n\}$. Очевидно, что $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Тогда, применяя теорему Бэра о категориях, получаем, что при некотором n_0 множество Y_{n_0} не является нигде не плотным в Y, т.е. существуют $z \in Y$ и $\varepsilon > 0$, такие, что $U_Y(z, \varepsilon) \subset \overline{Y_{n_0}}^{Y}$, причем можно считать, что $\varepsilon < 1/2n_0$. Для множества $U = U_{Y_{n_0}}(z,\varepsilon)$ возможны три случая: а) $U \cap A = \varnothing$; б) $U \cap (Y \setminus A) = \varnothing$; в) $U \cap A \neq \varnothing$ и $U \cap (Y \setminus A) \neq \varnothing$.

Рассмотрим все эти случаи.

а) Пусть $a \in U_Y(z,\varepsilon) \cap A$ и $b \in U \cap U_Y(a, r(V_a))$. Тогда окрестности V_a и V_b удовлетворяют условию (*), и значит $G_0 \cap G_1 \neq \varnothing$.

б) Пусть $b \in U_Y(z,\varepsilon) \cap (Y \setminus A)$ и $a \in U \cap U_Y(b, r(V_b))$. Тогда окрестности V_a и V_b удовлетворяют условию (*), и значит $G_0 \cap G_1 \neq \varnothing$.

в) Пусть $a \in U \cap A$ и $b \in U \cap (Y \setminus A)$. Тогда окрестности V_a и V_b удовлетворяют условию (*), и значит $G_0 \cap G_1 \neq \varnothing$.

Итак, в любом случае окрестности G_0 и G_1 пересекаются, и значит теорема доказана.

Рассмотрим примеры. Пусть $\boldsymbol{R}$ – пространство действительных чисел, $\boldsymbol{Q}$ – пространство рациональных чисел, $\boldsymbol{K}$ – канторов дисконтинуум, $\boldsymbol{I} = [0;1]$. Тогда пространства $\boldsymbol{R} \tilde{\otimes} \boldsymbol{R}$, $(\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}) \tilde{\otimes} (\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q})$, $\boldsymbol{K} \tilde{\otimes} \boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{I} \tilde{\otimes} \boldsymbol{I}$ не являются нормальными. Таким образом, получаем следующий результат.

Следствие 4. Пусть X – метрический компакт. Тогда пространство $X \tilde{\otimes} X$ не обязательно является нормальным.

Заметим, что если X счетно, то $X \tilde{\otimes} X$ как линделефово регулярное пространство будет нормальным. Значит пространства $\boldsymbol{Q} \tilde{\otimes} \boldsymbol{Q}$, а также $S \tilde{\otimes} S$, где S – произвольное разреженное сепарабельное метрическое пространство [3. § 23], являются нормальными.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПАРАКОМПАКТНОГО И РАЗРЕЖЕННОГО ПРОСТРАНСТВ

Лемма 5. Пусть X – паракомпакт, и пусть в топологическом пространстве Y существует точка ∞, такая, что $X \tilde{\otimes} (Y \setminus \{\infty\})$ нормально. Тогда $X \tilde{\otimes} Y$ также нормально.

Доказательство. Пусть множества A и B замкнуты в пространстве $X \tilde{\otimes} Y$. Докажем сначала, что множества A и B можно отделить окрестностями в некоторых частных случаях расположения множеств A и B.

Случай I. Пусть $A \subset X \times (Y \setminus \{\infty\})$ и $B \subset X \times \{\infty\}$. Обозначим $Z = \{x \in X; (x,\infty) \in B\}$. В силу регулярности пространства $X \tilde{\otimes} Y$, для каждой точки $z \in Z$ существует открытое в $X \tilde{\otimes} Y$ множество U_z, такое, что $(z,\infty) \in U_z \subset \overline{U_z} \subset (X \times Y) \setminus A$. Так как B гомеоморфно замкнутому подпространству Z паракомпакта X, то в открытое покрытие $\{U_z \cap B\}_{z \in Z}$ пространства B можно вписать локально конечное открытое покрытие $\{V_s \times \{\infty\}\}_{s \in S}$. Для каждого индекса $s \in S$ зафиксируем точку $z(s)$, такую, что $V_s \times \{\infty\} \subset U_{z(s)}$, и обозначим $W_s (V_s \times Y) \cap U_{z(s)}$. Семейство $\{W_s\}_{s \in S}$ локально конечно в $X \tilde{\otimes} Y$, следовательно, $B \subset \bigcup_{s \in S} W_s \subset \overline{\bigcup_{s \in S} W_s} = \bigcup_{s \in S} \overline{W_s} \subset \bigcup_{s \in S} \overline{U_{z(s)}} \subset (X \times Y) \setminus A$.

Случай II. Пусть $B \subset X \times (Y \setminus \{\infty\})$. Применяя случай I, найдем открытое в $X \tilde{\otimes} Y$ множество U, такое, что $A \cap (X \times \{\infty\}) \subset U \subset \overline{U} \subset (X \times Y) \setminus B$. Множества $A \setminus U$ и B замкнуты в нормальном пространстве $X \tilde{\otimes} (Y \setminus \{\infty\})$, поэтому существует открытое множество V, такое, что $A \setminus U \subset V \subset \overline{V} \subset (X \times Y) \setminus B$. Получили, что $A \subset U \cup V \subset \overline{(U \cup V)} = \overline{U} \cup \overline{V} \subset (X \times Y) \setminus B$.

Случай III. Пусть $B \subset X \times \{\infty\}$. Так как пространство X нормально, то найдется открытое в X множество U, такое, что

$$A \cap (X \times \{\infty\}) \subset U \times \{\infty\} \subset \overline{U} \times \{\infty\} \subset (X \times \{\infty\}) \setminus B.$$

Применяя случай I, найдем открытое в $X \tilde{\otimes} Y$ множество V, такое, что $A \setminus (U \times Y) \subset V \subset \overline{V} \subset (X \times Y) \setminus B$. Получили, что $A \subset (U \times Y) \cup V \subset \overline{(U \times Y) \cup V} = \overline{U} \times Y \cup \overline{V} \subset (X \times Y) \setminus B$.

Докажем теперь утверждение леммы в общем случае. Применяя случай III, найдем открытое в $X \tilde{\otimes} Y$ множество U, такое, что

$$B \cap (X \times \{\infty\}) \subset U \subset \overline{U} (X \times Y) \setminus A,$$

а применяя случай II, можно найти открытое в $X \tilde{\otimes} Y$ множество V, такое, что $B \setminus U \subset V \subset \overline{V} \subset (X \times Y) \setminus A$. Получили, что

$$B \subset U \cup V \subset \overline{U \cup V} = \overline{U} \cup \overline{V} \subset (X \times Y) \setminus A.$$

Для произвольного разряженного множества Y обозначим $h(Y) = \min\{\alpha; Y^{(\alpha)} = \varnothing\}$, где $Y^{(\alpha)}$ – производное множество порядка α для пространства Y.

Теорема 6. Пусть X – паракомпакт, Y – коллективно нормальное пространство, причем $h(Y)$ – натуральное число. Тогда $X \tilde{\otimes} Y$ нормально.

Доказательство. Пусть $h(Y) = n+1$, и предположим, что для всех пространств $\tilde{Y}$, у которых $h(\tilde{Y}) \leq n$, утверждение теоремы верно.

Так как множество $Y^{(n)}$ дискретно в коллективно нормальном пространстве $Y^{(n-1)}$, то для каждой точки $y \in Y^{(n)}$ существует окрестность U_y^1 в пространстве $Y^{(n-1)}$, такая, что $U_{y_1}^1 \cap U_{y_2}^1 = \varnothing$ при $y_1 \neq y_2$. Множество $Y^{(n-1)} \setminus \bigcup_{y \in Y^{(n)}} U_y^1$ открыто в $Y^{(n-1)}$. Поэтому можно считать, что $Y^{(n-1)} = \bigoplus_{y \in Y^{(n)}} U_y^1$.

Множества U_y^1 образуют дискретное семейство замкнутых множеств в пространстве $Y^{(n-2)}$. Следовательно, существуют открытые в $Y^{(n-2)}$ множества, такие, что $U_y^1 \subset U_y^2$ и $U_{y_1}^2 \cap U_{y_2}^2 = \varnothing$. При этом можно считать, что $Y^{(n-2)} = \bigoplus_{y \in Y^{(n)}} U_y^2$.

Проводя данное построение n раз, получим, что $Y = \bigoplus_{y \in Y^{(n)}} U_y^n$, причем $U_y^n \cap Y^{(n)} = \{y\}$. Значит, для доказательства нормальности пространства $X \tilde{\otimes} Y$ достаточно показать, что при всяком $y \in Y^{(n)}$ пространство $X \tilde{\otimes} U_y^n$ нормально. Другими словами, не умаляя общности, можно считать, что в Y существует точка ∞, такая, что $\left(Y \setminus \{\infty\}\right)^{(n)} = \varnothing$.

По предположению индукции пространство $X \tilde{\otimes} \left(Y \setminus \{\infty\}\right)$ нормально, и для окончания доказательства теоремы осталось применить лемму 5.

Пример 7. Приведем пример компакта X и коллективно нормального разреженного пространства Y, таких, что пространство $X \tilde{\otimes} Y$ не является нормальным. Пусть $X = [1; \omega_1]$, $Y = [1; \omega_1)$, где ω_1 – первый несчетный ординал. В пространстве $X \tilde{\otimes} Y$ возьмем два замкнутых множества $A = \{(z, z); z < \omega_1\}$ и $B = \{\omega_1\} \times Y$.

Предположим, что $X \tilde{\otimes} Y$ нормально. Тогда существует открытое в $X \tilde{\otimes} Y$ множество U, такое, что $A \subset U \subset \overline{U} \subset (X \times Y) \setminus B$. Пусть z_1 – произвольный ординал, меньший ω_1. Для каждого натурального n обозначим

$z_{n+1} = \min\{z;$ для всех $z' \geq z$ выполняется $(z, z_n) \notin U\}$.

Заметим, что определенные таким образом ординалы удовлетворяют условиям: $z_n \leq z_{n+1}$ и $z_n < \omega_1$. Пусть $z_0 = \sup\{z_n; n -$ натуральное число$\}$. Тогда $(z_0, z_n) \notin U$ для всякого натурального n, и, следовательно, $(z_0, z_0) \notin U$. Противоречие.

Пример 7 показывает, что утверждение теоремы 6 для произвольного ординала $h(Y)$ оказывается неверным. Однако если наложить некоторые дополнительные ограничения на пространство Y, то можно доказать результат о нормальности пространства $X \tilde{\otimes} Y$ для пространств Y с произвольным $h(Y)$. При этом нам придется воспользоваться следующим критерием сильной нульмерности [4. § 6.2]:

Лемма 8. Нормальное пространство Y сильно нульмерно тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества F и его окрестности U существует открыто-замкнутое множество V, такое, что $F \subset V \subset U$.

Лемма 9. Пусть Y – сильно нульмерный паракомпакт. Тогда в любое открытое покрытие пространства Y можно вписать дизъюнктное открытое покрытие.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{G}$ – произвольное открытое покрытие пространства Y. Так как Y – паракомпакт, то в $\boldsymbol{G}$ можно вписать локально конечное открытое покрытие $\boldsymbol{U} = \{U_s\}_{s \in S}$. В силу регулярности пространства Y, для каждой точки $y \in Y$ существуют окрестность H_y и индекс $s(y)$, такие, что $\overline{H_y} \subset U_{s(y)}$. Впишем в покрытие $\{H_y\}_{y \in Y}$ локально конечное открытое покрытие $\{A_t\}_{t \in T}$ и для каждого $t \in T$ зафиксируем $s(t)$ так, чтобы $\overline{A_t} \subset U_{s(t)}$. Обозначим $V_s = \bigcup_{s(t)=s} A_t$. Тогда $\boldsymbol{V} = \{V_s\}_{s \in S}$ – открытое покрытие пространства Y, комбинаторно вписанное с замыканием в покрытие $\boldsymbol{U}$.

По лемме 8 получаем, что для каждого $s \in S$ существует открыто-замкнутое множество B_s, такое, что $\overline{V_s} \subset B_s \subset U_s$. Считая множество S вполне упорядоченным, положим $W_s = B_s \setminus \bigcup_{s' < s} B_{s'}$. Тогда семейство $\boldsymbol{W} = \{W_s\}_{s \in S}$ будет искомым дизъюнктным открытым покрытием, вписанным в покрытие $\boldsymbol{G}$.

Теорема 10. Пусть X – паракомпакт, Y – разреженный сильно нульмерный паракомпакт. Тогда $X \tilde{\otimes} Y$ нормально.

Доказательство. А) Пусть $h(Y) = \alpha + 1$ – изолированный ординал, и предположим, что для всех пространств $\tilde{Y}$, у которых $h(\tilde{Y}) \leq \alpha$, утверждение теоремы верно. Для каждой точки $y \in Y^{(\alpha)}$ существует открытое в Y множество U_y, такое, что $U_y \cap Y^{(\alpha)} = \{y\}$. Для всех же точек $y \in Y \setminus Y^{(\alpha)}$ через U_y обозначим произвольную окрестность в пространстве $Y \setminus Y^{(\alpha)}$. По лемме 9 в открытое покрытие $\{U_y\}_{y \in Y}$ можно вписать открытое дизъюнктное покрытие $\{V_s\}_{s \in S}$. Тогда $X \tilde{\otimes} Y = \bigoplus_{s \in S} \left(X \tilde{\otimes} V_s\right)$. По лемме 5 и по предположению индукции все пространства $X \tilde{\otimes} V_s$ являются нормальными, следовательно, и $X \tilde{\otimes} Y$ также будет нормальным.

Б) Пусть $h(Y) = \alpha$ – предельный ординал, и предположим, что для всех пространств $\tilde{Y}$, у которых

$h\left(\tilde{Y}\right) < \alpha$, утверждение теоремы верно. Для каждой точки $y \in Y$ зафиксирум ординал $\beta_y < \alpha$, такой, что $y \notin Y^{\left(\beta_y\right)}$, и обозначим через U_y произвольную окрестность точки y в пространстве $Y \setminus Y^{\left(\beta_y\right)}$. По лемме 9 в открытое покрытие $\left\{U_y\right\}_{y \in Y}$ можно вписать открытое дизъюнктное покрытие $\left\{V_s\right\}_{s \in S}$. Тогда по предположению индукции пространство $X \tilde{\otimes} V_s$ нормально при любом $s \in S$, и, следовательно, пространство $X \tilde{\otimes} Y = \bigoplus_{s \in S}\left(X \tilde{\otimes} V_s\right)$ также нормально.

Следствие 11. Пусть X – паракомпакт, Y – разреженное нульмерное линделефово пространство. Тогда $X \tilde{\otimes} Y$ нормально.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 9 и из того факта, что любое нульмерное линделефово пространство является сильно нульмерным [4. § 6.2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Knight C. J., Moran W., Pym J. S.* The topologies of separate continuity. II//Proc. Camb. Phil. Soc. 1972. No. 71. P. 307-319.
2. *Knight C. J., Moran W., Pym J. S.* The topologies of separate continuity. I//Proc. Camb. Phil. Soc. 1970. No. 68. P. 663-671.
3. *Куратовский К.* Топология. Том 1. М.: Мир, 1966. – 594 с.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. – 752 с.

Статья представлена кафедрой теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 9 июня 2003 г.