

ПОСТРОЕНИЕ И АППРОКСИМАЦИЯ ИЗОЛИНИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННОЙ НАБОРОМ ИСХОДНЫХ ТОЧЕК

Ю.Л. Костюк, А.Л. Фукс

1. Введение

При построении изолиний на трехмерной однозначной поверхности, заданной набором исходных точек $\{x_i, y_i, z_i\}$, вначале строится вспомогательная сетка с узлами $\{x_i, y_i\}$ на горизонтальной плоскости XOY . В общем случае исходный набор точек является нерегулярным, поэтому используется треугольная сетка. Для этого на множестве точек $\{x_i, y_i\}$ строится триангуляция, чаще всего – триангуляция Делоне. Значения z_i в каждой вершине триангуляции определяют систему пространственных треугольников, являющуюся кусочно-линейной интерполирующей поверхностью.

Далее будем использовать обозначения $A = \{x_A, y_A, z_A\}$ для точек в пространстве и $A = \{x_A, y_A\}$ для их проекций на любую горизонтальную плоскость. Соответственно, AB и ABC – это отрезок и треугольник в пространстве, AB и ABC – их проекции. Пусть $z = z_0$ – секущая плоскость, AB – ребро сетки. Если $(z_A - z_0) \cdot (z_B - z_0) \leq 0$, то отрезок AB пересекает изолинию. При использовании линейной интерполяции предполагается, что если AB – ребро триангуляции, то отрезок AB целиком принадлежит поверхности. Узловые точки изолиний рассчитываются элементарно, но обычно располагаются очень неравномерно, а вычисляемые по ним линии сильно осциллируют. При попытках сглаживания этих линий могут возникнуть недопустимые пересечения (например, пересечения изолиний разных уровней).

Те же проблемы возникают и после сглаживания поверхности на ребрах сетки. Конечно, в каждой прямоугольной (при регулярных отсчетах) или треугольной ячейке сетки можно построить участок гладкой интерполирующей поверхности со сшиванием на границах ячеек, но отслеживание изолинии становится при этом слишком трудоемким процессом [1,2].

Мы предлагаем не сразу определять узловые точки, а вначале вычислять область допустимого расположения искомой изолинии в виде двух ограничивающих непересекающихся ломаных и только потом строить изолинию внутри этой области, как «коридора». Например, при построении изолинии с помощью вспомогательной сетки будем определять не конкретную точку пересечения отрезка AB с изолинией, а отрезок LR на проекции AB на плоскость $z = z_0$, образованный точками, через которые в принципе может проходить изолиния при использовании различных методов интерполяции поверхности вдоль ребра AB . В дальнейшем будем опускать координату z для изолиний и точек L и R , полагая, что все они лежат в одной горизонтальной плоскости. Так как ограничивающие

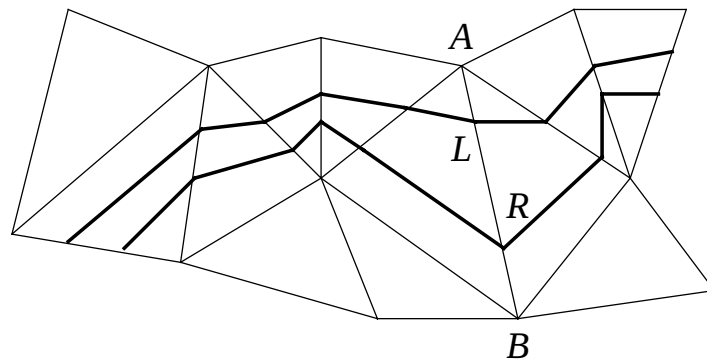


Рис. 1. Выделение коридора на треугольной сетке.

кривые являются ломаными, то точки L и R – это пара противоположащих вершин двух границ коридора (рис. 1).

2. Построение коридора

Пусть плоскость $z = z_0$ пересекает ребро AB пространственного треугольника. Если предполагается, что поверхность гладкая, а линейная интерполяция не обеспечивает необходимой точности, то AB заменим таким сегментом кривой, что:

- данная кривая лежит в вертикальной плоскости, проходящей через AB ;
- наклоны в точках A и B непрерывны и определяются положением плоскости, касательной к гладкой непрерывной поверхности;
- функция, описывающая кривую, является однозначной на AB .

Касательную плоскость в любой вершине A можно определить следующим образом. Пусть A – это общая вершина треугольников AB_1B_2 , AB_2B_3 , ..., $AB_{k-1}B_k$ (B_k может совпадать с B_1), причем порядок задания вершин в треугольниках соответствует их обходу против часовой стрелки. Находим нормальные векторы плоскостей треугольников как векторные произведения $N_i = AB_i \times AB_{i+1}$ и нормируем их на единичную длину. Вычисляем нормальный вектор касательной плоскости как взвешенную сумму нормалей треугольников $N_{kn} = \sum_{i=1}^{k-1} w_i \cdot N_i$. Вес w_i треугольника i должен увеличиваться при увеличении угла B_iAB_{i+1} и уменьшаться при увеличении длин отрезков AB_i и AB_{i+1} . В качестве оценки величины угла можно использовать значение $\sqrt{1 - \cos(B_iAB_{i+1})}$, где косинус угла вычисляется через скалярное произведение векторов AB_i и AB_{i+1} . Тогда

$$w_i = \frac{\sqrt{1 - \cos(B_iAB_{i+1})}}{\sqrt{(x_{B_i} - x_A)^2 + (y_{B_i} - y_A)^2} \cdot \sqrt{(x_{B_{i+1}} - x_A)^2 + (y_{B_{i+1}} - y_A)^2}}.$$

Веса можно не нормировать, так как нас интересует только направление $N_{\kappa n}$.

Вектор $N_v = \{y_B - y_A, x_A - x_B, 0\}$ – это нормальный вектор вертикальной плоскости, проходящей через AB . Направляющим вектором касательной прямой (линии пересечения плоскостей $N_{\kappa n}$ и N_v) в точке A является $N_A = N_{\kappa n} \times N_v$. Отметим, что в силу однозначности поверхности в сетке нет треугольников, у которых все три вершины лежат в одной вертикальной плоскости, поэтому вектор N_v не нулевой, а все векторы N_i и, следовательно, $N_{\kappa n}$ имеют положительную z -координату. Поэтому вектор N_A не может быть вертикальным, т.е. его x - и y -координаты не могут одновременно равняться нулю.

Пусть в конечных точках ребра AB вычислены направляющие вектора касательных $N_A = \{x'_A, y'_A, z'_A\}$ и $N_B = \{x'_B, y'_B, z'_B\}$. Для упрощения дальнейших выводов сдвинем систему координат в точку $\{x_A, y_A, 0\}$ и повернем вокруг оси Z так, чтобы точка $\{x_B, y_B, 0\}$ оказалась на положительной полуоси X . В новой системе координат точки и векторы имеют координаты:

$$A = \{0, 0, z_A\}, B = \{x_1, 0, z_B\}, N_A = \{x'_0, 0, z'_A\}, N_B = \{x'_1, 0, z'_B\},$$

где $x_1 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, $x'_0 = \sqrt{(x'_A)^2 + (y'_A)^2}$, $x'_1 = \sqrt{(x'_B)^2 + (y'_B)^2}$, причем $x'_0 > 0, x'_1 > 0$.

Далее координата y не используется и все построения производятся в вертикальной плоскости XOZ .

Отношения z'_A/x'_0 и z'_B/x'_1 определяют наклоны в точках A и B , а по двум наклонам и двум значениям функции z_A и z_B можно построить отрезок непараметрического кубического сплайна

$$z(x) = \sum_{i=0}^3 c_i \cdot x^i, \quad 0 \leq x \leq x_1 \quad (1)$$

или в параметрическом виде

$$x(t) = x_1 \cdot t, \quad z(t) = \sum_{i=0}^3 c_i \cdot x_1^i \cdot t^i, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2)$$

X -составляющая скорости движения точки вдоль данной кривой $x'(t) = x_1 = \text{const}$, поэтому общая скорость в точке будет тем выше, чем больше в ней угол наклона, и «выпуклость» кривой будет зависеть от положения отрезка AB (рис. 2).

«Равномерно выпуклую» кривую можно построить с помощью локальных параметрических кубических сплайнов

$$x(t) = \sum_{i=0}^3 a_i \cdot t^i, \quad z(t) = \sum_{i=0}^3 b_i \cdot t^i, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3)$$

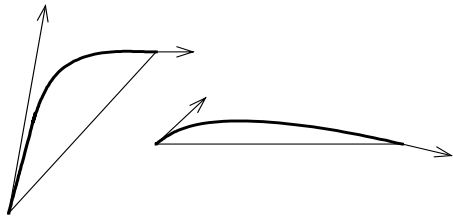


Рис. 2. Сегменты непараметрического кубического сплайна.

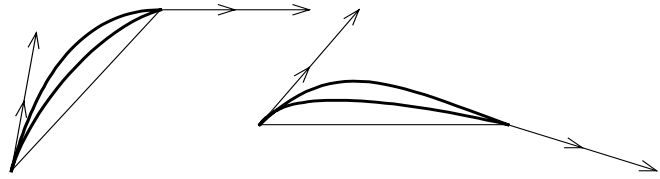


Рис. 3. Сегменты «равномерно выпуклого» параметрического кубического сплайна.

при условии равенства длин векторов производной на концах отрезка [3]. Для этого необходимо сначала нормировать векторы производных в A и B на единичную длину. Пусть в результате получены векторы $\{k_A \cdot x'_0, k_A \cdot z'_A\}$ и $\{k_B \cdot x'_1, k_B \cdot z'_B\}$. Увеличивая или уменьшая значения всех четырех координат в равное число раз, можно получать более или менее выпуклые кривые, при этом в A и B сохраняются наклоны, т.е. отношения z'/x' (рис. 3).

Функция $z(x)$ должна быть однозначной на AB . Для этого необходимо, чтобы условие $x'(t) > 0$ выполнялось при любом t , $0 \leq t \leq 1$. Дифференцируя (3), получим $x'(t) = 3a_3 \cdot t^2 + 2a_2 \cdot t + a_1$. Составим из соотношений (3) систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов полинома, задав значения для $x(t), x'(t)$ при $t=0$ и $t=1$ с учетом нормировки. Решив эту систему, получим коэффициент $a_3 = k_A \cdot x'_0 + k_B \cdot x'_1 - 2 \cdot x_1$. Если длину векторов производных увеличить в d раз, то $a_3 = d \cdot (k_A \cdot x'_0 + k_B \cdot x'_1) - 2 \cdot x_1$. Так как $x'_0 > 0$, $x'_1 > 0$, а $x'(t)$ – парабола, то $x'(t) > 0$ для любого t , если $a_3 \leq 0$. Следовательно, максимальная допустимая длина модулей производных в A и B составляет $d_{\max} = 2 \cdot x_1 / (k_A \cdot x'_0 + k_B \cdot x'_1)$.

Изменяя длину векторов производных в точках A и B от 0 до $d_{\max}$, можно получать различные однозначные по x кривые для интерполяции поверхности на ребре AB . Сегмент на вертикальной плоскости, внутри которого лежат все эти кривые, ограничивают линии, соответствующие значениям $d=0$ (отрезок AB) и $d=d_{\max}$ (самая выпуклая кривая). Аналогичный по назначению сегмент можно ограничить также отрезком AB и кривой (1). Точки пересечения L и R граничных линий сегмента и плоскости $z = z_0$ определяют отрезок, который пересекают всевозможные линии уровня z_0 , поэтому будем считать L и R противолежащими вершинами двух границ коридора (рис. 4а).

В более сложных случаях взаимного расположения границ сегмента и секущей плоскости используем следующие правила:

1. Если плоскость $z = z_0$ пересекает граничную кривую, но не пересекает AB , то будем считать, что пересечение вообще отсутствует.

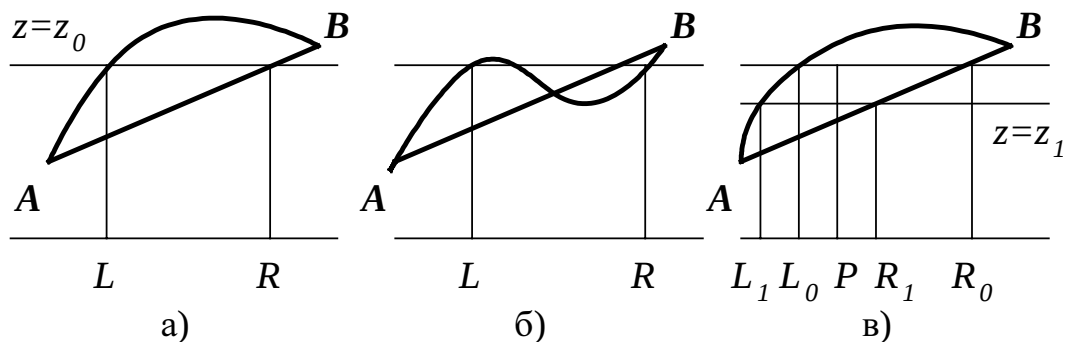


Рис. 4. Определение пары граничных вершин коридора.

2. Если граничная кривая имеет точку перегиба и немонотонна, то она может иметь 3 точки пересечения с плоскостью. В этом случае выберем в качестве L и R две наиболее удаленные друг от друга точки из множества точек пересечения (рис. 4б).
3. Если AB пересекают две плоскости $z = z_0$ и $z = z_1$, то соответствующие им отрезки L_0R_0 и L_1R_1 могут иметь общие точки, например, точки L_0 и R_1 лежат внутри L_1R_0 . Чтобы коридоры разных изолиний не пересекались, принудительно разделим отрезки, заменяя L_0 и R_1 точкой P – центром отрезка L_0R_1 (рис. 4в).

Для снижения трудоемкости расчет нормальных векторов касательных плоскостей во всех вершинах следует проводить заранее, до начала поиска изолиний. Расчет пар вершин границ коридора лучше объединить с отслеживанием изолиний, которое превратится, таким образом, в отслеживание границ коридора.

3. Ломаная минимальной длины

Если необходимо уменьшить осцилляцию изолинии и сократить число используемых для ее построения узловых точек, причем гладкости линии не требуется, то в качестве наиболее подходящей можно выбрать ломаную минимальной длины с заданными начальной и конечной точками. Эта ломаная по форме подобна резиновой нити с двумя закрепленными концами, растянутой внутри коридора. Для построения ломаной предлагается следующий алгоритм.

Алгоритм построения ломаной минимальной длины внутри коридора. Пусть $L_1, L_2, \dots, L_n$ – вершины левой границы, $R_1, R_2, \dots, R_n$ – вершины правой границы, точка M – текущая вершина минимальной ломаной. Начальная текущая точка M – это центр отрезка L_1R_1 , а лучи ML_1 и MR_1 определяют начальный сектор видимости из текущей точки. При переходе к следующим парам вершин (L_2 и R_2 , L_3 и R_3 , и т.д., рис. 5) сектор видимости может только

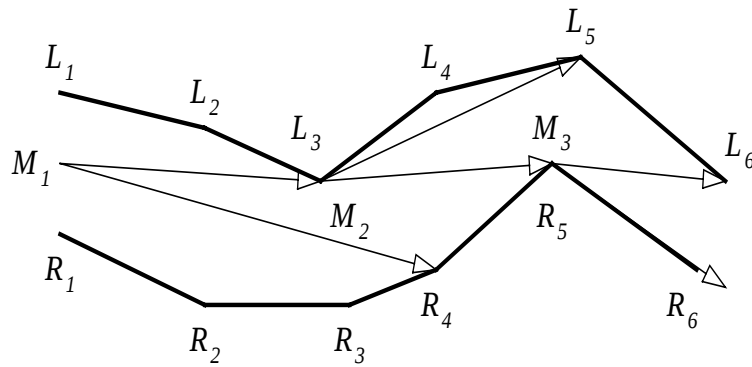


Рис. 5. Построение ломаной минимальной длины.

уменьшаться, т.е. его правый луч может повернуться только влево, а левый – только вправо.

В процессе проверки пар необходимо запоминать вершины L_{mr} и R_{ml} , через которые проходят лучи ML_{mr} и MR_{ml} , являющиеся границами текущего сектора видимости, так как следующей текущей точкой станет либо L_{mr} , либо R_{ml} . Пусть при проверке вершин L_k и R_k , $k > ml$, $k > mr$, в результате очередного поворота луч MR_k оказался левее луча ML_{mr} (MR_5 левее ML_3 на рис. 5). Это означает, что левая граница закрывает весь отрезок $L_k R_k$ ($L_5 R_5$ на рис. 5) и необходимо перейти к новой текущей точке. В качестве нее выбирается вершина левой границы L_{mr} (точка L_3 на рис. 5). Новый начальный сектор образуют лучи $L_{mr} L_{mr+1}$ и $L_{mr} R_{mr}$ ($L_3 L_4$ и $L_3 R_3$ на рис. 5), при этом последующая проверка начинается с пары $mr+1$. При повороте коридора вправо картина симметрична. Процесс завершается, когда из текущей вершины будет видна конечная точка ломаной (если изолиния замкнутая, то начальная точка минимальной ломаной совпадает с конечной).

Легко показать, что каждая текущая вершина будет принадлежать ломаной минимальной длины: замена ее на любую другую точку отрезка, соединяющего пару вершин левой и правой границ коридора, может только удлинить ломаную.

Трудоемкость алгоритма определяется числом вершин ломаной и числом проверок пар вершин коридора в каждой вершине ломаной. Эти две величины обычно зависят от ширины коридора: при ее уменьшении сужается сектор видимости, поэтому число вершин ломаной увеличивается, а число проверок пар уменьшается.

Отметим, что построение ломаной минимальной длины можно производить прямо в процессе отслеживания границ коридора.

3. Построение гладких изолиний

Часто требуется, чтобы получаемая линия была гладкой, причем обычно достаточно непрерывности ее наклона. Если по вершинам минимальной ломаной строить параметрические сплайны, то нельзя гарантировать, что линия будет целиком лежать в коридоре.

Мы предлагаем заменять звенья ломаной минимальной длины кривыми Безье [1]:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot J_{n,i}(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где $J_{n,i}(t) = C_n^i \cdot t^i \cdot (1-t)^{(n-i)}$ – полиномы Бернштейна, а P_i – вершины характеристического многоугольника, причем обычно достаточно использовать кубические кривые Безье ($n=3$).

Пусть M_k, M_{k+1} – две соседние вершины минимальной ломаной. Тогда кривую Безье на k -м отрезке определяют четыре вершины многоугольника, причем $P_0 = M_k, P_3 = M_{k+1}$, а дополнительные точки P_1 и P_2 задают наклоны в M_k и M_{k+1} . Если на $(k-1)$ -м участке кривую Безье определяют точки Q_0, Q_1, Q_2 и Q_3 , то, естественно, $Q_3 = P_0 = M_k$, а для обеспечения непрерывности наклона в M_k точки Q_2, M_k и P_1 должны лежать на одной прямой. В силу того, что $J_{n,i}(t) \geq 0$ и $\sum_{i=0}^n J_{n,i}(t) = 1$, сегмент кривой Безье целиком лежит в выпуклой оболочке точек P_i . Поэтому дополнительные точки P_1 и P_2 на каждом участке минимальной ломаной нужно задавать так, чтобы обеспечивалось гладкое сшивание соседних кривых, а выпуклая оболочка точек P_0, P_1, P_2, P_3 целиком лежала внутри коридора.

Наклоны кривой Безье в каждой вершине минимальной ломаной можно вычислить, используя простые методы для локальных трехточечных кубических сплайнов [3]. Затем на прямых, определяемых этими наклонами, необходимо так расположить точки P_1 и P_2 , чтобы кривая целиком попадала в коридор.

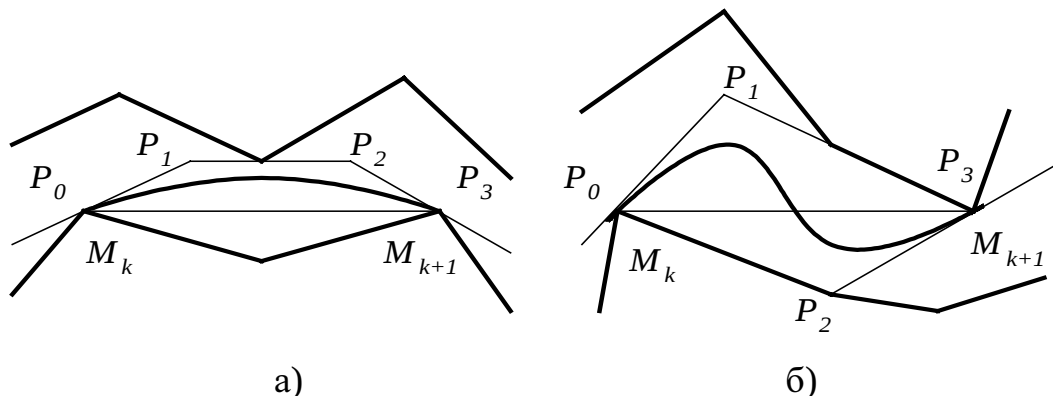


Рис. 6. Сегменты кривой Безье внутри коридора.

дор. Если точки M_k и M_{k+1} ломаной принадлежат одной границе коридора, то это соответствует выпуклому участку кривой, и достаточно найти трапецию $P_0P_1P_2P_3$ (рис. 6а). Если M_k и M_{k+1} лежат на разных границах коридора, то это соответствует участку перегиба, и требуется найти два треугольника $P_0P_1P_3$ и $P_0P_2P_3$ (рис. 6б). В обоих случаях используются простые алгоритмы проверки взаимного положения точек и отрезков.

При построении сегмента кривой Безье используются три последовательных отрезка ломаной минимальной длины и соответствующие части границ коридора. Поэтому сглаживание можно проводить прямо в процессе расчета вершин ломаной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. – М.: Мир, 1980. – 240 с.
2. Математика и САПР: В 2-х кн. Кн. 1. / Пер. с франц./ Шенен П., Коснар М., Гардан И. и др. – М.: Мир, 1988. – 204 с.
3. Костюк Ю. Л. Применение сплайнов для изображения линий в машинной графике // Автоматизация эксперимента и машинная графика. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1977. – с.116-130.