УДК 519.2

Т.В. Калашникова, А.Ф. Терпугов

ОЦЕНИВАНИЕ ОПЦИОНОВ ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА С УЧЕТОМ КОРРЕЛИРОВАННОСТИ ПРИРАЩЕНИЙ ЦЕН

Показывается, что формула Блэка-Шоулса для справедливой цены опционов европейского типа верна для более общей модели изменения цены, нежели модель Самуэльсона.

Нахождение справедливой цены производных ценных бумаг является одной из основных проблем финансовой математики. Начало этим исследованиям положила знаменитая статья Ф. Блэка и М. Шоулса [1], посвященная нахождению справедливой цены опционов европейского типа. Эта формула выведена для так называемой модели Самуэльсона [2]. Ниже показывается, что эта формула верна для более общей модели изменения цены, включающей в себя, как частный случай, модель Самуэльсона.

Описание модели изменения цены

Пусть S_t – цена финансового актива в момент времени t. Перейдем от процесса S_t к процессу

$$h_t = \ln\left(S_t / S_0\right). \quad (1)$$

Тогда в модели Самуэльсона считается, что процесс h_t описывается стохастическим дифференциальным уравнением $dh_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dw_t$, где μ – коэффициент тренда, σ – коэффициент волантильности, а w_t – стандартный винеровский процесс.

Более общей моделью процесса h_t является модель

$$dh_t = a(h_t, t)dt + \sigma\, dw_t, \quad (2)$$

учитывающая, что коэффициент сноса $a(h_t, t)$ также может зависеть от h_t, и приводящая к коррелированности значений процесса h_t. При $a(h_t, t) = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ она переходит в модель Самуэльсона.

Вывод уравнения для цены актива через самофинансируемый портфель

Пусть имеется безрисковый актив с процентной ставкой r, так что если через B_t обозначить цену этого актива в момент времени t, то имеет место соотношение

$$dB_t = rB_t dt. \quad (3)$$

Сформируем портфель, (β_t, γ_t), состоящий в момент времени t из β_t безрисковых активов и γ_t рисковых ценных бумаг. Стоимость рисковых ценных бумаг в момент времени t равна

$$\Pi_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_0 e^{h_t}. \quad (4)$$

Пусть $V(h_t, t)$ – стоимость производной ценной бумаги (опциона, фьючерса) в момент времени t. Потребуем, чтобы стоимость нашего портфеля полностью повторяла стоимость производной ценной бумаги, т.е. чтобы для лю-бых моментов времени t выполнялось соотношение

$$\Pi_t = V(h_t, t); \; d\Pi_t = dV(h_t, t). \quad (5)$$

Кроме того, будем рассматривать лишь самофинансируемые портфели, когда верно соотношение

$$d\beta_t B_t + d\gamma_t S_0 e^{h_t} = 0. \quad (6)$$

Используя формулу Ито, получим

$$dV(h_t, t) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial h_t}dh_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial h_t^2}dh_t^2 =$$

$$= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h_t}a(h_t, t) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial h_t^2}\right]dt + \sigma\frac{\partial V}{\partial h_t}dw_t. \quad (7)$$

Для портфеля, используя формулу Ито, получим

$$d\Pi_t = \beta_t rB_t dt + \gamma_t S_0 e^{h_t}\left(dh_t + \frac{1}{2}dh_t^2\right) =$$

$$= \left[\beta_t\, rB_t + \gamma_t S_0 e^{h_t} a(h_t, t) + \gamma_t S_0 e^{h_t}\frac{\sigma^2}{2}\right]dt +$$

$$+ \gamma_t\, S_0\, e^{h_t}\sigma\, dw_t. \quad (8)$$

Условие $d\Pi_t = dV(h_t, t)$ дает уравнения

$$\beta_t\, r\, B_t + \gamma_t\, S_0\, e^{h_t}\, a(h_t, t) + \gamma_t\, S_0\, e^{h_t}\,\frac{\sigma^2}{2} =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h_t}a(h_t, t) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial h_t^2}, \quad (9)$$

$$\gamma_t\, S_0\, e^{h_t}\sigma = \sigma\frac{\partial V}{\partial h_t}. \quad (10)$$

Сюда же надо добавить условие

$$\beta_t B_t + \gamma_t S_0 e^{h_t} = V(h_t, t). \quad (11)$$

Из уравнения (10) имеем $\gamma_t\, S_0\, e^{h_t} = \frac{\partial V}{\partial h_t}$. Подстановка этого выражения в (11) дает

$$\beta_t B_t = V(h_t, t) - \frac{\partial V}{\partial h_t}.$$

Подставляя все это в (9), получим

$$r\left[V(h_t, t) - \frac{\partial V}{\partial h_t}\right] + \frac{\partial V}{\partial h_t}a(h_t, t) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial V}{\partial h_t} =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h_t}a(h_t, t) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial h_t^2},$$

и видно, что слагаемые, содержащие функцию $a(h_t, t)$, сокращаются и для $V(h_t, t)$ получается уравнение, не зависящее от коэффициента сноса $a(h_t, t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial V}{\partial h_t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial V}{\partial h_t} - rV(h_t, t) = 0.$$

Переход к переменной $S_t = S_0 e^{h_t}$ приводит к обычному уравнению Блэка-Шоулса

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - rV = 0,$$

т.е. формула Блэка-Шоулса верна для более общей модели процесса h_t. Результаты, отличные от формулы Блэка-Шоулса, получаются лишь тогда, когда коэффициент волатильности σ^2 станет зависеть от h_t так как в этом случае коэффициенты при $\partial^2 V / \partial h_t^2$ и $\partial V / \partial h_t$ станут переменными, зависящими от h_t, что и приведет к результирующей формуле, отличающейся от формулы Блэка-Шоулса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *F. Black,, M. Scholes*. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of political economy. 1973. Vol. 81. № 3. P. 637–659.
2. *Ширяев А. Н*. Основы стохастической финансовой математики. Том I. Факты и модели. М.: Фазис, 1998. 489 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. Поступила в научную редакцию 1 марта 2000 г.