УДК 519.2

Е.В. Сухушина, А.Ф. Терпугов

АВТОРЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕНЫ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ СО СКАЧКАМИ В СЛУЧАЙНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Рассматривается авторегрессионная модель изменения цены финансовых активов с изменением цен в моменты сделок, образующих пуассоновский поток событий постоянной интенсивности. Находятся основные характеристики процесса изменения цены (среднее значение, дисперсия, функция корреляции) и показывается его асимптотическая нормальность.

Модели изменения цен финансовых активов в настоящий момент привлекают к себе очень большое внимание, так как они необходимы для прогнозирования цены актива, расчета стоимости вторичных ценных бумаг и т.д.

Пусть S_t есть цена актива в момент времени t. Тогда при построении модели изменения цены S_t обычно переходят к процессу h_t по формуле

$$h_t = \ln(S_t \mid S_0), \qquad (1)$$

где S_0 – начальная цена актива (в момент времени $t = 0$). Дальнейшее развитие модели сводится к описанию процесса h_t. Одной из наиболее часто используемых моделей процесса h_t является авторегрессионная модель. В этом случае считается, что время меняется дискретно с интервалом Δt, так что $t_n = n\Delta t$. В случае авторегрессионной модели первого порядка значения $h_n = h(t_n)$ процесса h_t удовлетворяют уравнению

$$h_n = \mu + \rho(h_{n-1} - \mu) + \sigma\varepsilon_n, \qquad (2)$$

где μ – среднее значение (тренд) процесса h_n; ρ – коэффициент авторегрессии; σ – волатильность; ε_n считаются независимыми стандартными нормальными случайными величинами $N(0,1)$.

Однако в приложении к финансовому рынку такая модель не совсем адекватно отражает реальность. Дело в том, что цена актива изменяется и устанавливается в момент сделки, а моменты совершения сделок являются случайными. Представляется естественным считать, что изменения процесса h_t происходят лишь в те случайные моменты времени, когда совершаются сделки. Именно эта модель и рассматривается в данной работе.

Описание модели

Будем считать, что моменты совершения сделок $t_1, t_2, \ldots, t_N$ являются случайными и образуют пуассоновский поток событий постоянной интенсивности λ. Пусть $h_n = h(t_n)$, т.е. значение процесса h_t после совершения сделки в момент времени t_n. Для h_n снова возьмем модель (1): $h_n = \mu + \rho(h_{n-1} - \mu) + \sigma\varepsilon_n$, но теперь моменты t_n будут случайными.

Рассмотрим момент времени T. Тогда на интервале $[0, T]$ было заключено N сделок в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_N$. Число сделок N является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона:

$$P(N) = \frac{(\lambda T)^N}{N!} e^{-\lambda T}.$$

Обозначим $H_T = \sum_{n=1}^{N} h_n$, где число слагаемых N случайно. Тогда в момент времени T $S_T = S_0 \exp(H_T)$ и для нахождения статистических характеристик процесса S_T надо иметь статистическое описание процесса H_T.

Математическое ожидание и дисперсия

Вычислим математическое ожидание и дисперсию процесса H_T, считая $\lambda T >> 1$, т.е. считая, что на интервале T было много сделок. Для этого запишем h_n в виде $h_n = \mu + \sigma\sum_{s=0}^{\infty}\rho^s\varepsilon_{n-s}$. Тогда ясно, что $M\{h_n\} = \mu$ и $\mathrm{cov}(h_n, h_k) = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\rho^{|n-k|}$ [1]. Так как $H_T = \sum_{n=1}^{N} h_n$, то при фиксированном N имеем $M\{H_T|N\} = \mu N$ и, усредняя еще и по N с учетом того, что для распределения Пуассона $M\{N\} = \lambda T$, получим $M\{H_T\} = \mu\lambda T$. Для H_T^2 можно записать $H_T^2 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} h_n h_k$. Так как

$$M\{h_n, h_k\} = \mu^2 + \mathrm{cov}(h_n, h_k) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\rho^{|n-k|},$$

то при фиксированном N $M\{H_T^2|N\} = \mu^2 N^2 + \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \times \times \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\rho^{|n-k|}$. Суммируя по диагоналям, получим $\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\rho^{|n-k|} = N + 2\sum_{s=1}^{N-1}(N-s)\rho^s$. При больших N асимптотически $N\sum_{s=1}^{N-1}\rho^s \sim N\sum_{s=1}^{\infty}\rho^s = N\frac{\rho}{1-\rho}$, $\sum_{s=1}^{N-1}s\rho^s \sim$ $\sim \sum_{s=1}^{\infty}s\rho^s = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$, и поэтому асимптотически при $N >> 1$ $\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\rho^{|n-k|} = N + 2N\frac{\rho}{1-\rho} = N\frac{1+\rho}{1-\rho}$, так что $M\{H_T^2|N\} = \mu^2 N^2 + \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2}N$. Усредняя еще и по N с учетом того, что для распределения Пуассона $M\{N^2\} = (\lambda T)^2 + \lambda T$, получим $M\{H_T^2\} = \mu^2(\lambda T)^2 +$

$+\lambda T\left(\mu^2+\dfrac{\sigma^2}{(1-\rho)^2}\right)$, так что для дисперсии величины H_T имеем выражение $D\{H_T\}=\lambda T\left(\mu^2+\dfrac{\sigma^2}{(1-\rho)^2}\right)$.

Функция корреляции процесса H_T

Пусть T и $T^{/}$ – два момента времени. Найдем явное выражение для функции корреляции $R\left(T,T^{/}\right)$ процесса H_T, где $R\left(T,T^{/}\right)=\operatorname{cov}\left(H_T,H_{T^{/}}\right)$. Будем считать, что $T^{/}>T$ и $\lambda\left(T^{/}-T\right)>>1$. Тогда $H_T H_{T^{/}}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N^{/}}h_n h_k$ и $M\left\{H_T H_{T^{/}}\middle|N,N^{/}\right\}=\mu^2 NN^{/}+\dfrac{\sigma^2}{1-\rho^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N^{/}}\rho^{|n-k|}$.

Суммируя по диагоналям, получим

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N^{\cdot}}\rho^{|n-k|}=N\left(1+\rho+\ldots+\rho^{N^{/}-N}\right)+$$
$$+\sum_{s=1}^{N-1}(N-s)\rho^s+\sum_{s=1}^{N-1}(N-s)\rho^{N^{/}-N+s}.$$

Но при больших N асимптотически

$$\sum_{s=1}^{N-1}(N-s)\rho^s\sim N\sum_{s=1}^{\infty}\rho^s=N\frac{\rho}{1-\rho},$$

$$\sum_{s=1}^{N-1}(N-s)\rho^{N^{/}-N+s}\sim N\sum_{s=1}^{\infty}\rho^{N^{/}-N+s}=N\frac{\rho^{N^{/}-N+s}}{1-\rho},$$

и асимптотически при $N,N^{/}>>1$ $\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N^{/}}\rho^{|n-k|}=$ $=N\dfrac{1-\rho^{N^{/}-N+1}}{1-\rho}+N\dfrac{\rho}{1-\rho}+N\dfrac{\rho^{N^{/}-N+1}}{1-\rho}=N\dfrac{1+\rho}{1-\rho}$.

Подставляя $M\left\{H_T H_{T^{/}}\middle|N,N^{/}\right\}=\mu^2 N\left(N^{/}-N+N\right)+$ $+N\dfrac{\sigma^2}{(1-\rho)^2}$ и усредняя по N и $N^{/}-N$, получим

$$M\left\{H_T H_{T^{/}}\right\}=\mu^2\left((\lambda T)^2+\lambda T\right)+\mu^2\lambda^2 T\left(T^{/}-T\right)+$$

$+\lambda T\dfrac{\sigma^2}{(1-\rho)^2}$, т.е. $R\left(T,T^{/}\right)=M\left\{H_T H_{T^{/}}\right\}-\mu^2\lambda^2 TT^{/}=$ $=\lambda T\left(\mu^2+\dfrac{\sigma^2}{(1-\rho)^2}\right)$. Учитывая симметричность функции корреляции по обоим аргументам, окончательно запишем $R\left(T,T^{/}\right)=\lambda\left(\mu^2+\dfrac{\sigma^2}{(1-\rho)^2}\right)\min\left(T,T^{/}\right)$ и для коэффициента корреляции значений $H_{T^{/}}$ и H_T

$$\operatorname{corr}(H_T,H_{T^{/}})=\min\left(\sqrt{T/T^{/}},\sqrt{T^{/}/T}\right).$$

Асимптотическая нормальность процесса H_T

Докажем, что при $\lambda T\to\infty$ величина H_T сходится по распределению к нормальной случайной величине.

Пусть число событий N фиксировано. Тогда характеристическая функция величин $h_1,h_2,\ldots,h_N$ с учетом нормальности величин ε_k имеет вид [2]:

$$M\left\{\exp\left\{i\sum_{n=1}^{N}\omega_n h_n\right\}\middle|N\right\}=$$
$$=\exp\left(i\mu\sum_{n=1}^{N}\omega_n-\frac{\sigma^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\omega_n\omega_k\rho^{|n-k|}\right).$$

H_T при фиксированном N равна $\sum_{n=1}^{N}h_n$. Тогда $M\{\exp\{\omega H_T\}|N\}=M\left\{\exp\left\{i\omega\sum_{n=1}^{N}h_n\right\}\middle|N\right\}$, и получим из предыдущего выражения, положив в нем все $\omega_n=\omega$:

$$M\{\exp\{\omega H_T\}|N\}=\exp\left(i\omega\mu N-\frac{\sigma^2\omega^2}{2(1-\rho^2)}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\rho^{|n-k|}\right).$$

При $N>>1$ $\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\rho^{|n-k|}\sim N\dfrac{1+\rho}{1-\rho}$, так что

$$M\{\exp\{\omega H_T\}|N\}=\exp\left(i\omega\mu N-\frac{\sigma^2\omega^2 N}{2(1-\rho)^2}\right).$$

Усредняя еще и по N, получим характеристическую функцию величины H_T в виде

$$g_H=\exp\left\{\lambda T\left(\exp\left\{i\omega\mu-\frac{\sigma^2\omega^2}{2(1-\rho)^2}\right\}-1\right)\right\}.$$

Перейдем к нормированной величине

$$\widetilde{H}_T=\frac{H_T-M\{H_T\}}{\sqrt{D\{H_T\}}}=\frac{H_T-\mu\lambda T}{\sqrt{\lambda T\left(\mu^2+\dfrac{\sigma^2}{(1-\rho)^2}\right)}}.$$

Для нее кумулянтная функция имеет вид

$$\varphi_{\widetilde{H}}(\omega)=\lambda T\left[\exp\left\{i\frac{\omega\mu}{\sqrt{\lambda Ts^2}}-\frac{\sigma^2\omega^2}{2(1-\rho)^2\lambda Ts^2}\right\}-1\right]-$$

$-i\dfrac{\lambda T\mu\omega}{\sqrt{T\lambda s^2}}$, где для краткости обозначено $s^2=\mu^2+\dfrac{\sigma^2}{(1-\rho)^2}$. Разложим экспоненту в ряд Тейлора: $\varphi_{\widetilde{H}}(\omega)=-\dfrac{\omega^2}{2}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda T}}\right)$, откуда очевидно, что при $\lambda T\to\infty$ $\lim_{N\to\infty}\varphi_{\widetilde{H}}(\omega)=-\dfrac{\omega^2}{2}$ и $\widetilde{H}_T$ сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине.

Аналогичными выкладками можно показать, что при $\lambda\to\infty$ процесс $\widetilde{H}_T$ сходится по распределению к нормальному случайному процессу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Том I. Факты и модели. М.: Фазис, 1998. 489 с.
2. *Гнеденко Б.В*. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988. 447 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. Поступила в научную редакцию 1 марта 2000 г.