УДК 336.01

В.В. Домбровский, Ф.Н. Егорычев

СРАВНЕНИЕ СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ЦЕННЫХ БУМАГ

Рассматривается проблема управления (выбора структуры) портфелем ценных бумаг. Проводится проверка работоспособности и сравнительный анализ различных стратегий управления портфелем с использованием исторических данных о динамике курсов акций восьми российских эмитентов.

Проблема выбора структуры портфеля ценных бумаг состоит в следующем [1, 2]. Инвестор в настоящий момент времени имеет некоторую сумму денег, которую он желал бы инвестировать на определенный период времени. Он может вложить все в ценные бумаги, доход по которым заранее известен. Это так называемые безрисковые вложения, то есть инвестор заранее знает, сколько он получит в будущем от своего вклада. Но на финансовых рынках существуют другие финансовые инструменты (например, обыкновенные акции), доход по которым значительно превосходит тот, который инвестор мог бы получить от безрискового вложения. Однако вложения в эти ценные бумаги связаны с неопределенностью (риском). Поэтому инвестор хотел бы определить для себя наилучшее соотношение между приростом доходности и возрастанием риска. Рассмотрим стратегии формирования портфеля ценных бумаг, основанные на использовании различных мер риска.

1. Классическая стратегия Марковица

Математическая формализация задачи формирования портфеля ценных бумаг впервые была предложена Г. Марковицем [1, 2]. По Марковицу структура портфеля должна обеспечивать инвестору некоторое фиксированное значение доходности при наименьшем риске. В качестве меры риска принимается дисперсия или стандартное отклонение портфеля.

Пусть R_{it} – доходность i-й ценной бумаги в момент времени t, i=1,…, N, t=1,…, T, где N – число рассматриваемых видов ценных бумаг, T – объем выборки. Тогда доходность портфеля в момент времени t равна $R_{pt} = \sum_{i=1}^{N} x_i R_{it}$, где x_i – доля инвестиций в i-ю ценную бумагу, входящую в портфель, причем $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$.

Математическое ожидание доходности портфеля является взвешенной средней ожидаемых доходностей отдельных ценных бумаг $\overline{R_p} = \mathrm{E}(R_{pt}) = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{R_i}$, где $\overline{R_i} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{it}$. Риск портфеля ценных бумаг оценивается стандартным отклонением σ_p, вычисляемым на основе дисперсии его доходности $\sigma_p^2 = \mathrm{E}\left(R_{pt} - \overline{R_p}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$, где σ_{ij} – ковариация доходностей i-й и j-й ценных бумаг.

Задача оптимизации портфеля ставится следующим образом: необходимо минимизировать критерий $\sigma_p = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}\right)^{1/2}$ при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \overline{R_i} = R^*, \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, x_i \geq 0, \quad i = 1,..., N, \qquad (1)$$

где R^* – доходность портфеля, которую желает получить инвестор.

2. Альтернативные стратегии

Классический подход (известный еще как модель «среднее – дисперсия») не является единственным. Существуют и другие методы решения данной проблемы, которые могут показать себя лучше с практической точки зрения.

В [3] предлагается использовать отличные от стандартного отклонения меры риска. Одна из предлагаемых мер – средний квадрат приращений. Этот показатель построен на основе отклонений ряда в момент времени t от уровня, достигнутого им в предыдущий момент времени (t – 1).

Если доходность портфеля в момент времени t равна $R_{pt} = \sum_{i=1}^{N} x_i R_{it}$, то средний квадрат приростов доходности портфеля выражается формулой

$$w^2 = \overline{\Delta R}_{pt}^2 = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left(R_{pt} - R_{p,t-1}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{i=1}^{N} x_i\left(R_{it} - R_{i,t-1}\right)\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \overline{\Delta R_i \Delta R_j},$$

где $\Delta R_{it} = R_{it} - R_{i,t-1}, \Delta R_{jt} = R_{jt} - R_{j,t-1}$, черта сверху означает усреднение по времени.

Минимальный риск портфеля будут обеспечивать те ценные бумаги, совокупность которых характеризуется наименьшими колебаниями. Требуется найти такую структуру инвестиций, которая обеспечит наиболее бла-гоприятное соотношение между приростом средней до-ходности и возросшим риском. Имеет место следующая оптимизационная задача:

$$\begin{gathered} w = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \overline{\Delta R_i \Delta R_j}\right)^{1/2} \Rightarrow \min_x, \\ \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{R_i} = R^*, \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \; i = 1,..., N. \end{gathered} \qquad (2)$$

Еще одна мера риска, предложенная в [3], обосновывается следующим образом. В основе классического подхода Марковица лежит гипотеза о том, что колебания доходности портфеля в обе стороны одинаково нежелательны. Однако, вообще говоря, нежелательны лишь отрицательные флуктуации доходности портфеля. Очевидно, опасность таких флуктуаций исходит от тех ценных бумаг, у которых в момент времени t наблюдается падение доходности. Риск для портфеля от i-й ценной бумаги, характеризующейся снижением доходности ΔR_{it}, определяется выражением $x_i\left|\Delta R_{it}\right|$. Средний риск для портфеля за весь интервал выборки составит

$r = \dfrac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t\in W_i} x_i\left|\Delta R_{it}\right|$, где W_i – множество тех t, для которых $\Delta R_{it} < 0$.

В конечном итоге получается следующая оптимизационная задача:

$$r = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t\in W_i} x_i\left|\Delta R_{it}\right| \Rightarrow \min_x,$$
$$\sum_{i=1}^{N} x_i\overline{R_i} = R^*, \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \qquad (3)$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,...,N.$$

В основе классической модели Марковица лежит гипотеза о том, что доходности по финансовым активам подчиняются нормальному закону распределения. На реальных рынках ценных бумаг это не всегда выполняется. В связи с этим в [4] авторы предлагают использовать устойчивые законы [5], которые, возможно, лучше соответствуют реальным данным. При таком подходе мерой риска служит не дисперсия, а параметр масштаба или любая строго возрастающая функция от этого параметра [4]. При формировании портфеля из N активов можно использовать следующую функцию риска: $r = \dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{N} x_i R_i^{(t)}\right|$, где $R_i^{(t)}$ есть t-е наблюдение отклонения от среднего для дохода по i-му активу.

Сформулируем задачу оптимизации портфеля:

$$r = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{N} x_i R_i^{(t)}\right| \Rightarrow \min_x$$
$$\sum_{i=1}^{N} x_i\overline{R_i} = R^*, \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \qquad (4)$$
$$x_i \ge 0,\ \ i = 1,...,N.$$

Приведенные выше подходы к оптимизации портфеля основаны на использовании различных мер риска и требуют решения задач нелинейного программирования. Эти подходы требуют оценки большого числа параметров. Чтобы упростить практическое использование модели, в [6] задача оптимизации портфеля формулируется в виде следующей задачи линейного программирования:

$$\max_x \min_t \sum_{i=1}^{N} x_i R_{it}$$
$$\sum_{i=1}^{N} x_i R_{it} - \min_t \sum_{i=1}^{N} x_i R_{it} \ge 0,\ t = 1,...,T, \qquad (5)$$
$$\sum_{i=1}^{N} x_i\overline{R_i} = R^*, \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, x_i \ge 0,\ i = 1,...,N.$$

3. Численная реализация и сравнительный анализ стратегий формирования оптимального портфеля

В нашей работе были проведены численные расчеты и сравнительный анализ стратегий формирования оптимального портфеля ценных бумаг с использованием модели Марковица, моделей, использующих альтернативные меры риска («средний квадрат приращений» и «средние потери»), устойчивой модели и модели линейной аппроксимации. Численная реализация проводилась на основе исторических данных, включающих динамику курсов акций восьми российских эмитентов: РАО «ЕЭС России», ОАО «НК ЛУКОЙЛ», ОАО «Сургутнефтегаз», ОАО «Мосэнерго», РАО «Ростелеком», РАО «Норильский Никель», ОАО «Иркутскэнерго», ОАО «Мегионнефтегаз» по итогам торгов в Российской Торговой Системе (РТС) за период с 1 января 1996 по 1 апреля 1998 г. Цены акций брались в долларах США.

При использовании реальных котировок стоимости акций рассчитывались недельные доходности для каждой ценной бумаги. Расчет производился следующим образом: $R_{it} = \dfrac{C_{i,t+1} - C_{it}}{C_{it}}$, где C_{it} – цена закрытия торгов i-й ценной бумаги на момент времени t; $C_{i,t+1}$ – цена закрытия торгов i-й ценной бумаги на момент времени $(t+1)$.

На основе прошлых доходностей производилось оценивание параметров моделей оптимизации портфеля. Количество значений доходностей для оценивания параметров моделей было принято равным 26 (брались данные за 26 недель). После оценивания параметров моделей вычислялись весовые коэффициенты оптимальных портфелей. В качестве желаемой доходности портфелей R^* бралась средняя доходность индекса РТС за тот же период. В соответствии с полученными весами формировались портфели на последующий период владения. Период владения был принят равным одной неделе. По истечении недели подсчитывалась реальная доходность от сформированных портфелей. Данная процедура расчета проводилась для каждой недели, начиная с 12 июля 1996 и заканчивая 27 марта 1998 г. В табл. 1 представлены полученные результаты.

Колонка «Дата» содержит моменты времени, в которые формировались портфели. Колонки 1–8 представляют веса акций в портфеле. Акции расположены в приведенной выше последовательности. Колонка 9 содержит значения целевых функций соответствующих моделей. В колонке 10 представлены значения реальных доходностей сформированных портфелей за период владения (неделю). Нужно заметить, что сформированные в соответствии с описанными стратегиями портфели могут приносить как прибыль, так и убытки.

Как упоминалось выше, расчеты значений доходностей были проведены с 12.07.1996 по 27.03. 1998 г. На этом временном промежутке было получено 87 значений. На основании этих результатов был проведен сравнительный анализ средних доходностей каждой модели. Помимо средних доходностей были вычислены стандартные ошибки и доверительные интервалы для среднего (уровень значимости α брался равным 0,05). Результаты представлены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что наибольшее значение средней доходности получилось у модели «средние потери», на-именьшее – у модели линейной аппроксимации, модель «среднее – дисперсия» дает промежуточные значения средней доходности по сравнению со всеми рассмотренными альтернативными подходами.

Таблица 1

Дата	1 0,…	2 0,…	3 0,…	4 0,…	5 0,…	6 0,…	7 0,…	8 0,…	9 0,…	10 %
Модель Марковица										
11.04.97	319	332	000	000	083	097	007	163	052	–1,70
18.04.97	285	405	000	000	073	090	000	148	052	–4,80
25.04.97	274	536	000	000	041	014	000	135	053	2,70
Средний квадрат приращений										
11.04.97	254	000	000	000	185	145	032	384	061	–2,80
18.04.97	199	049	000	000	181	139	020	411	059	–4,20
25.04.97	151	187	032	000	189	000	027	414	058	5,00
Средние потери										
11.04.97	000	000	000	000	000	005	000	995	034	–4,30
18.04.97	000	000	000	000	000	033	000	967	037	–3,10
25.04.97	045	000	000	000	000	000	000	955	036	7,80
Устойчивая модель										
11.04.97	336	000	000	000	091	262	128	182	039	–1,90
18.04.97	227	000	000	001	113	302	129	177	039	–3,40
25.04.97	225	084	000	108	131	166	167	119	040	4,30
Линейная аппроксимация										
11.04.97	123	366	209	054	116	000	000	132	–029	–1,40
18.04.97	122	385	198	036	119	001	068	071	–030	–3,30
25.04.97	082	232	202	006	237	000	117	124	–034	5,00

Таблица 2

	Среднее – дисперсия	Средний квадрат приращений	Средние потери	Устойчивая модель	Линейная аппроксима-ция
Среднее	0,0135	0,0128	0,0165	0,0155	0,0115
Стандартное отклонение	0,0602	0,0652	0,0686	0,0616	0,0633
Доверитель-ный интервал для среднего	(0,0007; 0,0263)	(-0,0011; 0,0267)	(0,0018; 0,0311)	(0,0019; 0,0329)	(–0,0063; 0,0294)
Максимум	0,1621	0,1679	0,1711	0,1499	0,1465
Минимум	–0,1205	–0,1347	–0,1782	–0,1207	–0,1663

Полученные результаты позволяют сделать следую-щие заключения. Модель «средние потери» имеет наибольшую среднюю доходность, но дает наибольшее стандартное отклонение, т.е. разброс получившихся до-ходностей у этой модели наибольший. Еще один недо-статок этого подхода – отсутствие диверсификации портфеля, что говорит о большом риске в рамках пассивной стратегии. Портфель формировался в основном из одной–двух акций. Устойчивая модель в данной ра-боте показала наилучшие результаты по сравнению с классическим подходом, из рассмотренных альтернатив – разброс доходностей меньше (см. в табл. 2 значения максимума и минимума) и большая диверсификация портфеля, четыре–шесть акций. Это говорит о том, что устойчивые распределения адекватнее описывают использованные исторические данные, чем нормальное. Модель «средний квадрат приращений» не проявила положительных качеств, которые на нее возлагались (возможно, для тех данных, которые использовались). Средняя доходность меньше, чем у модели Марковица, высокий разброс значений. Модель линейной аппроксимации наименее эффективна, однако ее практическая реализация намного проще остальных моделей, так как не требует оценки множества параметров. Портфели последних трех моделей формировались в основном из трех–пяти акций.

Заключение

В данной работе рассмотрена проблема формирования структуры портфеля ценных бумаг. Были произведены численные расчеты на основе реальных данных и сравнительный анализ стратегии Марковица и четырех альтернативных стратегий формирования портфелей. Результаты сравнительного анализа показали, что модель, использующая устойчивый закон распределения, позволяет сформировать портфель, имеющий большую эффективность по сравнению с классической моделью Марковица. Модель «средние потери», продемонстрировала наибольшую среднюю доходность, но при большом риске. Возможно, что данный подход может использоваться для активных, спекулятивных стратегий, чем для пассивной. Модель «средний квадрат приращений» и модель линейной аппроксимации, показали эффективность не выше классической модели Марковица.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарп У., Александер Г., Бейли Дж.* Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 1997.
2. *Первозванский А.А., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. М.: ИНФРА-М, 1994.
3. *Лукашин Ю.П.* Оптимизация структуры портфеля ценных бумаг // Экономика и математические методы. 1995. Т. 31. Вып. 1. С. 138–150.
4. *Гамровски Б., Рачев С.* Финансовые модели, использующие устойчивые законы // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1995. Т. 2. Вып. 4. С. 556–604.
5. *Феллер В*. Введение в теорию вероятностей и ее приложений. Т.2. М.: Мир, 1984.
6. *Martin R. Young*. A Minimax portfolio selection rule with linear programming solution // Management science. 1998. Vol. 44. № 5. P. 673–683.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 1 февраля 2000 г.