УДК 621.394/395.74 - 503.5

А.А. Назаров, С.Л. Шохор

СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ В СЕТИ, УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИЧЕСКИМ ПРОТОКОЛОМ ДОСТУПА С ОПОВЕЩЕНИЕМ О КОНФЛИКТЕ

Описаны исследования математических моделей спутниковых сетей связи с динамическим протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте. Рассмотрены марковская и немарковская модели. Найдены условия, при которых в системах существует стационарный режим.

Эта работа продолжает исследования, посвященные сетям связи с протоколами случайного множественного доступа [1]. Известно, что такие сети часто не отличаются стабильным функционированием [2]. При небольшом количестве абонентских станций (АС) возможно возникновение явления бистабильности [3], а при большом числе узлов – отсутствие стационарного режима [4]. В данной работе находятся условия, при которых в сети связи с оповещением о конфликте и динамическом протоколе случайного множественного доступа [5] существует стационарный режим.

Для исследования построим математическую модель в виде однолинейной системы массового обслуживания, на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок, с функцией распределения времени обслуживания $B(t)$, источником повторных вызовов (ИПВ), из которого заявки обращаются к прибору после случайной задержки, распределенной экспоненциально с параметром σ / i, где i – число заявок в ИПВ. При возникновении конфликта в системе реализуется интервал оповещения о конфликте с функцией распределения $A(t)$. Заявки, попавшие в конфликт, а также пришедшие на интервале оповещения, переходят в ИПВ.

Условие существования стационарного режима. Марковская модель

Пусть время обслуживания и оповещения о конфликте распределено экспоненциально с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Рассмотрим случайный двумерный марковский процесс $\{i(t), k(t)\}$, где $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $k(t)$ – случайный процесс, принимающий 3 значения: $k(t)=0$ – прибор свободен, $k(t)=1$ – занят обслуживанием заявки, $k(t)=2$ – идет интервал оповещения о конфликте.

Обозначим вероятности переходов

$$P_{k1,i1,k2,i2}(\Delta t)= \\ = P\{i(t+\Delta t)=i_2, k(t+\Delta t)=k_2 / i(t)=i_1, k(t)=k_1\}.$$

Для исследования условий существования стационарного режима воспользуемся следствием 1 из предельной теоремы для цепи Маркова [6, §45], которая для рассмотренной модели выглядит следующим образом.

Для того чтобы неприводимая непериодическая цепь Маркова имела стационарное распределение $\{\pi_k(i)\}$ такое, что $\pi_k(i) > 0, k=\overline{0,3}, i \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} \pi_0(i) = \sum\limits_{k=0}^{2}\sum\limits_{j\geq 0}\pi_k(j)\lambda_{k,j,o,i}, \\ \pi_1(i) = \sum\limits_{k=0}^{2}\sum\limits_{j\geq 0}\pi_k(j)\lambda_{k,j,1,i}, \\ \pi_2(i) = \sum\limits_{k=0}^{2}\sum\limits_{j\geq 0}\pi_k(j)\lambda_{k,j,2,i} \end{cases} \quad (1)$$

имела ограниченное ненулевое неотрицательное решение. Здесь

$$\lambda_{k1,i1,k2,i2} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{k1,i1,k2,i2}(\Delta t)}{\Delta t}, k_1 \neq k_2, i_1 \neq i_2,$$

$$\lambda_{k1,i1,k1,i1} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-P_{k1,i1,k1,i1}(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Запишем интенсивности переходов:

$$\lambda_{0,i,1,i}=\lambda,\ \lambda_{0,i,1,i-1}=\sigma, \lambda_{0,i,0,i}=\lambda+\sigma,$$
$$\lambda_{1,i,0,i}=\mu_1, \lambda_{1,i,2,i-1}=\sigma, \lambda_{1,i,2,i-2}=\lambda,$$
$$\lambda_{1,i,1,i}=\lambda+\sigma+\mu_1, \lambda_{2,i,0,i}=\mu_2 Б\, \lambda_{2,i,2,i+1}=\lambda,$$
$$\lambda_{2,i,2,i}=\lambda+\mu_2.$$

Все остальные интенсивности переходов равны 0.

Обозначим $\frac{\lambda}{\mu_1}=\rho, \frac{\sigma}{\mu_1}=\gamma, \frac{\mu_2}{\mu_1}=\frac{1}{a}.$ Тогда можем записать требуемую систему (1):

$$\pi_0(i)=\pi_1(i)\frac{1}{1+\rho+\gamma}+\pi_2(i)\frac{1}{1+a\rho},$$

$$\pi_1(i)=\pi_0(i)\frac{\rho}{\rho+\gamma}+\pi_0(i+1)\frac{\gamma}{\rho+\gamma},$$

$$\pi_2(i)=\pi_2(i-1)\frac{a\rho}{1+\alpha\rho}+\pi_1(i-2)\frac{\rho}{1+\rho+\gamma}+ \\ +\pi_1(i-1)\frac{\gamma}{1+\rho+\gamma}. \quad (2)$$

Будем искать решение системы (2) в виде

$$\pi_k(i)=C_k z^i. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), сокращая правые и левые части полученной системы на z^i, получим систему трех уравнений относительно неизвестных C_k. Эта система имеет решение, если ранг расширенной матрицы равен рангу исходной. Запишем матрицу системы и найдем определитель:

$$\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{1+\rho+\gamma} & \frac{1}{1+a\rho} \\ \frac{\rho+\gamma z}{\rho+\gamma} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\rho+\gamma z}{1+\rho+\gamma} & \frac{a\rho}{1+a\rho}z-z^2 \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{a\rho}{1+a\rho}z-z^2+\frac{1}{a\rho}\frac{(\rho+\gamma z)^2}{(\rho+\gamma)(1+\rho+\gamma)}+ \\ +\frac{\rho+\gamma z}{(\rho+\gamma)(1+\rho+\gamma)}\left[z^2-\frac{a\rho}{1+a\rho}z\right]=P(z).$$

Уравнение $P(z)=0$ имеет три корня. Для выполнения условия следствия необходимо, чтобы существовал корень $z:|z|<1$. Исследуем поведение $P(z)$:

1) $\forall \rho, a, \gamma : P(0)=\dfrac{\rho}{(1+a\rho)(\rho+\gamma)(1+\rho+\gamma)}>0,$

2) $P(1)=0.$

Таким образом, для того чтобы в системе существовал стационарный режим, необходимо, чтобы выполнялось условие $P'(z)\big|_{z=1}>0$:

$$P'(z)\big|_{z=1}=\frac{a\rho}{1+a\rho}-2+\frac{2\gamma}{(1+a\rho)(1+\rho+\gamma)}+$$
$$+\frac{\gamma}{(\rho+\gamma)(1+\rho+\gamma)}\frac{1}{1+a\rho}+$$
$$+\frac{1}{1+\rho+\gamma}\left[2-\frac{a\rho}{1+a\rho}\right]>0. \qquad (4)$$

Обозначая $\rho+\gamma=G,$ из (4) будем иметь условие для существования стационарного режима:

$$\rho<G/(aG^2+2G+1).$$

Условие существования стационарного режима. Немарковская модель

Пусть функции $B(t)$ и $A(t)$ неэкспоненциальны. В этом случае для нахождения условий существования стационарного режима воспользуемся следствием 2 предельной теоремы для цепи Маркова [6, §45]. Формулировка этого следствия для немарковской модели сети связи будет выглядеть следующим образом.

Чтобы неприводимая непериодическая цепь Маркова имела стационарное распределение, достаточно существования $\varepsilon>0$, натурального числа i_0 и набора неотрицательных чисел $x_k(i), k=\overline{0,2}, \quad i\geq 0,$ таких, что выполняются условия:

1) $\sum\limits_{j\geq 0} P_{i1,k1,i2,k2}\ x_{k2}(i_2)\leq x_{k1}(i_1), i_1>i_0,$

2) $\sum\limits_{j\geq 0} P_{i1,k1,i2,k2}\ x_{k2}(i_2)<+\infty, i_1<i_0. \qquad (5)$

Для применения этого следствия построим вложенную цепь Маркова по моментам, непосредственно следующим за моментом t_n, т.е. за моментом изменения состояния $k(t)$. Запишем вероятности переходов из состояния в состояние за один шаг:

$$P_{i1,k1,i2,k2}=P\{i(t(n)=i_2, k(t_n)=$$
$$=k_2\,/\,i(t_{n-1})=i_1,\ k(t_{n-1})=k_1\},$$

$$P_{i,0,0,0}=\beta_{00}=\int_0^\infty e^{-\lambda x}dB(x), P_{i,0,i,1}=\beta_{11}=1-\beta_{00}. \qquad (6)$$

Все остальные вероятности переходов равны нулю.

Запишем первую систему неравенств из (5) с учетом (6): $x_0(i)-\varepsilon\geq\delta x_1(i)+(1-\delta)x_1(i-1),$

$$x_1(i)-\varepsilon\geq\beta_0x_0(i)+\beta_2x_2(i+1)+\beta_1x_2(i+2),$$
$$x_2(i)-\varepsilon\geq\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_jx_0(i+j). \qquad (7)$$

Будем искать решение системы в виде:

$$x_k(i)=B_k+Ai, \qquad (8)$$

где положительные B_k и A не зависят от i.

Заметим, что $\quad \sum\limits_{j=0}^{\infty} j\alpha_j=\lambda\, a_1, \qquad (9)$

где a_1 – средняя длительность интервала оповещения о конфликте.

Перепишем систему (7) с учетом (8) и (9):

$$B_0-B_1-\varepsilon\geq-(1-\delta)A,$$
$$B_1-\beta_0B_0-(1-\beta_0)B_2-\varepsilon\geq(\beta_2+2\beta_1)A,$$
$$B_2-B_0-\varepsilon\geq\lambda a_1A. \qquad (10)$$

Умножим первое и второе неравенства системы (10) на $1/(2+\beta_1+\beta_2)$, а третье – на $(\beta_1+\beta_2)/$ $/(2+\beta_1+\beta_2)$ и просуммируем. Слагаемые с B_k сокращаются, и мы получаем неравенство

$$A\left\{\frac{-(1-\delta)+\beta_2+2\beta_1+\lambda\, a1(\beta_1+\beta_2)}{2+\beta_1+\beta_2}\right\}\leq-\varepsilon. \qquad (11)$$

Если $\quad \dfrac{-(1-\delta)+\beta_2+2\beta_1+\lambda\, a1(\beta_1+\beta_2)}{2+\beta_1+\beta_2}<0, \quad (12)$

то существует такое положительное A, что неравенство (11) выполняется. Подставим в (12) выражения для δ,β_1,β_2 из (6), обозначим $\rho=\lambda b, b$ – среднее время обслуживания, $a_1=bT_1, \gamma=\sigma b,\ \rho+$ $+\gamma=G$ и получим условие:

$$\rho<\frac{\beta_0G}{1+(1-\beta_0)(1+T_1G)}, \qquad (13)$$

где ρ имеет смысл загрузки системы. Если выполняется условие (13), то система неравенств (10) линейно зависима, поэтому имеет решение с точностью до аддитивной постоянной, значение которой выберем так, чтобы $B_k>0$. Тогда $x_k(i)=B_k+Ai>0$ и для них выполняется система неравенств (7). Следовательно, при выполнении условия (13) в системе существует стационарный режим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Флинт Д.* Локальные сети ЭВМ. М.: Финансы и статистика, 1986.
2. *Бертсекас Д., Галагер Р.* Сети передачи данных. М.: Мир, 1989.
3. *Назаров А.А., Юревич Н.М.* Исследование явления бистабильности в сети с протоколом АЛОХА для конечного числа станций //Автоматика и телемеханика. 1996. № 9. С. 91–100.
4. *Фалин Г.И.* О неустойчивости сети АЛОХА //Проблемы передачи информации. 1990. № 1. С. 79–82.
5. *Назаров А.А., Шохор С.Л.* Сравнение асимптотической и допредельной моделей сети связи с динамическим протоколом случайного множественного доступа //Математическое моделирование и теория вероятностей. Томск: Изд-во «Пеленг». 1998. С. 233–242.
6. *Климов* Стохастические системы массового обслуживания.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 26 мая 2000 г.