УДК 519.872: 681.03

Д.Ю. Кузнецов, А.А. Назаров

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ СЕТЕЙ СВЯЗИ С АДАПТИВНЫМИ ПРОТОКОЛАМИ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА СТАНЦИЙ

Рассматривается спутниковая сеть связи с большим числом абонентских станций (АС), распределенных на значительной территории. Так как спутниковый канал имеет ограниченную пропускную способность и используется одновременно всеми АС, такую сеть можно смоделировать, используя протоколы случайного множественного доступа (СМД). Из [1, 2] известно, что сети связи с протоколом СМД функционируют достаточно нестабильно. В сетях с конечным числом АС в них может возникать явление бистабильности [2], а в сетях с бесконечным числом АС в них отсутствует стационарный режим, то есть пропускная способность таких сетей равна нулю, а средняя задержка пакета растет неограниченно по мере продолжительности работы системы. Проблему стабилизации таких систем можно решить использованием адаптивных протоколов доступа, в которых адаптация реализуется автоматом с целесообразным поведением [3], названным здесь адаптером.

Попробуем описать функционирование рассматриваемой здесь сети следующим образом: спутник-ретранслятор может находиться в одном из трех состояний: либо он ждет прихода сообщения от АС, либо занят его передачей, либо, если он получил сообщение от одной АС в момент обслуживания сообщения от другой, он находится в режиме оповещения о конфликте. Те АС, сообщения которых не были успешно переданы, будут пытаться передавать свои сообщения снова, пока не получат уведомление об их успешной передаче.

Математическую модель такой сети можно построить в виде однолинейной системы массового обслуживания (СМО), на вход которой поступает простейший с параметром λ поток требований, и с обслуживающим прибором, который может находиться в одном из трех состояний: k=0, если он свободен; k=1, когда он занят обслуживанием заявки; k=2, когда на приборе реализуется этап оповещения о конфликте. Заявка, заставшая в момент поступления прибор свободным, начинает немедленно обслуживаться. Если за это время другие требования не поступали, то исходная заявка по завершении обслуживания покидает систему. Если во время обслуживания одной заявки поступает другая, то они вступают в конфликт. От этого момента начинается этап оповещения о конфликте. Заявки, попавшие в конфликт, а также поступившие на интервале оповещения о конфликте, переходят в источник повторных вызовов, из которого вновь обращаются к прибору с попыткой повторного обслуживания. Повторное обращение происходит после случайной задержки, имеющей экспоненциальное распределение с параметром σ. Число заявок в ИПВ обозначим i.

Время обслуживания заявок рекуррентное с функцией распределения $B(s)$. Длины интервалов оповещения о конфликте имеют функцию распределения $A(s)$.

Для стабилизации неустойчивых сетей интенсивность σ повторного обращения будет возрастать непрерывно при любом состоянии канала и убывать дискретно в момент окончания в канале сигнала оповещения о конфликте. Для такого изменения σ, положив $\sigma=1/T$, конструкцию адаптера выберем так, чтобы его состояние $T(t)$ с течением времени t менялось следующим образом: в любой момент времени $T(t+\Delta t)=T(t)+\alpha\Delta t$ за исключением момента окончания распространения сигнала оповещения о конфликте, когда $T(t+\Delta t)=T(t)-\beta$. Здесь α и β – параметры адаптера, которые будут определены ниже. Если при убывании $T(t)$ достигает заданного значения $T_0>0$, то состояние адаптера остается равным этому значению до момента его увеличения на β. Можно предложить и другие конструкции адаптеров.

Состояние рассматриваемой системы определим вектором (k, i, T). Введем переменную $z(t)$, имеющую смысл длины интервала времени, который остался до момента смены текущего состояния прибора. Процесс $\{k(t), i(t), z(t), T(t)\}$ – марковский. Проведем исследование этого процесса.

Исследование сети связи

Запишем вероятности состояния процесса $\{k(t), i(t), z(t), T(t)\}$:

$$P_k(i,z,T) = P[k(t)=k, i(t)=i,\ z(t)<z, T\le T(t) < T+dT]/dT.$$

Запишем систему уравнений для построенной СМО:

$$P_0(i,T,t+\Delta t) = P_1(i,\Delta t, T+\alpha\Delta t, t) + P_2(i,\Delta t, T-\beta, t) + \left(1-\left(\lambda+\frac{i}{T}\right)\Delta t\right)P_0(i, T+\alpha\Delta t, t) + o(\Delta t),$$

$$P_1(i,z,T,t+\Delta t) = \lambda\Delta t P_0(i,T,t)B(z) + \left[1-\left(\lambda+\frac{i}{T}\right)\Delta t\right]\{P_1(i, z+\Delta t, T+\alpha\Delta t, t) - P_1(i,\Delta t, T+\alpha\Delta t, t)\} + o(\Delta t),$$

$$P_2(i,z,T,t+\Delta t) = \lambda\Delta t P_1(i-2,T,t)A(z) + \frac{i-1}{T}\Delta t P_1(i-1,T,t)A(z) + [1-\lambda\Delta t]\{P_2(i,z+\Delta t, T+\alpha\Delta t, t) - P_2(i,\Delta t, T+\alpha\Delta t, t)\} + \lambda\Delta t P_2(i-1,2,T,t) + o(\Delta t).$$

Выполнив необходимые преобразования, выпишем систему уравнений, определяющую стационарнарное распределение вероятностей $P_k(i,z,T)$ состояний сети $(k(t), i(t), z(t))$ и адаптера $T(t)$:

$$\left(\lambda+\frac{i}{T}\right)P_0(i,T) = \frac{\partial P_1(i,0,T)}{\partial z} + \frac{\partial P_2(i,0,T-\beta)}{\partial z} + \alpha\frac{\partial P_0(i,T)}{\partial T},$$

$$\left(\lambda+\frac{i}{T}\right)P_1(i,z,T) = \frac{\partial P_1(i,z,T)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(i,0,T)}{\partial z} + \lambda\frac{\partial P_1(i,z,T)}{\partial T} + \lambda P_0(i\ T)B(z) + \frac{i+1}{T}P_0(i+1,T)B(z),$$

$$\lambda P_2(i,z,T)=\frac{\partial P_2(i,z,T)}{\partial z}-\frac{\partial P_2(i,0,T)}{\partial z}+$$
$$+\alpha\frac{\partial P_2(i,z,T)}{\partial T}+\lambda P_1(i-2,T)A(z)+$$
$$+\frac{i-1}{T}P_1(i-1,T)A(z)+\lambda P_2(i-1,z,T).$$

Здесь $\frac{\partial P_k(i,0,T)}{\partial z}=\left.\frac{\partial P_k(i,z\,T)}{\partial z}\right|_{z=0.}$

Решим систему методом асимптотического анализа [4]. Обозначим $S-\lambda=\varepsilon^2, i\varepsilon^2=x, T\varepsilon^2=y, \frac{1}{\varepsilon^4}P_k(i,z,T)=$ $=\Pi_k(x,z,y,\varepsilon)$ и перепишем определяющую стационарное распределение систему в виде

$$\left(\lambda+\frac{x}{y}\right)\Pi_0(x,y,\varepsilon)=\frac{\partial\Pi_1(x,0,y,\varepsilon)}{\partial z}+$$
$$+\frac{\partial\Pi_2(x,0,y-\varepsilon^2\beta,\varepsilon)}{\partial z}+\lambda\varepsilon^2\frac{\partial\Pi_0(x,y,\varepsilon)}{\partial y}+o(\varepsilon),$$
$$\left(\lambda+\frac{x}{y}\right)\Pi_1(x,z,y,\varepsilon)=\frac{\partial\Pi_1(x,z,y,\varepsilon)}{\partial z}-$$
$$\times B(z)+\frac{x+\varepsilon^2}{y}\Pi_0(x+\varepsilon^2,y,\varepsilon)B(z)+o(\varepsilon),$$
$$-\frac{\partial\Pi_1(x,0,y,\varepsilon)}{\partial z}+\lambda\varepsilon^2\frac{\partial\Pi_1(x,z,y,\varepsilon)}{\partial y}+\lambda\Pi_0(x,y,\varepsilon)\times$$
$$\lambda\Pi_2(x,z,y,\varepsilon)=\frac{\partial\Pi_2(x,z,y,\varepsilon)}{\partial z}-\frac{\partial\Pi_2(x,0,y,\varepsilon)}{\partial z}+$$
$$+\lambda\varepsilon^2\frac{\partial\Pi_2(x,z,y,\varepsilon)}{\partial y}+\lambda\Pi_1(x-2\varepsilon^2,y,\varepsilon)A(z)+$$
$$+\frac{x-\varepsilon^2}{y}\Pi_1(x-\varepsilon^2,y,\varepsilon)A(z)+\frac{x-\varepsilon^2}{y}\Pi_1\times$$
$$\times(x-\varepsilon^2,y,\varepsilon)A(z)+\lambda\Pi_2(x-\varepsilon^2,z,y,\varepsilon)+o(\varepsilon). \quad (1)$$

Разложим $\Pi_k(x\pm\varepsilon^2,y,\varepsilon)$ и $\Pi_k(x,y-\beta\varepsilon^2,\varepsilon)$ по ε^2 в окрестности точки (x,y,ε) в ряд с точностью до ε^2 и просуммируем почленно все уравнения системы (1), положив $z=\infty$:

$$\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial y}\left\{\alpha\Pi_0(x,y,\varepsilon)-\beta\frac{\partial\Pi_2(x,0,y,\varepsilon)}{\partial z}+\alpha\Pi_1(x,y,\varepsilon)+\right.$$
$$\left.+\alpha\Pi_2(x,y,\varepsilon)\right\}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y}\Pi_0(x,y,\varepsilon)-2S\Pi_1(x,y,\varepsilon)-\right.$$
$$\left.-S\Pi_2(x,y,\varepsilon)-\frac{x}{y}\Pi_1(x,y,\varepsilon)\right\}=o(\varepsilon^2).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\alpha\Pi_0(x,y)-\beta\frac{\partial\Pi_2(x,0,y)}{\partial z}+\alpha\Pi_1(x,y)+\right.$$
$$\left.+\alpha\Pi_2(x,y)\right\}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y}\Pi_0(x,y)-\frac{x}{y}\Pi_1(x,y)-\right.$$
$$\left.-2S\Pi_1(x,y)-S\Pi_2(x,y)\right\}=0. \quad (2)$$

В системе (1) перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$ и, обозначив $G=S+x/y$, получим систему дифференциальных уравнений

$$G\Pi_0(x,y)=\frac{\partial\Pi_1(x,0,y)}{\partial z}+\frac{\partial\Pi_2(x,0,y)}{\partial z},$$
$$G\Pi_1(x,z,y)=\frac{\partial\Pi_1(x,z,y)}{\partial z}-\frac{\partial\Pi_1(x,0,y)}{\partial z}+$$
$$+GB(z)\Pi_0(x,y),$$
$$0=\frac{\partial\Pi_2(x,z,y)}{\partial z}-\frac{\partial\Pi_2(x,0,y)}{\partial z}+$$
$$+GA(z)\Pi_1(x,y),$$

решение которой запишется как

$$\Pi_1(x,z,y)=G\Pi_0(x,y)e^{Gz}\times$$
$$\times\int_0^z e^{-Gt}[G\gamma-B(t)]dt, \Pi_2(x,z,y)=G\Pi_1(x,y)\int_0^z(1-A(t))dt,$$

где $\gamma=\int_0^\infty e^{-Gt}B(t)dt.$ Положим $z=\infty$:

$$\Pi_1(x,y)=(1-G\gamma)\Pi_0(x,y),$$
$$\Pi_2(x,y)=\mu_1 G(1-G\gamma)\Pi_0(x,y), \quad (3)$$

где $\mu_1=\int_0^\infty(1-A(t))dt.$

Подставим найденные выражения в (2):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(G^2\gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}-\mu_1\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(G^2\gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}-\mu_1\right)+\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\mu_1-\gamma-\frac{\beta}{\alpha}\right)G+2\right)\Pi_0(x,y)\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(S\left(G\gamma-2-\mu_1 G+\mu_1 G^2\gamma\right)+G^2\gamma\right)\Pi_0(x,y)\right\}=0,$$

совпадающее с вырожденным уравнением Фоккера–Планка для плотности распределения вероятностей $\Pi(x,y)$ значений стационарного двумерного диффузионного процесса, коэффициенты диффузии которого равны 0. Поэтому допредельное распределение вероятностей $\Pi_k(x,y,\varepsilon)$ сосредоточено в окрестности той точки $x=a$, $y=b$, в которой коэффициенты переноса равны 0. Следовательно, можно записать систему двух уравнений

$$\begin{cases}G^2\gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}-\mu_1\right)+\left(\mu_1-\gamma-\frac{\beta}{\alpha}\right)+2=0,\\ \left(S\left(G\gamma-2-\mu_1 G+\mu_1 G^2\gamma\right)+G^2\gamma\right)=0,\end{cases} \quad (4)$$

решение которой определяет параметры $x=a, y=b$. При заданных значениях параметров адаптера α, β из первого уравнения этой системы получаем величину $G=g$:

$$G=\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}+\gamma-\mu_1\right)-\sqrt{\left(\mu_1-\gamma-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+8\gamma\left(\mu_1-\frac{\beta}{\alpha}\right)}}{2\left(\frac{\beta}{\alpha}\gamma-\mu_1\gamma\right)}.$$

Второе равенство системы определяет значение S пропускной способности сети связи, управляемой адаптивным протоколом случайного множественного доступа с бесконечным числом узлов:

$$S=\frac{g^2\gamma}{2+\mu_1 g-g\gamma-\mu_1 g^2\gamma}.$$

На основании того, что мы принимали $G=S+x/y$, можно установить, что множество решений $x=a$, $y=b$ системы (4) определяется равенством $a=nb$, где $n=g-S$.

В силу этого утверждения пропускная способность, асимптотическое распределение вероятностей состояний канала, а также распределение нормированного числа заявок в ИПВ для сети связи, управляемой адаптивным протоколом доступа, совпадают с аналогичными характеристиками для сети с динамическим протоколом, в которой интенсивность повторного обращения из ИПВ каждой заявки составляет *n*/*i*. Так как *n*=*g*–*S*, то величина интенсивности в нашем случае при переходе от адаптивного протокола к динамическому составит (*g*–*S*)/*i*.

Составим систему уравнений, которой удовлетворяет распределение вероятностей:

$$P(k(t)=k,\ i(t)=i,\ z(t)\le z)=P_k(i,z,t),$$

$$P_0(i,t+\Delta t)=P_1(i,\Delta t,t)+P_2(i,\Delta t,t)+$$
$$+\left(1-\left(\lambda+\frac{g-S}{i}i\right)\Delta t\right)P_0(i,t)+o(\Delta t),$$

$$P_1(i,z,t+\Delta t)=\lambda\Delta tP_0(i,t)B(z)+$$
$$+\frac{g-S}{i+1}(i+1)\Delta tP_0(i+1,t)B(z)+$$
$$+\left[1-\left(\lambda+\frac{g-S}{i}i\right)\Delta t\right]\{P_1(i,z+\Delta t,t)-$$
$$-P_1(i,\Delta t,t)\}+o(\Delta t),$$

$$P_2(i,z,t+\Delta t)=\lambda\Delta tP_1(i-2,t)A(z)+$$
$$+\frac{g-S}{i-1}(i-1)\Delta tP_1(i-1,t)A(z)+$$
$$+[1-\lambda\Delta t]\{P_2(i,z+\Delta t,t)-P_2(i,\Delta t,t)\}+$$
$$+\lambda\Delta tP_2(i-1,z,t)+o(\Delta t).$$

Выполнив необходимые преобразования, выпишем систему

$$(\lambda+g-S)P_0(i)=\frac{\partial P_1(i,0)}{\partial z}+\frac{\partial P_2(i,0)}{\partial z},$$

$$(\lambda+g-S)P_1(i,z)=\frac{\partial P_1(i,z)}{\partial z}-\frac{\partial P_1(i,0)}{\partial z}+$$
$$+\lambda P_0(i)B(z)+(g-S)P_0(i+1)B(z).$$

$$\lambda P_2(i,z)=\frac{\partial P_2(i,z)}{\partial z}-\frac{\partial P_2(i,0)}{\partial z}+\lambda P_1(i-2)A(z)+$$
$$+(g-S)P_1(i-1)A(z)+\lambda P_2(i-1,z). \qquad (5)$$

Теорема. Асимптотически в условиях большой загрузки $\lambda\uparrow S$ распределение вероятностей П(*x*) состояний $\{k, i(S-\lambda)\}$ сети с динамическим протоколом доступа при интенсивности повторного обращения (*g*–*S*)/*i* имеет вид $\Pi(x)=\frac{r_k}{a}\exp\left\{-\frac{x}{a}\right\}$, где a дается равенством (8), а

$$\Pi(x)=\Pi_0(x)+\Pi_1(x)+\Pi_2(x),$$

$$r_0=\frac{1}{R},\quad r_1=\frac{(1-g\gamma)}{R},\quad r_2=\frac{(1-g\gamma)g\mu_1}{R},$$

$$R=2-g\gamma+\mu_1(1-g\gamma).$$

Доказательство. Обозначим

$$S-\lambda=\varepsilon^2,\ i\varepsilon^2=x,\ \frac{1}{\varepsilon^2}P_k(i,z)=\Pi_k(x,z,\varepsilon),$$
$$\Pi_k(x,z,0)=\Pi_k(x,z)$$

и перепишем систему (4):

$$\left(g-\varepsilon^2\right)\Pi_0(x,\varepsilon)=\frac{\partial\Pi_1(x,0,y,\varepsilon)}{\partial z}+$$
$$+\frac{\partial\Pi_2(x,0,\varepsilon)}{\partial z}+o(\varepsilon),$$

$$\left(g-\varepsilon^2\right)\Pi_1(x,z,\varepsilon)=\frac{\partial\Pi_1(x,z,\varepsilon)}{\partial z}-$$
$$-\frac{\partial\Pi_1(x,0,\varepsilon)}{\partial z}+(S-\varepsilon^2)\Pi_0(x,\varepsilon)B(z)+$$
$$+(g-S)\Pi_0\left(x+\varepsilon^2,\varepsilon\right)B(z)+o(\varepsilon),$$

$$(S-\varepsilon^2)\Pi_2(x,z,\varepsilon)=\frac{\partial\Pi_2(x,z,\varepsilon)}{\partial z}-$$
$$-\frac{\partial\Pi_2(x,0,\varepsilon)}{\partial z}+(s-\varepsilon^2)\Pi_1\left(x-2\varepsilon^2,\varepsilon\right)A(z)+$$
$$+(g-S)\Pi_1\left(x-\varepsilon^2,\varepsilon\right)A(z)+$$
$$+(S-\varepsilon^2)\Pi_2\left(x-\varepsilon^2,z,\varepsilon\right)+o(\varepsilon). \qquad (6)$$

Положив $\varepsilon=0$, получим систему дифференциальных уравнений относительно $\Pi_K(x,z,)$, решив эту систему и устремив $z\to\infty$, получим выражения для $\Pi_K(x)$, вид которых совпадает с (3).

Разложим $\Pi_K(x,z,\varepsilon)$ в системе (6) по приращениям аргумента x в ряд с точностью до ε^4 и будем искать решение $\Pi_K(x,z,\varepsilon)$ в виде

$$\Pi_K(x,z,\varepsilon)=\Pi_K(x,z,)+\varepsilon^2 f_k(x,z)+o(\varepsilon^2)\ . \qquad (7)$$

Сложив все уравнения системы (6), разложенные в ряд до ε^4, и подставив туда разложение (7), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвестной функции П(*x*):

$$\kappa_1\frac{d\Pi(x)}{dx}+\kappa_2\frac{d^2\Pi(x)}{dx^2}=0,$$

где $\kappa_1=(\eta+\gamma)(2S+(g-S)+Sg\mu_1),$

$$\kappa_2=(1-g\gamma)(2+2S+\mu_1+\frac{1}{2}S\mu_1+2S^2+S^2g\mu_2+$$
$$+(g-S)\left[\frac{1}{2}+2S+(g-S)+Sg\mu_1+S\mu_1\right]),$$

$$\gamma=\int_0^\infty e^{-gt}B(t)dt,\quad \mu_1=\int_0^\infty(1-A(t))dt,$$

$$\eta=\int_0^\infty te^{-gt}B(t)dt,\quad \mu_2=\int_0^\infty\frac{t^2}{2}dA(t).$$

Обозначив $\qquad a=k_2/k_1, \qquad (8)$

запишем решение этого уравнения:

$$\Pi(x)=Cr_k\exp\left\{-\frac{x}{a}\right\}.$$

Обозначим $\Pi(x)=\Pi_0(x)+\Pi_1(x)+\Pi_2(x)$. Используя условие нормировки $\int_0^\infty\Pi(x)dx=1$, получим $\Pi(x)=\frac{r_k}{a}\exp\left\{-\frac{x}{a}\right\}$. Теорема доказана.

Выпишем основные полученные результаты.

1. Пропускная способность *S* сети связи, управляемой адаптивным протоколом случайного множественного доступа с бесконечным числом узлов, равна

$$S = \frac{g^2\gamma}{2+\mu_1 g - g\gamma - \mu_1 g^2 \gamma},$$

где g определяется по формуле

$$g = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}+\gamma-\mu_1\right)-\sqrt{\left(\mu_1-\gamma-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+8\gamma\left(\mu_1-\frac{\beta}{\alpha}\right)}}{2\left(\frac{\beta}{\alpha}\gamma-\mu_1\gamma\right)}.$$

2. Асимптотическая плотность распределения вероятностей для сети связи, управляемой адаптивным протоколом случайного множественного доступа с бесконечным числом узлов, равна

$$\Pi(x) = \frac{r_k}{a}\exp\left\{-\frac{x}{a}\right\}.$$

Переходом от адаптивного протокола к динамическому удалось получить асимптотическую плотность распределения вероятностей состояний системы, определяемых вектором (k, i) для сети связи с адаптивным протоколом случайного множественного доступа. Описанным здесь методом можно получить совместное асимптотическое распределение вероятностей состояний (k,i,T), но это выходит за рамки данной работы.

Заключение

Исследован адаптивный протокол случайного множественного доступа с оповещением о конфликте. Для сети связи с бесконечным числом абонентских станций найдено асимптотическое распределение вероятностей состояний системы. Определена величина пропускной способности S .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бертсекас Д., Галлагер Р.* Сети передачи данных. М.: Мир, 1989.
2. *Назаров А.А., Юревич Н.М.* Исследование явления бистабильности в сети с протоколом Алоха для конечного числа станций // Автоматика и телемеханика. 1996. № 9. С.91–100.
3. *Фалин Г.И.* О неустойчивости сети Алоха // Проблемы передачи информации. 1990. № 1. С. 79–82.
4. *Назаров А.А.* Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 15 февраля 2000 г.