Томский государственный университет

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

ВЫПУСК 15

Томск 2000

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМЫХ СЛАГАЕМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП*

А.Р.Чехлов

В [1, проблема 9] поставлена задача изучения абелевых групп, в которых пересечение двух прямых слагаемых снова является прямым слагаемым. Такие группы исследовались в [2]. Более широкий класс образуют абелевы группы, в которых пересечение двух прямых слагаемых является сервантной подгруппой. Назовем такие группы m-группами. В абелевых группах без кручения пересечения сервантных подгрупп сервантны. Следовательно, все они являются m-группами. Заметим, что если $A = \oplus_{i\in I} A_i$, где A_i — вполне характеристические подгруппы в A, то нетрудно проверить, что A является m-группой тогда и только тогда, когда каждая A_i есть m-группа. Поэтому периодическая группа A является m-группой тогда и только тогда, когда каждая ее p-компонента A_p есть m-группа. Пусть теперь $< a >$ — циклическое прямое слагаемое p-компоненты A_p группы A такое, что $pa \neq 0$. Если b — элемент порядка p из дополнительного прямого слагаемого, то $< a + b >$ — прямое слагаемое в A, и $< a + b > \cap < a > = < pa >$ — несервантная подгруппа. Следовательно, A_p — коциклическая группа, либо $A_p = B \oplus G$, где $pB = 0$, а G — делимая группа. Если $D_1 \oplus D_2$ — прямое слагаемое в G такое, что $D_1 \cong D_2 \cong Z(p^\infty)$, то пусть элементы $a_1, \dots, a_n, \dots$ с определяющими соотношениями $pa_1 = 0, \dots, pa_n = a_{n-1}, \dots$ порождают D_1, а $b_1, \dots, b_n, \dots$ — аналогичные элементы для D_2. Тогда делимая подгруппа D, порожденная элементами $a_1, a_2 + b_1, \dots, a_n + b_{n-1}, \dots$ есть такое прямое слагаемое в A, что $D \cap D_1 = < a_1 >$ — несервантная подгруппа в A. Следовательно, $G \cong Z(p^\infty)$. Нетрудно проверить, что тогда $A_p = B \oplus G$ есть m-группа. Следовательно, справедлива

Теорема 1. *p-компонента m-группы выделяется в ней прямым слагаемым. p-группа A является m-группой тогда и только тогда, когда A — коциклическая группа, либо $A = B \oplus G$,*

*Работа поддержана грантом РФФИ N° 00-01-00876

где $B \neq 0$, $pB = 0$, *а* $G = 0$ *или* $G \cong Z(p^\infty)$.

Для замкнутости изложения приведем следующую лемму из [2, лемма 3].

Лемма 2. *Если* $G = A \oplus B$ *и* $B/C \cong D \subseteq A$ *для некоторой подгруппы* $C \subseteq B$, *то существует такая подгруппа* K *группы* G, *что* $G = A \oplus K$ *и* $K \cap B = C$.

Доказательство. Если $B/C \cong D \subseteq A$, то в G существует подпрямая сумма K групп D и B с ядрами 0 и C, которая удовлетворяет требованиям леммы.

Теорема 3. *Смешанная группа* A *является* m-*группой тогда и только тогда, когда каждая ее* p-*компонента* A_p — *циклическая группа или* $pA_p = 0$, *причем если* $A_p \neq 0$, *то факторгруппа* A/A_p p-*делима.*

Доказательство. Необходимость. Согласно теореме 1 $A = A_p \oplus R_p$ для каждого простого числа p, где $R_p \cong A/A_p$ — дополнительное прямое слагаемое к A_p. Если $pR_p \neq R_p$ или в A_p имеется ненулевая делимая подгруппа, то в обоих случаях в R_p существует подгруппа K такая, что $0 \neq R_p/K \cong D \subseteq A_p$. Поэтому необходимость вытекает из леммы 2 и из того факта, что группа с нулевой p-компонентой не имеет сервантных подгрупп, факторгруппы по которым есть p-группы.

Достаточность. Пусть B и G — прямые слагаемые в A. Если $A_p = 0$, то $B \cap G$ есть p-сервантная подгруппа. Если же $A_p \neq 0$ и $A = A_p \oplus R_p$, то в силу вполне характеристичности A_p и R_p следует, что $B = (B \cap A_p) \oplus (B \cap R_p)$. Отсюда $B \cap G = M \oplus F$, где $M = B \cap G \cap A_p$, $F = B \cap G \cap R_p$. Здесь M и F есть p-сервантные подгруппы соответственно в A_p и R_p. Поэтому $B \cap G$ есть p-сервантная подгруппа для каждого простого p и, значит, сервантна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974. 335 с.

2. *Камалов Ф. Ф.* Пересечения прямых слагаемых абелевых групп// Изв. вузов. Математика. 1977. № 5. С. 45-56.