На правах рукописи

Коцюруба Полина Ивановна

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕУСТОЙЧИВЫХ СЕТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск-2006

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Назаров Анатолий Андреевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Демин Николай Серапионович,

кандидат физико-математических наук, доцент
Китаева Анна Владимировна

Ведущая организация: Сибирский государственный аэрокосмический университет (г. Красноярск)

Защита состоится:
29 июня 2006 г. В 10.30 часов на заседании диссертационного совета
Д 212.267.08 при Томском государственном университете по адресу:
634050, г.Томск, пр.Ленина, 36

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Томского государственного университета.

Отзыв на автореферат (в двух экземплярах, заверенные печатью), просьба высылать по адресу 634050, г.Томск, пр.Ленина, 36, Томский государственный университет, ученому секретарю университета Буровой Н.Ю.

Автореферат разослан «____» мая 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор технических наук, доцент А.В.Скворцов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Среди локальных вычислительных сетей, сети случайного доступа составляют подавляющее большинство, благодаря наличию значительного числа их достоинств: высокая скорость передачи сообщений, приемлемая дальность, помехозащищенность, возможность передачи различных видов информации, низкая относительная стоимость и т.д. Но такие сети обладают и рядом недостатков, основным из которых является неустойчивость их функционирования, присущая всем типам сетей случайного доступа.

Одной из наиболее важных характеристик сети передачи данных является величина задержки, необходимая для доставки сообщения от источника к месту назначения, которая в сетях случайного доступа является нерегулярной, поэтому исследуется методами теории вероятностей и теории случайных процессов.

Главной методологической основой для анализа сетей случайного доступа является теория массового обслуживания. Но использование теории массового обслуживания, часто требует упрощающих предположений, так как, к сожалению, более реалистичные предположения делают содержательный анализ чрезвычайно сложным. По этой причине невозможно провести точные количественные расчеты задержки на основе моделей теории массового обслуживания.

Здесь имеет место следующая ситуация. Классические модели массового обслуживания, для которых получены аналитические формулы Эрланга, Поллачека-Хинчина, приоритетные системы далеки от реальных сетей случайного доступа. Более адекватными моделями являются системы массового обслуживания (СМО) с источником повторных вызовов (ИПВ), но, как уже отмечено выше, исследование таких моделей является чрезвычайно сложным, поэтому реализуется либо графическими методами на уровне средних характеристик, либо имитационным моделированием, позволяющим получать лишь численные результаты, не отражающими качественную картину. Тогда как системы с ИВП имеют очень странные свойства при большом числе узлов. Эти свойства становятся достаточно очевидны при аналитическом исследовании рассматриваемых СМО, выполненном в данной работе асимптотическим методом. Исследованию математических моделей сетей связи посвящены работы А.А.Назарова, В.И.Клименок, И.И.Хомичкова, Г.И.Фалина, Ю.Д. Одышева, С.Л.Шохора, Н.М.Юревича, Rajan, Д.Ю.Кузнецова, В.А.Михайлова, С.У.Уразбаевой, С.М.Одоевского, К.В.Сорочинской.

Таким образом, данная работа, в которой проводиться аналитическое исследование математических моделей неустойчивых сетей случайного доступа, является актуальной и своевременной.

Цель работы. Целью работы является исследование сетей связи случайного доступа с общей средой передачи для нахождения вероятностно-временных характеристик, а также исследование функционирования неустойчивой сети случайного доступа во всей области изменения ее состояний.

То есть, были поставлены следующие задачи:

1. построение математической модели сети случайного доступа с протоколом доступа ALOHA с обновлением остаточного времени обслуживания искаженной заявки;
2. исследование средних характеристик неустойчивой сети случайного доступа;

3. локальная диффузионная аппроксимация процесса изменения состояний неустойчивой сети случайного доступа;
4. глобальная диффузионная аппроксимация процесса изменения состояний неустойчивой сети случайного доступа;
5. нахождение времени стабильного функционирования неустойчивой сети случайного доступа;
6. распределение вероятностей значений процесса глобальной аппроксимации в области стабильного функционирования неустойчивой сети случайного доступа;
7. определение основных вероятностно-временных характеристик неустойчивых сетей случайного доступа.

Методика исследований. Исследование математических моделей сетей случайного доступа проводилось с помощью методов теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, статистического анализа, модифицированным для нестационарных режимов методом асимптотического анализа марковизированных систем.

Научная новизна и результаты, выносимые на защиту, состоит в следующем:

1. Предложена математическая модель сети ALOHA с обновлением остаточного времени обслуживания искаженной заявки.
2. Развита модификация асимптотического метода для исследования нестационарных режимов.
3. Построен диффузионный процесс, аппроксимирующий процесс изменений состояний сети не только в окрестности среднего, но и во всей области изменения ее состояний.
4. Определено понятие времени стабильного функционирования неустойчивой сети случайного доступа, найдено явное выражение его среднего значения, и показано, что оно является достаточно большим, существенно превосходящим время существования любой реальной компьютерной сети связи.
5. Найдено распределение значений процесса глобальной аппроксимации в области стабильного функционирования.
6. Получены основные вероятностно-временные характеристики неустойчивых сетей случайного доступа.

Теоретическая ценность работы. Развиты аналитические методы массового обслуживания. Построены и исследованы математические модели неустойчивых сетей связи случайного доступа. Предложена модификация метода асимптотического анализа для нестационарных режимов.

Практическая ценность работы. Приведенные в диссертации результаты могут быть применены для выбора сетевого оборудования при проектировании новых сетей связи, для анализа функционирования уже существующих сетей, а также для нахождения их вероятностных характеристик и оценки важных параметров сетей.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

1. Всероссийской научно-практической конференции «Новые технологии и комплексные решения: наука, образование, производство» (г. Анжеро-Судженск, 2001 г.)
2. IV Всероссийской конференции «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» (г. Томск, 2002 г.)
3. Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование» (г. Томск, 2002 г.)
4. XLI международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс" (г. Новосибирск, 2003 г.)
5. II Сибирской научной школы-семинара с международным участием "Проблемы компьютерной безопасности и криптография" (г. Томск, 2003 г.)
6. Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование» (г. Анжеро-Судженск)
7. На научных семинарах кафедры ТВиМС факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета.

Публикации. По результатам выполненных исследований было опубликовано десять научных работ, в том числе две статьи в академическом журнале, входящем в список ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 128 страниц, в том числе: титульный лист – 1 стр., оглавление – 3 стр., основной текст – 110 стр., библиография из 105 наименований – 12 стр.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, изложены цель исследования, научная новизна, теоретическая и практическая ценность результатов, методика исследования, сделан обзор литературы.

Сети связи случайного доступа будем называть неустойчивыми, если для их математических моделей не существует стационарного режима.

В первой главе в качестве математической модели сети случайного доступа Ethernet рассмотрим однолинейную марковскую систему массового обслуживания с источником повторных вызовов (ИПВ). Состояние системы в момент времени t определим вектором $\{i(t),k(t)\}$, где $i(t)$ – число заявок в источнике повторных вызовов, а $k(t)$ – состояния прибора, $P_k(i,t) = \, = P\big(k(t)=k, i(t)=i\big)$ – вероятностей того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k, а в ИПВ – i заявок. Тогда распределение $P_k(i,t)$ будет удовлетворять следующим уравнениям Колмогорова

$$\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} + (\rho + i\gamma)P_0(i,t) = \frac{1}{\nu}P_2(i,t) + \frac{1}{a}P_c(i,t)\,,$$

$$\frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} + (\rho + i\gamma + 1)P_1(i,t) = \rho P_0(i,t) + (i+1)\gamma P_0(i+1,t)\,,$$

$$\frac{\partial P_2(i,t)}{\partial t} + \left(\rho + \frac{1}{\nu}\right)P_2(i,t) = P_1(i,t) + \rho P_2(i-1,t)\,,$$

$$\frac{\partial P_c(i,t)}{\partial t} + \left(\rho + \frac{1}{a}\right)P_c(i,t) = \rho P_1(i-2,t) + \rho P_c(i-1,t) + (i-1)\gamma P_1(i,-1,t)\,. \qquad (1)$$

Известно, что для построенной математической модели не существует стационарных режимов, т.е. пропускная способность сети равна нулю, а время доставки сообщения увеличивается неограниченно по мере того, как система продолжает работать. В этом смысле рассматриваемая сеть связи неустойчива.

Для решения нестационарной системы (1) воспользуемся модифицированным методом асимптотического анализа марковских систем в условиях большой задержки $\gamma \to 0$.

Рассмотрим процесс $x(\tau) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon i(\tau/\varepsilon)$, который имеет смысл асимптотического среднего нормированного числа $i\varepsilon(t)$ заявок в ИВП.

Теорема 1.1 Процесс

$$x(\tau) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon i(\tau/\varepsilon) \qquad (2)$$

является детерминированной функцией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$x'(\tau) = \rho - R_1(x(\tau))\,, \qquad (3)$$

где

$$R_1(x) = \frac{\rho + x}{a(\rho+x)^2 + (2+\nu)(\rho+x) + 1}\,.$$

В ходе доказательства были найдены величины, которые являются вероятностями состояний канала

$$R_0(x) = \frac{\rho + x + 1}{a(\rho+x)^2 + (2+\nu)(\rho+x) + 1}\,,\quad R_1(x) = \frac{\rho + x}{a(\rho+x)^2 + (2+\nu)(\rho+x) + 1}\,,$$

$$R_2(x) = \frac{\nu(\rho + x)}{a(\rho+x)^2 + (2+\nu)(\rho+x) + 1}\,,\quad R_c(x) = \frac{a(\rho + x)^2}{a(\rho+x)^2 + (2+\nu)(\rho+x) + 1}\,. \qquad (4)$$

В диссертации показано, что если уравнение (3) имеет 2 точки покоя, $x_1 < x_2$, то

x_1 является устойчивой, а x_2 неустойчивой точками покоя. Устойчивую точку покоя x_1 дифференциального уравнения (3) будем называть точкой стабилизации сети связи.

Для более точного исследования процесса изменения состояний математической модели сети Ethernet построим случайный процесс, аппроксимирующий значения величины отклонений нормированного числа заявок от асимптотического среднего

$$y(\tau) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2) - x(\tau)}{\varepsilon}, \tag{5}$$

где $x(\tau)$ определяется уравнением (3). Этот процесс будем называть локальной аппроксимацией процесса изменения состояний математической модели сети Ethernet.

Теорема 1.2 Процесс $y(\tau)$ является диффузионным процессом авторегрессии с коэффициентом переноса $y\,b(\tau)$, где

$$b(\tau) = aR_1^{\,2} - R_1 \frac{(R_0 - R_1)}{\rho + x} \tag{6}$$

и коэффициентом диффузии

$$B^2(\tau) = \frac{1}{2}\{xR_0 + \rho(R_2 + R_c) + (4\rho + x)R_1\} - \frac{x^2}{\rho + x} R_0 + {}$$
$$+ \rho[\rho\nu R_2 + a(\rho R_c + (x + 2\rho)R_1)], \tag{7}$$

где величины R_0, R_1, R_2 и R_c определены в соотношении (4).

Следствие 1.1 Процесс $y(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dy(\tau) = b(\tau)y(\tau)d\tau + B(\tau)dw(\tau), \tag{8}$$

причем его решение можно представить в явном виде

$$y(\tau) = e^{\int_0^\tau b(s)ds} \left\{ y_0 + \int_0^\tau B(u) e^{-\int_0^u b(s)ds} dw(u) \right\}.$$

Для того чтобы аппроксимировать процесс изменения состояний сети, не только в окрестности среднего, но и во всей области изменения ее состояний, введем в рассмотрение процесс

$$u(\tau) = x(\tau) + \varepsilon\, y(\tau), \tag{9}$$

где $x(\tau)$ определяется уравнением (3), а $y(\tau)$ уравнением (8).

Теорема 1.3 Случайный процесс $u(\tau)$ с точностью до бесконечной малой более высокого порядка, чем ε, удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$du(\tau) = \{\rho - f(u)\}d\tau + \varepsilon B(u)dw(\tau), \tag{10}$$

где $f(u) = \dfrac{\rho + u}{a(\rho + u)^2 + (2 + \nu)(\rho + u) + 1}$, (11)

а $B(u)$ определяется равенством (7).

Из (10) следует, что $u(\tau)$ является однородным диффузионным случайным процессом с коэффициентом переноса $f(u)$ и коэффициентом диффузии $\varepsilon^2 B^2(u)$. Коэффициенты переноса и диффузии будут зависеть от текущего состояния процесса. Назовем этот процесс *глобальной аппроксимацией* процесса $\varepsilon^2 i(t)$ изменения состояний системы массового обслуживания.

Рассмотрим интервал времени от момента τ до момента достижения процессом $u(\tau)$ состояния $u_2 = x_2$. Его длину обозначим $T(\tau)$. Условное среднее значение величины $T(\tau)$, при условии $u(\tau) = u$, обозначим

$$E(u) = M\{T(\tau) \mid u(\tau) = u\}, \tag{12}$$

Средним временем стабильного функционирования сети случайного доступа назовем $E(u_1)$, т.е. среднее значение длины интервала от момента τ, когда процесс $u(\tau) = u_1$, т.е. находится в точке стабилизации, до момента его выхода на границу u_2, области устойчивого функционирования.

Теорема 1.4 Среднее значение времени стабильного функционирования имеет вид

$$E(u_1) = \frac{2}{\varepsilon^2}\int_{u_1}^{u_2}\int_0^s \frac{1}{B^2(y)}\exp\left\{-\frac{2}{\varepsilon^2}\int_y^s \frac{\rho - f(\rho + x)}{B^2(x)}dx\right\}dyds \ . \tag{13}$$

Так как время достижения процессом $u(\tau)$ состояния u_2 может быть достаточно большим, то в течение этого времени распределение вероятностей

$$p(u) = P\{u \le u(\tau) < u + du \mid u(\tau) < u_2\}/du \tag{14}$$

его значений не меняется с течением времени, поэтому его назовем распределением вероятностей значений процесса $u(\tau)$ в режиме стабильного функционирования.

Теорема 1.5 Плотность распределения значений процесса $u(\tau)$ в режиме стабильного функционирования имеет вид

$$p(u) = \frac{\dfrac{1}{B^2(u)}\displaystyle\int_u^{u_2}\exp\left\{-\frac{2}{\varepsilon^2}\int_z^y \frac{\rho - f(x)}{B^2(x)}dx\right\}dy}{\displaystyle\int_0^{u_2}\frac{1}{B^2(u)}\left(\int_u^{u_2}\exp\left\{-\frac{2}{\varepsilon^2}\int_z^y \frac{\rho - f(x)}{B^2(x)}dx\right\}dy\right)du}, \tag{15}$$

где $f(x)$, $B(x)$ определяются равенствами (11) и (7) соответственно.

Во второй главе рассмотрим немарковскую систему массового обслуживания с источником повторных вызовов. Определим состояние СМО в момент времени t вектором $\{k(t), i(t)\}$, где $i(t)$ – число запросов в ИВП, а $k(t)$ – состояние канала, здесь. В силу произвольности функций распределения $B_k(x)$ случайный процесс $\{k(t), i(t)\}$ немарковский. Для исследования процесса $\{k(t), i(t)\}$, введем компоненту $z(t)$ равную длине интервала от момента t до момента окончания текущего состояния канала, когда $k(t) = 1, 2$ или c, тогда случайный процесс $\{k(t), i(t), z(t)\}$ является марковским. Отметим, что если $k(t) = 0$, то компонента $z(t)$ не определяется.

Обозначим

$$P_0(i,t) = P(k(t) = 0, i(t) = i), \ P_k(i,z,t) = P(k(t) = k, i(t) = i, z(t) < z), \ k = 1, 2, c,$$

распределение вероятностей того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k, в ИПВ – i заявок и если $k = 1, 2, c$, до момента окончания текущего состояния меньше времени меньше, чем z. Распределение $P_k(i,z,t)$ удовлетворяет системе уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} + (\rho + i\gamma)P_0(i,t) = \frac{\partial P_2(i,0,t)}{\partial z} + \frac{\partial P_c(i,0,t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial t} + (\rho + i\gamma)P_1(i,z,t) = \frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z} +$$

$$+\rho B_1(z)P_0(i,t) + (i+1)\gamma B_1(z)P_0(i+1,t),$$

$$\frac{\partial P_2(i,z,t)}{\partial t}+\rho P_2(i,z,t)=\frac{\partial P_2(i,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial P_2(i,0,t)}{\partial z}+$$
$$+B_2(z)\frac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z}+\rho P_2(i-1,z,t),$$
$$\frac{\partial P_c(i,z,t)}{\partial t}+\rho P_c(i,z,t)=\frac{\partial P_c(i,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial P_c(i,0,t)}{\partial z}+$$
$$+\rho B_c(z)P_1(i-2,\infty,t)+(i-1)\gamma B_c(z)P_1(i-1,\infty,t)+\rho P_c(i-1,z,t). \qquad (16)$$

Здесь $\frac{\partial P_k(i,0,t)}{\partial z}=\left.\frac{\partial P_k(i,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}$ и $P_1(i,\infty,t)=\left.P_1(i,z,t)\right|_{z=\infty}$.

Для решения системы (16) воспользуемся модифицированным методом асимптотического анализа в условиях большой задержки $\gamma\to 0$.

Рассмотрим процесс $x(\tau)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon i(\tau/\varepsilon)$, который имеет смысл асимптотического среднего нормированного числа $i\varepsilon(t)$ заявок в ИВП.

Теорема 2.1 Процесс

$$x(\tau)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon i(\tau/\varepsilon) \qquad (17)$$

является детерминированной функцией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$x'(\tau)=\rho-(\rho+x)(R_0-R_1), \qquad (18)$$

где

$$R_0=\frac{1}{2-B^*(x)+b_2(\rho+x)B^*(x)+b_c(\rho+x)(1-B^*(x))},$$
$$R_1=\frac{1-B^*(x)}{2-B^*(x)+b_2(\rho+x)B^*(x)+b_c(\rho+x)(1-B^*(x))}.$$

Здесь b_2 и b_c среднее значение времени передачи и времени оповещения о конфликте, а

$$B^*(x)=(\rho+x)\int_0^\infty B_1(s)e^{-(\rho+x)s}ds.$$

В ходе доказательства теоремы были найдены вероятности распределения состояний канала

$$R_0=\frac{1}{2-B^*(x)+b_2(\rho+x)B^*(x)+b_c(\rho+x)(1-B^*(x))},$$
$$R_1=\frac{1-B^*(x)}{2-B^*(x)+b_2(\rho+x)B^*(x)+b_c(\rho+x)(1-B^*(x))},$$
$$R_2=\frac{b_2(\rho+x)B^*(x)}{2-B^*(x)+b_2(\rho+x)B^*(x)+b_c(\rho+x)(1-B^*(x))},$$
$$R_c=\frac{b_c(\rho+x)(1-B^*(x))}{2-B^*(x)+b_2(\rho+x)B^*(x)+b_c(\rho+x)(1-B^*(x))}. \qquad (19)$$

Для более точного исследования процесса изменения состояний немарковской модели сети Ethernet построим случайный процесс, аппроксимирующий значения величины отклонений нормированного числа заявок от асимптотического среднего

$$y(\tau)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)-x(\tau)}{\varepsilon}, \qquad (20)$$

где $x(\tau)$ определяется уравнением (18). Этот процесс будем называть локальной аппроксимацией процесса изменения состояний математической модели сети Ethernet.

Теорема 2.2 Процесс $y(\tau)$ является диффузионным процессом авторегрессии с коэффициентом переноса $yb(\tau)$, где

$$b(\tau)=R_1(1+F^*(x))-R_0+(\rho+x)(R_0-R_1)\cdot$$
$$\cdot\left\{R_1\frac{F^*(x)}{\rho+x}+b_2(R_0B^*(x)-R_1F^*(x))+b_cR_1(1+F^*(x))\right\},$$

и коэффициентом диффузии

$$B^2(\tau)=xR_0+\rho(R_2+R_c)-2R_1\left[(1-F^*(x))x'(\tau)+x\right]+(4\rho+x)R_1+$$
$$+2(x'(\tau)-\rho)\left\{R_1\frac{(1-F^*(x))x'(\tau)+x}{\rho+x}+b_2\left[x'(\tau)R_1F^*(x)+xB^*(x)R_0\right]+\right.$$
$$\left.+b_cR_1\left[(1-F^*(x))x'(\tau)-2\rho\right]+(x'(\tau)-\rho)\left[R_2f_2+R_cf_c\right]\right\}, \qquad (21)$$

где величины R_0, R_1, R_2 и R_c определены в соотношении (19), f_2 и f_c – среднее остаточное время передачи и оповещения о конфликте соответственно, а $F^*(x)=(\rho+x)\int\limits_0^\infty e^{-(\rho+x)\rho}F_1(s)ds$.

Следствие 2.1 Процесс $y(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dy(\tau)=b(\tau)y(\tau)d\tau+B(\tau)dw(\tau), \qquad (22)$$

причем его решение можно представить в явном виде

$$y(\tau)=e^{\int\limits_0^\tau b(s)ds}\left\{y_0+\int\limits_0^\tau B(u)e^{-\int\limits_0^u b(s)ds}dw(u)\right\}.$$

Для того чтобы аппроксимировать процесс изменения состояний сети, не только в окрестности среднего, но и во всей области изменения ее состояний, введем в рассмотрение процесс

$$u(\tau)=x(\tau)+\varepsilon\, y(\tau), \qquad (23)$$

где $x(\tau)$ определяется уравнением (18), а $y(\tau)$ уравнением (22).

Теорема 2.3 Случайный процесс $u(\tau)$ с точностью до бесконечной малой более высокого порядка, чем ε, удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$du(\tau)=\{\rho-f(\rho+u)\}d\tau+\varepsilon B(u)dw(\tau), \qquad (24)$$

где $f(u)=\dfrac{(\rho+x)B^*(u)}{2-B^*(u)+b_2(\rho+u)B^*(u)+b_c(\rho+u)(1-B^*(u))}$, (25)

а $B(u)$ определяется равенством (21).

Из (23) следует, что $u(\tau)$ является однородным диффузионным случайным процессом с коэффициентом переноса $f(u)$ и коэффициентом диффузии $\varepsilon^2B^2(u)$. Коэффициенты переноса и диффузии будут зависеть от текущего состояния процесса $u(\tau)$. Назовем этот процесс *глобальной аппроксимацией* процесса $\varepsilon^2 i(t)$ изменения состояний системы массового обслуживания.

Рассмотрим интервал времени от момента τ до момента достижения процессом $u(\tau)$ состояния $u_2=x_2$. Его длину обозначим $T(\tau)$. Условное среднее значение величины $T(\tau)$, при условии $u(\tau)=u$, обозначим

$$E(u)=M\{T(\tau)\,|\,u(\tau)=u\}, \qquad (26)$$

Средним временем стабильного функционирования сети случайного доступа назовем $E(u_1)$, т.е. среднее значение длины интервала от момента τ, когда процесс $u(\tau)=u_1$, т.е. процесс находится в точке стабилизации, до момента его выхода на границу u_2, области устойчивого функционирования.

Для среднего времени стабильного функционирования можно доказать теорему аналогичную теоремы 1.4, т.е. найти его в явном виде.

В качества примера рассмотрим ситуацию, когда $\varepsilon=0.1$. Пусть время резервирования детерминировано и равно 1, время передачи равномерно распределено в интервале [5, 15], а время распространения сигнала оповещения о конфликте также равномерно распределено, но в интервале [0, 4].

Здесь единица времени равна времени резервирования, которое в 10 раз меньше времени передачи сообщения.

Рассмотрим сеть, канал связи которой имеет скорость передачи 10 Мбит/сек. Будем полагать, что средняя длина сообщения составляет 10 кбит, тогда среднее время передачи одного сообщения равна 1мсек$=10^{-3}$ сек. Следовательно, рассматриваемая единица времени равна 10^{-4} сек

1. Пусть $\rho=0.06$, тогда $u_1=0.2$, а величина $E(u_1)$

$$E(u_1)=1.42\cdot10^{3}\cdot10^{-4}=0{,}142 \text{ сек.}$$

2. Если $\rho=0.055$, то $u_1=0.125$, тогда

$$E(u_1)=2.15\cdot10^{6}\cdot10^{-4}=2.15\cdot10^{2}=215 \text{ сек.}$$

3. Если $\rho=0.05$, то $u_1=0.08$, тогда

$$E(u_1)=1.38\cdot10^{14}\cdot10^{-4}=1.38\cdot10^{10} \text{ сек} = \textbf{440 лет}.$$

Получили, что при значениях параметра $\rho\le0.05$, сеть функционирует стабильно практически неограниченный срок.

Так как время достижения процессом $u(\tau)$ состояния u_2 может быть достаточно большим, то в течение этого времени распределение вероятностей

$$p(u)=P\{u\le u(\tau)<u+du \mid u(\tau)<u_2\}/du \tag{27}$$

его значений не меняется с течением времени, поэтому его назовем распределением вероятностей значений процесса $u(\tau)$ в режиме стабильного функционирования.

Аналогично теоремы 1.5 найдена эта плотность распределения. Графики плотности при $\rho=0.055$ и $\rho=0.050$ приведены на рисунке 1 и 2 соответственно

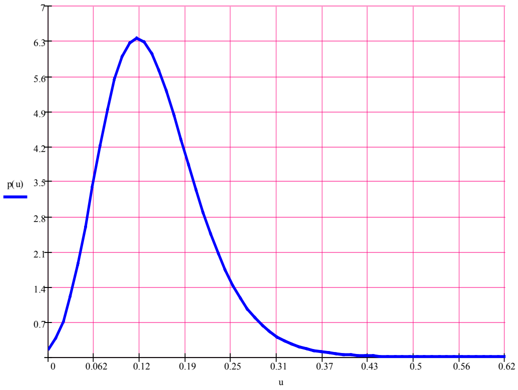

Рис.1

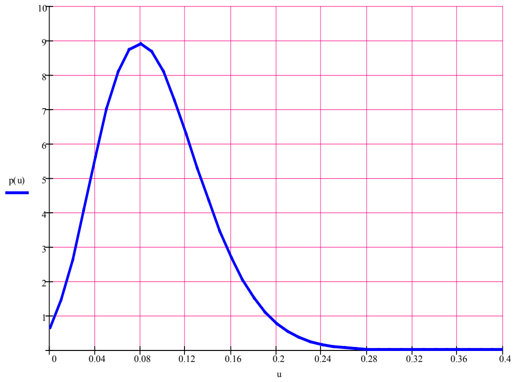

Рис.2

В третьей главе рассмотрим сети связи случайного доступа с протоколом ALOHA. В качестве математической модели возьмем систему массового обслуживания с источником повторных вызовов. На вход СМО поступает простейший поток запросов с параметром ρ. Если канал свободен, осуществляется передача запроса, продолжительность которого имеет функцию распределения $B(x)$. Если в момент поступления запроса, канал занят передачей другого, оба запроса попадают в конфликт и один из них, у которого время остаточного или полного обслуживания больше, остается на приборе и продолжает обслуживаться в искаженном виде, а второй переходит в ИПВ. По завершению этапа обслуживания искаженного запроса канал вновь становится свободным, а запрос переходит в ИПВ. После случайной задержки запросов в ИПВ, время которой распределено экспоненциально с параметром γ одинаковым для всех запросов, они вновь обращаются к каналу для повторных попыток передачи.

Состояние системы массового обслуживания в момент времени t определим вектором $\{k(t),i(t)\}$, где $i(t)$ – число запросов в ИВП, а $k(t)$ – состояние канала, здесь $k(t)=0$, если канал свободен; $k(t)=1$, если канал занят обслуживанием неискаженного запроса, $k(t)=2$ – канал занят обслуживанием искаженного запроса. В силу произвольности функции распределения $B(x)$ случайный процесс $\{k(t),i(t)\}$ немарковский. Для исследования процесса $\{k(t),i(t)\}$, введем компоненту $z(t)$ равную длине интервала от момента t до момента окончания обслуживания запроса, тогда случайный процесс $\{k(t), i(t), z(t)\}$ является марковским. Отметим, что если $k(t)=0$, то компонента $z(t)$ не определяется.

Обозначим

$P_0(i,t)=P\big(k(t)=k,\, i(t)=i\big)$, $P_k(i,t,z)=P\big(k(t)=k,\, i(t)=i,\, z(t)<z\big)$, при $k=1,2$,

вероятности того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k, в ИПВ – i заявок и если $k=1,2$, до момента окончания обслуживания запроса меньше времени меньше, чем z.

Распределение $P_k(i,z,t)$ удовлетворяет системе уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t}+(\rho+i\gamma)P_0(i,t)=\frac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z}+\frac{\partial P_2(i-1,0,t)}{\partial z},$$
$$\frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial t}+(\rho+i\gamma)P_1(i,z,t)=\frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z}+\rho B(z)P_0(i,t)+$$
$$+(i+1)\gamma B(z)P_0(i+1,t),$$
$$\frac{\partial P_2(i,z,t)}{\partial t}+(\rho+i\gamma)P_2(i,z,t)=\frac{\partial P_2(i,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial P_2(i,0,t)}{\partial z}+$$
$$+\rho B(z)\big(P_1(i-1,z,t)+P_2(i-1,z,t)\big)+i\gamma B(z)\big(P_1(i,z,t)+P_2(i,z,t)\big). \qquad (28)$$

Для решения системы (28) воспользуемся модифицированным методом асимптотического анализа для нестационарных режимов в условиях большой задержки $\gamma\to 0$, т.е. среднее время обращения заявок из ИПВ гораздо больше среднего времени между приходом заявок из входного потока.

Рассмотрим процесс $x(\tau)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon i(\tau/\varepsilon)$, который имеет смысл асимптотического среднего нормированного числа $i\varepsilon(t)$ заявок в ИВП.

Теорема 3.1 Процесс

$$x(\tau)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\, i(\tau/\varepsilon) \qquad (29)$$

является детерминированной функцией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$x'(\tau)=\rho-(\rho+x)(R_0-R_1), \qquad (30)$$

где

$$R_0=\frac{1}{2-B^*(\rho+x)+(\rho+x)\big(1-B^*(\rho+x)\big)e^{(\rho+x)b}\gamma_1},$$
$$R_1=\frac{1-B^*(\rho+x)}{2-B^*(\rho+x)+(\rho+x)\big(1-B^*(\rho+x)\big)e^{(\rho+x)b}\gamma_1}.$$

Здесь

$$B^*(\rho+x)=\int_0^\infty e^{-(\rho+x)s}dB(\rho+x), \qquad \gamma_1=\int_0^\infty e^{-(\rho+x)\int_0^s(1-B(u))du}\big\{1-B(s)F_1(s)\big\}ds, \qquad (31)$$

где $F_1(z)=\dfrac{\rho+x}{1-B^*(\rho+x)}e^{(\rho+x)z}\displaystyle\int_0^z e^{-(\rho+x)s}\big\{B^*(\rho+x)-B(s)\big\}ds$

В ходе доказательства теоремы были найдены вероятности распределения состояний канала

$$R_0=\frac{1}{2-B^*(\rho+x)+(\rho+x)\big(1-B^*(\rho+x)\big)e^{(\rho+x)b}\gamma_1},$$
$$R_1=\frac{1-B^*(\rho+x)}{2-B^*(\rho+x)+(\rho+x)\big(1-B^*(\rho+x)\big)e^{(\rho+x)b}\gamma_1},$$

$$R_2 = \frac{(\rho+x)\left(1-B^*(\rho+x)\right)e^{(\rho+x)b}\gamma_1}{2-B^*(\rho+x)+(\rho+x)\left(1-B^*(\rho+x)\right)e^{(\rho+x)b}\gamma_1}. \qquad (32)$$

Для более точного исследования процесса изменения состояний немарковской модели сети Ethernet построим случайный процесс, аппроксимирующий значения величины отклонений нормированного числа заявок от асимптотического среднего

$$y(\tau) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2) - x(\tau)}{\varepsilon}, \qquad (33)$$

где $x(\tau)$ определяется уравнением (18). Этот процесс будем называть локальной аппроксимацией процесса изменения состояний математической модели сети Ethernet.

Теорема 3.2 Процесс $y(\tau)$ является диффузионным процессом авторегрессии с коэффициентом переноса $yb(\tau)$, где

$$b(\tau) = R_1F^*(x) - R_0B^*(x) + (\rho+x)(R_0-R_1)\cdot$$
$$\cdot\left\{\frac{R_0}{\rho+x}(1-B^*(\rho+x)) - \frac{R_1}{\rho+x}(1-F^*(\rho+x)) + \right.$$
$$\left. + e^{(\rho+x)b}\left(-R_2\int_0^\infty e^{-(\rho+x)\int_0^s(1-B(u))du}\{1-F_2(s)\}ds + R_1\gamma_1 + R_2\gamma_2\right)\right\},$$

и коэффициентом диффузии

$$B^2(\tau) = xR_0 + (2\rho+x)R_1 - (2x'(\tau)+3\rho)R_2 -$$
$$-2\left\{x'(\tau)R_1(1-F^*(\rho+x)) + xR_0(1-B^*(\rho+x))\right\} +$$
$$+2(x'(\tau)-\rho)\left[\frac{x'(\tau)R_1}{\rho+x}(1-F^*(\rho+x)) + \frac{xR_0}{\rho+x}(1-B^*(\rho+x)) + \right.$$
$$\left. + e^{(\rho+x)b}\left(x'(\tau)R_2\int_0^\infty e^{-(\rho+x)\int_0^s(1-B(u))du}\left[1-F_2(s)\right]ds - \rho R_1\gamma_1 + \rho R_2\gamma_2\right)\right]. \qquad (34)$$

Здесь величины R_0, R_1, R_2 определены в соотношении (33), $B^*(x)$ и γ_1 определены выше в (31),

$$F^*(x) = (\rho+x)\int_0^\infty e^{-(\rho+x)\rho}F_1(s)ds, \qquad \gamma_2 = \int_0^\infty e^{-(\rho+x)\int_0^s(1-B(u))du}\left[1-B(s)F_2(s)\right]ds,$$

где $F_2(z) = \frac{1}{e^{(\rho+x)b}\gamma_1}e^{(\rho+x)\int_0^z(1-B(s))ds}\int_0^z e^{-(\rho+x)\int_0^s(1-B(u))du}\{1-B(s)F_1(s)\}ds$

Следствие 3.1 Процесс $y(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dy(\tau) = b(\tau)y(\tau)d\tau + B(\tau)dw(\tau), \qquad (35)$$

причем его решение имеет вид

$$y(\tau) = e^{\int_0^\tau b(s)ds}\left\{y_0 + \int_0^\tau B(u)e^{-\int_0^u b(s)ds}dw(u)\right\}.$$

Для того чтобы аппроксимировать процесс изменения состояний сети, не только в окрестности среднего, но и во всей области изменения ее состояний, введем в рассмотрение процесс

$$u(\tau) = x(\tau) + \varepsilon\, y(\tau)\,, \tag{36}$$

где $x(\tau)$ определяется уравнением (29), а $y(\tau)$ уравнением (35).

Теорема 3.3 Случайный процесс $u(\tau)$ с точностью до бесконечной малой более высокого порядка, чем ε, удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$du(\tau) = \{\rho - f(\rho + u)\}d\tau + \varepsilon\, B(u)dw(\tau)\,, \tag{37}$$

где

$$f(u) = \frac{(\rho + x)B^*(u)}{2 - B^*(\rho + u) + (\rho + u)\left(1 - B^*(\rho + u)\right)e^{(\rho + x)b}\gamma_1}\,, \tag{38}$$

а $B(u)$ определяется равенством (34).

Из (37) следует, что $u(\tau)$ является однородным диффузионным случайным процессом с коэффициентом переноса $f(u)$ и коэффициентом диффузии $\varepsilon^2 B^2(u)$. Коэффициенты переноса и диффузии будут зависеть от текущего состояния процесса $u(\tau)$. Назовем этот процесс *глобальной аппроксимацией* процесса $\varepsilon^2 i(t)$ изменения состояний системы массового обслуживания.

Рассмотрим интервал от момента τ до момента достижения процессом $u(\tau)$ состояния $u_2 = x_2$. Его длину обозначим $T(\tau)$. Условное среднее значение величины $T(\tau)$, при условии $u(\tau) = u$, обозначим

$$E(u) = M\{T(\tau) \mid u(\tau) = u\}, \tag{39}$$

Средним временем стабильного функционирования сети случайного доступа назовем $E(u_1)$, т.е. среднее значение длины интервала от момента τ, когда процесс $u(\tau) = u_1$, т.е. находится в точке стабилизации, до момента его выхода на границу u_2, области устойчивого функционирования.

Для среднего времени стабильного функционирования можно доказать теорему аналогичную теоремы 1.4, т.е. найти его в явном виде.

Так как время достижения процессом $u(\tau)$ состояния u_2 достаточно велико, то в течение этого времени распределение вероятностей

$$p(u) = P\{u \le u(\tau) < u + du \mid u(\tau) < u_2\}/du \tag{40}$$

его значений не меняется с течением времени, поэтому его назовем распределением вероятностей значений процесса $u(\tau)$ в режиме стабильного функционирования. Аналогично теоремы 1.5 найдена плотность распределения.

В заключении приводятся основные результаты работы, заключенные в том, что в данной работе проведено исследование сетей связи случайного доступа с общей средой передачи для нахождения вероятностно-временных характеристик, а также исследование функционирования неустойчивой сети случайного доступа во всей области изменения ее состояний.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Грибанова П.И., Назаров А.А. Исследование нестационарных режимов в сетях случайного доступа // Новые технологии и комплексные решения: наука, образование, производство. Материалы всероссийской научно-практической конференции. Часть II (Математика) – Кем.ГУ, 2001. – С.16-18.
2. Грибанова П.И., Назаров А.А. Исследование асимптотических средних характеристик неустойчивых сетей связи// Вестник ТГУ, приложение №1. (Материалы IV Всероссийской конференции «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур»). – 2002. – С.29-34.
3. Грибанова П.И., Назаров А.А. Исследование немарковских моделей неустойчивых сетей случайного доступа// Информационные технологии и математическое моделирование. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. Томск: Изд-во «Твердыня», 2002. С. – 184-187.
4. Коцюруба П.И. Исследование времени и распределения вероятностей стабильного функционирования неустойчивой сети связи// Обработка данных и управление в сложных системах. Вып.5. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. – С.67-77.
5. Коцюруба П.И. Исследование неустойчивых сетей связи случайного доступа с оповещением о конфликте// Студент и научно-технический прогресс. Материалы XLI международной научной студенческой конференции. Математика. Новосиб. гос. Университет, 2003. – С.104-105.
6. Коцюруба П.И., Назаров А.А. Исследование асимптотических средних характеристик немарковских моделей неустойчивых сетей случайного доступа// Проблемы передачи информации. – 2003. – №3. – С.77-88.
7. Коцюруба П.И. Исследование неустойчивой сети связи методом глобальной аппроксимации// Вестник ТГУ, приложение №6. (материалы II Сибирской научной школы-семинара с международным участием "Проблемы компьютерной безопасности и криптография), 2003. – С. 245-249.
8. Коцюруба П.И. Численное исследование неустойчивой сети связи// Информационные технологии и математическое моделирование. Часть III. Материалы Всероссийской научно-практической конференции "Наука и практика: диалоги нового века". Томск: Твердыня, 2003г. – С.122-124.
9. Коцюруба П.И., Назаров А.А. Локальная диффузионная аппроксимация процесса изменения состояний неустойчивой сети случайного доступа в окрестности асимптотического среднего// Проблемы передачи информации. – 2004. – №1. – С.85-97.
10. Коцюруба П.И. Исследование асимптотических средних характеристик сети связи, управляемой протоколом ALOHA// Информационные технологии и математическое моделирование. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. Томск: Изд-во «Твердыня», 2004. С. – 184-187.