На правах рукописи

Гарайшина Ирина Рашитовна

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССОВ ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕНСИОННОГО СТРАХОВАНИЯ

05.13.18 – «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2005

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Назаров Анатолий Андреевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Дмитриев Юрий Глебович,

кандидат физико-математических наук,
доцент Змеева Елена Евдокимовна

Ведущая организация Институт вычислительного моделирования
СО РАН (г. Красноярск)

Защита состоится:
21 апреля 2005 г. в 10 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при Томском государственном университете по адресу:
654050, г. Томск, пр. Ленина, 36

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Томского государственного университета

Отзывы на автореферат (в двух экземплярах, заверенные печатью) просьба высылать по адресу: 654050, г. Томск, пр. Ленина, 36, Томский государственный университет, ученому секретарю университета Буровой Н.Ю.

Автореферат разослан 11 марта 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор технических наук, доцент А.В. Скворцов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Пенсионная реформа, принятая Федеральным законом об обязательном пенсионном страховании в Российской Федерации, затрагивает интересы всех без исключения граждан Российской Федерации как в социальном, так и экономическом плане. Суть реформы заключается в переходе от государственного обеспечения по старости, слабо зависящем от индивидуального вклада пенсионера, к пенсионному страхованию, при котором трудовая пенсия будет иметь три составляющие: базовую, страховую и накопительную, при этом две последние определяются индивидуальным вкладом пенсионера за время его трудовой деятельности.

При этом государство берет на себя ответственность за величину базовой составляющей, увеличивая размер накопительной части пенсии за счет дополнительных доходов от инвестиций временно свободных денежных средств Пенсионного фонда, формируемых, главным образом, накопительной частью страховых взносов.

Исследование этих сложных процессов выполнено на качественном уровне в работах, в основном, экономистов (А.А. Александрова, А.А. Гвозденко, Г.П. Дегтярева, А.Н. Зубца, В.В. Шахова и др.), либо государственных деятелей, в то время как необходимо их детальное исследование методами математического моделирования, позволяющими получить прогноз количественных оценок результатов пенсионной реформы на достаточно далекую перспективу, так как продолжительность перехода к новой системе пенсионирования составит не менее 20 лет.

Таким образом, данная работа, в которой проводится исследование математических моделей в пенсионном страховании, является, безусловно, актуальной.

Целью данной работы является построение и исследование математических моделей, определяющих результаты пенсионной реформы, количественными показателями которой являются размер пенсии и величина накопленных временно свободных денежных средств Пенсионного фонда, формирующих инвестиционный фонд государства.

Реализуя эту цель, необходимо:

– построить математическую модель процесса изменения числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде, в виде бесконечнолинейной двухфазной системы массового обслуживания;

– провести исследование построенной математической модели, определив ее основные вероятностно-временные характеристики;

– построить математическую модель изменения объемов временно свободных денежных средств и провести ее исследование;

– оценить влияние уровня инфляции и доходности инвестиционных проектов на результаты пенсионной реформы;

– построить прогноз оценки величины пенсии и объема временно свободных денежных средств Пенсионного фонда на достаточно продолжительный горизонт планирования.

Методика исследования. Предлагается в качестве математической модели числа застрахованных лиц рассмотреть бесконечнолинейную двухфазную систему массового обслуживания, а процесс изменения накопленного капитала определить компонентой многомерного марковского процесса, включающим число застрахованных лиц; провести исследование этих моделей методами теории случайных процессов, включая гауссовские и диффузионные, теории стохастических дифференциальных уравнений, методами асимптотического анализа марковизируемых систем.

Научная новизна и результаты, выносимые на защиту, состоят в следующем:

– предложена математическая модель процесса изменения числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде в виде процесса изменения состояний бесконечнолинейной двухфазной системы массового обслуживания;

– показано, что в стационарном режиме распределение вероятностей их значений является пуассоновским с параметром, определяемом только интенсивностью входящего потока и средним значением времени обслуживания;

– доказано, что в асимптотических условиях двумерный случайный процесс, характеризующий изменение числа работающих и пенсионеров, можно аппроксимировать двумерным стационарным гауссовским процессом, найдена его матричная корреляционная функция;

– предложены математические модели процессов изменения величины базового, страхового и накопленного капитала Пенсионного фонда в виде компонент многомерного марковского процесса;

– найдены явные выражения, характеризующие изменения с течением времени средних значений величины пенсии и объема накопленного капитала в зависимости от уровня инфляции;

– доказано, что случайный процесс, характеризующий изменение накопленного капитала, является нестационарным гауссовским процессом, найдена его корреляционная функция;

– получены прогнозные оценки средних значений трудовой пенсии и величины накопленного капитала на перспективу.

Эти результаты, выносимые на защиту, и составляют научную новизну диссертационной работы.

Теоретическая ценность работы состоит в том, что предлагаются математические модели и методы их исследования для процессов, количественно характеризующих результаты пенсионной реформы в Российской Федерации, т.е. разработана теоретическая база таких исследований.

Практическая ценность работы заключается в том, что полученные результаты позволяют проводить количественный анализ результатов пенсионного страхования при возможных вариантах значения параметров стратегии реформирования. Это проиллюстрировано численными расчетами результатов пенсионной реформы в Российской Федерации на основе Бюджета Пенсионного фонда за 2002 год, текущего уровня инфляции, страховых тарифов, установленных Федеральным законом об обязательном пенсионном страховании от 15 декабря 2001 года и дополнениями к нему.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 133 наименований. Общий объем работы составляет 148 страниц, в том числе основной текст – 136 страниц.

Апробация работы. Основные положения диссертации и отдельные её результаты докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1. VII межрегиональной научно-практической конференции «Научное творчество молодежи». Анжеро-Судженск, 2002.
2. Второй Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Красноярск, 2003.
3. XLI Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Новосибирск, 2003.
4. Международной научной конференции «Современные математические методы анализа и оптимизации телекоммуникационных сетей». Гомель, 2003.
5. Всероссийской научно-практической конференции «Наука и практика: диалоги нового века». Анжеро-Судженск, 2003.
6. VIII Всероссийской научно-практической конференции «Научное творчество молодежи». Анжеро-Судженск, 2004.
7. III Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование». Анжеро-Судженск, 2004.
8. IV Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Красноярск, 2005.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, изложена цель исследования, научная новизна, теоретическая и практическая ценность полученных результатов, методика исследования, сделан обзор литературы.

В **первой главе** исследуются процессы изменения числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде РФ. В качестве математической модели предлагается бесконечнолинейная двухфазная система массового обслуживания, на вход которой поступает пуассоновский поток заявок с параметром $\lambda(t)$, имеющим смысл среднего числа новых лиц, застрахованных за единицу времени (за один год).

Каждая заявка, поступающая в систему, проходит две фазы. Первая фаза системы соответствует периоду трудовой деятельности застрахованного лица, в течение которого страхователь уплачивает в Пенсионный фонд страховые взносы. Вторая фаза соответствует периоду выплаты застрахованному лицу пенсии из средств Пенсионного фонда. Полагаем, что длительность пребывания лица на каждой фазе является экспоненциально распределенной случайной величиной с заданным средним значением $1/\mu_1$ для первой фазы и $1/\mu_2$ – для второй.

Завершив пребывание на первой фазе заявка с вероятностью r переходит на вторую фазу обслуживания, а с вероятностью $1-r$ покидает рассматриваемую СМО.

Обозначим i – число застрахованных лиц на первой фазе, а j – их число на второй фазе.

Для исследования математической модели введем вероятности $P(i,j,t)=P\big(i(t)=i, j(t)=j\big)$. В работе показано, что распределение $P(i,j,t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial P(i,j,\ t)}{\partial t}+(\lambda+\mu_1 i+\mu_2 j)P\big(i,j,t\big)=\lambda P(i-1,j,t)+(1-r)\mu_1(i+1)P(i+1,j,t)+$$
$$+r\mu_1(i+1)P(i+1,j-1,t)+\mu_2(j+1)P(i,j+1,t)\,.$$

В пункте 1.2 проводится исследование переходных режимов данной математической модели. Решение указанной системы уравнений осуществляется методом производящих функций, это позволяет установить, что число работающих лиц, застрахованных в Пенсионном фонде и число вышедших на пенсию в один и тот же момент времени t как в стационарном, так и нестационарном режиме являются стохастически независимыми пуассоновскими случайными величинами.

В пункте 1.4 осуществляется более детальное исследование процессов $\{i(t), j(t)\}$ методом асимптотического анализа, для чего в системе уравнений для $P(i,j,t)$ выполняется замена вида:

$$i\varepsilon = x\,,\ \ j\varepsilon = y\,,\ \ \frac{1}{\varepsilon^2}P(i,j,t)=\pi(x,y,t,\varepsilon)\,,$$

где $\varepsilon = 1/\lambda$ – малый положительный параметр.

Доказываются теоремы:

Теорема 1.4.1. При $\lambda\to\infty$ предельный процесс $\{a_1(t), a_2(t)\}$ для последовательности случайных процессов $\left\{\frac{1}{\lambda}i(t), \frac{1}{\lambda}j(t)\right\}$ является детерминированной двумерной вектор-функцией, определяемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} a_1'(t)=1-\mu_1 a_1(t), \\ a_1'(t)=r\mu_1 a_1(t)-\mu_2 a_2(t), \end{cases}$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{cases} a_1(t) = \dfrac{1}{\mu_1}\left(1 - e^{-\mu_1(t-t_0)}\right) + a_{10}e^{-\mu_1(t-t_0)}, \\ a_2(t) = \dfrac{r}{\mu_2 - \mu_1}\left(1 - \left(1 - a_{10}\mu_1\right)e^{-\mu_1(t-t_0)} - \dfrac{\mu_1}{\mu_2}\left(1 - \left(1 - a_{10}\mu_2\right)e^{-\mu_2(t-t_0)}\right)\right) + a_{20}e^{-\mu_2(t-t_0)}. \end{cases}$$

Теорема 1.4.2. При $\lambda \to \infty$ предельный процесс $\{x(t), y(t)\}$ для последовательности $\left\{\dfrac{i(t) - \lambda a_1(t)}{\sqrt{\lambda}}, \dfrac{j(t) - \lambda a_2(t)}{\sqrt{\lambda}}\right\}$ является двумерным гауссовским диффузионным процессом с коэффициентами переноса

$$A_1(x, y, t) = -\mu_1 x\ ,\ \ A_2(x, y, t) = r\mu_1 x - \mu_2 y$$

и диффузии

$$B_{11}(t) = 1 + \mu_1 a_1(t)\ ,\ \ B_{12}(t) = -r\mu_1 a_1(t)\ ,$$
$$B_{22}(t) = r\mu_1 a_1(t) + \mu_2 a_2(t)\ .$$

Найдены явные выражения указанных процессов.

В пункте 1.5 приведено обобщение рассматриваемой модели для нестационарного пуассоновского входящего потока. Доказаны теоремы, аналогичные предыдущим и найдены соответствующие характеристики нестационарной модели.

Во **второй главе** проводится анализ федеральных законов «О бюджете Пенсионного фонда Российской Федерации», «Об обязательном пенсионном страховании в Российской Федерации» и «Об инвестировании средств для финансирования накопительной части трудовой пенсии в Российской Федерации», регламентирующих реформирование пенсионной системы, исследуются процессы изменения базового и страхового капиталов ПФР.

Под базовым капиталом Фонда понимаются средства, направляемые на финансирование базовой части пенсии и поступающие из федерального бюджета за счет сумм единого социального налога. Страховым капиталом Фонда называем совокупность средств, образуемых суммами страховых взносов, зачисляемые в Фонд на выплату страховой части трудовой пенсии.

В разделе 2.3 полагаем, что величина базового капитала $G(t)$ связана с величиной страховых взносов $c_1(t)$, поступивших в бюджет фонда в течение года за каждого работающего, величиной $c_2(t)$ базовой части трудовой пенсии, выплаченной за год каждому пенсионеру, численностью работающих и пенсионеров следующим соотношением:

$$G(t) = \int_0^t \left(c_1(s)x(s) - c_2(s)y(s)\right)ds\ .$$

Показано, что процесс $G(t)$ является гауссовским процессом.

В работе рассмотрены две модели процесса изменения величины страхового капитала ПФР. В разделе 2.4 приведена модель, в которой величина страхового капитала Пенсионного фонда зависит от двух факторов: суммы поступивших страховых взносов и суммы выплаченной страховой части пенсии застрахованным лицам.

Для анализа величины страхового капитала Пенсионный фонд Российской Федерации представлен как некоторый объект, который в момент времени t характеризуется двумя случайными процессами: числом застрахованных пенсионеров $j(t)$ и страховым капиталом фонда $S(t)$. Таким образом, в качестве математической модели процесса изменения страхового капитала рассмотрен двумерный случайный процесс $\{j(t),\ S(t)\}$.

Отметим, что капитал $S(t)$ представляется здесь не реально накопленной суммой средств, а с позиции внутреннего долга государства по обязательствам перед пенсионерами.

Исходными считаем следующие положения:

1) с выходом застрахованного лица на пенсию страховой капитал фонда увеличивается на сумму перечисленных за данное лицо страховых взносов, равную значению случайной величины с функцией распределения $A(x)$;

2) поток заявок на назначение трудовой пенсии по старости является простейшим с параметром λr (λ – интенсивность поступления заявок на страхование, r – вероятность достижения пенсионного возраста), имеющим смысл среднего числа лиц, достигших пенсионного возраста за единицу времени;

3) каждому пенсионеру ежемесячно выплачивается страховая часть пенсии, которая является значением случайной величины с функцией распределения $B(x)$. Суммарный поток выплат пенсий всем застрахованным пенсионерам является марковским с интенсивностью $12j$, где j – число пенсионеров, а множитель 12 получен в результате того, что пенсия выплачивается 12 раз в год;

4) продолжительность получения пенсии является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром μ_2.

Показано, что в таком случае распределение вероятностей $P(j,S,t)=P\left(j(t)=j, S\le S(t)<S+dS\right)/dS$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\frac{\partial P(j,S,t)}{\partial t}+\left(\lambda r+(\mu_2+12)j\right)P(j,S,t)=\lambda r\int_0^S P(j-1,S-u,t)dA(u)+$$

$$+12j\int_0^\infty P(j,S+u,t)dB(u)+\mu_2(j+1)P(j+1,S,t).$$

Аналогичным представленным в пункте 1.4 способом доказываются теоремы:

Теорема 2.4.1. При $\lambda\to\infty$ предельный процесс $\{\beta(t),\gamma(t)\}$ для последовательности процессов $\left\{\frac{1}{\lambda}j(t),\frac{1}{\lambda}S(t)\right\}$ является детерминированной двумерной вектор-функцией вида:

$$\beta(t)=\frac{r}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2(t-t_0)}\right)+\beta_0 e^{-\mu_2(t-t_0)},$$

$$\gamma(t)=\frac{12b_1}{\mu_2^2}\left(e^{-\mu_2(t-t_0)}-1\right)\left(r+\mu_2\beta_0\right)+\left(ra_1-\frac{12b_1 r}{\mu_2}\right)\left(t-t_0\right)+\gamma_0,$$

где a_1, b_1 – первые начальные моменты случайных величин, определяемых функциями распределения $A(x)$ и $B(x)$; $\beta(t_0)=\beta_0$, $\gamma(t_0)=\gamma_0$.

Теорема 2.4.2. При $\lambda\to\infty$ предельный процесс $\{y(t),z(t)\}$ для последовательности $\left\{\frac{j(t)-\lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda}},\frac{S(t)-\lambda\gamma(t)}{\sqrt{\lambda}}\right\}$ является двумерным гауссовским диффузионным процессом с коэффициентами переноса

$$A_1(y,z,t)=-\mu_2 y,\quad A_2(y,z,t)=-12b_1 y$$

и диффузии

$$B_{11}(t)=r+\mu_2\beta(t),\quad B_{22}(t)=ra_2+12b_2\beta(t),$$
$$B_{12}=ra_1,$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 – первые и вторые начальные моменты случайных величин, определяемых функциями распределения $A(x)$ и $B(x)$.

В разделе 2.5 проведено исследование второй, более общей модели процесса изменения страхового капитала Фонда в виде трехмерного случайного процесса $\{i(t),j(t),S(t)\}$, отражающего изменение капитала в зависимости от изменения численности $i(t)$ лиц, занятых в экономике и численности $j(t)$ лиц, достигших пенсионного возраста. Изменим условия 1) и 2) вышерассмотренного случая на следующие:

1) страховой капитал фонда регулярно увеличивается на величину, равную сумме поступивших страховых взносов, перечисленных работодателями за застрахованных лиц;

2) сумма страховых взносов, поступившая за застрахованное лицо в бюджет Пенсионного фонда является значением случайной величины с функцией распределения $A(x)$ и определяется величиной его заработной платы и ставкой страхового взноса;

3) поток заявок на страхование является пуассоновским с параметром λ, а суммарный поток поступающих взносов – марковским с интенсивностью $12i$, где $i=i(t)$ – число застрахованных работающих лиц в момент времени t;

4) продолжительность трудовой деятельности является значением случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону с параметром μ_1;

5) вероятность достижения пенсионного возраста равна r.

В рамках данной задачи распределение вероятностей $P\big(i(t)=i, j\left(t\right)=j,\ S\le S\left(t\right)<S+dS\big)/\,dS=P\left(i,j,S,t\right)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\frac{\partial P(i,j,S,t)}{\partial t}+\big(\lambda+(\mu_1+12)i+(\mu_2+12)j\big)P(i,j,S,t)=$$
$$=\lambda P(i-1,j,S,t)+\mu_1(1-r)(i+1)P(i+1,j,S,t)+$$
$$+\mu_1 r(i+1)P(i+1,j-1,S,t)+\mu_2(j+1)P(i,j+1,S,t)+$$
$$+12i\int_0^S P(i,j,S-u,t)dA(u)+12j\int_0^\infty P(i,j,S+u,t)dB(u)\,.$$

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 2.5.1. При $\lambda\to\infty$ предельный процесс $\{\alpha(t),\beta(t),\gamma(t)\}$ для последовательности процессов $\left\{\frac{1}{\lambda}i(t),\frac{1}{\lambda}j(t),\frac{1}{\lambda}S(t)\right\}$ является детерминированной трехмерной вектор-функцией вида:

$$\alpha(t)=\frac{1}{\mu_1}\Big(1-e^{-\mu_1(t-t_0)}\Big)+\alpha_0 e^{-\mu_1(t-t_0)}\,,$$

$$\beta(t)=\frac{r}{\mu_2}+\frac{r}{\mu_2-\mu_1}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\big(1-\alpha_0\mu_2\big)e^{-\mu_2(t-t_0)}-\big(1-\alpha_0\mu_1\big)e^{-\mu_1(t-t_0)}\right)+\beta_0 e^{-\mu_2(t-t_0)}\,,$$

$$\gamma(t)=\frac{12}{\mu_1^2}\left(a_1-\frac{rb_1\mu_1}{\mu_2-\mu_1}\right)\big(1-\alpha_0\mu_1\big)\Big(e^{-\mu_1(t-t_0)}-1\Big)+$$

$$+\frac{12\mu_1 b_1}{\mu_2^2}\left(\frac{r}{\mu_2-\mu_1}(1-\alpha_0\mu_2)+\frac{\mu_2}{\mu_1}\beta_0\right)\Big(e^{-\mu_2(t-t_0)}-1\Big)+\;+\left(\frac{12a_1}{\mu_1}-\frac{12b_1 r}{\mu_2}\right)\big(t-t_0\big)+\gamma_0\,,$$

где a_1, b_1 – первые начальные моменты случайных величин, определяемых функциями распределения $A(x)$ и $B(x)$, а α_0, β_0, γ_0 определяют начальные условия в момент времени $t=t_0$, то есть $\alpha(t_0)=\alpha_0$, $\beta(t_0)=\beta_0$, $\gamma(t_0)=\gamma_0$.

Теорема 2.5.2. При $\lambda\to\infty$ предельный процесс $\{x(t),y(t),z(t)\}$ для последовательности $\left\{\frac{i(t)-\lambda\alpha(t)}{\sqrt{\lambda}},\frac{j(t)-\lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda}},\frac{S(t)-\lambda\gamma(t)}{\sqrt{\lambda}}\right\}$ является трехмерным гауссовским диффузионным процессом с коэффициентами переноса

$$A_1(x,y,z)=-\mu_1 x\,,\ A_2(x,y,z)=\mu_1 rx-\mu_2 y\,,\ A_3=12a_1x-12b_1y$$

и диффузии

$$B_{11}\left(t\right)=1+\mu_1\alpha\left(t\right),\ B_{12}\left(t\right)=-\mu_1 r\alpha(t)\,,$$
$$B_{22}\left(t\right)=\mu_1 r\alpha(t)+\mu_2\beta(t)\,,\ B_{33}\left(t\right)=12a_2\alpha(t)+12b_2\beta(t)\,,$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 – первые и вторые начальные моменты случайных величин, определяемых функциями распределения $A\left(x\right)$ и $B\left(x\right)$ соответственно.

В разделе 2.6 исследование модели пункта 2.5 обобщается на случай нестационарного пуассоновского входящего потока, для которого получены все вышеперечисленные характеристики.

Третья глава посвящена исследованию процесса изменения накопленного капитала Пенсионного фонда, то есть капитала, включающего в себя суммы страховых взносов, перечисленные в Пенсионный фонд на финансирование данной части пенсии и доходы от операций по инвестированию временно свободных средств пенсионных накоплений.

Вследствие того, что формирование капитала будет происходить в течение не менее 20 лет, прежде чем начнутся выплаты накопительной части пенсии, целесообразно учесть влияние инфляции.

В настоящей работе рассмотрена следующая модель процесса изменения уровня инфляции $\kappa(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\kappa(t)}{dt} = -\nu\left(\kappa(t) - \kappa_1\right), \\ \kappa(0) = \kappa_0, \end{cases}$$

здесь $\nu > 0$ – параметр, определяющий темп снижения уровня инфляции, параметр κ_1 имеет смысл экономически обоснованного уровня инфляции.

Таким образом, уровень инфляции в момент времени t определяется равенством $\kappa(t) = \kappa_1 + (\kappa_0 - \kappa_1)e^{-\nu t}$

Предполагается, что темп изменения во времени среднего значения заработной латы совпадает с соответствующим уровнем инфляции, а в качестве доходности δ инвестиционных портфелей рассмотрена номинальная доходность $\delta(t)$.

Аналогично ранее рассмотренным случаям, при построении нестационарной математической модели процесса изменения во времени накопленного капитала Пенсионного фонда Российской Федерации исходим из следующих предположений:

1) поток заявок на страхование является пуассоновским с параметром $\lambda(t)$;

2) сумма страховых взносов, ежемесячно перечисляемая в ПФР на финансирование накопительной части трудовой пенсии, является значением случайной величины с функцией распределения $A(x,t)$;

3) величина накопительной части трудовой пенсии, ежемесячно выплачиваемой пенсионерам, является значением случайной величины с функцией распределения $B(x,t)$;

4) величина выплат пенсионных накоплений в случае смерти застрахованного лица его правопреемникам, является значением случайной величины с функцией распределения $D(x,t)$;

5) продолжительность трудовой деятельности и продолжительность получения пенсии являются случайными величинами, распределенными по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно;

6) вероятность достижения пенсионного возраста равна r;

7) ставка доходности инвестиционных портфелей равна $\delta(t)$.

В качестве математической модели процесса изменения накопленного капитала ПФР рассматривается трехмерный случайный процесс $\{i(t), j(t), S(t)\}$, где $i(t)$ – число работающих застрахованных лиц, $j(t)$ – число пенсионеров, $S(t)$ – накопленный капитал Фонда.

Обозначим

$$P\left(i(t) = i, j(t) = j,\ S \le S(t) < S + dS\right)/dS = P(i, j, S, t).$$

При входящем потоке на страхование с параметром $\lambda(t) = \lambda\rho(t)$, распределение вероятностей $P(i, j, S, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P(i,j,S,t)}{\partial t} + \left(\lambda\rho(t) + (\mu_1 + 12)i + (\mu_2 + 12)j\right)P(i,j,S,t) + \delta(t)\frac{\partial\left(SP(i,j,S,t)\right)}{\partial S} =$$

$$= \lambda\rho(t)P(i-1,j,S,t)+12i\int_0^S P(i,j,S-u,t)dA(u,t)+12j\int_0^\infty P(i,j,S+u,t)dB(u,t)+$$
$$+\mu_1 r(i+1)P(i+1,j-1,S,t)+\mu_2(j+1)P(i,j+1,S,t)+$$
$$+\mu_1(1-r)(i+1)\int_0^\infty P(i+1,j,S+u,t)dD(u,t)\ .$$

В разделе 3.2 приведено доказательство следующих теорем.

Теорема 3.2.1. При $\lambda\to\infty$ предельный процесс $\{\alpha(t),\beta(t),\gamma(t)\}$ для последовательности процессов

$\left\{\frac{1}{\lambda}i(t),\frac{1}{\lambda}j(t),\frac{1}{\lambda}S(t)\right\}$ является детерминированной трехмерной вектор-функцией вида:

$$\alpha(t)=e^{-\mu_1 t}\left(\alpha_0 e^{\mu_1 t_0}+\int_{t_0}^{t}\rho(s)e^{\mu_1 s}ds\right),$$

$$\beta(t)=e^{-\mu_2 t}\left(\beta_0 e^{\mu_2 t_0}+\mu_1 r\int_{t_0}^{t}\left(\alpha_0 e^{\mu_1 t_0}+\int_{t_0}^{s}\rho(u)e^{\mu_1 u}du\right)e^{(\mu_2-\mu_1)s}ds\right),$$

$$\gamma(t)=\gamma_0 e^{\int_{t_0}^{t}\delta(u)du}+\int_{t_0}^{t}\Big(\big(12a_1(s)-\mu_1(1-r)d_1(s)\big)\alpha(s)-12b_1(s)\beta(t)\Big)e^{\int_{s}^{t}\delta(u)du}ds\ ,$$

где $a_1(t)$, $b_1(t)$, $d_1(t)$ – первые начальные моменты случайных величин, определяемых функциями распределения $A(x,t)$, $B(x,t)$, $D(x,t)$; $\alpha(t_0)=\alpha_0$, $\beta(t_0)=\beta_0$, $\gamma(t_0)=\gamma_0$.

Теорема 3.2.2. При $\lambda\to\infty$ предельный процесс $\{x(t),y(t),z(t)\}$ для последовательности $\left\{\frac{i(t)-\lambda\alpha(t)}{\sqrt{\lambda}},\frac{j(t)-\lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda}},\frac{S(t)-\lambda\gamma(t)}{\sqrt{\lambda}}\right\}$ является трехмерным гауссовским диффузионным процессом с коэффициентами переноса

$$A_1(x,y,z,t)=-\mu_1 x\ ;\ A_2(x,y,z,t)=\mu_1 rx-\mu_2 y\ ,$$
$$A_3(x,y,z,t)=\big(12a_1(t)-\mu_1(1-r)d_1(t)\big)x-12b_1(t)y+\delta(t)z$$

и диффузии

$$B_{11}(t)=\rho(t)+\mu_1\alpha(t)\ ,\quad B_{12}(t)=-\mu_1 r\alpha(t)\ ,\quad B_{13}(t)=\mu_1(1-r)\alpha(t)\ ,$$
$$B_{22}(t)=\mu_1 r\alpha(t)+\mu_2\beta(t)\ ,\ B_{23}(t)=0\ ,\ B_{33}(t)=\big(12a_2(t)+\mu_1(1-r)d_2(t)\big)\alpha(t)+12b_2(t)\beta(t)\ ,$$

где $a_1(t)$, $b_1(t)$, $d_1(t)$; $a_2(t)$, $b_2(t)$, $d_2(t)$ – первые и вторые начальные моменты случайных величин, определяемых функциями распределения

$$A(x,t) \text{ и } B(x,t),\ D(x,t).$$

В пункте 3.3 представлены частные случаи математической модели процесса изменения накопленного капитала. Отдельно рассматривается процесс чистого накопления капитала, а также процесс изменения его величины по окончании переходного периода.

В **четвертой главе** представлена численная реализация рассмотренных моделей. Расчеты произведены с использованием системы Mathcad.

Получены сценарии изменения следующих количественных показателей.

1) Число лиц, застрахованных в Пенсионном фонде Российской Федерации (табл. 1). Значения интенсивности $\rho(t)$ входящего потока получены в соответствии с предварительно разработанным «оптимистичным» прогнозом суммарного коэффициента рождаемости исходя из предположения, что на интервале с 2002 г. по 2022 г. он возрастает от 1,214 до 2,0, а впоследствии, на протяжении 60-70 лет, стабилизируется до 2,3.

Таблица 1

Год	1992	1997	2002	2007	2012
Начинающих работать, млн.чел.	1,902	2,095	2,240	2,294	2,179
Занятых в экономике, млн.чел.	71,068	60,021	64,664	67,944	67,699
Пенсионеров по старости, млн.чел.	27,335	28,993	28,989	29,355	29,807
Год	**2017**	**2022**	**2027**	**2032**	**2037**
Начинающих работать, млн.чел.	1,686	1,358	1,418	1,676	1,744
Занятых в экономике, млн.чел.	65,603	65,603	63,229	61,951	61,573
Пенсионеров по старости, млн.чел.	30,209	30,39	30,298	30,046	29,769

Графики изменения численности работающих и пенсионеров изображены на рис. 1.

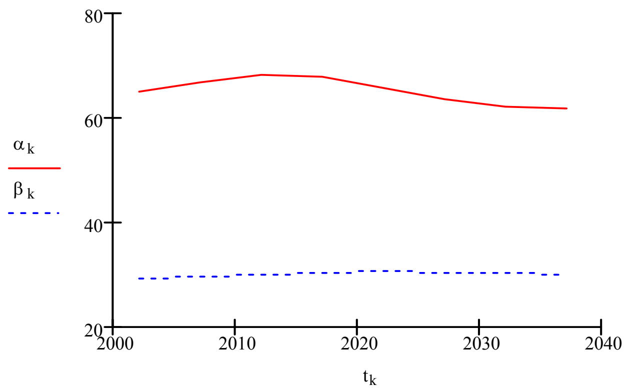

Рис. 1. Среднее значение численности населения,
занятого в экономике – $\alpha(t)$, получающих пенсию по старости – $\beta(t)$.

2) Величина базового капитала ПФР (табл.2). Приведенные данные получены из расчета, что средняя заработная плата в Российской Федерации в 2002 г. составляла 3200 руб.

Таблица 2

Год	2002	2007	2012	2017
Базовый капитал, млрд. руб.	143,544	1 034,092	2 759,502	5 203,347
Год	**2022**	**2027**	**2032**	**2037**
Базовый капитал, млрд. руб.	8 235,645	11 720,331	15 701,042	20 367,632

Отметим, что сумма страховых взносов, поступающих в Фонд, не обеспечивает в полной мере финансирование страховой части трудовых пенсий, поэтому текущие выплаты страховой части пенсии осуществляются в том числе и за счет сумм базового капитала бюджета ПФР. Величина переходящего остатка капитала ПФР после осуществления выплат базовой и страховой частей пенсии приведена в табл. 3.

Таблица 3

Год	2002	2007	2012	2017
Дефицит страхового капитала, трлн. руб.	0,020	0,125	0,300	0,586
Остаток, трлн. руб.	0,123	0,909	2,459	4,617
Год	**2022**	**2027**	**2032**	**2037**
Дефицит страхового капитала, трлн. руб.	1,130	2,062	3,373	4,962
Остаток, трлн. руб.	7,105	9,657	12,327	15,405

3) Величина накопительной части пенсии и накопленного капитала ПФР.

Результаты расчета величины пенсионных накоплений застрахованного лица, начавшего свою трудовую деятельность до 2002 г., в зависимости от продолжительности его страхового стажа, приведены в табл. 4.

Таблица 4

Год	2002	2007	2012	2017
Величина пенсионных накоплений, тыс. руб.	0	28,794	104,834	244,734
Год	**2022**	**2027**	**2032**	**2037**
Величина пенсионных накоплений, тыс. руб.	462,677	776,876	1214,697	1816,497

Размер накопительной части пенсии можно представить также в виде доли $l(\tau)$ от заработной платы 2002 г. в ценах этого же года (табл. 5).

Таблица 5

Год	2007	2012	2017	2022	2027	2032	2037
$l(\tau)$	0,022	0,053	0,091	0,134	0,183	0,238	0,300

Таким образом, накопительная часть пенсии женщины 1967 г.р. составит 13,4% ее заработной платы, мужчины 1967 г.р. соответственно 18,3%. Очевидно, что для людей, начавших свою трудовую деятельность раньше 2002 г., и страховой стаж которых менее 30 лет, накопительная часть пенсии составит менее четверти их заработной платы.

Результаты расчета размера накопленного капитала Пенсионного фонда РФ, образуемого временно свободными средствами пенсионных накоплений мужчин и женщин 1967 г.р. и моложе, представлены в таблице 6.

Таблица 6

Год		2007	2012	2017	2022	2027
Накопленный капитал ПФР, млрд. руб.	женщины	392,501	1560,851	3874,419	7630,195	
	мужчины	454,992	1802,851	4464,838	8781,879	15142,821

Таким образом, при завершении переходного периода накопленный капитал Пенсионного фонда может составить сумму порядка 16,4 трлн. руб., которая в сопоставимых с 2002 годом ценах соответствует примерно 3,5 трлн. руб., что сравнимо с величиной всего бюджета Российской Федерации 2004 года.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. В рамках предлагаемых математических моделей Пенсионная реформа не дает кардинального решения проблемы пенсионного обеспечения населения Российской Федерации. Основным является качественный результат, заключающийся в том, чтобы поставить величину пенсии по старости в прямую зависимость от величины заработной платы и трудового (страхового) стажа работника, чтобы он был заинтересован уплачивать пенсионные взносы, необходимые для содержания нынешних пенсионеров. При этом государство обеспечивает некоторые социальные гарантии в виде базовой части трудовой пенсии.
2. В результате реализации пенсионной реформы в РФ в рамках Пенсионного фонда будут накоплены денежные средства, сравнимые, а видимо, и существенно превосходящие всю доходную часть бюджета России, формирующие инвестиционный фонд, значимый для государства и существенно определяющий развитие экономики России в целом, тем самым дающим возможность для повышения уровня жизни всего населения страны.

ПУБЛИКАЦИИ ПО РАБОТЕ

1. Гарайшина И.Р. Асимптотическое приближение числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде // Сборник трудов межрегиональной VII научно-практической конференции «Научное творчество молодежи». – Анжеро-Судженск, 2002. С. 22–24.
2. Гарайшина И.Р., Назаров А.А. Математическая модель числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде // Труды второй всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. – Красноярск, 2003. С.41-44.
3. Гарайшина И.Р., Назаров А.А. Исследование переходных режимов в математической модели изменения числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде // Обработка данных и управление в сложных системах. Вып. 5. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. С.14-20
4. Гарайшина И.Р., Назаров А.А. Исследование математической модели процесса изменения страхового капитала Пенсионного фонда // Вестник Томского государственного университета, 2003. №280. С.109-111.
5. Гарайшина И.Р., Назаров А.А. Исследование бесконечнолинейной двухфазной системы массового обслуживания// Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети. Материалы международной научной конференции «Современные математические методы анализа и оптимизации телекоммуникационных сетей» 23-25 сентября. Выпуск 17. – Гомель, 2003. С. 88-92.
6. Гарайшина И.Р., Назаров А.А. Исследование процесса изменения страхового капитала Пенсионного фонда // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Наука и практика: диалоги нового века» (14 ноября 2003 г., г. Анжеро-Судженск). Часть III. – Томск: «Твердыня», 2003. С. 58-60.

7. Гарайшина И.Р., Назаров А.А. Исследование математической модели числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде // Материалы XLI Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». – Новосибирск, 2003. С. 130-131.

8. Гарайшина И.Р. Математические модели процесса изменения накопленного капитала Пенсионного фонда // Обработка данных и управление в сложных системах. Вып. 6. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 39-48.

9. Гарайшина И.Р., Назаров А.А. Исследование математической модели изменения страхового капитала Пенсионного фонда при стационарном пуассоновском входящем потоке страховых взносов // Известия ВУЗов. Физика. – 2004. – №2. – С. 44-53.

10. Гарайшина И.Р. Исследование процесса изменения накопленного капитала Пенсионного фонда // Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции (16-17 апреля 2004 г.). Ч. 1.– Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 22-24.

11. Гарайшина И.Р., Назаров А.А. Прогноз величины накопленного капитала ПФР и накопительной части трудовой пенсии // Материалы III Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование» (11-12 декабря 2004 года) Ч. 2. – Томск: Изд–во Том. ун-та, 2004. С. 142-144.

12. Гарайшина И.Р. Исследование процесса изменения накопленного капитала Пенсионного фонда при нестационарном входящем потоке фонда // Вестник Томского государственного университета, 2004. №284. С.46-48.

13. Гарайшина И.Р., Назаров А.А. Исследование математических моделей процессов пенсионного страхования // IV Всероссийская ФАМ конферен-
ция: Тезисы докладов, 25-27 февраля 2005 г. / Под ред. к.ф.-м.н. Д.В. Семеновой; Красноярский гос. ун-т. – Красноярск., 2005. С. 22-23.