На правах рукописи

Мордовской Андрей Константинович

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП СВОИМИ ПОДГРУППАМИ И ПОЧТИ ИЗОМОРФИЗМ

01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск − 2003

Работа выполнена в
Томском государственном университете

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Гриншпон Самуил Яковлевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Кожухов Сергей Федорович,

кандидат физико-математических наук,
доцент Фаустова Инна Леонтьевна

Ведущая организация:

Московский педагогический государственный университет

Защита состоится 17 декабря 2003 года в 14-30 часов на заседании диссертационного совета К 212.267.05 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (ауд. 119).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан 17 ноября 2003 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Малютина А. Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Две абелевы группы называются *почти изоморфными*, если каждая из них изоморфна некоторой подгруппе другой группы [J]. Две абелевы группы называются *почти изоморфными по подгруппам с некоторым свойством*, если каждая из них изоморфна некоторой подгруппе другой группы, обладающей этим свойством. Задача об изоморфизме почти изоморфных групп привлекала внимание многих алгебраистов. В одной из тестовых проблем Капланского [K] ставится вопрос об изоморфизме абелевых групп, почти изоморфных по прямым слагаемым. Для счетных редуцированных примарных групп эта проблема имеет положительное решение [K], однако П. Кроули привел пример неизоморфных p-групп, каждая из которых изоморфна прямому слагаемому другой группы [Cr]. В ряде работ исследуются, когда из почти изоморфизма абелевых групп по сервантным или вполне характеристическим подгруппам вытекает их изоморфизм (например, [G], [Г1], [Г2], [П] [P1], [Ш]).

Известная теоретико-множественная теорема Кантора-Шредера-Бернштейна являлась источником постановки аналогичных задач в алгебре не только для абелевых групп. В [C] изучается теоретико-кольцевой, а в [TK] теоретико-категорный аналоги теоремы Кантора-Шредера-Бернштейна. Рассматриваются также почти изоморфные модули (например, [Bu], [H], [P2]). Подобные задачи возникают и в других областях математики, в частности, в топологии ([Бо], с. 20-21).

Существует также логический аспект задачи о почти изоморфизме, основанный на том, что если модули почти изоморфны по чистым подмодулям, то они элементарно эквивалентны [E].

Для рассмотренных аналогов теоремы Кантора-Шредера-Бернштейна характерно, в отличие от самой теоремы, наличие примеров отрицательного решения соответствующих задач, а также изучение классов объектов, для которых эти задачи имеют положительное решение.

Абелева группа A называется *корректной*, если для любой абелевой группы B из того, что $A \cong B'$ и $B \cong A'$, где A', B' подгруппы групп A и B соответственно, следует изоморфизм $A \cong B$ [Г1].

Для абелевой группы A обозначим соответственно через $S(A)$ и $Sub(A)$ - множества ее подгрупп и ее собственных подгрупп. Будем говорить, что группы A и B *t-изоморфны* (обозначение $A \overset{t}{\cong} B$), если существует биективное отображение множества $S(A)$ на множество $S(B)$, при котором соответствующие подгруппы групп A и B изоморфны. Будем говорить, что группы A и B *s-изоморфны* (обозначение $A \overset{s}{\cong} B$), если существует биективное отображение множества $Sub(A)$ на множество $Sub(B)$, при котором соответствующие подгруппы групп A и B изоморфны. Естественно возникает вопрос: в каких случаях t-изоморфные (s-изоморфные) группы изоморфны.

Если абелева группа A такова, что для любой абелевой группы B из $A \overset{t}{\cong} B$ ($A \overset{s}{\cong} B$) вытекает $A \cong B$, то будем говорить, что *группа A определяется своими подгруппами (своими собственными подгруппами).*

Вопрос об определяемости группы своими подгруппами (своими собственными подгруппами) представляет самостоятельный интерес и как оказалось этот вопрос тесно связан с исследованием корректных абелевых групп.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование корректных групп и групп, определяющихся своими подгруппами и своими собственными подгруппами в ряде классов абелевых групп.

Научная новизна. Все основные результаты диссертационной работы являются новыми. Основными результатами работы можно считать следующие.

• Установлены связи между t-изоморфизмом, s-изоморфизмом и почти изоморфизмом абелевых групп, а также – между определяемостью групп своими подгруппами или своими собственными подгруппами и корректностью.

• Получены критерии определяемости прямой суммы циклических групп своими подгруппами и своими собственными подгруппами, а также – корректности такой группы.

• Получено полное описание корректных периодически полных (замкнутых) p-групп.

• Исследована корректность и определяемость групп своими подгруппами или своими собственными подгруппами в классе абелевых p-групп, у которых не все инварианты Ульма-Капланского конечны.

• Получен критерий корректности обобщенно вполне разложимых групп в классе обобщенно вполне разложимых групп, а также найден критерий определяемости обобщенно вполне разложимой группы своими подгруппами в классе обобщенно вполне разложимых групп.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертационной работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в исследованиях по теории абелевых групп и модулей, а также при чтении спецкурсов.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на XXII и XXIII Конференциях молодых ученых механико-математического факультета МГУ (Москва, 2000 г. и 2001 г.), на Международной конференции "Математика в Восточных регионах Сибири" (Улан-Удэ, 2000 г.), на Четвертом Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, 2000 г.), на Международном семинаре по теории групп (Екатеринбург, 2001 г.), на Международной конференции "Алгебра и ее приложения"(Красноярск, 2002 г.), на Международной конференции по математике и механике (Томск, 2003 г.). Основные результаты неоднократно докладывались на семинарах кафедры алгебры Томского государственного университета.

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 10 публикациях. В совместной статье постановка задачи и выбор метода исследования принадлежит С. Я. Гриншпону. Диссертанту принадлежат формулировки и доказательства всех теорем.

Структура и объем работы. Представляемая диссертационная работа состоит из введения, списка обозначений, трех глав и списка литературы. Первая и вторая главы содержат по три параграфа, третья глава - два параграфа. Работа изложена на 69 страницах. Список литературы содержит 37 наименований.

Содержание работы

В первой главе вводятся понятия t-изоморфизма и s-изоморфизма, а также – определяемости абелевой группы своими подгруппами и своими собственными подгруппами. Рассматривается связь введенных понятий с понятиями корректности и почти изоморфизма абелевых групп.

В параграфе 1.1 первой главы приводятся основные определения и известные результаты, используемые в дальнейшем.

В параграфе 1.2 вводятся понятия t-изоморфизма и s-изоморфизма. Приведены примеры t-изоморфных (s-изоморфных), но не изоморфных абелевых групп и исследуются свойства t-изоморфных и s-изоморфных групп, связанные с прямой суммой групп и прямыми слагаемыми.

Естественно возникают вопросы: как связаны между собой t-изоморфизм, s-изоморфизм и почти изоморфизм, а также – определяемость группы своими подгруппами или своими собственными подгруппами и корректность.

Получен следующий результат.

Теорема 1.19 *Если абелевы группы A и B почти изоморфны, то они t-изоморфны.*

Так как любые две t-изоморфные группы почти изоморфны, получаем

Следствие 1.20 *Абелевы группы A и B t-изоморфны тогда и только тогда, когда они почти изоморфны.*

Связь между t-изоморфизмом и s-изоморфизмом устанавливает следующий результат.

Теорема 1.23 *Если абелевы группы A и B t-изоморфны, то они s-изоморфны.*

Для абелевых групп, содержащих собственные подгруппы, изоморфные самим группам, справедливо и обратное утверждение (теорема 1.27). Если же абелева группа не содержит собственных подгрупп, изоморфных самой группе, то она определяется своими подгруппами и является корректной группой (предложение 1.28 и следствие 1.29).

Из приведенных выше теорем вытекают такие результаты.

Следствие 1.21 *Абелева группа A определяется своими подгруппами тогда и только тогда, когда A – корректная группа.*

Следствие 1.24 *Абелева группа определяется своими подгруппами, если она определяется своими собственными подгруппами.*

Следствие 1.25 *Если абелева группа определяется своими собственными подгруппами, то она корректна.*

Заметим, что определения почти изоморфизма, t-изоморфизма, s-изоморфизма можно дать аналогичным образом для двух универсальных алгебр A и B одной и той же сигнатуры. Также аналогично могут быть определены понятия корректной универсальной алгебры и алгебры, определяющейся своими подалгебрами (своими собственными подалгебрами). В ряде результатов первого параграфа никак не учитывается специфика абелевых групп (теоремы 1.19, 1.23, 1.27; предложение 1.28; следствия 1.20, 1.21, 1.24, 1.25, 1.29), и поэтому эти результаты с соответствующей переформулировкой справедливы для произвольных универсальных алгебр.

Во второй главе исследуются определяемость групп своими подгруппами и своими собственными подгруппами, а также – корректность групп в следующих классах абелевых групп: в классе прямых сумм циклических групп, в классе периодически полных (замкнутых) p-групп, в классе абелевых p-групп, у которых не все инварианты Ульма-Капланского конечны.

В параграфах 2.1 и 2.2 второй главы получены критерии корректности прямых сумм циклических групп и определяемости таких групп своими подгруппами и своими собственными подгруппами.

Пусть A – прямая сумма циклических групп. Группу A можно записать в виде $A = \bigoplus\limits_p A_p \bigoplus A_0$, где A_0 – свободная группа, ранг которой совпадает с рангом без кручения $r_0(A)$ группы A, а всякая p-компонента A_p группы A представима в виде $A_p = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{N}} A_{ip}$, где каждая группа A_{ip} есть прямая сумма $\mathfrak{M}_{ip}$ циклических групп порядка p^i.

Группу A назовем *ступенчатой*, если для всякого простого числа p и для любого $i \in \mathbb{N}$ такого, что $\mathfrak{M}_{ip} \geq \aleph_0$, выполняется $\mathfrak{M}_{jp} > \mathfrak{M}_{ip}$ для всякого $j < i$.

Получены следующие результаты.

Теорема 2.3 *Пусть A – прямая сумма циклических групп. Следующие условия эквивалентны:*

1) A – корректная группа;

2) A определяется своими подгруппами;

3) A – ступенчатая группа и любая ее p-компонента ограничена.

Теорема 2.7 *Пусть A – прямая сумма циклических групп. Группа A определяется своими собственными подгруппами тогда и только тогда, когда A – ступенчатая группа с ограниченными p-компонентами и A не является простой группой.*

Пусть $\mathfrak{A}$ – некоторый класс абелевых групп. Группу A из класса $\mathfrak{A}$ назовем *корректной в классе* $\mathfrak{A}$, если для любой группы B из этого класса из того, что группы A и B почти изоморфны, следует изоморфизм $A \cong B$.

В параграфе 2.3 второй главы рассматривается класс периодически полных p-групп, играющий фундаментальную роль при изучении p-групп. Впервые эти группы стал изучать Л. Я. Куликов (он называл их замкнутыми p-группами) [Ку2].

Теорема 2.8 *Для периодически полной p-группы следующие условия эквивалентны:*

1) группа A корректна в классе периодически полных групп;

2) базисная подгруппа группы A корректна;

3) базисная подгруппа группы A определяется своими подгруппами;

4) базисная подгруппа группы A ступенчатая и ограниченная.

При исследовании p-групп большое значение имеют инварианты Ульма-Капланского группы A. Если p – фиксированное простое число, то *σ-м инвариантом Ульма-Капланского* группы A называется кардинальное число

$$f_\sigma(A) = r((p^\sigma A)[p]/(p^{\sigma+1}A)[p]).$$

В параграфе 2.3 рассматриваются также абелевы p-группы, не все инварианты Ульма-Капланского которых конечны. Для таких групп получены следующие результаты.

Теорема 2.9 *Пусть A – абелева p-группа. Если n-ый инвариант Ульма-Капланского группы A бесконечен хотя бы для одного натурального числа n, то группа A содержит бесконечное множество собственных подгрупп, изоморфных самой группе A.*

Теорема 2.10 *Пусть A – абелева p-группа, у которой хотя бы для одного натурального числа n ее n-й инвариант Ульма-Капланского бесконечен. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) A – корректная группа;

2) A определяется своими подгруппами;

3) A определяется своими собственными подгруппами.

В третьей главе рассматриваются группы без кручения и обобщенно вполне разложимые группы.

Основным результатом параграфа 3.1 является следующая теорема.

Теорема 3.4 *Пусть A – абелева группа без кручения. Следующие условия эквивалентны:*

1) A – корректная группа;

2) A определяется своими собственными подгруппами;

3) A определяется своими подгруппами.

Показано также, что если A – делимая группа без кручения, то каждое из условий 1)– 3) равносильно конечности ранга группы A (теорема 3.3).

Абелева группа A называется *обобщенно вполне разложимой*, если она разлагается в прямую сумму групп ранга 1 (не обязательно без кручения).

Понятие вполне разложимости было распространено с групп без кручения на произвольные группы С. Меджиббеном [Meg].

С. Я. Гриншпон доказал, что если G – обобщенно вполне разложимая группа, то любые два разложения группы G в прямую сумму групп ранга 1 изоморфны, и всякое прямое слагаемое группы G – обобщенно вполне разложимая группа [Г3].

Выберем в каждом классе изоморфных абелевых групп ранга 1 по одному представителю и пусть $\mathfrak{M} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in S}$ – множество этих представителей. $\mathfrak{M}$ является максимальным множеством попарно неизоморфных абелевых групп ранга 1. Зададим отношение частичного порядка на множестве S следующим образом: $\alpha_1 \leq \alpha_2$, если G_{α_1} изоморфна подгруппе группы G_{α_2}.

Пусть A – обобщенно вполне разложимая группа. Собирая для всякого $\alpha \in S$ в ее разложении в прямую сумму групп ранга 1 прямые слагаемые, изоморфные G_α, получим разложение

$A = \bigoplus_{\alpha \in S} A(\alpha)$, где $A(\alpha) = \bigoplus_{\mathfrak{N}_\alpha} G_\alpha$ (некоторые из групп $A(\alpha)$ могут быть нулевыми).

Будем говорить, что для группы $A = \bigoplus_{\alpha \in S} A(\alpha)$, где $A(\alpha) = \bigoplus_{\mathfrak{N}_\alpha} G_\alpha$, *выполняется условие S-максимальности*, если любая цепь

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots,$$

где $\alpha_i \in S$, $A(\alpha_i) \neq 0$, обрывается. Группу A назовем *S-ступенчатой*, если для любого $\alpha \in S$ такого, что $\mathfrak{N}_\alpha \geq \aleph_0$ и для любого $\beta \in S$ такого, что $\beta < \alpha$, выполняется $\mathfrak{N}_\beta > \mathfrak{N}_\alpha$.

Основным результатом параграфа 3.2 является следующая теорема.

Теорема 3.5 *Обобщенно вполне разложимая группа A корректна в классе обобщенно вполне разложимых групп тогда и только тогда, когда A – S-ступенчатая группа и для нее выполняется условие S-максимальности.*

Пусть $\mathfrak{A}$ – некоторый класс абелевых групп. Если группа A из класса $\mathfrak{A}$ такова, что для любой группы B из класса $\mathfrak{A}$ из t-изоморфизма групп A и B следует $A \cong B$, то будем говорить, что *группа A определяется своими подгруппами в классе $\mathfrak{A}$*.

Из теоремы 3.5 и результатов первой главы получаем такое следствие.

Следствие 3.6 *Обобщенно вполне разложимая группа A определяется своими подгруппами в классе обобщенно вполне разложимых групп тогда и только тогда, когда A – S-ступенчатая группа и для нее выполняется условие S-максимальности.*

Список литературы

[Бо] Борсук К.Теория ретрактов. – М.: Мир, 1971.

[Г1] Гриншпон С. Я. f.i.-корректность абелевых групп без кручения// Абелевы группы и модули. – 1989. – Вып. 8. – С. 65-79.

[Г2] Гриншпон С. Я. f.i.-корректные абелевы группы// Успехи матем. наук. – 1999. – №6. – С. 155-156.

[Г3] Гриншпон С. Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность: Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Томск. – 2000.

[Ку1] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности// Матем. сб. – 1941. – №9. – С. 165-182.

[Ку2] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности// Матем. сб. – 1945. – №16. – С. 129-162.

[П] Приходько И. А. Е-корректные абелевы группы// Абелевы группы и модули. – 1984. – С. 90-99.

[Р1] Росошек С. К. Строго чисто корректные абелевы группы без кручения// Абелевы группы и модули. – 1979. – С. 143-150.

[Р2] Росошек С. К. Чисто корректные модули// Изв. ВУЗов. Математика. – 1978. – №10. – С. 143-150.

[Ф1] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. – М.: Мир, 1974.

[Ф2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. – М.: Мир, 1977.

[Ш] Шерстнева А. И. U-последовательности и почти изоморфизм абелевых p-групп по вполне характеристическим подгруппам// Изв. ВУЗов. Математика. – 2001. – №5. – С. 72-80.

[Ba] Baer R. Der Kern, eine charakteristische Untergruppe// Compositio Math. – 1934. – №1 – P. 254-283.

[Bu] Bumby R. Modules which isomorphic to submodules each other// Arch. Math. – 1965. – V. 16. – P. 184–185.

[C] Cornel I. Some ring theoretic Schroder-Bernstein theorems// Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 132. – P. 335-351.

[Cr] Crawly P. Solution of Kaplansky's test problem for primary abelian groups// J. Algebra. – 1965. – No. 4. – P. 413-431.

[E] Eklof P., Sabbagh G. Model-completions and modules// Ann. Math. Log. – 1971. – V. 2. – P. 251-299.

[F] Fuchs L. Notes on abelian groups// I, Ann. Univ. Sci. and Math. – 1959. – V. 2 – P. 5-23; II, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1960. – V. 11 – P. 117-125.

[G] de Groot J. Equivalent abelian groups// Canad. J. Math. – 1957. – No. 9. – P. 291-297.

[H] Holzsager R., Hallahan C. Mutual direct summands// Arch. Math. – 1974. – V. 25. – P. 591-592.

[J] Jonson B. On direct decomposition of torsion free abelian groups// Math. Scand. – 1959. – No. 2. – P. 361-371.

[K] Kaplansky I. Infinite abelian groups. – Michigan: Univ. of Michigan Press. Ann Arbor, 1954.

[Meg] Megibben Ch. Separable mixed group// Comment. Math. Univ. Carolin. – 1980. – No. 4. – P. 755-768.

[Pr1] Prüfer H. Unendliche abelsche Gruppen von Elementen endlicher Ordnung, Dissertation// Berlin. – 1921.

[Pr2] Prüfer H. Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären abelschen Gruppen// Math. Z. – 1923. – №17. – P. 35-61.

[S] Szele T. On the basic subgroups of abelian p-groups// Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1954. – V. 5 – P. 129-141.

[TK] Trnkova V., Koubek V. The Cantor-Bernstein theorem for fuctors// Comment. Math. Univ. Carol. – 1973. – V. 14. – P. 197-204.

Работы автора по теме диссертации

[M1] Мордовской А. К. Абелевы группы с соответственно изоморфными подгруппами// Четвертый сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000), посвященный памяти М. А. Лаврентьева (1900-1980): Тезисы докладов, ч. IV – Новосибирск. – 2000. – С. 111-112.

[M2] Мордовской А. К. Связь строения абелевых групп со строением ее подгрупп// Математика и методы ее преподавания. – Улан-Удэ. – 2000. – С. 57-60.

[M3] Мордовской А. К. t-изоморфные разложимые абелевы группы// Математика в восточных регионах Сибири: социокультурный аспект, ведущие тенденции развития, научные коммуникации и подготовка кадров. Материалы международной конференции. – Улан-Удэ. – 2000. – С. 138-139.

[M4] Мордовской А. К. Изоморфизм подгрупп абелевых групп// Абелевы группы и модули. – 2000. – Вып. 15. – С. 38-45.

[M5] Мордовской А. К. Прямые суммы абелевых групп с соответственно изоморфными подгруппами// Аналитические и численные методы в математике и механике. Труды XXII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ. – М. МГУ. – 2001. – С. 120-121.

[M6] Мордовской А. К. Определяемость прямых сумм циклических групп своими подгруппами// Международный семинар по теории групп, посвященный 70-летию А. И. Старостина и 80-летию Н. Ф. Сесекина. Тезисы докладов. – Екатеринбург. – 2001. – С. 147-150.

[M7] Гриншпон С. Я., Мордовской А. К. Определяемость абелевых групп своими подгруппами и почти изоморфизм// Исследования по математическому анализу и алгебре. – Томск. – 2001. – Вып. 3. – С. 72-80.

[M8] Мордовской А. К. Группы, определяющиеся своими подгруппами// Современные исследования в математике и механике. Труды XXIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ. Часть II. – М. МГУ. – 2001. – С. 257–260.

[M9] Мордовской А. К. Абелевы группы без собственных подгрупп, изоморфных группе// Международная конференция "Алгебра и ее приложения". Тезисы докладов. – Красноярск. – 2002. – С. 88-89.

[M10] Мордовской А. К. Факторно редуцированная корректность периодически полных p-групп// Международная конференция по математике и механике. Тезисы докладов. – Томск. – 2003. – С. 51.