

Н. А. Долинин, А. Ф. Терпугов

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ОПТИЧЕСКОЙ ЛОКАЦИИ**

Н. А. ДОЛИНИН, А. Ф. ТЕРПУГОВ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ОПТИЧЕСКОЙ ЛОКАЦИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1982

Долинин Н. А., Терпугов А. Ф. Статистические методы в оптической локации.— Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982,— 12,25 л.— 1 р. 80 к. 1500 экз. 1502000000.

В монографии освещаются вопросы синтеза оптимальных и субоптимальных систем обнаружения и определения момента появления как отдельного импульса, так и пачек импульсов оптических сигналов. Рассмотрение проведено для активных и пассивных систем определения момента появления сигнала.

Монография может быть полезна научным работникам, аспирантам и инженерам-разработчикам оптических радиоэлектронных устройств, а также студентам старших курсов соответствующих специальностей.

Рецензент — профессор В. М. Сидорин

Д $\frac{1502000000}{177(012)-82}$ 51—82

© Издательство Томского университета, 1982 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как в области локации, связи, лазерного зондирования атмосферы, так и во многих других отраслях техники все чаще и чаще приходится встречаться с использованием оптических сигналов. В космической технике, например, с обработкой оптических сигналов приходится сталкиваться при разработке систем ориентации по неточечным небесным телам в ИК диапазоне, а также при разработке систем навигации и др.

В книгах [1, 2], например, излагаются некоторые аспекты теории обнаружения оптических сигналов, в то время как вопросы разработки статистических методов определения момента прихода оптических сигналов представлены в технической литературе отдельными журнальными статьями, в которых рассматриваются частные вопросы проблемы. Синтез же систем, определяющих момент появления сигнала, является актуальной задачей сегодняшнего дня, потому что определяет такие важные характеристики, как дальность до целей в лидарах и угловые координаты положения объекта в системах ориентации, наведения и сближения космических аппаратов.

Настоящая монография посвящена систематическому изложению исследования вопросов обнаружения и определения момента появления в основном слабых оптических сигналов в условиях помех и предполагает частично заполнить существующий пробел в этой проблеме.

Особенностью исследования является то, что авторы (кроме подробного рассмотрения оптимальных систем обнаружения и определения момента появления опти-

ческого сигнала) детально исследуют вопросы субоптимальных систем, то есть таких систем, которые по своим характеристикам близки к оптимальным, а в техническом плане представляют относительно просто реализуемые системы.

Простота и высокая эффективность синтезированных приемников должны вызвать интерес у специалистов, занятых разработкой и проектированием лидаров, а также систем определения углового положения объектов.

Авторство распределяется следующим образом: § 1, 2 первой главы написаны А. Ф. Терпуговым, § 3, 4 и 5 — Н. А. Долининым; глава вторая написана совместно, кроме § 1, который написан А. Ф. Терпуговым; главы третья и четвертая — А. Ф. Терпуговым; главы пятая и шестая — Н. А. Долининым.

Авторы приносят глубокую благодарность за обсуждение материала книги рецензентам: доктору технических наук, профессору В. М. Сидорину, доктору технических наук, профессору Г. С. Шарыгину и признательны также доктору технических наук, профессору И. А. Болошину и всем сотрудникам и товарищам за полезное обсуждение и высказанные замечания по материалам книги.

Глава I

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ, ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ И СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

§ 1. Основные сведения из теории обнаружения сигналов

Теория обнаружения оптических сигналов в силу их случайного характера, а также наличия шумов, носящих также случайный характер, может быть только статистической. Основой для теории обнаружения является один из разделов математической статистики — проверка двухальтернативных статистических гипотез. Дадим кратко сведения из этой теории.

Пусть X — сигнал на выходе приемника. Если сигнал на входе приемника отсутствует, то выходной сигнал определяется только внешними шумами и собственными шумами приемника. Обычно распределение вероятностей этих помех известно, а поэтому может быть вычислена также и плотность вероятности $p_0(X)$ для сигнала на выходе приемника.

Если на входе приемника присутствует обнаруживаемый сигнал, то это приводит к тому, что меняется плотность вероятности X на выходе приемника. Она становится равной $p_1(X/\bar{\theta})$, где $\bar{\theta}$ — параметры обнаруживаемого сигнала (амплитуда, фаза, длительность и т.д.). В простейшем случае эти параметры известны заранее, в более сложных случаях они заранее неизвестны.

Наблюдая какую-то реализацию X на выходе приемника, мы должны решить, какой плотности вероятности она соответствует: $p_0(X)$ или $p_1(X/\bar{\theta})$? Если мы решим, что она соответствует плотности вероятностей $p_0(X)$, то тем самым мы вынесем решение о том, что на

входе приемника полезный сигнал отсутствует. Если же мы решим, что она соответствует плотности вероятностей $p_1(X/\bar{\theta})$, то тем самым вынесем решение о наличии обнаруживаемого сигнала. В силу случайного характера сигнала мы никогда не застрахованы от ошибок. При обнаружении могут быть ошибки двух видов: ошибка 1-го рода, называемая также ошибкой типа ложной тревоги, возникает тогда, когда выносится решение о наличии сигнала на входе приемника в то время, как на самом деле он отсутствует. Вероятность этой ошибки будем обозначать через α . Ошибка 2-го рода, называемая также ошибкой пропуска сигнала, возникает тогда, когда на входе приемника сигнал есть, а выносится решение об отсутствии сигнала на его входе. Вероятность этой ошибки будем обозначать $\beta(\bar{\theta})$. Отметим, что если α есть некоторая константа, то $\beta(\bar{\theta})$ есть функция от параметров полезного сигнала.

Естественно, мы хотели бы иметь такое правило обнаружения, которое не давало бы нам никаких ошибок. К сожалению, это невозможно. Более того, пытаясь уменьшить, например, вероятность α , мы увеличиваем вероятность $\beta(\bar{\theta})$, а уменьшая вероятность типа пропуска цели, мы увеличиваем вероятность типа ложной тревоги. Приходится поэтому искать некоторый компромисс между вероятностями ошибок обоих типов. Такой компромисс берется, как правило, в следующей форме: требуется, чтобы вероятность ошибки 1-го рода α не превышала бы некоторой заранее заданной величины α_0 при условии, что вероятность пропуска сигнала была бы наименьшей. Устройство обработки сигналов, реализующее этот принцип, носит название приемника Неймана-Пирсона, а величина α_0 носит название уровня значимости.

В случае, когда параметры обнаруживаемого сигнала точно известны, оптимальное устройство для обработки сигналов должно вычислять величину $p_1(X/\bar{\theta})/p_0(X)$, называемую отношением правдоподобия, и сравнивать ее с некоторым пороговым значением C . Если отношение правдоподобия окажется меньше порога C , то выносится решение об отсутствии сигнала, если же отношение правдоподобия окажется больше C , то выносится

решение о его наличии. Сам порог C выбирается из того условия, чтобы вероятность ошибки ложной тревоги была бы в точности равна α_0 .

В случае, когда параметры входного сигнала $\{\bar{\theta}\}$ заранее не известны, задача значительно усложняется, так как одновременная минимизация $\beta(\bar{\theta})$ для всех значений параметров $\bar{\theta}$ оказывается возможной лишь в очень узком классе случаев. Здесь получили наибольшее распространение алгоритмы, которые максимизируют $p(\{\bar{\theta}\})$ в некоторой узкой области значений параметров $\bar{\theta}$ (локально — наиболее мощные критерии), либо алгоритмы, дающие достаточно хорошие результаты при больших отношениях сигнала к шуму или больших объемах выборки. Из этих последних алгоритмов наиболее популярным является алгоритм обобщенного отношения правдоподобия, который заключается в том, что вычисляется величина $h = \max_{\{\bar{\theta}\}} \{p_1(X/\bar{\theta})/p_0(X)\}$, которая

сравнивается с пороговым значением C . Если $h < C$, то принимается решение об отсутствии сигнала, если же $h > C$, то выносится решение о его наличии. Алгоритму обобщенного отношения правдоподобия можно дать следующую трактовку: нахождение $h = \max_{\{\bar{\theta}\}} \{p_1(X/\bar{\theta})/p_0(X)\}$

есть оценка неизвестных параметров по методу максимального правдоподобия. Пусть этот максимум дости-

гается при $\bar{\theta} = \hat{\bar{\theta}}$; тогда $h = \frac{p_1(X/\hat{\bar{\theta}})}{p_0(X)}$. Таким образом, по-

лучается, что обобщенное отношение правдоподобия есть обычное отношение правдоподобия, в котором вместо неизвестных параметров стоят их оценки, найденные методом максимального правдоподобия.

Такая трактовка обобщенного отношения правдоподобия позволяет получать и другие алгоритмы обнаружения, близкие к оптимальным. Эти субоптимальные обнаружения заключаются в том, что по-прежнему вы-

числяется величина $h = p_1(X/\hat{\bar{\theta}})/p_0(X)$, но оценка неизвестных параметров ведется любым другим способом, который дает достаточно эффективную оценку. К числу таких способов могут относиться метод наименьших квадратов, метод моментов и др.

§ 2. Основные сведения из теории оценки параметров сигналов

Оценка дальности до целей, скорости их и их углового положения укладывается в общую теорию оценки параметров, являющуюся разделом математической статистики.

Пусть имеется некоторая случайная величина X , плотность вероятностей которой $p(X/\theta)$ известна с точностью до некоторых параметров $\theta = \{\theta_i\}$, где $i = 1, N$, а N — число неизвестных параметров. Наблюдая на опыте случайную величину X или случайные величины $x_1, \dots, x_n$, если наблюдения повторяются n раз, мы должны оценить неизвестные параметры $\{\theta_i\}$, другими словами, мы должны величинам $x_1, x_2, \dots, x_n$ поставить в соответствие величины $\hat{\theta} = \{\hat{\theta}^i\}$, которые называются оценками параметров величин θ . Таким образом, оценки $\hat{\theta}$ неизвестных параметров θ являются функциями от данных опыта $x_1, x_2, \dots, x_n$, то есть имеем $\hat{\theta} = T(x_1, \dots, x_n)$.

Разумеется, не всякая функция $T(\cdot)$ может быть оценкой неизвестных параметров θ ; к оценкам предъявляются некоторые требования, ограничивающие выбор функции $T(\cdot)$. Рассмотрим эти требования.

Несмещенность оценки

Первым основным требованием, предъявляемым к оценке, является требование отсутствия систематических ошибок, требование, чтобы оценка в среднем совпадала с истинным значением неизвестного параметра. Другими словами, требуется, чтобы математическое ожидание оценки равнялось истинному значению неизвестного параметра, то есть имеем

$$M[T(X)] = \theta.$$

Оценка, удовлетворяющая этому требованию, называется несмещенной. Если это условие не выполняется, то оценка называется смещенной. Величина

$$B = M[T(X)] - \theta$$

называется смещением.

Найти несмещенную оценку удастся не всегда. В этом случае обычно требуют, чтобы смещение оценки B стремилось к нулю, когда $n \rightarrow \infty$; другими словами, требуют, чтобы систематическая ошибка исчезла при неограниченном числе измерений. Такую оценку называют асимптотически несмещенной.

Чтобы сформулировать второе требование, предъявляемое к оценкам, мы должны рассмотреть вопрос о точности оценки. В математической статистике в качестве меры точности оценок выбирается так называемая матрица вариации V с элементами $\|V_{ij}\|$

$$V_{ij} = M\{T_i(X) - \theta_i\}(T_j(X) - \theta_j).$$

Диагональные элементы этой матрицы в случае несмещенных оценок совпадают с дисперсиями этих оценок и характеризуют собой величину случайных отклонений оценки от истинных значений параметров, а внедиагональные элементы определяют коэффициенты корреляции оценок параметров θ_i и θ_j , то есть имеем

$$r_{ij} = V_{ii}^{-1} \sqrt{V_{ii} V_{jj}}.$$

Эллипсоид

$$\sum_{i,j}^n V_{ij} \xi_i \xi_j = 1$$

носит название эллипсоида рассеивания. Суммарную погрешность в оценках неизвестных параметров характеризуют объемом этого эллипсоида.

Естественно, что мы хотели бы сделать объем эллипсоида рассеивания и диагональные элементы матрицы вариации нулевыми, так как в этом случае вообще бы не было ошибок в оценках неизвестных параметров. Однако это принципиально невозможно. Существует некоторая нижняя граница для объема эллипсоида рассеивания и диагональных элементов матрицы вариации, меньше которой сделать их уже нельзя. То есть существует некоторая предельная, или, как ее еще называют, потенциальная, точность в оценках неизвестных параметров, лучше которой получить ничего невозможно.

Эта потенциальная точность определяется так называемой информационной матрицей Фишера $I = \|I_{ij}\|$ с элементами

$$I_{ij} = -M \left\{ \frac{\partial^2 \ln p(X/\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\} = - \int \frac{\partial^2 \ln p(X/\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} p(X/\theta) dX.$$

Равносильна ей формула

$$I_{ij} = M \left\{ \frac{\partial \ln p(X/\theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln p(X/\theta)}{\partial \theta_j} \right\}.$$

В математической статистике доказано (см., например, [3, 4]) одно очень важное утверждение, которое носит название неравенства информации и заключается в том, что матрица $(V - I^{-1})$ есть положительно определенная матрица. Отсюда вытекают следующие важные следствия.

I. $V_{kk} \geq I_{kk}^{(-1)}$, то есть дисперсия несмещенной оценки k -го параметра ограничена снизу элементом матрицы, обратной к информационной матрице Фишера (заметьте, что стоит элемент именно обратной матрицы, а не $1/I_{kk}$).

II. Эллипсоид

$$\sum_{i,j} I_{ij}^{(-1)} \xi_i \xi_j = 1$$

называется информационным эллипсоидом. Из неравенства информации следует, что информационный эллипсоид всегда лежит внутри эллипсоида рассеивания, следовательно, объем последнего не может быть меньше объема информационного эллипсоида.

$$\text{III. } \det V \geq \det I^{(-1)} = \frac{1}{\det I}.$$

Отсюда в качестве меры эффективности оценок неизвестных параметров берется величина

$$e = \frac{\det I^{(-1)}}{\det V} = \frac{1}{\det I \cdot \det V},$$

которая носит название эффективности оценок. Очевидно, что $0 \leq e \leq 1$. Если $e=1$, то оценка неизвестного параметра называется эффективной. Если $e \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, то оценка называется асимптотически эффективной.

Таким образом, вторым требованием, предъявляемым к оценкам, является требование их эффективности или хотя бы их асимптотической эффективности.

Перейдем к методам нахождения оценок. Наиболее разработанным методом в настоящее время является метод максимального правдоподобия. Рассмотрим $p(X/\theta)$. Если эту функцию рассматривать как функцию от X при фиксированных значениях параметров θ , то это будет плотность вероятностей данных измерений при фиксированных значениях параметров. Если же в результате опыта получены какие-то конкретные значения X , а параметры θ неизвестны и подлежат оценке, то функция $p(X/\theta)$, рассматриваемая как функция аргумента θ при фиксированных значениях аргумента X , носит название функции правдоподобия. По методу максимального правдоподобия в качестве оценки неизвестного параметра принимается то значение параметра, при котором функция правдоподобия достигнет своего максимального значения, то есть оценка максимального правдоподобия находится из условия

$$p(X/\theta) = \max_{\theta}.$$

Из соображений удобства часто ищут максимум не $p(X/\theta)$, а $\ln p(X/\theta)$. Если имеется несколько локальных максимумов, то в качестве оценки выбирают положение наибольшего из них.

Вторым по значимости методом нахождения оценок является так называемый метод наименьших квадратов.

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть нам известно, что функциональная зависимость величины y от x имеет вид $y=f(x, \theta)$, где функция f кроме переменной x содержит некоторые неизвестные параметры θ , и мы хотели бы на основе опытных данных найти эти параметры. Легко показать, что если ошибки измерения — независимые, нормальные, случайные величины с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 , то определение оценки параметров θ по методу максимального правдоподобия приводит к уравнению

$$\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, \theta)]^2 = \min_{\theta},$$

нахождение неизвестных параметров по которому и носит название метода наименьших квадратов. Если ошибки измерений не являются нормальными, то метод наименьших квадратов не совпадает с методом максимального правдоподобия и становится самостоятельным методом.

Изучим подробно случай, когда y_i выражается линейной комбинацией неизвестных параметров θ

$$y_i = \sum_{j=1}^k x_{ij} \theta_j + \varepsilon_i, \text{ где } i=1, 2, \dots, n > k. \quad (1.2.1)$$

Величины ε_i — ошибки измерения — будем считать некоррелированными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 , то есть имеем

$$M[\varepsilon_i] = 0; M[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \sigma^2 \cdot \delta_{ij}. \quad (1.2.2)$$

Нормальности величин ε_i не предполагается. Для простоты дальнейших выкладок удобно ввести матричные обозначения, то есть имеем

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_k \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad (1.2.3)$$

где θ — вектор-столбец неизвестных параметров; Y — вектор-столбец данных измерений; ε — вектор-столбец ошибок измерений. Для ε мы имеем в матричном виде

$$M[\varepsilon] = 0; M[\varepsilon \varepsilon^T] = \sigma^2 E_n,$$

где E_n — единичная матрица размером $n \times n$ и ε^T означает транспонированную матрицу по отношению к ε . Матрица размером $n \times k$ для X имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix},$$

тогда выражение (1.2.1) запишется в матричной форме

$$Y = X \cdot \theta + \varepsilon, \quad (1.2.4)$$

а квадрат уклонения измеряемой величины от ее оценки запишется в виде

$$R = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^k x_{ij} \theta_j \right)^2 = (Y - X \theta)^T (Y - X \theta). \quad (1.2.5)$$

Находя оценки параметров θ по методу наименьших квадратов из условия $\frac{\partial R}{\partial \theta_i} = 0$, $i=1, 2, \dots, k$, придем к системе уравнений, имеющей в матричной форме вид

$$X^T(Y - X \hat{\theta}) = 0. \quad (1.2.6)$$

Из (1.2.6) получается явный вид оценок $\hat{\theta}$ параметра θ

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (1.2.7)$$

Так как $M\{\varepsilon\} = 0$, то $M\{Y\} = X \theta$ и

$$M\{\hat{\theta}\} = (X^T X)^{-1} X^T M\{Y\} = (X^T X)^{-1} (X^T X) \theta = \theta. \quad (1.2.8)$$

Оценка параметров по методу наименьших квадратов несмещенная. Определим матрицу вариаций оценок, получаемых по методу наименьших квадратов.

Подставив (1.2.7) в (1.2.4), получим

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T (X \theta + \varepsilon) = \theta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon, \quad (1.2.9)$$

то есть $\hat{\theta} - \theta = (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$. Матрица вариаций оценок равна

$$V = M\{(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T\}.$$

Подставляя в последнее выражение формулу (1.2.7), получим

$$\begin{aligned} V &= M\{(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon \varepsilon^T X (X^T X)^{-1}\} = \\ &= (X^T X)^{-1} X^T M\{\varepsilon \varepsilon^T\} X (X^T X)^{-1} = \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} (X^T X) (X^T X)^{-1} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

При выводе формулы (1.2.10) мы воспользовались свойством $(AB)^T = B^T \cdot A^T$ и учли, что $(X^T X)^T = X^T X$. Отметим следующее важное свойство оценок, получаемых по методу наименьших квадратов: в классе линейных несмещенных оценок они имеют наименьшую дисперсию [5].

В заключение настоящего параграфа отметим, что кроме оценок по методам максимального правдоподобия и наименьших квадратов разработаны и применяются другие методы, например байесовская оценка неизвестного параметра, оценка параметров по группированным выборкам, метод моментов и др. Поскольку в настоящей книге эти методы не применяются, то рассмотрение их конструкции и свойств мы оставляем в стороне.

§ 3. Математическое описание квантовых сигналов и шумов

Особенностью оптической локации является то, что в ней начинает проявляться квантовая структура оптического излучения. Квантовость света, в частности, проявляется в том, что в оптическом диапазоне отсутствует аналог тех линейных антенн, которые являются обычными в радиолокации, и обнаружение оптических сигналов ведется с помощью специфических устройств (фотодетекторов, фотоумножителей, фотосопротивлений и т. д.). В качестве наблюдаемого процесса в этом случае выступает поток фотоэлектронов со своими специфическими законами распределения для сигнальной и шумовой составляющих, что приводит к необходимости использования специфического математического аппарата, а также к тому, что системы обнаружения и определения момента появления локационных оптических сигналов отличаются от аналогичных систем радиолокации.

Подчеркнем тот факт, что использование методов квантовой механики необходимо лишь на этапе получения статистических свойств и характеристик наблюдаемых процессов; как только эти статистические характеристики получены, вступает в действие аппарат математической статистики, а аппарат квантовой механики более не используется.

В настоящем параграфе рассмотрим оптические локационные сигналы, поступающие на вход безынерционного фотодетектора или любого другого безынерционного фотоэлемента. На выходе такого приемника будет наблюдаться поток фотоэлектронов, состоящий из нескольких компонент. Рассмотрим каждую из компонент в отдельности. Начнем с темнового тока фотодетектора, относительно которого можно отметить, что он представляет собой пуассоновский поток постоянной интенсивности [6, 7], что подтверждается и экспериментально [8].

Второй компонентой выходного потока фотоэлектронов является поток от внешнего фона. Статистика фотоэлектронов в этом случае связана со статистикой фотонов во внешних сигналах. Как показано в [9, с. 37—50; 7, с. 263—267], статистика фотонов является производной от пуассоновской статистики. Если через m обозначить число фотонов на i -м отрезке наблюдения длиной Δt , то для распределения вероятностей чисел $\{m_i\}$ верно следующее выражение:

$$p(\{m_i\}) = \int \dots \int \prod_{i=1}^M \frac{(|\alpha_i|^2)^{m_i}}{m_i!} e^{-|\alpha_i|^2} \cdot p(\alpha_1, \dots, \alpha_M) d^2\alpha_1 \dots d^2\alpha_M, \quad (1.3.1)$$

где α_i — комплексная величина, пропорциональная току либо напряжению; M — число элементарных отрезков наблюдения; $p(\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ — в обычных статистических терминах имеет смысл плотности вероятностей величин $\{\alpha_i\}$. Таким образом, выражению (1.3.1) можно дать вполне определенную физическую трактовку: $\alpha(t)$ есть электромагнитное поле в его классическом описании, каждой моде которого соответствует пуассоновский поток фотонов интенсивности $|\alpha_i|^2$. Если само поле является случайным, то окончательное распределение вероятностей для фотонов получается усреднением пуассоновского распределения по реализациям $\alpha(t)$.

Безынерционному фотодетектору или фотоэлементу соответствует следующее преобразование потока фотонов: каждый фотон может с вероятностью p выбить фотоэлектрон и с вероятностью $q = (1 - p)$ потеряться, то есть p — квантовая эффективность фотодетектора; акты выбивания фотоэлектронов независимые.

При поступления фотонов вероятность вылета n фото-
электронов дается формулой

$$p(n/m) = C_m^n p^n q^{m-n}. \quad (1.3.2)$$

По формуле полной вероятности мы получаем для
одного интервала

$$\begin{aligned} P(n) &= \sum_{m=n}^{\infty} C_m^n p^n q^{m-n} \int \frac{(|\alpha|^2)^m}{m!} e^{-|\alpha|^2} \cdot p(\alpha) d^2\alpha = \\ &= \int \frac{(p \cdot |\alpha|^2)^n}{n!} e^{-|\alpha|^2} p(\alpha) \sum_{m=n}^{\infty} \frac{q^{m-n} (|\alpha|^2)^{m-n}}{(m-n)!} d^2\alpha = \\ &= \int \frac{(p |\alpha|^2)^n}{n!} e^{-p |\alpha|^2} \cdot p(\alpha) d^2\alpha. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Из выражения (1.3.3) видно, что распределение потока
от внешнего фона определяется статистическими свой-
ствами процесса $\alpha(t)$. Фотодетектор с учетом стоящего
на его входе современного оптического фильтра имеет
полосу пропускания обычно много больше полосы
полезного сигнала. С другой стороны, внешний фон
образуется суперпозицией большого числа источников
излучений, поэтому процесс $\alpha(t)$ от внешнего фона по
своим статистическим свойствам должен быть близок
к белому гауссовскому шуму, а это значит, что вели-
чина

$$|\alpha_i|^2 = \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} |\alpha(t)|^2 dt \approx \text{const} \quad (1.3.4)$$

будет неслучайной, поток фотоэлектронов от внешне-
го фона будет опять-таки пуассоновским постоянной
интенсивности. В выражении (1.3.4) Δt — время наблю-
дения сигнала.

Экспериментальные исследования [6,10] показали,
что поток от внешнего фона будет пуассоновским
потоком постоянной интенсивности, если выполняется
условие $\lambda_n/F \ll 1$, где λ_n — интенсивность потока фото-
электронов от внешнего фона; F — эффективная поло-
са частот от внешнего фона. На практике это условие

всегда выполняются, так как современные оптические фильтры еще очень широкополосны.

Третьей компонентой выходного потока, фотоэлектронных будет поток от излученного лазером полезного сигнала, который, попадая на приемное устройство оптического локатора, претерпевает ряд искажений. Отраженный сигнал искажается как на турбулентностях атмосферы, так и при отражении от цели. Наиболее существенными являются искажения при отражении от целей. Когда длина волн излучения много меньше размеров цели, отражение полезного сигнала хорошо описывается моделью совокупности «блестящих точек», а полезный сигнал представляется в виде суммы сигналов, отраженных от них [11]. В силу того, что число блестящих точек очень велико, справедлива центральная предельная теорема теории вероятностей, и отраженный сигнал достаточно хорошо описывается нормальным случайным процессом с нулевым средним значением и функцией корреляции [12]

$$R(t_1, t_2) = \sqrt{\mu(t_1)\mu(t_2)} r(t_1 - t_2). \quad (1.3.5)$$

Здесь $\mu(t)$ — форма зондирующего импульса; $r(t_1 - t_2)$ описывает свойства флуктуаций цели.

В оптическом диапазоне длина волны падающего света много меньше размеров цели, поэтому отраженный сигнал можно представить нормальным случайным процессом с функцией корреляции типа (1.3.5). Однако в оптическом диапазоне имеются и свои особенности, отсутствующие в радиодиапазоне. Рассмотрим их кратко. В случае, когда время корреляции флуктуаций формы импульса много больше его длительности, отраженный сигнал $s(t)$, записанный в комплексной форме, можно представить в виде

$$s(t) = \alpha \sqrt{\mu(t)}, \quad (1.3.6)$$

где α — комплексная нормальная случайная величина с нулевым средним значением и дисперсией $\rho_0/2$. Энергия сигнала пропорциональна величине $|\alpha|^2$, и поэтому в оптическом диапазоне плотность вероятности энергии отраженного сигнала имеет вид [6]

$$p(\rho) = \frac{1}{\rho_0} e^{-\rho/\rho_0}, \quad (1.3.7)$$

где ρ_0 — среднее значение энергии отраженного сигнала.

В силу малости длины волны в оптическом диапазоне возникает еще один эффект: всю приемную апертуру можно разбить на отдельные области, называемые корреляционными ячейками [10,13], таким образом, что энергия, попадающая в каждую корреляционную ячейку, будет подчиняться экспоненциальному закону распределения, а суммарная энергия является случайной величиной с плотностью вероятностей

$$p(\rho) = \frac{\rho^{\nu-1} \cdot \nu^{\nu}}{\Gamma(\nu) \cdot \rho_0^{\nu}} e^{-\rho \cdot \nu / \rho_0}, \quad (1.3.8)$$

где ν имеет смысл числа корреляционных ячеек, а ρ_0 — по-прежнему средняя энергия отраженного сигнала. Число корреляционных ячеек определяется формулой [6]

$$\nu = \frac{R \cdot \lambda}{\alpha_u \cdot \alpha_a}, \quad (1.3.9)$$

где R — расстояние до цели; λ — длина волны; α_u , α_a — линейные размеры цели и приемной апертуры.

Таким образом, если обнаружение и определение момента появления оптического сигнала в случае медленно флуктуирующих целей ведется пачкой из k оптических импульсов, то создаваемый полезным сигналом поток фотоэлектронов при фиксированных энергиях $\{\rho_s\}$, где $s = \overline{1, k}$, импульсов пачки будет пуассоновским с интенсивностью

$$\sum_{s=1}^k \rho_s \mu(t - sT - \tau), \quad (1.3.10)$$

где T — длительность одного импульса пачки; τ — момент прихода полезного сигнала. Пуассоновским поток фотоэлектронов является условно только в случае фиксации величин $\{\rho_s\}$, а так как $\{\rho_s\}$ являются случайными величинами, то после усреднения по их распределению „пуассоновость“ потока теряется, хотя он и порождается пуассоновским потоком.

§ 4. Статистические характеристики излучения Земли

В настоящем параграфе кратко рассмотрим вопросы о статистических характеристиках собственного излучения Земли в ИК диапазоне для целей организации приемника, расположенного на борту космического аппарата (КА) и определяющего момент прихода этого сигнала.

Не последнюю роль в этой проблеме играет вопрос о прозрачности атмосферы для ИК излучения, ибо от выбора диапазона, в котором будет работать приемник, зависит уровень сигнала, определяемый степенью затухания в атмосфере Земли. Установлено [14], что атмосфера Земли хорошо пропускает следующие полосы ИК излучения: 1—1,4 мкм; 1,5—1,8 мкм; 1,9—2,6; 2,8—4 мкм. Ланглей в 1888 г. установил, что полная прозрачность атмосферы появляется между 8,4 и 9,1 мкм, а также около 10,7 мкм. Роуль в 1906 г. установил, что прозрачность атмосферы одинакова в области спектра 2,2—11 мкм. Современные исследования [15,16,17] по прохождению ИК излучения через атмосферу показывают, что длинноволновая граница пропускания ИК излучения расположена у 13,5 мкм. Вообще говоря, при определенных условиях прозрачность атмосферы для ИК излучения на отрезке пути длиной x при наличии поглощения выражается законом Ламберта—Бугера

$$K_{\nu} = e^{-k_{\nu} x}, \quad (1.4.1)$$

где K_{ν} — прозрачность атмосферы при частоте ν , а k_{ν} — коэффициент поглощения. Определенные условия заключаются в том, что применять закон Ламберта — Бугера можно только в том случае, если для определенной длины волны коэффициент k_{ν} точно известен. Условия, в которых будет находиться наш приемник, далеки от тех, которыми ограничивается применимость закона Ламберта — Бугера; в нашем случае коэффициент k_{ν} будет случайной величиной (к тому же с неизвестным законом распределения). Именно это обстоятельство исключает использование формулы (1.4.1) в исследовании приемника, обнаруживающего момент появления сигнала от

Земли. Однако исследования Ланглея позволяют априори решить вопрос о диапазоне, в котором будет работать наш приемник,— это диапазон в 10 мкм.

Для решения вопроса об оптимальном способе определения момента появления оптического сигнала необходимо знать статистические характеристики и свойства его. Трудно перечислить все факторы, которые обуславливают случайность интенсивности излучения Земли. Здесь играет роль температура, так как разные площади Земли нагреты до разных температур, прозрачность среды, облачность, туман и многие другие факторы, которые не являются стабильными и детерминированными ни во времени, ни в пространстве. Наличие многих случайных факторов, влияющих на величину интенсивности излучения Земли в ИК диапазоне, а также их независимость друг от друга позволяют в первом приближении считать, что напряженность поля излучения является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Этот же вывод подтверждается экспериментальными данными, опубликованными в [18, 19]. Приводимые в них данные касаются одномерных функций распределения радиационной температуры, полученной со спутников серии «Космос». Спектры излучения Земли измерялись в диапазоне 7—38 мкм с помощью двух монокроматоров, установленных на спутнике. Общее число полученных спектров около 10^4 . Продолжительность измерения каждого спектра— 20 с; разрешение по поверхности Земли— 10 км. Одномерное распределение спектральной интенсивности, во-первых, пересчитано нами из радиационной температуры [19, 21—23], во-вторых, аппроксимировано кривыми Пирсона I и III типов [20]:

$$f(x) = \varphi_0 \left(1 + \frac{x-M}{A_1} \right)^{M_1} \cdot \left(1 - \frac{x-M}{A_2} \right)^{M_2}; \quad (1.4.2)$$

$$f(x) = \varphi_0 \left(1 + \frac{x-A_2}{A_1^2} \right)^{-M_1} \cdot e^{-M_2 \arctg \frac{x-A_2}{A_1}}. \quad (1.4.3)$$

Численные значения коэффициентов для формул (1.4.2) и (1.4.3) даны в табл. 1.4.1.

Статистические данные представлены в виде функций распределения на интервалах шириной в 1 мкм в

Таблица 1. 4.1

Спектральный диапазон, мкм	$M \cdot 10^{-3} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$	$\varphi_0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{мкм}}$	M_1	M_2	$A_1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{мкм}}$	$A_2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{мкм}}$
7—8	1,0	1,59	6,09	1,31	1,57	0,34
8—9	1,69	0,99	176,0	14,3	19,60	1,59
9—10	1,53	0,99	46,7	71,8	3,9	6,09
10—11	2,10	0,62	1,16	0,57	1,62	0,80
11—12	2,77	0,55	0,68	0,13	2,10	0,42
12—13	2,23	0,53	0,52	0,23	1,66	0,72
13—14	1,32	0,71	3,06	6,94	1,25	2,83
14—15	0,75	0,18	2,98	— 5,76	0,28	0,47
15—16	0,59	6,64	0,24	15,70	0,023	1,52
16—18	0,95	3,60	13,40	7,04	0,71	0,37
18—20	1,02	0,48	7,15	19,81	0,26	1,39
20—22	0,88	3,94	13,10	2,38	0,93	0,17
22—24	0,66	4,56	5,74	2,45	0,21	0,70
24—26	0,52	6,85	3,48	1,56	0,11	0,54

диапазоне 7—15 мкм и на интервалах шириной в 2 мкм в диапазоне 14—26 мкм. Диапазон 7—15 мкм получен из обработки 1176 спектрограмм, а диапазон 14—26 мкм — из обработки 1278 спектрограмм. На рис. 1.4.1—1.4.6 приведены распределения спектральной интенсивности излучения Земли в этих диапазонах. На оси абсцисс x отложена интенсивность излучения, а по оси ординат — плотность вероятности. Нарисованные непрерывные кривые на этих рисунках — суть пирсоновские кривые, выравнивающие полученные экспериментальные данные.

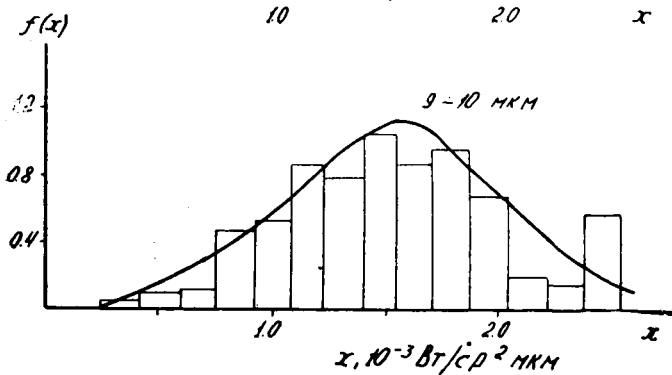
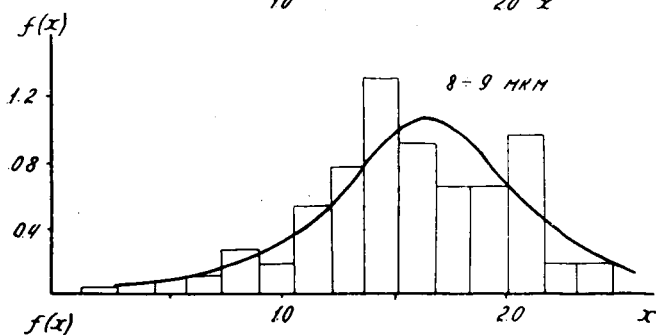
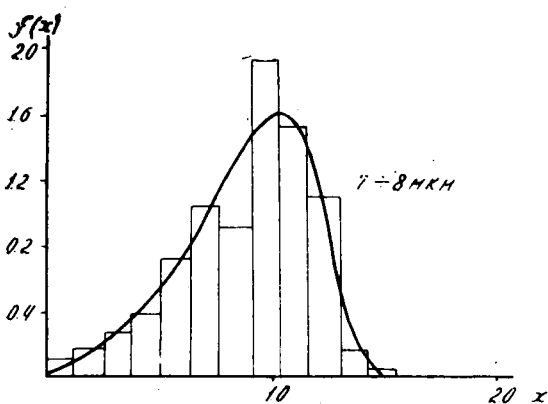


Рис. 1.4.1

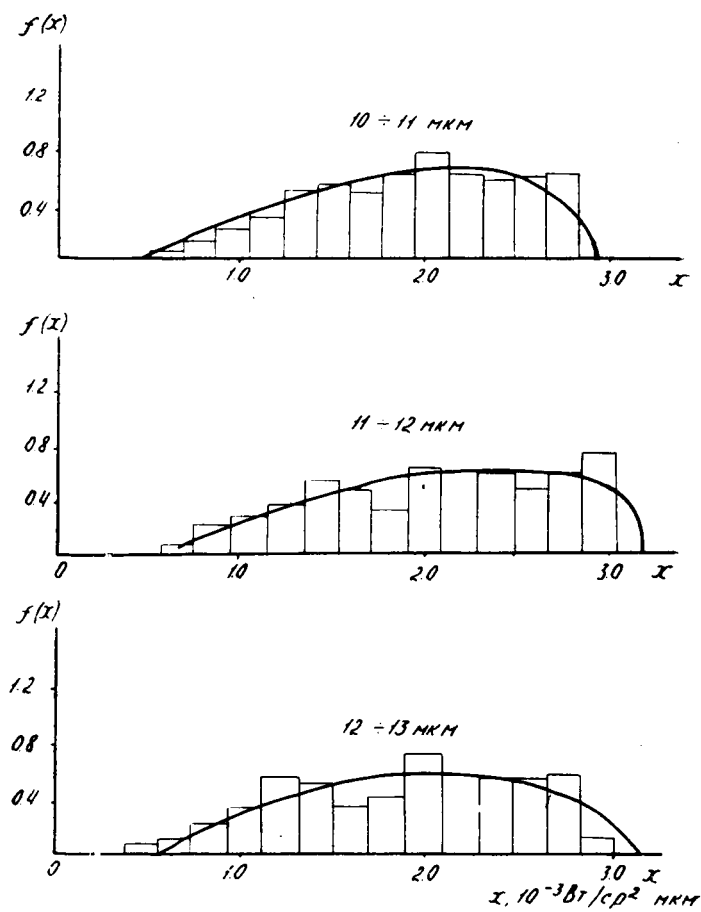


Рис. 1.4.2

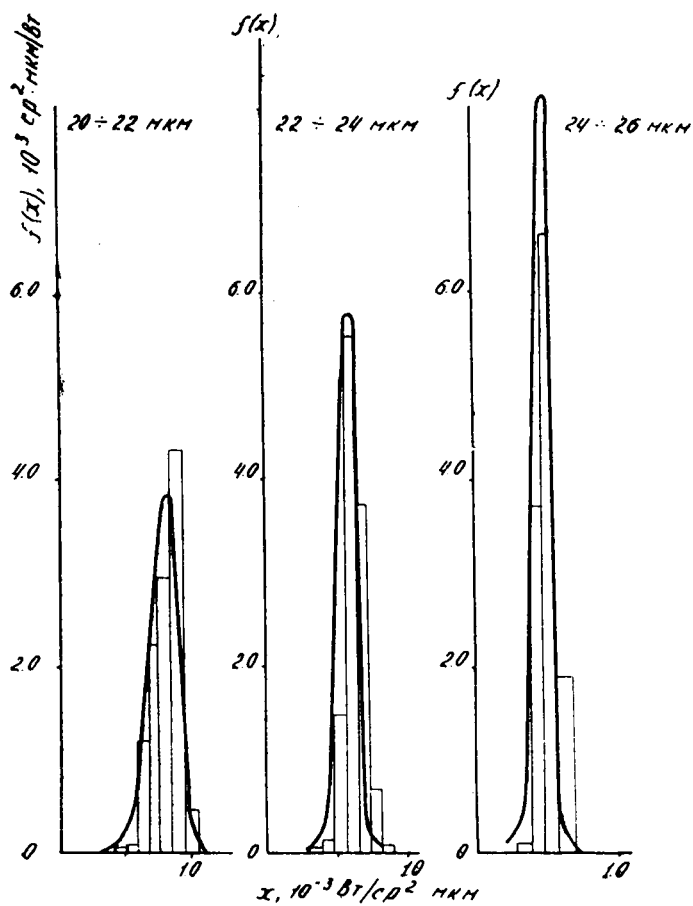


Рис. 1.4.3

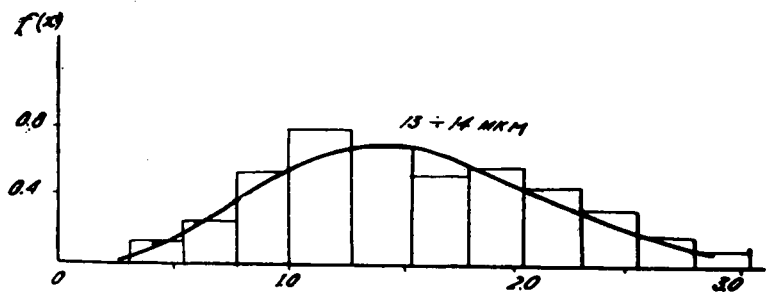


Рис. 1.4.4

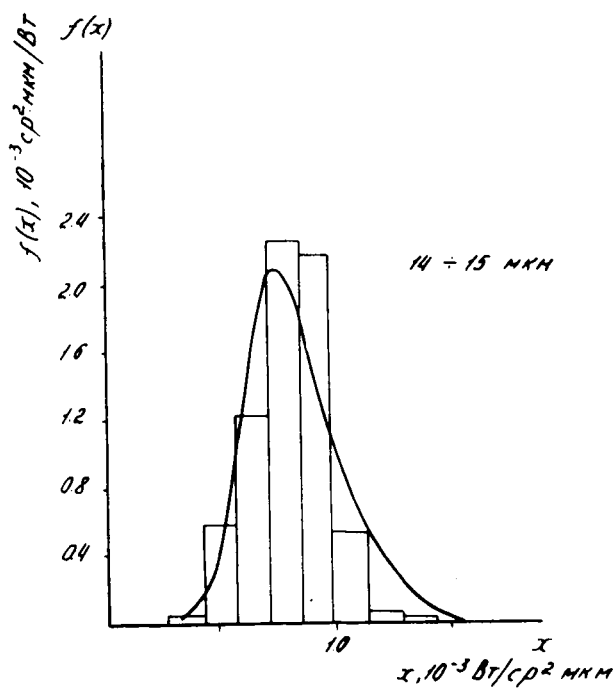


Рис. 1.4.5

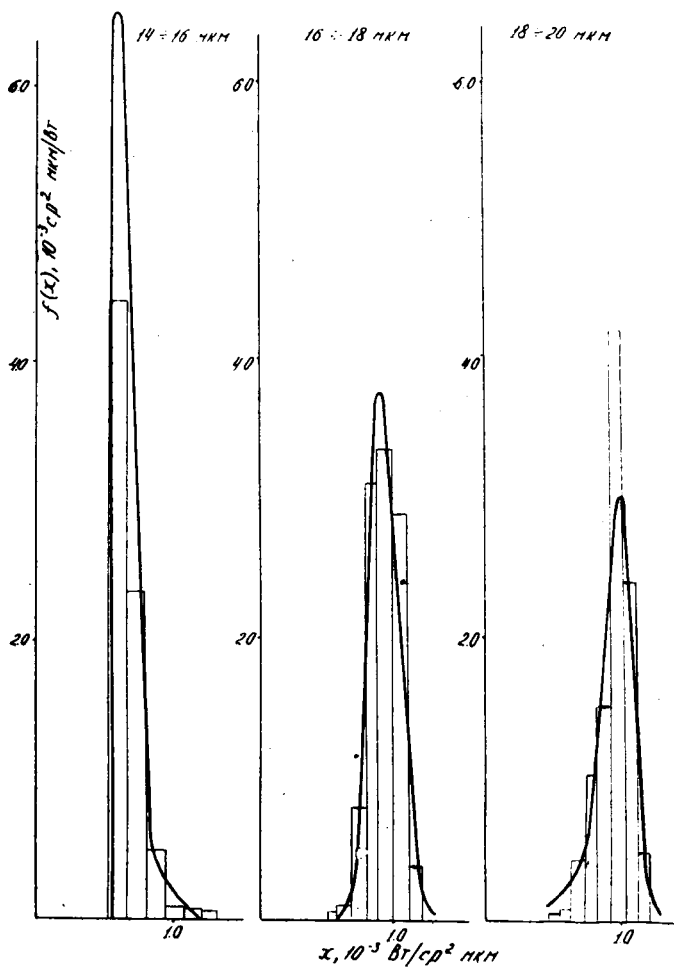


Рис. 1.4.6

На рис. 1.4.7 приведены числовые характеристики полученных статистических распределений: математическое ожидание $\bar{x}$, мода M_x среднеквадратическое отклонение σ_x . Кроме того, на этом же рисунке приведена зависимость эффективной температуры абсолютно чер-

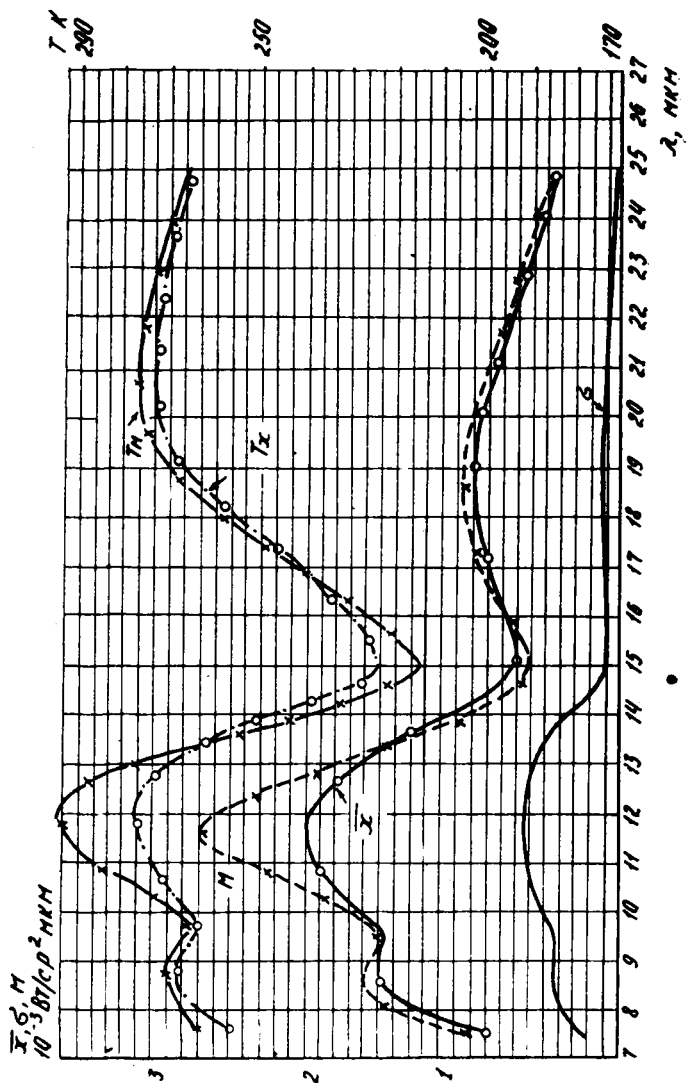


Рис. 1.4.7

ного тела, соответствующего излучению Земли той же самой спектральной интенсивности.

На рис. 1.4.8 даны зависимости повторяемости температур от степени облачности, полученные из экспериментальных данных [21], которые подтверждают вывод о нормальности плотности вероятностей для температур ИК излучения в диапазоне 8—12 мкм, следовательно, имеем

$$p(T) = \frac{1}{\sigma_T \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T-\bar{T})^2}{2\sigma_T^2}}.$$

С помощью кривых на рис. 1.4.7 и 1.4.8 можем определить численные значения для среднего значения $\bar{T} \approx 300$ К и для среднеквадратического значения $\sigma_T \approx 4$ К.

В некоторых случаях нам необходимо будет знание двумерного закона распределения и числовых характеристик его. На рис. 1.4.9 приведен пример двумерного закона распределения, соответствующий диапазонам 8—9 и 10—11 мкм, а на рис. 1.4.10—11—12 и 14—15 мкм. Цифры внутри каждого квадрата на рисунках обозначают число событий, когда интенсивность излучения в обоих рассматриваемых диапазонах принимает значение, определяемое этим квадратом. Пунктирная кривая представляет зависимость интенсивности излучения в этих диапазонах, даваемую абсолютно черным телом с температурой от 200 до 300 К. Корреляционный момент R , коэффициент корреляции r , а также математические ожидания $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ и среднеквадратические отклонения σ_{x_1} и σ_{x_2} были рассчитаны из функций распределения и приводятся в табл. 1.4.2.

Данные табл. 1.4.2 говорят о том, что сильные корреляционные связи существуют в областях поглощения одного и того же газа (пары воды в диапазоне 8—9 мкм и 10—11 мкм) [22] и что корреляционная связь в полосах поглощения различных газов мала (пары воды 11—12 мкм и углекислый газ 14—15 мкм [23]).

Приведенные статистические характеристики собственного излучения Земли являются вполне достаточными для расчета точности системы определения момента появления оптического сигнала.

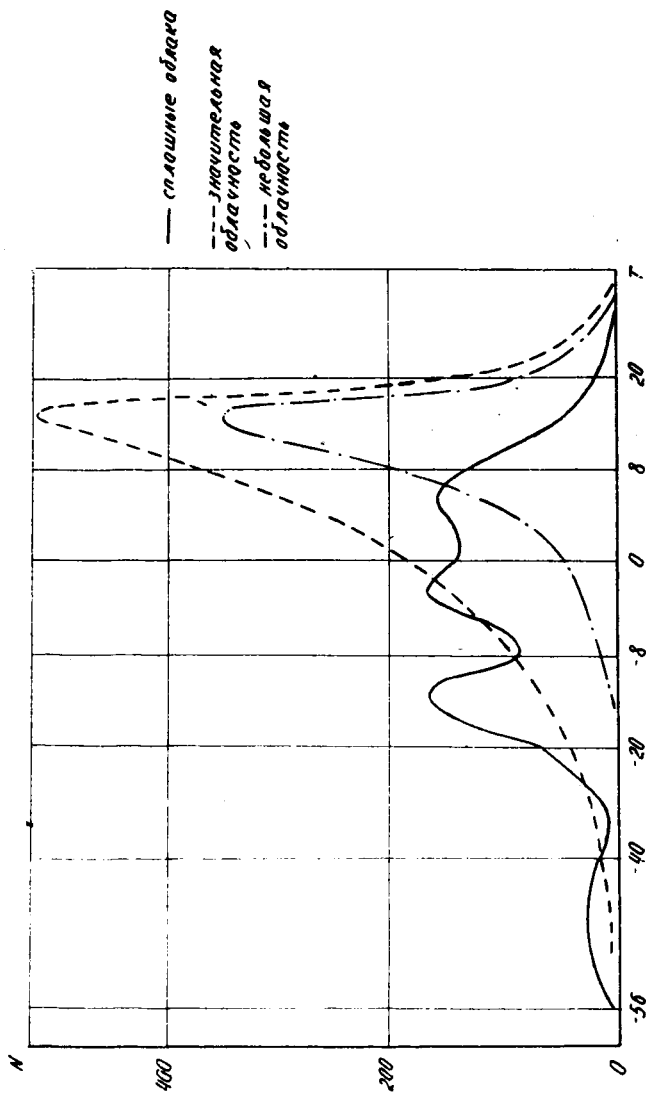


Рис. 1.4.8. Повторяемость значений радиационной температуры в интервале 8—12 мкм [19]

Для дальнейших исследований нам понадобится знание корреляционной функции радиационной температуры для диапазона 8—12 мкм; ее зависимость, взятая из [22, 24], приводится на рис. 1.4.11. Знание этой характеристики во многом уже упрощает методы синтеза приемного устройства. На рис. 1.4.12 для сравнения приво-

Рис. 1.4.9

дится корреляционная функция, взятая из [16, 25], которая также получена в результате экспериментальных данных для диапазона 8—12 мкм. Видим, что оба результата хорошо совпадают, а следовательно, использование корреляционных методов при инженерном синтезе приемных устройств будет в большей степени соответствовать действительности.

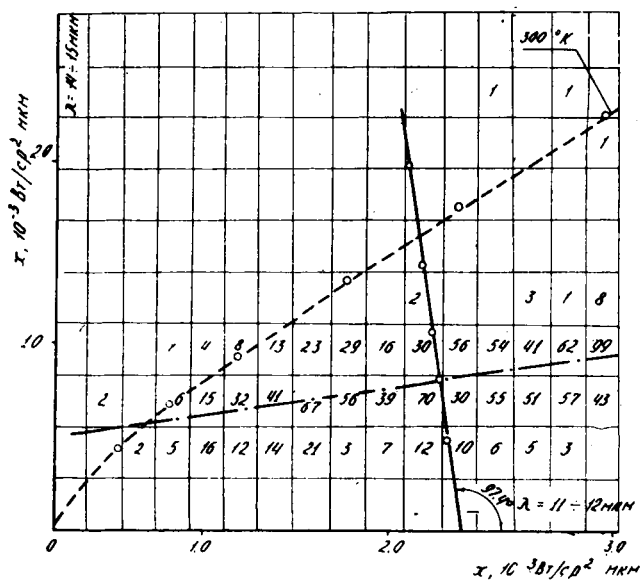


Рис. 1.4.10

Для исследования систем определения момента появления оптического сигнала необходимы сведения также о статистике фона, который непременно сопутствует полезному излучению. Заметим, что если фон равномерен по всему диапазону обзора, то для инерционных приемников он не играет существенной роли, так как постоянная составляющая яркости фона будет создавать только дополнительное напряжение на входе приемника, которое всегда можно скомпенсировать. Существенные помехи приему будут создавать флуктуации фона, которые будем считать нормальным случайным процессом, как и внутренние шумы фотоэлектрического преобразователя (ФЭП).

§ 5. Математическое описание сигнала и шума от пассивного источника излучения

Начнем изучение с процесса на входе фотоэлектрического преобразователя (ФЭП). Излучение Земли в ИК диапазоне носит тепловой характер и поэтому в силу

Таблица 1.4.2

Диапазон, мкм	R	r	$\bar{x}_1 \cdot \frac{B_T}{10-3 \text{ ср}^2 \cdot \text{мкм}}$	$\bar{x}_2 \cdot \frac{B_T}{10-3 \text{ ср}^2 \cdot \text{мкм}}$	$\sigma_{x_1} \cdot \frac{B_T}{10-3 \text{ ср}^2 \cdot \text{мкм}}$	$\sigma_{x_2} \cdot \frac{B_T}{10-3 \text{ ср}^2 \cdot \text{мкм}}$
8—9; 10—11	0,205	0,91	1,60	1,87	0,418	0,548
11—12; 14—15	0,0476	0,37	2,07	0,792	0,633	0,202

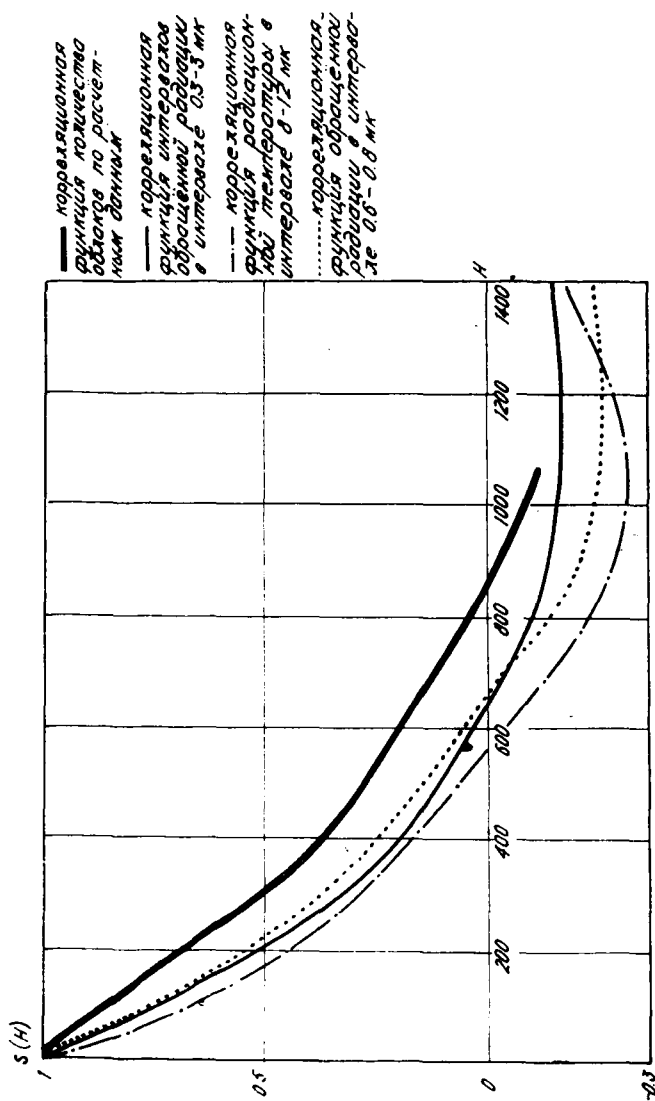


Рис. 1.4.11. Зависимость для корреляционной функции интенсивности излучения Земли

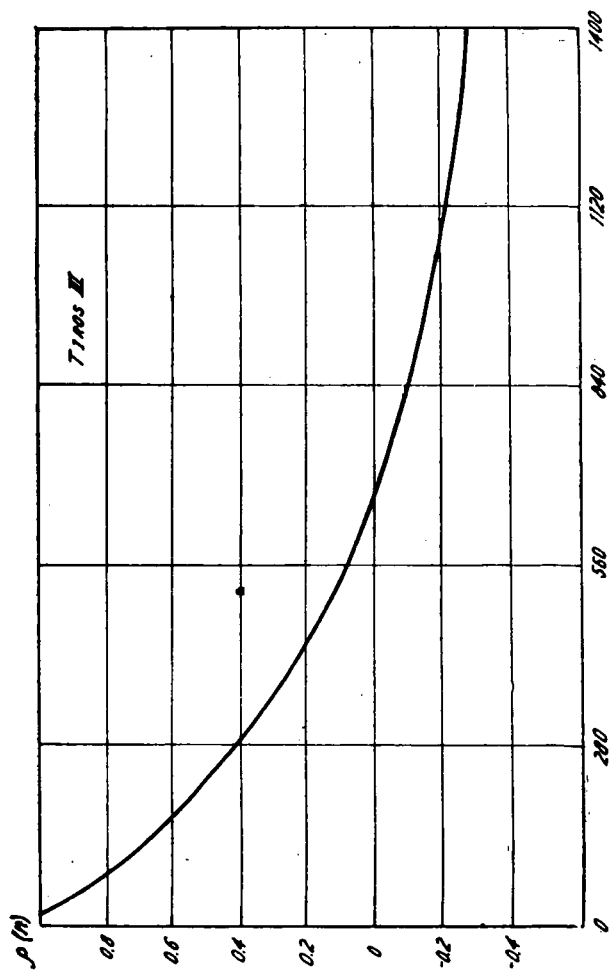


Рис. 1.4.12. Корреляционная функция интенсивности излучения Земли в диапазоне 2—12 мкм [16]

своей некогерентности представляет собой нормальный случайный процесс [14]. Оптический фильтр, стоящий перед ФЭП, вырезает некоторый участок спектра, достаточно малый по сравнению со всем спектром входного излучения. Поэтому процесс на выходе оптического фильтра можно приближенно считать нормальным случайным процессом с равномерным в полосе частот $[F_{\min}, F_{\max}]$ спектром мощности, где $[F_{\min}, F_{\max}]$ — полоса пропускания оптического фильтра. Вне этой полосы спектр мощности можно считать равным нулю.

Рассмотрим теперь вопрос о преобразовании процесса, попадающего на ФЭП. Как известно [13, 26], сигнал на выходе ФЭП пропорционален интенсивности падающего излучения. Кроме того, почти все типы ФЭП представляют собой инерционное устройство. Если $I(t)$ — интенсивность падающего излучения, пропорциональная $\xi^2(t)$, где $\xi(t)$ — напряженность электромагнитного поля, создаваемая падающим излучением, и $x(t)$ — сигнал на выходе ФЭП, то связь между $x(t)$ и $I(t)$ дается уравнением

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = \beta \cdot I(t), \quad (1.5.1)$$

где β — некоторый коэффициент, а $\frac{1}{\alpha}$ — показатель инерционности ФЭП. Отсюда

$$x(t) = \beta \int_{-\infty}^t I(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau. \quad (1.5.2)$$

Физически эта операция соответствует линейной фильтрации процесса $I(t)$ фильтром с переходной характеристикой

$$h(\tau) = \begin{cases} e^{-\alpha\tau}, & \tau \geq 0; \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad (1.5.3)$$

В силу этого ФЭП можно заменить эквивалентной схемой, состоящей из квадратора ($I(t) \sim \xi^2(t)$) и линейного фильтра (рис. 1.5.1.).

Отметим, что фильтр, входящий в эквивалентную схему ФЭП, имеет такую же переходную характеристи-

тику, что и интегрирующая $R \cdot C$ цепочка. Предположим, что медленные флуктуации $\xi(t)$, обусловленные сканированием входной оптической системы по поверхности Земли, отсутствуют, то есть оптическая система неподвижна. Найдем в этих условиях среднее значение и дисперсию процесса на выходе ФЭП. Имеем согласно (1.5.2)

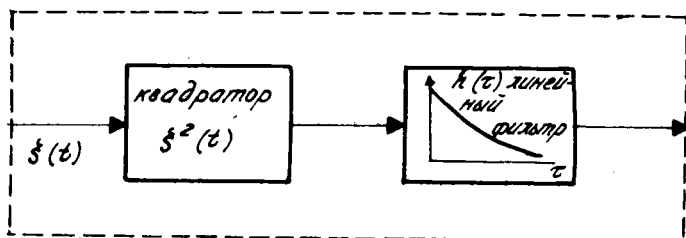


Рис. 1.5.1

$$\overline{x(t)} = \beta \sigma_{\xi}^2 \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = \frac{\beta \sigma_{\xi}^2}{\alpha}, \quad (1.5.4)$$

где σ_{ξ}^2 — дисперсия процесса $\xi^2(t)$, то есть $\overline{\xi^2(\tau)} = \sigma_{\xi}^2$. Находя дисперсию процесса $x(t)$, мы получим

$$D[x(t)] = \beta^2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t (\xi^2(\tau') - \sigma_{\xi}^2)(\xi^2(\tau) - \sigma_{\xi}^2) e^{-\alpha(t-\tau')} e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot d\tau' \cdot d\tau. \quad (1.5.5)$$

Если функция корреляции процесса $\xi(\tau)$ есть $\rho(\tau)$, то, как показано в [27], имеем

$$(\xi^2(\tau') - \sigma_{\xi}^2)(\xi^2(\tau) - \sigma_{\xi}^2) = 2 \sigma_{\xi}^4 \rho^2(\tau - \tau'), \quad (1.5.6)$$

поэтому с учетом (1.5.6) и замены переменных в двойном интеграле по формулам $u = \tau - \tau'$, $v = \tau + \tau'$, мы получим

$$D[x(t)] = \frac{2 \beta^2 \sigma_{\xi}^4}{\alpha} \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha u} \rho^2(u) du. \quad (1.5.7)$$

Если спектр мощности равномерен внутри полосы $[F_{\min}, F_{\max}]$, то согласно теореме Винера—Хинчина нормированная функция корреляции равна

$$p(u) = \frac{1}{\Delta F} \int_{F_{\min}}^{F_{\max}} \cos 2\pi f u df = \frac{\sin(2\pi F_{\max} u) - \sin(2\pi F_{\min} u)}{2\pi \Delta F u} \quad (1.5.8)$$

где $\Delta F = F_{\max} - F_{\min}$. Вычисляя интеграл выражения (1.5.7) с учетом (1.5.8), мы получим в предположении того, что $\frac{F_{\max} + F_{\min}}{2} \gg 1$, выражение

$$\begin{aligned} D[x(t)] &= \frac{\beta^2 \sigma_x^4}{\alpha^2} \int_0^\infty e^{-\alpha u} p^2(u) du = \\ &= \frac{\beta^2 \sigma_x^4}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\left(\pi \frac{\Delta F}{\alpha}\right)^2} \left\{ \pi \frac{\Delta F}{\alpha} \operatorname{arctg} \left(2\pi \frac{\Delta F}{\alpha} \right) - \frac{1}{4} \ln \left(1 + 4\pi^2 \frac{\Delta F^2}{\alpha^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

В силу (1.5.9) относительная флуктуация сигнала на выходе ФЭП равна

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{D[x(t)]}}{\bar{x}(t)} &= \\ &= \frac{1}{\pi \frac{\Delta F}{\alpha}} \sqrt{\pi \frac{\Delta F}{\alpha} \operatorname{arctg} \left(2\pi \frac{\Delta F}{\alpha} \right) - \frac{1}{4} \ln \left(1 + 4\pi^2 \frac{\Delta F^2}{\alpha^2} \right)}. \end{aligned}$$

Эта относительная флуктуация мала. Действительно, рассмотрим конкретные цифры, например, для стандартного болометра. Пусть $\alpha = 3$ мс; полоса пропускания оптического фильтра 1 мкм; средняя длина волны излучения цели 7 мкм. В этом случае

$$\begin{aligned} F &= 3 \cdot 10^{14} \text{ Гц}; \Delta F = \frac{3}{7} \cdot 10^{14} \text{ Гц}; \frac{\Delta F}{\alpha} = \frac{9}{7} \cdot 10^{11} \text{ у} \frac{\sqrt{D[x(t)]}}{\bar{x}(t)} = \\ &= 2 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

то есть относительная флуктуация сигнала составляет около 10^{-6} от его среднего значения. Таким образом, при постоянной интенсивности входного сигнала на выходе ФЭП сигнал можно считать нефлуктуирующим.

Флуктуации полезного сигнала на выходе ФЭП воз-

никают лишь из-за медленных флуктуаций сигнала на входе его, возникающих при сканировании оптической системы по поверхности Земли. Опишем теперь эти флуктуации. Пусть в момент времени t оптическая ось системы направлена на некоторую точку Земли, характеризуемую координатой r . Так как оптическая система имеет некоторый угол зрения ψ , то она будет принимать излучение от некоторой области Земли диаметра d , то есть имеем

$$I(r) = \int_{r-\frac{d}{2}}^{r+\frac{d}{2}} I_0(r) dr, \quad (1.5.10)$$

где $I(r)$ — принимаемая интенсивность излучения; $I_0(r)$ — интенсивность излучения Земли. Отсюда нормированная функция корреляции для $I(r)$ определится

$$\rho(r-r') = \text{cov}(I(r), I(r')) = \frac{\int_{r-\frac{d}{2}}^{r+\frac{d}{2}} \int_{r'-\frac{d}{2}}^{r'+\frac{d}{2}} \rho_0(\xi-\xi') d\xi d\xi'}{\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \rho_0(\xi-\xi') d\xi d\xi'} \quad (1.5.11)$$

Переходя в выражении (1.5.11) к переменным $\Delta r = r - r'$ и $\xi - \xi' = u$, мы получим

$$\rho(\Delta r) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(u) \cdot H(\Delta r - u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(u) H(u) du}, \quad (1.5.12)$$

где

$$H(u) = \begin{cases} 1 - \frac{|u|}{d}, & |u| \leq d; \\ 0, & |u| > d. \end{cases} \quad (1.5.13)$$

Заметим, что $d \sim H \cdot \psi$, где H — высота орбиты ИСЗ. Графики функций $\rho(\Delta r)$ для различных высот ИСЗ приводятся на рис. 1.5.2 (для $\psi = 3^\circ$). Отметим, что,

отличие $\rho_0(\Delta r)$ от $\rho(\Delta r)$ начинает проявляться с высот более 4000 км, которые в дальнейшем будем называть большими. Для высот менее 400 км отличие $\rho_0(u)$ и $\rho(u)$ незначительно, а $\rho(u)$ не меняется с изменением высоты H [28]. Отметим, что рассчитанная нами функция корреляции хорошо совпадает с экспериментальными [16].

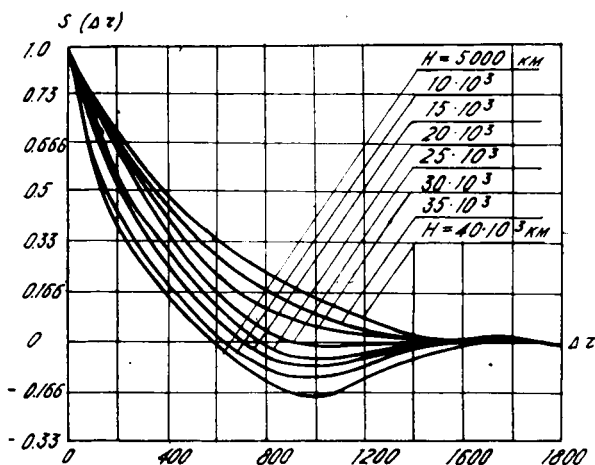


Рис. 1.5.2

Нам остается лишь учесть краевые эффекты, когда поле зрения оптики приемника частично покрывает Землю, находясь на краю Земли. Это приводит к тому что $I(r)$ умножается на функцию, имеющую трапецеидальную форму. Переходя к временным переменным

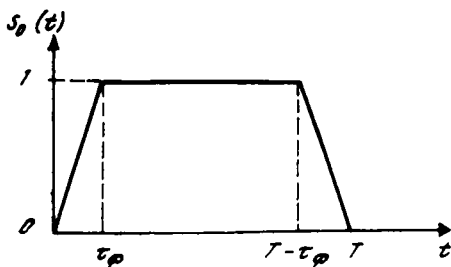


Рис. 1.5.3

и предполагая, что оптическая система сканирует с постоянной скоростью, мы получим, что сигнал на входе эквивалентного фильтра ФЭП $I(t)$ может быть представлен в виде

$$I(t) = s_0(t) \cdot x(t); \quad (1.5.14)$$

где (рис. 1.5.3)

$$s_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{t}{\tau_\phi}, & 0 \leq t \leq \tau_\phi; \\ 1, & \tau_\phi \leq t \leq T - \tau_\phi; \\ \frac{T-t}{\tau_\phi}, & T - \tau_\phi \leq t \leq T; \\ 0, & t > T, \end{cases} \quad (1.5.15)$$

а $x(t)$ — случайный нормальный процесс со средним значением A_x , дисперсией σ_x^2 и нормированной функцией корреляции $r_x(\tau) = \rho_x(\nu, \tau)$. Для дальнейших исследований нам потребуется величина σ_x/A_x . Оценим её. Как известно [14], в ИК диапазоне интенсивность излучения пропорциональна T^4 , где T — яркостная температура. В силу этого $\frac{\sigma_x}{A_x} = 4 \frac{\sigma_T}{T} = q_0$. Как следует из изложенного в § 4, для диапазона $8-10 \text{ мкм}$ $T \approx 300 \text{ К}$, $\sigma_T \sim 4 \text{ К}$, поэтому $\frac{\sigma_x}{A_x} = 16/300$. Эту цифру мы и будем использовать в дальнейших расчетах.

Кроме флуктуаций интенсивности на входе ФЭП в нашей системе имеются также собственные шумы. Мы, как это обычно делается, будем считать собственный шум нормальным белым шумом с мощностью на единицу полосы частот N .

В последующих главах, посвященных определению момента прихода оптического сигнала инерционным приемником, нам понадобится величина N/A_x^2 . Оценим её для ФЭП, в качестве которого возьмем стандартный болометр со среднеквадратичной шума $\sigma_{\text{ш}} = \sqrt{NF_0} = 0,3 \text{ мВ}$, полосой пропускания $F_0 = 180 \text{ Гц}$; постоян-

ной времени $\alpha = \frac{1000}{3} \left[\frac{1}{\text{с}} \right]$ и амплитудой напряжения на выходе $A_x / \alpha = 20$ мкВ, тогда имеем

$$\frac{N}{A_x^2} = \left(\frac{3}{200} \right)^2 \frac{1}{\alpha_0^2 \cdot F_0} = \frac{q_1^2}{\alpha_0^2 \cdot F_0}. \quad (1.5.16)$$

Глава II

ОБНАРУЖЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ЛОКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ

§ I. Обнаружение сигналов при наличии неизвестных параметров

Ниже мы рассмотрим некоторые вопросы, связанные с построением субоптимальных систем обнаружения сигналов и тех принципов, которые при этом могут выдвигаться.

Пусть передатчик может излучать дискретный набор сигналов $\{s\} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Проходя по каналу связи с шумами, передаваемые сообщения несколько изменяются, так что на приемном конце мы принимаем сигналы из множества $\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Обычно шум в канале связи известен, так что будем предполагать известными условные вероятности $p(x_i/s_j) \equiv p_{ij}$. Однако распределение вероятностей на пространстве сигналов $\{s\}$, т. е. величины $p(s_i)$, будет предполагаться нами неизвестным.

На приемном конце в распоряжении наблюдателя имеется дискретный набор действий $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} = \{A\}$. Будем считать, что если посылался сигнал s_i , а наблюдатель принял решение A_k , то он несет потери u_{ik} . Схема связи приобретает вид, изображенный на рис. 2.1.1. Задача наблюдателя состоит в том, чтобы в некотором смысле минимизировать свои потери.

Сведем нашу схему к некоторой игре наблюдателя с природой. К этому можно подойти с двух различных точек зрения.

Первая точка зрения представляет собой точку зрения очень осторожного человека, который еще до начала приема, т. е. до начала игры, заранее рассчитывает свои действия и определяет, какое решение он будет принимать в случае приема того или иного x_j .

Вторая точка зрения представляет собой точку зрения более оптимистического игрока, который предпочитает поступать следующим образом: сначала принять сообщение, т. е. какое то x_j , а потом уже определить свои действия.

Перейдем к построению матрицы игры с I и II точек зрения.

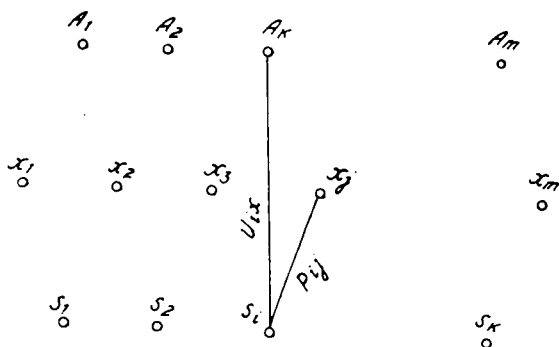


Рис. 2.1.1

I. Чистые стратегии природы состоят, очевидно, в том, чтобы посылать тот или иной сигнал из множества $\{s\}$. Поэтому над вертикальными столбцами матрицы игры должны стоять $s_1, s_2, \dots, s_n$. Чистые стратегии наблюдателя состоят в том, чтобы каждому x_j сопоставить действие A_{kj} , т. е. представляют собой набор чисел $(k_1, k_2, \dots, k_m) = I_{k_1, k_2, \dots, k_m}$. На пересечении s_j -го столбца и i -й строки должны стоять некоторые величины b_{ij} , определяющие потери, которые несет наблюдатель (в смысле полезности). Для определения этих величин мы применим аксиоматический метод.

Вообще говоря, $b_{ij} = f_{ij}(\{p_{jj}\}, \{u_{ik}\})$. Для определения вида функции f_{ij} и предлагается следующая система аксиом.

1. Аксиома неизвестности. b_{ij} должна зависеть лишь от величины $(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im}; u_{ik_1}, u_{ik_2}, \dots, u_{ik_m})$.

Действительно, ведь b_{ij} стоит в i -м столбце, т. е. предполагается, что на передающем конце посылается сигнал s_i , а на приемном конце могут приниматься действия $A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_m}$. Поэтому естественно требо-

вать, чтобы и потери b_{ij} зависели только от величин связанных с i -м сигналом и действиями $A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_m}$ и не зависели от величин, связанных с другими сигналами и действиями. Итак, согласно этой аксиоме

$$b_{ij} = f(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im}; u_{ik_1}, u_{ik_2}, \dots, u_{ik_m}).$$

2. Аксиома линейности I. Относительные потери b_{ij} должны быть линейной функцией величин u_{ik} .

Линейные функции часто используются в теории полезности и теории игр. Смысл этого состоит в том, что при увеличении величин u_{ik} в какое-то число раз относительные потери должны возрастать в такое же число раз.

Согласно этой аксиоме

$$b_{ij} = \sum_j f_{ij}(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im}) u_{ik_j}.$$

3. Аксиома независимости II. Функция $f_j(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im})$ должна зависеть лишь от величины p_{ij} .

Действительно, член с u_{ik_j} означает, что посылается i -й сигнал s_i и принимается x_j . Поэтому представляется очевидным требовать, чтобы в члене с u_{ik_j} учитывались величины, связанные лишь с переходом $s_i \rightarrow x_j$, т. е. величина p_{ij} .

Итак, $b_{ij} = \sum_j f_{ij}(p_{ij}) u_{ik_j}$.

4. Аксиома линейности II. $f_{ij}(p_{ij})$ должна быть линейной функцией от p_{ij} .

С одной стороны, ясно, что $f(p)$ должна быть монотонно возрастающей функцией от аргумента p , причем $f(0) = 0$. Действительно, если $p_{ij} = 0$, то это означает, что переход $s_i \rightarrow x_j$ никогда не происходит, и не имеет никакого смысла учитывать потери, связанные с этим переходом. Чем больше p_{ij} , тем более вероятен переход $s_i \rightarrow x_j$, тем более вероятно, что мы понесем потери u_{ik_j} и тем сильнее член с u_{ik_j} должен влиять на b_{ij} . Выбор линейного вида функций определяется требованием равноправия всех значений величин p

$$b_{ij} = \sum_j C_{ij} p_{ij} u_{ik_j}.$$

5. Аксиома равноправия. Все C_{ij} равны.

Действительно, так как мы ничего не знаем об априорном распределении вероятностей на пространстве сигналов, то нет никакого смысла оказывать предпочтение тому или иному сигналу. Это и означает, что все C_{ij} должны быть равны.

Не ограничивая общности, можно положить все $C_{ij}=1$ и тогда окончательно

$$b_{il} = \sum_j p_{ij} u_{ikj}. \quad (2.1.1)$$

Это же выражение для b_{il} можно было предположить без всяких аксиом, используя основные понятия теории вероятностей. Действительно, если посылается i -й сигнал s_i , то с вероятностью p_{ij} будет принят x_j , и мы понесем потери u_{ikj} . Средние потери будут составлять (по общему определению среднего значения случайной величины)

$$\sum_j p_{ij} u_{ikj} = b_{il},$$

что совпадает с (2.1.1).

II. Перейдем ко второй точке зрения. В этом случае вся игра распадается на m подыгр, каждая из которых соответствует принятию того или иного x_j . Чистые стратегии природы остаются теми же самыми — выбор $s_1, s_2, \dots, s_k$, а чистыми стратегиями игрока в каждой подыгре является выбор одного из действий $A_1, A_2, \dots, A_n$. Матрица каждой из подыгр принимает вид, изображенный на рис. 2.1.2.

	s_1	s_2		s_i		s_k
A_1	v_{11}	v_{21}		v_{i1}		v_{k1}
A_2	v_{12}	v_{22}		v_{i2}		v_{k2}
A_k	v_{1k}	v_{2k}		v_{ik}		v_{kk}
A_n	v_{1n}	v_{2n}		v_{in}		v_{kn}

Рис. 2.1.2

Относительные потери $b_{ik}^{(j)}$ можно определить, пользуясь теми же аксиомами, что и выше. Из первой аксиомы следует, что $b_{ik}^{(j)}$ должна зависеть лишь от p_{ij} и u_{ik} , так как осуществлялся лишь переход $s_i \rightarrow x_j$, и принимается действие A_k . Аксиомы линейности говорят о том, что $b_{ik}^{(j)}$ должна иметь вид

$$b_{ik}^{(j)} = C_{ij} p_{ij} u_{ik}.$$

Наконец, аксиома равноправия приводит к окончательному виду $b_{ik}^{(j)}$

$$b_{ik}^{(j)} = p_{ij} u_{ik}.$$

Сведя задачу к игре, мы можем теперь для выбора оптимальной стратегии применить принципы выбора стратегий для игр против природы [29,30]. В настоящее время наиболее употребительными являются минимальный критерий, критерий минимального сожаления, критерий Гурвица, принцип недостаточного основания. Применяя, например, минимаксный критерий, мы приходим к следующим выражениям:

$$\max_i \sum_j p_{ij} u_{ik} = \min_{\{k_1, k_2, \dots, k_m\}}, \quad (2.1.2)$$

если мы действуем согласно первой точке зрения, и

$$\max_i p_{ij} u_{ik} = \min_k, \quad (2.1.3)$$

если мы действуем согласно второй точки зрения. Формулу (2.1.2) мы будем называть первым минимаксным критерием (I м.м.к.). Он подробно исследован, и поэтому мы его изучать не будем.

Формула (2.1.3) является новым критерием выбора решений, который мы будем называть вторым минимаксным критерием. Именно его мы и будем исследовать ниже.

Отметим прежде, что в непрерывном случае эти критерии принимают вид

$$\max_s \int u(A, s) p(x|s) dx = \min_{A(x)} \quad (2.1.4)$$

для I м.м.к. и

$$\max_s u(A, s) p(x/s) = \min_A, \quad (2.1.5)$$

где $u(A, s)$ — функция потерь, а $p(x/s)$ — плотность условной вероятности для приема x , если посылался сигнал s .

Смысл II м.м.к. можно пояснить несколькими путями. Ниже приводятся некоторые из них.

1. Можно установить связь между II м.м.к. и принципом максимума правдоподобия. Согласно этому принципу, если нам известны $u(A/s)$ и $p(x/s)$, мы должны поступать следующим образом: сначала найти наиболее „правдоподобный“ сигнал s_0 , т. е. решить уравнение

$$p(x/s) = \max_s, \quad (2.1.6)$$

а затем выбрать действие A так, чтобы для наиболее правдоподобного сигнала s_0 потери были минимальны

$$u(A/s) = \min_A. \quad (2.1.7)$$

Сравнивая (2.1.6) и (2.1.7) с (2.1.3), мы видим, что II м.м.к. обобщает принцип максимального правдоподобия, объединяя (2.1.6) и (2.1.7) в одной формуле (2.1.3). Однако заметим, что формула (2.1.3) приводит, вообще говоря, к иным решениям, нежели формулы (2.1.6) и (2.1.7), взятые отдельно.

2. Для вывода II м.м.к. можно рассуждать следующим образом: если бы мы не знали $p(x/s)$, то для выбора действия A наиболее естественным было бы использование принципа минимакса

$$\max_s u(A, s) = \min_A. \quad (2.1.8)$$

Но если мы знаем $p(x/s)$, то мы должны как-то учесть это. Наиболее естественным представляется „взвешивание“ потерь $u(A, s)$ величиной $p(x/s)$, т. е. „правдоподобием“ сигнала s . После этого мы сразу получаем II м.м.к.

$$\max_s u(A, s) p(x/s) = \min_A. \quad (2.1.9)$$

3. Рассмотрим более внимательно формулу для I м.м.к.

$$\max_i \sum_j p_{ij} u_{ik_j} = \min_{\{k_j\}} \quad (2.1.10)$$

Мы выбираем такие действия $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, чтобы в наихудшем случае наши потери были минимальны. Сами же потери определяются выражением

$$b_{ii} = \sum_j p_{ij} u_{ik_j}, \quad (2.1.11)$$

т. е. средним значением потерь u_{ik_j} по всевозможным значениям j . Но что означает пользование средним значением для определения относительных потерь?

Для выяснения этого вопроса вспомним закон больших чисел и теорему Чебышева [31]. Вообще говоря, наши потери являются случайными величинами. И лишь в том случае, если наша игра повторяется очень большое число раз, среднее арифметическое наших потерь при посылке i -го сигнала будет сходиться к величине b_{ii} . Поэтому можно сказать, что I м.м.к. имеет смысл для тех случаев, когда игра повторяется очень большое (теоретически бесконечное) число раз. В этом случае, если игра играется только один раз, вряд ли имеет смысл рассчитывать на среднее значение, так как никакой уверенности в том, что мы понесем именно средние потери, у нас нет. В этом случае надо пользоваться каким-то другим критерием; можно, например, из суммы, определяющей b_{ii} , брать отдельные слагаемые и требовать не минимакса b_{ii} , а минимакса каждого слагаемого в отдельности, т. е. не минимакса потерь для очень большого числа партий игры, а минимакса потерь для каждой партии. Это опять приводит нас к II м.м.к.

Сделаем еще несколько замечаний относительно II м.м.к.

1. Мы видим, что когда априорное распределение вероятностей на пространстве сигналов неизвестно, мы получим два различных варианта минимаксного критерия в зависимости от того, на какой точке зрения мы стояли. Оказывается, что если нам известно априорное распределение вероятностей $p(s)$ на пространстве сигналов, т. е. в случае байесовских решений, обе точки зрения приводят к одинаковому результату. Действительно, мы получаем тогда следующее уравнение (для непрерывного случая):

$$\iint u(A, s)p(x|s)p(s)dxds = \min_{A(x)} \quad (2.1.12)$$

по первой точке зрения и

$$\int u(A, s)p(x|s)p(s)ds = \min_A \quad (2.1.13)$$

по второй точке зрения. Однако эти уравнения имеют одинаковые решения, что проще всего (хотя и не самым строгим образом) показать, приравнявая нулю вариацию по $A(x)$ от первого уравнения и производную по A от второго. В обоих случаях мы придем тогда к одному и тому же уравнению

$$\int u'_A(A, s)p(x|s)p(s)ds = 0. \quad (2.1.14)$$

2. II м.м.к. гораздо проще I м.м.к. в математическом отношении. Если I м.м.к. приводит к уравнениям вида

$$\max_a \int F(x, y(x), a)dx = \min_{y(x)}, \quad (2.1.15)$$

для которых не существует разработанных методов решения, то II м.м.к. решается обычными методами дифференциального исчисления.

3. Идеи, близкие к изложенным выше, были высказаны в [32]. Рассмотрим применение II м.м.к. к проблеме обнаружения в шумах сигнала с неизвестными параметрами. Пространство сигналов в этом случае состоит из нулевого сигнала s_0 (если никакого сигнала не посылается) и из сигналов $s(\alpha)$, где α — неизвестные параметры.

Наблюдатель может принимать одно из двух решений: считать, что сигнал был послан (A_1) или что сигнал не посылался (A_0). При обнаружении сигналов возможны два рода ошибок: ошибка ложной тревоги, когда принимается решение о том, что сигнал был послан, хотя в действительности он не посылался, и ошибка ложного спокойствия, когда принимается решение о том, что сигнал не посылался, хотя в действительности он был послан. Будем считать, что при ошибке ложной тревоги наблюдатель несет потери ω_1 , при ошибке ложного спокойствия он несет потери ω_2 , а в случае правильного решения он никаких потерь не несет. Тогда II м.м.к. приводит к следующему уравнению:

$$\max_{s_0, s(\alpha)} \left[\frac{u(A, s_0)p(x/s_0)}{u(A, s(\alpha))p(x/s(\alpha))} \right] = \min_{A_0, A_1} \quad (2.1.16)$$

где x — принимаемый сигнал и

$$u(A_1, s_0) = \begin{cases} 0, & A = A_0; \\ \omega_1, & A = A_1; \end{cases}$$

$$u(A_1, s(\alpha)) = \begin{cases} \omega_2, & A = A_0; \\ 0, & A = A_1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\max_{s_0, s(\alpha)} \left[\frac{u(A_0, s_0)p(x/s_0)}{u(A_0/s(\alpha))p(x/s(\alpha))} \right] = \omega_2 \max_{s(\alpha)} p(x/s(\alpha));$$

$$\max_{s_0, s(\alpha)} \left[\frac{u(A_1, s_0)p(x/s_0)}{u(A_1/s(\alpha))p(x/s(\alpha))} \right] = \omega_1 p(x/s_0) \quad \text{и}$$

(2.1.16) принимает вид

$$\left[\frac{\omega_1 p(x/s_0)}{\omega_2 \max_{s(\alpha)} p(x/s(\alpha))} \right] A_1 = \min_{A_0, A_1} \quad (2.1.17)$$

Значит, если

$$\omega_1 p(x/s_0) > \omega_2 \cdot \max_{s(\alpha)} p(x/s(\alpha)), \quad (2.1.18)$$

то следует принимать решение A_0 , т. е. считать, что сигнал не посылается, а при

$$\omega_1 \cdot p(x/s_0) < \omega_2 \cdot \max_{s(\alpha)} p(x/s(\alpha)) \quad (2.1.19)$$

следует принимать решение A_1 , т. е. считать, что сигнал был послан.

(2.1.18) и (2.1.19) показывают, что поверхность, разделяющая области, в которых принимаются решения о наличии и отсутствии сигнала, определяется уравнением

$$\max_{\alpha} \frac{p(x/s(\alpha))}{p(x/s_0)} = \frac{\omega_1}{\omega_0}. \quad (2.1.20)$$

Эта формула представляет широко известное обобщенное отношение правдоподобия. Однако в большин-

стве работ обобщенное отношение правдоподобия дается без какого-либо обоснования и лишь исследуются его свойства. Все предыдущее изложение является попыткой дать обоснование этой формулы с позиций теории полезности и теории игр и выявить те черты оптимальности, которые в нем скрыты.

Сделаем еще 2 замечания относительно формулы (2.1.20).

1. Уравнение обобщенного отношения правдоподобия имеет наглядный геометрический смысл. Назовем поверхность, определяемую уравнением

$$\Phi(x, \alpha) = \frac{p(x/s(\alpha))}{p(x/s_0)} - \frac{\omega_1}{\omega_2} = 0, \quad (2.1.21)$$

поверхностью отношения правдоподобия. Если параметр α меняется непрерывно, то (2.1.21) можно записать в виде

$$\begin{cases} \Phi(x, \alpha) = 0; \\ \Phi'_\alpha(x, \alpha) = 0. \end{cases} \quad (2.1.22)$$

Как известно из дифференциальной геометрии, (2.1.21) определяет поверхность, являющуюся огибающей поверхностей (2.1.22). Таким образом, поверхность, разделяющая области принятия решения о наличии и отсутствии сигнала, является огибающей поверхностей отношения правдоподобия.

2. Уравнению

$$\frac{\max_{\alpha} p(x/s(\alpha))}{p(x/s_0)} > \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

можно придать следующий смысл: сначала по методу максимального правдоподобия находят оценки $\hat{\alpha}$ параметров α

$$\max_{\alpha} p(x/s(\alpha)) = p(x/s(\hat{\alpha})),$$

а затем проверяется по отношению правдоподобия гипотеза о наличии или отсутствии сигнала, но вместо неизвестных параметров ставятся их оценки

$$\frac{p(x/s(\hat{\alpha}))}{p(x/s_0)} > \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Эта интерпретация обобщенного отношения правдоподобия указывает еще один путь построения субоптимальных систем обнаружения сигналов. Он состоит в том, чтобы оценивать параметры α не по методу максимального правдоподобия, а каким-либо другим методом, например методом наименьших квадратов или методом моментов, а затем пользоваться отношением правдоподобия, подставляя вместо параметров их оценки. Если метод оценки параметров будет достаточно эффективен, то потеря оптимальности при этом будет невелика.

§. 2. Субоптимальные алгоритмы обнаружения оптических локационных сигналов

Перейдем теперь к построению субоптимальных систем обнаружения пачки из k независимо флуктуирующих импульсов оптического излучения. Математически задача выглядит следующим образом: на фоне пуассоновского потока фотоэлектронов постоянной интенсивности λ_0 могут появиться k импульсов полезного сигнала, дающие пуассоновские потоки переменной интенсивности $\rho_s \mu(t)$, где $\mu(t)$ — неслучайная функция, полагаемая известной, а $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ — случайные величины с плотностью вероятностей

$$p(\rho_s) = \frac{\rho_s^{\nu-1} \cdot \nu^\nu}{\rho_0^\nu \Gamma(\nu)} e^{-\frac{\rho_s \nu}{\rho_0}}. \quad (2.2.1)$$

Для однозначного определения ρ_s будем нормировать $\mu(t)$ таким образом, чтобы $0 \leq \mu(t) \leq 1$ и $\max_t \mu(t) = 1$.

Наблюдаемыми величинами являются моменты появления фотоэлектронов t_i , однако с математической точки зрения работать с величинами t_i очень сложно. Поэтому для теоретического исследования мы поступим следующим образом: разобьем весь интервал наблюдения на отрезки длиной Δt и через n_{ij} обозначим число фотоэлек-

тронов на i -м участке j -го импульса. При $\Delta t \rightarrow 0$ в силу ординарности потока фотоэлектронов величины n_{ij} несут нам ту же информацию, что и величины t_i , и алгоритмы, основанные на величинах n_{ij} , переходят в алгоритмы, основанные на величинах t_i .

Если сигнал отсутствует, то распределение вероятностей для величин n_{ij} имеет вид

$$p_0(\{n_{ij}\}) = \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^M \frac{(\lambda_0 \Delta t)^{n_{ij}}}{n_{ij}!} e^{-\lambda_0 \Delta t}. \quad (2.2.2)$$

При наличии полезного сигнала условное (при фиксированных $p_1, \dots, p_k$) распределение вероятностей для n_{ij} имеет вид

$$p_1(\{n_{ij}\} | \{p_j\}) = \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^M \frac{[(\lambda_0 + p_j \mu_{ij}) \Delta t]^{n_{ij}}}{n_{ij}!} e^{-(\lambda_0 + p_j \mu_{ij}) \Delta t}, \quad (2.2.3)$$

где

$$\mu_{ij} = \mu(t_i - t_j).$$

Для построения систем обнаружения можно идти двумя путями.

1 Первый путь состоит в том, что находится безусловное распределение вероятностей величин n_{ij} и на его основе строится отношение правдоподобия. Этот путь приводит к оптимальным системам обнаружения сигналов.

2 Второй путь состоит в том, чтобы считать распределение вероятностей для величин $p_1, \dots, p_k$ неизвестным и сами величины $p_1, \dots, p_k$ — неизвестными параметрами, а также применять для построения системы обнаружения критерии, выведенные для случая обнаружения сигналов при наличии неизвестных параметров.

Очевидно, что таким путем мы получаем субоптимальные системы обнаружения сигналов, так как сознательно выбрасываем часть известной нам информации (распределение вероятностей для величин p_j), однако полученные таким путем схемы оказываются, во-первых, проще оптимальных схем и, во-вторых, лишь немного уступают оптимальным по своей эффективности.

Мы начнем наше рассмотрение именно со второго пути, т. е. с построения субоптимальных схем.

Прежде чем синтезировать сами схемы обнаружения, рассмотрим вопрос о порядке величин некоторых параметров, которые будут встречаться у нас в дальнейшем.

Отметим сначала, что обнаружению полезного сигнала мешают не сами шумовые фотоэлектроны, а флуктуации числа шумовых фотоэлектронов. Поэтому мешающее действие шума оценивается величиной $\sqrt{\lambda_0 T}$, т. е. среднеквадратичным отклонением числа шумовых фотоэлектронов от среднего значения на интервале длительности импульса T .

Далее основные ошибки возникают от замираний полезного сигнала, так как именно тогда, когда вследствие замирания принимаемый сигнал слаб, будет велика и вероятность пропуска сигнала.

Чтобы пояснить дальнейшие выводы, рассмотрим один численный пример. Пусть среднее число шумовых фотоэлектронов $\lambda_0 T$ на интервале длительности импульса равно 1000. Спрашивается, каково должно быть среднее число сигнальных фотоэлектронов, чтобы сигнал был обнаружен с достаточно большой вероятностью?

При $\lambda_0 T = 1000$ $\sqrt{\lambda_0 T} \approx 30$, поэтому по правилу Зс число шумовых фотоэлектронов с очень большой вероятностью ($\sim 0,997$) будет лежать в интервале $\lambda_0 T \pm 3\sqrt{\lambda_0 T}$, т. е. примерно в интервале $[-900, +900]$.

Пусть появилось 20 сигнальных фотоэлектронов. Очевидно, что вероятность пропуска сигнала при этом будет велика, так как $20 < \sqrt{\lambda_0 T}$, и это число фотоэлектронов будет воспринято просто как флуктуация числа шумовых фотоэлектронов.

Если же число сигнальных фотоэлектронов будет равно 200, то сигнал будет почти наверняка обнаружен, так как отклонение числа фотоэлектронов от среднего значения числа шумовых фотоэлектронов будет велико.

Теперь отметим, что в этом последнем случае отношение числа сигнальных фотоэлектронов к среднему числу шумовых фотоэлектронов $\frac{n_c}{\lambda_0 T} = \frac{200}{1000} < 1$ бу-

дет малым, а отношение $\frac{n_c}{\sqrt{\lambda_0 T}}$ большим.

В общем случае дело обстоит следующим образом.

Пусть $\lambda_0 T \gg 1$, что может иметь место при сильной фоновой засветке, например при работе оптического локатора в дневных условиях. Тогда среднее число сигнальных фотоэлектронов при фиксированной амплитуде импульса будет $\rho_s T$, и в той области, где велика вероятность пропуска сигнала, отношение $\frac{\rho_s T}{\lambda_0 T} = \frac{\rho_s}{\lambda_0}$ будет мало.

Таким образом, для достаточно надежного обнаружения полезного сигнала необходимо, чтобы было велико отношение $\frac{\rho_0 T}{\sqrt{\lambda_0 T}}$, т. е. отношение среднего числа полезных фотоэлектронов к среднеквадратическому отклонению числа шумовых электронов, в области же, где вероятность пропуска сигнала велика, выполняется соотношение $\rho_s \lambda_0 \ll 1$.

Случай сигнальных шумов $\lambda_0 T \gg 1$ наиболее интересен с теоретической точки зрения, так как здесь есть возможности для оптимизации системы обнаружения. В случае слабых шумов ($\lambda_0 T$ мало) достаточно эффективным средством обнаружения является счетчик числа фотоэлектронов, оптимальные системы обнаружения дают очень маленький выигрыш по сравнению с этим простейшим устройством. Поэтому в данной главе мы основное внимание уделим именно случаю сильных шумов $\lambda_0 T \gg 1$.

Перейдем теперь к построению субоптимальной системы обнаружения по обобщенному отношению правдоподобия. Находя максимум $p(\{n_{ij}\}/\{\rho_j\})$, мы получим следующее уравнение для наиболее правдоподобных значений $\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_k$ величин $\rho_1, \dots, \rho_k$

$$\sum_{i=1}^M \frac{n_{ij} \hat{\mu}_i}{\lambda_0 + \rho_i \hat{\mu}_{ij}} = \sum_{i=1}^M \hat{\mu}_{ij} \Delta t \hat{\rho}_i \geq 0. \quad (2.2.3)$$

Логарифм отношения правдоподобия при условии, что ρ_j оценивается по формуле (2.2.3), принимает вид

$$z = \ln \Lambda = \sum_{j=1}^k z_j; \quad z_j = \sum_{i=1}^M n_{ij} \ln \left(1 + \frac{\hat{\rho}_j}{\lambda_0} \mu_{ij} \right) - \hat{\rho}_j \sum_{i=1}^M \mu_{ij} \Delta t, \quad (2.2.4)$$

и (согласно общим принципам проверки статистических гипотез) обнаруживаемый сигнал следует считать присутствующим, если $z > C$, где C — пороговое значение, выбираемое из допустимой вероятности ошибки типа ложной тревоги. При $z < C$ следует принимать решение об отсутствии сигнала.

Перейдем теперь к упрощению алгоритма обнаружения, описываемого формулами (2.2.3) и (2.2.4).

Прежде всего отметим, что наиболее важна правильная обработка сигнала в той области, где велика вероятность его пропуска, так как именно эта область ответственна за ошибки обнаружения. В той области, где принимаемый сигнал сильный и вероятность его пропуска мала, правильность обработки не играет существенной роли.

Как уже указывалось выше, в той области, где вероятность пропуска сигнала велика, выполняется соотношение $\rho_j/\lambda_0 \ll 1$. Поэтому, раскладывая $\ln(1 + \hat{\rho}_j/\lambda_0 \cdot \mu_{ij})$ в ряд Тейлора по степеням $\hat{h}_j = \hat{\rho}_j/\lambda_0$ и ограничиваясь членами с $\hat{h}_j$ в первой степени, мы получим

$$z = \sum_{j=1}^k \hat{h}_j \left(\sum_{i=1}^M n_{ij} \mu_{ij} - \lambda_0 m_j \right), \quad (2.2.5)$$

где

$$m_k = \int_0^T \mu^k(t) dt. \quad (2.2.6)$$

Следующий шаг к упрощению схемы обнаружения мы сделаем, оценивая величины $\rho_1, \dots, \rho_k$ не по методу максимального правдоподобия, а по методу наименьших квадратов. Согласно этому методу [39] оценки величин ρ_j следует искать из условия

$$\sum_i^M (n_{ij} - \lambda_0 \Delta t - \hat{\rho}_j \mu_{ij} \Delta t)^2 = \min_{\hat{\rho}_j > 0}. \quad (2.2.7)$$

Отбрасывая условие неотрицательности величины ρ_j и пользуясь для нахождения минимума обычными правилами дифференциального исчисления, получим

$$\hat{\rho}_j = \frac{\sum_{i=1}^M n_{ij} \mu_{ij} - \lambda_0 m_1}{m_2}. \quad (2.2.8)$$

Рассмотрим свойства полученной оценки.

1) Учитывая, что $M[n_{ij}] = (\lambda_0 + \rho_j \mu_{ij}) \Delta t$, получим

$$M[\hat{\rho}_j] = \rho_j,$$

т. е. оценка параметра ρ_j несмещенная.

2) Учитывая, что $D[n_{ij}] = M[n_{ij}]$, и находя дисперсию оценки $\hat{\rho}_j$, получим

$$D[\hat{\rho}_j] = \frac{\lambda_0 m_2 + \rho_j m_3}{m_2^2}.$$

3) Найдем эффективность полученной оценки. Нижняя граница для дисперсии оценки величины ρ_j найдется из неравенства информации

$$D_{\min}(\rho_j) = \frac{1}{I_{\rho_j}},$$

где I_{ρ_j} — количество информации по Фишеру о величине ρ_j ;

$$I_{\rho_j} = -M \left\{ \frac{\partial^2 \ln p_1(\{n_{ij}\} / \{\rho_j\})}{\partial \rho_j^2} \right\}.$$

Находя вторую производную от логарифма выражения (2.2.3), получим

$$I_{\rho_j} = M \left\{ \sum_{i=1}^M n_{ij} \frac{\mu_{ij}^2}{(\lambda_0 + \rho_j \mu_{ij})^2} \right\} = \int_0^T \frac{\mu^2(t)}{\lambda_0 + \rho_j \mu(t)} dt.$$

В силу этого эффективность оценки величины ρ_j по методу наименьших квадратов определится как

$$e_j = \frac{D_{\min}(\rho_j)}{D[\hat{\rho}_j]} =$$

$$= \frac{\left[\int_0^T \mu^2(t) dt \right]^2}{\left[\int_0^T (1+h\mu(t))\mu^2(t) dt \right] \int_0^T \frac{\mu^2(t)}{1+h\mu(t)} dt}. \quad (2.2.9)$$

Рассмотрим далее свойства величины e_j как функции h_j , отбрасывая для кратности индекс j .

4) При $h \rightarrow 1, e \rightarrow 1$, т. е. при малых ρ_s, λ_0 эффективность e по методу наименьших квадратов совпадает с эффективностью оценки ρ по методу максимального правдоподобия.

5) $e(h)$ монотонно убывает с ростом h . Действительно, дифференцируя m_2^2/e по h , получим

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{m_2^2}{e} \right) = \int_0^T \mu^3(t) dt \cdot \int_0^T \frac{\mu^2(t) dt}{1+h\mu(t)} - \int_0^T \frac{\mu^2(t) dt}{(1+h\mu(t))^2} \cdot \int_0^T (1+h\mu(t))\mu^2(t) dt.$$

Так как функции $\xi = \frac{1}{(1+h\mu)^2}$ и $\eta = \frac{1+h\mu}{\mu}$ при возрастании μ убывают, то они одинаково упорядочены [34]. Согласно неравенству Чебышева [34] для одинаково упорядоченных функций и любой положительной функции $p(t)$ имеем

$$\int \xi p dt \cdot \int \eta p dt \leq \int \xi \eta p dt \int p dt.$$

Взяв в качестве весовой функции $p(t) = \mu^3(t)$, получим

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{m_2^2}{e} \right) \geq 0 \text{ или } \frac{de}{dh} \leq 0,$$

т. е. эффективность оценки ρ по методу наименьших квадратов монотонно убывает с ростом h .

6) Найдем нижнюю границу для величины e . Выберем в качестве усредняемой по некоторому весу величину $x = (1+h\mu(t))$, а в качестве весовой функции

$$p(x) dx = \frac{\mu^2(t) dt}{\int \mu^2(t) dt} \geq 0, \quad \int_1^{1+h} p(x) dx = 1.$$

Поскольку мы нормировали $\mu(t)$ так, что она изменяется в интервале $[0, 1]$, то x изменяется в интервале $(1, 1+h)$, и выражение для $1/e$ можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{e} = \int_1^{1+h} x p(x) dx \cdot \int_1^{1+h} \frac{p(x)}{x} dx = M[x] \cdot M\left[\frac{1}{x}\right]. \quad (2.2.10)$$

Рассмотрим произвольную дискретную величину ξ , значения которой лежат в интервале $(1, 1+h)$. Если эту величину усреднять с некоторым весом λ , то получим

$$M[\xi] \cdot M\left[\frac{1}{\xi}\right] = (\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_s \xi_s) \left(\frac{\lambda_1}{\xi_1} + \frac{\lambda_2}{\xi_2} + \dots + \frac{\lambda_s}{\xi_s} \right).$$

Так как все λ_i и ξ_i положительны, то по каждой переменной ξ_i зависимость имеет вид $\alpha + \beta \xi_i + \frac{\gamma}{\xi_i}$ с положительными α, β и γ . Эта функция принимает свои максимальные значения на границах интервала для ξ , поэтому максимальное значение $M[\xi] \cdot M\left[\frac{1}{\xi}\right]$ достигается тогда, когда вся весовая функция сосредоточена на границах интервала, т. е. $p(\xi)$ —весовая функция для величины ξ —имеет вид

$$p(\xi) = \lambda \delta(\xi - 1) + (1 - \lambda) \delta(\xi - (1 + h)),$$

так как $\xi \in (1, 1+h)$. Находя для этой весовой функции $M[\xi] \cdot M\left[\frac{1}{\xi}\right]$ и минимизируя его по λ , получим

$$M[\xi] \cdot M\left[\frac{1}{\xi}\right] \leq \frac{(2+h)^2}{4(1+h)}. \quad [(2.2.11)]$$

Сравнивая (2.2.10) с (2.2.11), получим окончательно

$$\frac{4(1+h)}{(2+h)^2} \leq e \leq 1. \quad (2.2.12)$$

Отметим, что полученная нижняя граница для эффективности оценки величины ρ не является точной нижней границей. Для реально встречающихся сигналов e может быть гораздо больше величины, опреде-

ляемой неравенством (2.2.12). Для примера на рис. 2.2.1 приведены графики $e_{\min}$ и e трапецеидального импульса

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau}; & 0 \leq t \leq \tau_1; \\ 1; & \tau_1 \leq t \leq T - \tau_2; \\ \frac{T-t}{\tau}; & T - \tau_2 \leq t \leq T \end{cases}$$

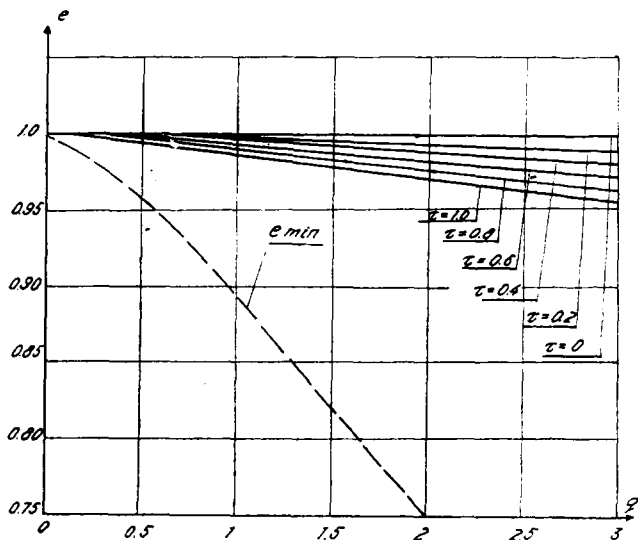


Рис. 2.2.1

(для различных $\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\rho}$), подтверждающие сказанное выше.

Отметим, что эффективность оценки ρ по методу наименьших квадратов достаточно высокая. Так, даже для $h=1$ $e_{\min}=0,889$, т. е. потеря эффективности по сравнению с методом максимального правдоподобия не превышает 11,1%. Для реальных сигналов эта потеря будет еще меньше.

Таким образом, без особого ухудшения характе-

ристик системы обнаружения мы можем вместо уравнения (2.2.3) пользоваться выражением (2.2.7). Тогда, вводя величины

$$H_s = \frac{\left(\sum_{i=1}^M n_{is} \mu_{is} - \lambda_0 m_1 \right)}{\sqrt{\lambda_0 m_2}}, \quad (2.2.13)$$

мы получим, что без учета положительности ρ_s алгоритм обнаружения сводится к вычислению

$$z = \sum_{s=1}^k H_s^2 \quad (2.2.14)$$

и последующему сравнению этой величины с некоторым порогом C . Будем называть эту схему квадратичной схемой обнаружения; с технической точки зрения, она состоит из линейного фильтра с весовой характеристикой $\mu(t)$, квадратора и порогового устройства.

Если учесть, что ρ_s не может быть отрицательным, то выражение для z примет вид

$$z = \sum_{s=1}^k H_s^2 \cdot \theta(H_s); \quad (2.2.15)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (2.2.16)$$

Эту схему мы будем называть θ -квадратичной схемой обнаружения.

§ 3. Исследование квадратичной схемы обнаружения

Итак, начнем наше рассмотрение со схемы, алгоритм работы которой заключается в сравнении с порогом C величины

$$z = \sum_{s=1}^k H_s^2, \quad H_s = \frac{\sum_{i=1}^M n_{is} \mu_{is} - \lambda_0 m_1}{\sqrt{\lambda_0 m_2}}. \quad (2.3.1)$$

Пусть полезный сигнал отсутствует и на входе системы обнаружения имеется только шум—пуассоновский поток фотоэлектронов интенсивностью λ_0 . В случае сильных шумов, когда $\lambda_0 T$ велико, величину H_s можно считать нормальной, так как распределение Пуассона очень быстро сходится к нормальному. Поскольку в этом случае $M[n_{is}] = D[n_{is}] = \lambda_0 \Delta t$, то

$$M[H_s] = 0; D[H_s] = 1; \quad (2.3.2)$$

H_s распределено нормально $N(0,1)$. Поскольку все H_s независимы, то в отсутствие полезного сигнала z подчиняется χ^2 -распределению с k степенями свободы

$$p_0(z) = f_k(z) = \frac{z^{\frac{k-2}{2}} e^{-\frac{z}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})}. \quad (2.3.3)$$

Из условия, чтобы при отсутствии полезного сигнала вероятность неравенства ($z > C$) была равна вероятности ложной тревоги α , находится значение порога C . Для наиболее употребительных α значения C приведены в табл. 2.3.1.

Т а б л и ц а 2.3.1

k	α				
	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
1	6,635	10,823	15,137	19,511	23,928
2	9,212	13,816	18,421	23,025	27,631
3	11,345	16,266	21,108	25,902	30,665
4	13,277	18,466	23,513	28,473	33,376
5	15,086	20,515	25,745	30,856	35,885
6	16,812	22,458	27,856	33,106	38,248

Рассмотрим теперь, какие у нас произойдут изменения при наличии полезного сигнала. Если мы имеем k импульсов с амплитудами $\rho_1, \dots, \rho_k$, то условное распределение величин H_s при условии, что ρ_s фиксированы,

ровано, по-прежнему будет нормальным. Параметры его, однако, будут другими. Так как в этом случае

$$M[n_{ts}] = D[n_{ts}] = (\lambda_0 + \rho_s \mu_{ts}) \Delta t, \text{ то}$$

$$M\{H_s/\rho_s\} = \frac{\rho_s \sqrt{m_2}}{\sqrt{\lambda_0}} = q_s. \quad (2.3.4)$$

Именно об этой величине шла речь в § 2, когда разбирался вопрос о возможных значениях параметров. Величина q_s имеет распределение

$$p(q_s) = \frac{q_s^{\nu-1} \cdot \nu^{\nu} \cdot e^{-\frac{q_s^{\nu}}{q_0}}}{q_0^{\nu} \Gamma(\nu)}, \quad (2.3.5)$$

где $q_0 = \rho_0 \sqrt{m_2} / \sqrt{\lambda_0}$, величину q_0 мы будем называть в дальнейшем отношением сигнала к шуму.

Находя условную дисперсию величины H_s , получим

$$D[H_s/\rho_s] = 1 + \frac{\rho_s}{\lambda_0} \cdot \frac{m_3}{m_2}. \quad (2.3.6)$$

Так как в наиболее интересной и важной области больших вероятностей пропуска сигнала $\frac{\rho_s}{\lambda_0} \ll 1$, то приближенно можно считать

$$D[H_s/\rho_s] = 1. \quad (2.3.7)$$

Таким образом, условное распределение для H_s есть $N(q_s, 1)$, поэтому величина z имеет условное (при фиксированных $q_1, \dots, q_k$) нецентральное χ^2 -распределение

$$p_1(z/q_1, \dots, q_k) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\lambda} \right)^{\frac{k-2}{4}} e^{-\frac{z+\lambda}{2}} \cdot I_{\frac{k-2}{2}}(\sqrt{z\lambda}) \quad (2.3.8)$$

с параметром нецентральности

$$\lambda = q_1^2 + \dots + q_k^2. \quad (2.3.9)$$

Безусловная плотность вероятностей для величины z имеет вид

$$p_1(z) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\lambda} \right)^{\frac{k-2}{4}} e^{-\frac{z+\lambda}{2}} I_{\frac{k-2}{2}}(\sqrt{z\lambda}) \prod_{i=1}^k \frac{q_i^{\nu-1} \nu^\nu}{q_0^\nu \Gamma(\nu)} e^{-\frac{q_i^2}{q_0}} dq_i. \quad (2.3.10)$$

Этот интеграл в явном виде через элементарные функции не выражается. Поэтому найдем выражение для $p_1(z)$ в виде ряда по обратным степеням q_0 , что удобно для практических вычислений ввиду того, что q_0 велико.

Разлагая $e^{-\frac{1}{q_0} \sum_{i=1}^k q_i^\nu}$ в ряд Тейлора, мы получим

$$p_1(z) = \frac{\nu^{k\nu} z^{\frac{k-2}{4}}}{2q_0^{k\nu} \Gamma^k(\nu)} e^{-\frac{z}{2}} \sum_{p=0}^\infty (-1)^p \frac{\nu^p}{p! q_0^p} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{2^{\frac{k-2}{4}}} I_{\frac{k-2}{2}}(\sqrt{z\lambda}) \times \\ \times \prod_{i=1}^k q_i^{\nu-1} (\sum_i q_i^\nu)^p dq_i. \quad (2.3.11)$$

Перейдем в интеграле к многомерным полярным координатам:

$$\begin{aligned} q_1 &= r \cdot \cos \varphi_1; \\ q_2 &= r \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2; \\ &\dots \dots \dots \\ q_{k-1} &= r \cdot \cos \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_{k-2} \cdot \cos \varphi_{k-1}; \\ q_k &= r \cdot \cos \varphi_1 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_{k-2} \cdot \sin \varphi_{k-1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$p_1(z) = \frac{\nu^{k\nu} z^{\frac{k-2}{4}}}{2q_0^{k\nu} \Gamma^k(\nu)} e^{-\frac{z}{2}} \sum_{p=0}^\infty (-1)^p \frac{\nu^p C_{k,p}(\nu)}{q_0^p \cdot p!} \int_0^\infty r^{k\nu - \frac{k}{2} + p} e^{-r^2} I_{\frac{k-2}{2}}(r\sqrt{z}) dr, \quad (2.3.12)$$

где коэффициент $C_{k,p}(\nu)$ определяется выражением

$$C_{k,p}(\nu) = \int_0^{\pi/2} \dots \int_0^{\pi/2} j(\varphi) [\Sigma(\varphi)]^p \prod_{i=1}^{\nu-1} (\varphi) d\varphi.$$

Здесь $j(\varphi)$ — угловая часть якобиана перехода от декартовых к полярным координатам; $\Sigma(\varphi)$ — завися-

щая от углов часть, остающаяся от $\sum q_i$, и $\Pi_i^{-1}(\varphi)$ — зависящая от углов часть, остающаяся от Πq_i .

Интеграл, стоящий в (2.3.12), легко вычисляется [35]

$$p_1(z) = \frac{2^{\frac{k(v-1)}{2}} \cdot v^{kv}}{\Gamma^k(v) q_0^{kv}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{kv+p}{2}\right) v^p}{q_0^p \cdot p! \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

$$C_{k,p}(v) z^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} {}_1F_1\left(\frac{kv+p}{2}; \frac{k}{2}; \frac{z}{2}\right), \quad (2.3.13)$$

где ${}_1F_1\left(\frac{kv+p}{2}; \frac{k}{2}; \frac{z}{2}\right)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Перейдем теперь к изложению метода, позволяющего вычислять $C_{k,p}(v)$ при любых целых k и p . Рассмотрим интеграл вида

$$I_{k,p}(v) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k)^{v-1} (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^p e^{-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^k x_l^2} \cdot dx_1 \dots dx_k. \quad (2.3.14)$$

Переходя в (2.3.14) к многомерным полярным координатам, получим

$$I_{k,p}(v) = C_{k,p}(v) \int_0^{\infty} r^{kv+p-1} e^{-\frac{r^2}{2}} dr = 2^{\frac{kv+p}{2}} \Gamma\left(\frac{kv+p}{2}\right) C_{k,p}(v). \quad (2.3.15)$$

Отсюда имеем

$$C_{k,p}(v) = \frac{I_{k,p}(v)}{2^{\frac{kv+p}{2}} \Gamma\left(\frac{kv+p}{2}\right)}. \quad (2.3.16)$$

Преимущество этой формулы перед непосредственным выражением для $C_{k,p}(v)$ заключается в том, что $I_{k,p}(v)$ легко вычисляется при целых p , хотя сложность вычислений и возрастает с ростом p и k . Например, для $p=0$

$$I_{k,0}(\nu) = \left[\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]^k = \left[2^{\frac{\nu}{2}-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right]^k, \quad (2.3.17)$$

откуда

$$C_{k,0}(\nu) = \frac{\Gamma^k\left(\frac{\nu}{2}\right)}{2^{k\nu} \Gamma\left(\frac{k\nu}{2}\right)}. \quad (2.3.18)$$

Аналогично вычисляются и остальные $C_{k,p}(\nu)$; приведем некоторые из них:

$$C_{k,1}(\nu) = \frac{k \Gamma^{k-1}\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{2^{k-1} \Gamma\left(\frac{k\nu+1}{2}\right)}; \quad (2.3.19)$$

$$C_{k,3\nu} = \frac{k \Gamma^{k-2}\left(\frac{\nu}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) + (k-1) \Gamma^2\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \right]}{2^{k-1} \Gamma\left(\frac{k\nu+2}{2}\right)}; \quad (2.3.20)$$

$$\begin{aligned} C_{k,2}(\nu) = & \frac{k \Gamma^{k-3}\left(\frac{\nu}{2}\right)}{2^{k-1} \Gamma\left(\frac{k\nu+3}{2}\right)} \left\{ \Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{\nu}{2}\right) + \right. \\ & + (k-1)(k-2) \Gamma^3\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + \\ & \left. + 3(k-1) \Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right\} \quad (2.3.20) \end{aligned}$$

и т. д.

Перейдем теперь к получению удобного для вычислений выражения для вероятности ошибки типа пропуска цели. Так как пропуск цели происходит при выполнении соотношения ($z < C$), когда на самом деле цель есть, то

$$\beta = \frac{2^{\frac{k(v-1)}{2}} \cdot v^{kv}}{q_0^{kv} \Gamma^k(v)} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{kv+p}{2}\right)}{q_0^p \cdot p! \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} C_{k,p}(v) \cdot \int_0^C z^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} {}_1F_1\left(\frac{k+p}{2}; \frac{k}{2}; \frac{z}{2}\right) dz. \quad (2.3.21)$$

Интеграл, стоящий в (2.3.21), через элементарные функции не выражается. Мы найдем его асимптотическое разложение по степеням $1/C$, удобное в силу того, что $C \gg 1$.

Преобразование Лапласа—Карсона от функции $z^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{z}{2}} \times {}_1F_1\left(\frac{k+p}{2}; \frac{k}{2}; \frac{z}{2}\right)$ есть

$$g(s) = s \int_0^{\infty} e^{-sz} \cdot z^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{z}{2}} \cdot {}_1F_1\left(\frac{k+p}{2}; \frac{k}{2}; \frac{z}{2}\right) dz =$$

$$= s \frac{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) (1+2s)^{\frac{k(v-1)+p}{2}}}{2^{\frac{kv+p}{2}} \cdot s^{\frac{kv+p}{2}}}. \quad (2.3.22)$$

Разлагая $(1+2s)^{\frac{k(v-1)+p}{2}}$ в бином Ньютона и пользуясь свойствами преобразования Лапласа—Карсона, получим

$$\begin{aligned} \int_0^C z^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} {}_1F_1\left(\frac{k+p}{2}; \frac{k}{2}; \frac{z}{2}\right) dz &\doteq \frac{g(s)}{s} \doteq \\ &\doteq \frac{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) C^{\frac{kv+p}{2}}}{2^{\frac{kv+p}{2}} \Gamma\left(\frac{kv+p}{2} + 1\right)} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{(kv+p)(kv-k+p)}{2 \cdot 1! \cdot C} + \right. \\ &\left. + \frac{(kv+p)(kv+p-2)(kv-k+p)(kv-k+p-2)}{2^2 \cdot 2! \cdot C^2} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Подставляя это асимптотическое разложение в выражение для β , окончательно получим

$$\beta = \frac{C^{\frac{kv}{2}} \cdot v^{kv}}{\Gamma^k(v) q_0^{kv}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{C^{\frac{p}{2}} \cdot v^p \cdot C_{k,p}(v)}{q_0^p \cdot p! (kv+p)} \left[1 + \frac{(kv+p)(kv-k+p)}{2 \cdot 1! \cdot C} + \frac{(kv+p)(kv+p-2)(kv-k+p)(kv-k+p-2)}{2^2 \cdot 2! \cdot C^2} + \dots \right].$$

Это выражение является достаточно удобным для

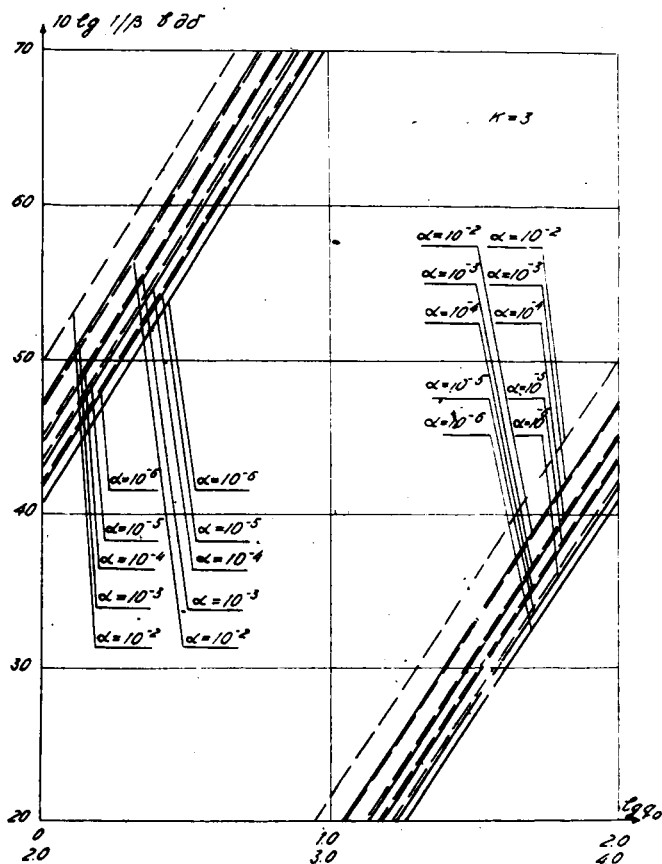


Рис. 2.3.1

численных расчетов при малых значениях β , так как им соответствуют большие пороги C , а также потому, что:

1) члены ряда, стоящего в квадратных скобках, быстро убывают;

2) основной ряд является знакопеременным, что позволяет легко оценивать погрешность от отбрасывания „хвоста“ этого ряда;

3) численные расчеты показали, что для $\beta < 10^{-2}$ (для достижения относительной погрешности в вычис-

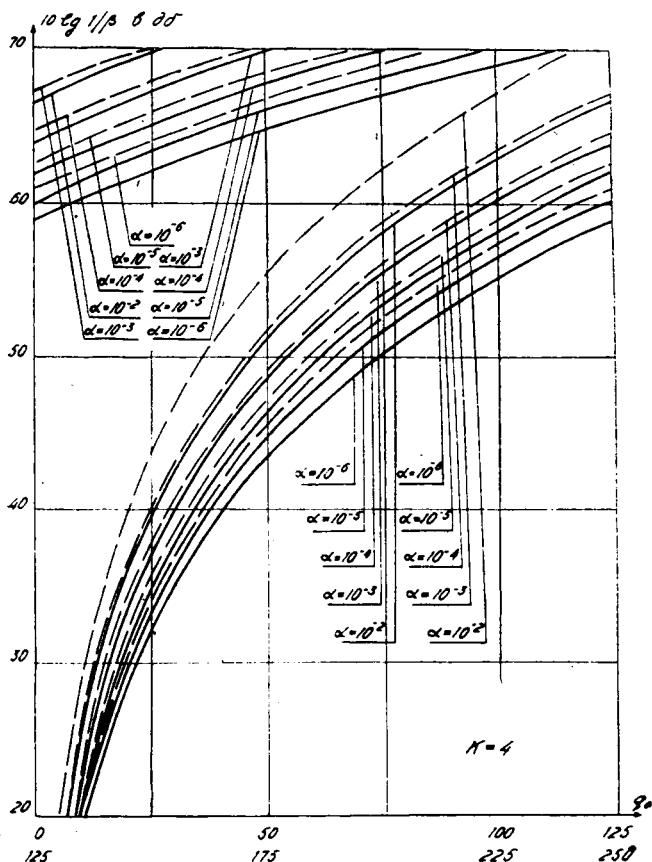


Рис. 2.3.2

лении β не выше 1%) в ряду по ρ следует оставлять $k\nu$ первых членов.

Некоторые графики для величины $10 \lg 1/\beta$ при $\nu=1$ и различных k , полученные путем численных расчетов по формуле (2.3.24), приведены на рис. 2.3.1—2.3.4.

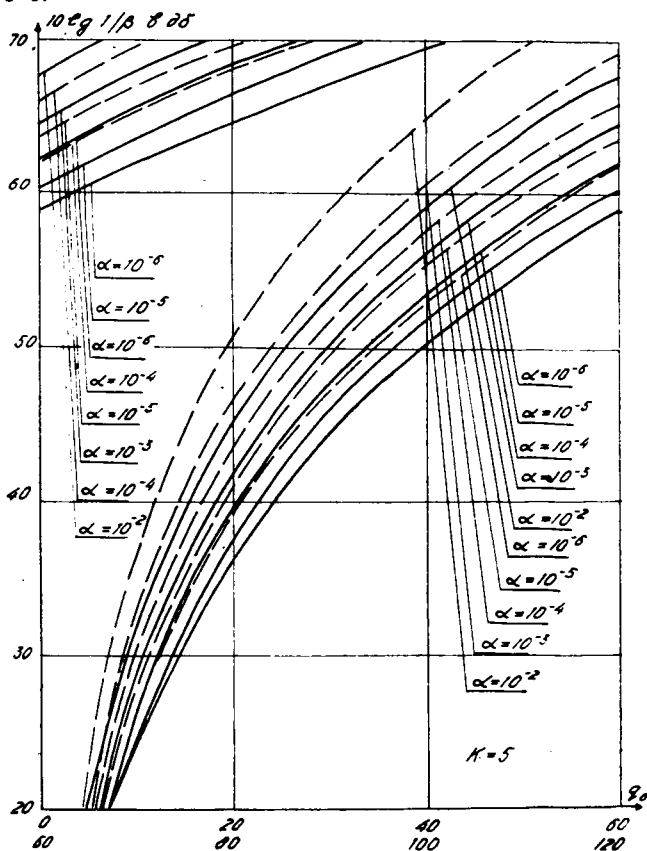


Рис. 2.3.3

Проанализируем теперь, насколько рассматриваемая нами схема хуже оптимальной схемы обнаружения оптических локационных сигналов. Точная оценка минимального значения β затруднительна, но одну из возможных нижних границ для β получить довольно легко.

Будем считать, что нам заранее точно известны возможные амплитуды приходящих импульсов $\rho_1, \dots, \rho_k$, неизвестен лишь факт их наличия или отсутствия. Очевидно, что дополнительная информация (точное

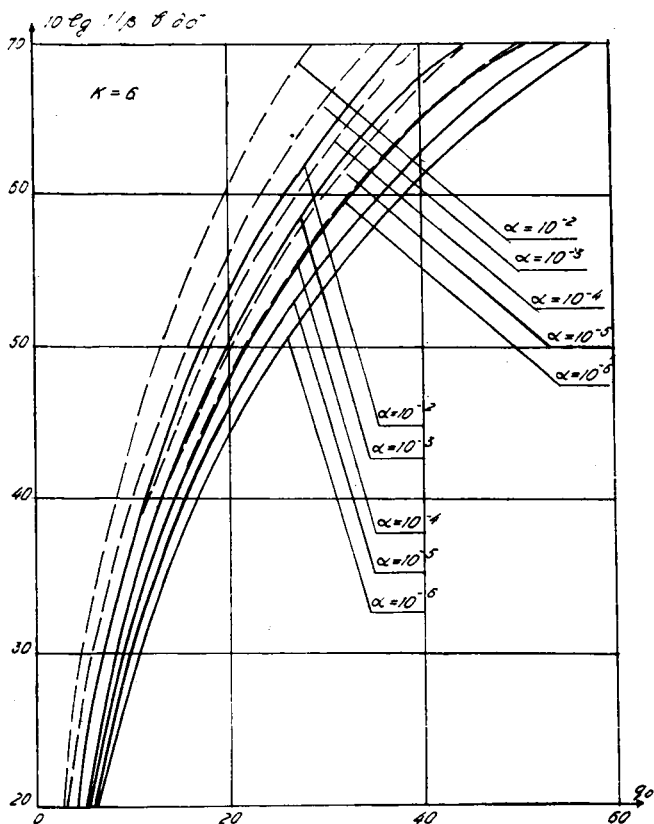


Рис. 2.3.4

знание возможных амплитуд импульсов) может лишь улучшить характеристики обнаружения. Значит, если в этих предположениях мы синтезируем оптимальную схему приема и рассчитаем для нее вероятность пропуска сигнала β_0 , то $\beta_0 \leq \beta_{\min}$, где $\beta_{\min}$ — вероятность пропуска сигнала в оптимальной схеме приема, в которой не предполагается знания амплитуд импульсов.

Что касается β_0 , то она рассчитывается довольно просто. Действительно, согласно (2.2.5) оптимальная в этом случае схема приема сводится к сравнению с порогом величины

$$z = \sum_{j=1}^k h_j \left(\sum_{i=1}^M n_{ij} x_{ij} - \lambda_0 m_1 \right), \quad (2.3.25)$$

где $h_j = \rho_{j1} \lambda_0$.

При отсутствии полезного сигнала [величина z будет приближенно нормальной с характеристиками

$$M[z] = 0; D[z] = \lambda_0 m_2 \sum_{j=1}^k h_j^2 = \sum_{j=1}^k q_j^2. \quad (2.3.26)$$

Отсюда легко получается выражение для вероятности ошибки ложной тревоги

$$\alpha = P\{z > C\} = 1 - \Phi\left(\frac{C}{\sqrt{\sum_{j=1}^k q_j^2}}\right), \quad (2.3.27)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt;$$

отсюда же следует явное выражение для порога C в решающей схеме

$$C = \sqrt{\sum_{j=1}^k q_j^2} \cdot \Psi(1 - \alpha) = \sqrt{\sum_{j=1}^k q_j^2} g_\alpha, \quad (2.3.28)$$

где $\Psi(x)$ — функция, обратная к функции $\Phi(x)$.

При наличии полезного сигнала при фиксированных $h_1, \dots, h_k$ величина z вновь будет нормальной с характеристиками

$$M[z] = \sum_{j=1}^k q_j^2, D[z] = \sum_{j=1}^k q_j^2 \left(1 + h_j \frac{m_3}{m_2} \right) \approx \sum_{j=1}^k q_j^2, \quad (2.3.29)$$

а условная (при фиксированных $h_1, \dots, h_k$) вероятность пропуска сигнала выразится как

$$\beta_0(\lambda) = P(z < C) = \Phi(g_\alpha - \sqrt{\sum_{j=1}^k q_j^2}) = \Phi(g_\alpha - \sqrt{\lambda}), \quad (2.3.30)$$

где λ — введенный выше параметр нецентральности.

Усредняя по величине $q_1, \dots, q_k$

$$\beta_0 = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Phi\left(g_\alpha - \sqrt{\sum_{j=1}^k q_j^2}\right) \prod_{j=1}^k \frac{q_j^{\nu-1} \cdot \nu^\nu}{q_0^\nu \Gamma(\nu)} e^{-\frac{q_0 \nu}{q_j}} dq_j, \quad (2.3.31)$$

разлагая $e^{-\frac{q_j \nu}{q_0}}$ в ряд Тейлора, переходя к многомерным полярным координатам и почленно интегрируя, получим

$$\beta_0 = \frac{\nu^{k\nu}}{q_0^{k\nu} \Gamma^k(\nu)} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\nu^p C_{k,p}(\nu)}{q_0^p \cdot p!} \int_0^\infty \Phi(g_\alpha - x) x^{k\nu+p-1} dx. \quad (2.3.32)$$

Входящий в это выражение интеграл может быть выражен через функции параболического цилиндра

$$\int_0^\infty \Phi(g_\alpha - x) x^{k\nu+p-1} dx = \frac{\Gamma(k\nu+p)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{g_\alpha^2}{4}} D_{-(k\nu+p+1)}\left(\frac{-g_\alpha}{\sqrt{2\pi}}\right), \quad (2.3.33)$$

но гораздо удобнее его приближенное выражение, получаемое следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Phi(g_\alpha - x) x^{k\nu+p-1} dx &= \frac{1}{k\nu+p} \int_0^\infty x^{k\nu+p} e^{-\frac{(x-g_\alpha)^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \approx \\ &\approx \frac{1}{k\nu+p} \int_{-\infty}^\infty x^{k\nu+p} e^{-\frac{(x-g_\alpha)^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{A_{k\nu+p}(g_\alpha)}{k\nu+p}. \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

При $\alpha < 10^{-2}$ точность этого приближения не хуже 0,1%; в то же время величины $A_{k\nu+p}(g_\alpha)$, представляющие собой полиномы от g_α степени $(k\nu+p)$, легко вычисляются (табл. 2.3.2).

В силу этого выражение для β_0 приобретает вид

$$\beta_0 = \frac{\nu^{k\nu}}{q_0^{k\nu} \Gamma^k(\nu)} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\nu^p (C_{k,p}(\nu) \cdot A_{k\nu+p}(g_\alpha))}{q_0^p \cdot p! (k\nu+p)}. \quad (2.3.35)$$

$k\nu+p$	$A_{k\nu+p}(z)$
1	z
2	z^2+1
3	z^3+3z
4	z^4+6z^2+3
5	z^5+10z^3+15z
6	$z^6+15z^4+45z^2+15$
7	$z^7+21z^5+105z^3+105z$
8	$z^8+28z^6+210z^4+420z^2+105$
9	$z^9+36z^7+378z^5+1260z^3+945z$
10	$z^{10}+45z^8+630z^6+3150z^4+4725z^2+945$

Графики для β_0 , рассчитанные по этой формуле для $\nu=1$ и различных k , приведены на рис. 2.3.1—2.3.4 (пунктирная линия).

В силу этого проигрыш квадратичной схемы обнаружения оптимальной схеме не превышает величины (в децибеллах)

$$G(q_0, k, \nu) = 10 \lg \frac{\beta}{\beta_0}. \quad (2.3.36)$$

Особый интерес представляет величина $G(\infty, k, \nu)$, получаемая при $q_0 \rightarrow \infty$. Оставляя в рядах (2.3.24) и (2.3.35) лишь первые слагаемые, мы получим

$$G(\infty, k, \nu) = 10 \lg \left\{ \frac{C^{\frac{k\nu}{2}}}{A_{k\nu}(g_\alpha)} \left[1 + \frac{k\nu(k\nu-1)}{2 \cdot 1! \cdot C} + \frac{k\nu(k\nu-1)(k\nu-2)}{2^2 \cdot 2! \cdot C^2} + \dots \right] \right\}. \quad (2.3.37)$$

Графики величины $G(\infty, k, \nu)$ для некоторых k и ν в зависимости от α приведены на рис. 2.3.5—2.3.7. Мы видим, что квадратичная схема обнаружения не слыш-

ком сильно проигрывает оптимальной схеме. Так, при $\nu=1$, $k=6$ этот проигрыш не превышает 7,5 дБ ($\alpha < 10^{-2}$), причем с уменьшением α он падает и при $\alpha \leq 10^{-6}$ равен уже 4,2 дБ. На самом деле проигрыш еще меньше, так как оценка (2.3.35) минимального значения β_0 сильно занижена.

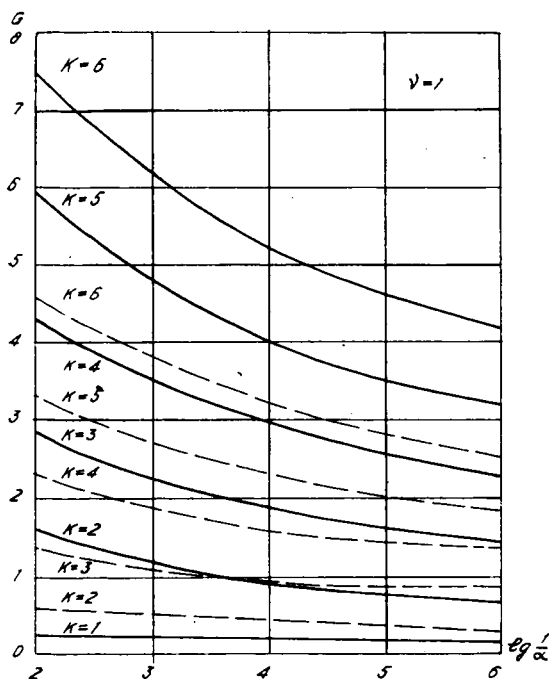


Рис. 2.3.5

Отметим еще что, как показали численные расчеты, при $\alpha < 10^{-2} G(q_0, k, \nu)$ от q_0 практически не зависит; точнее, с уменьшением q_0 $G(q_0, k, \nu)$ слабо уменьшается (это уменьшение при $\alpha = 10^{-2}$ остается примерно 3—5%). Поэтому вероятность пропуска цели проще рассчитывать по формуле

$$10 \lg \frac{1}{\beta} = 10 \lg \frac{1}{\beta_0} - G, \quad (2.3.38)$$

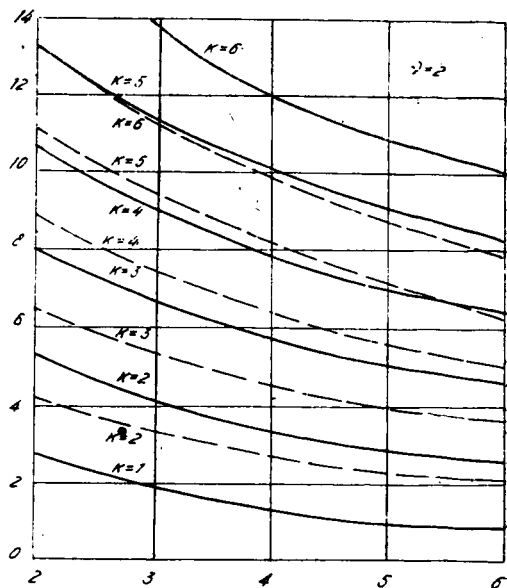


Рис. 2.3.6

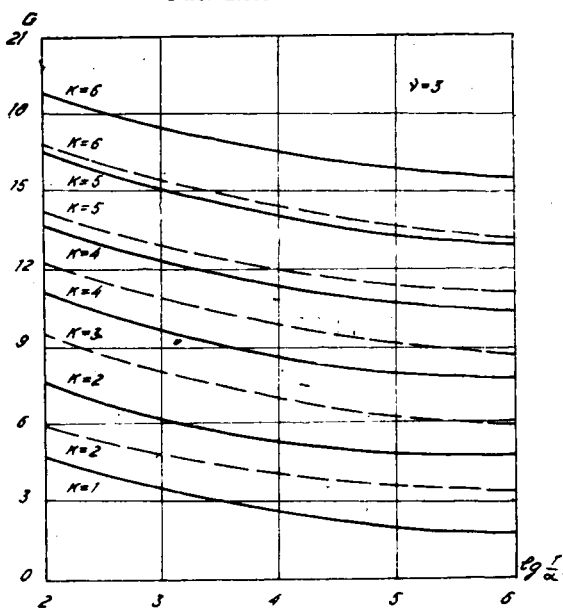


Рис. 2.3.7

так как ряд (2.3.35) для β_0 гораздо проще для численных расчетов, чем ряд (2.3.24) для β .

§ 4. Исследование полуквадратичной схемы

Перейдем теперь к исследованию характеристик полуквадратичной схемы обнаружения. Начнем с вычисления вероятности ошибки типа ложной тревоги.

Как уже указывалось выше, алгоритм работы θ -квадратичной схемы обнаружения заключается в вычислении величины

$$z = \sum_{s=1}^k H_s^2 \cdot \theta(H_s) \quad (2.4.1)$$

и последующем сравнении ее с порогом C .

Пусть на входе системы обнаружения полезный сигнал отсутствует; в этом случае если $\lambda_0 T$ велико, то H_s будет иметь приближенно нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией. Следовательно, H_s^2 будет иметь χ^2 -распределение с одной степенью свободы, а плотность вероятностей величины $z_s = H_s^2 \cdot \theta(H_s)$ (в силу симметрии нормального распределения) будет иметь вид

$$p_0(z_s) = \frac{1}{2} \{ \delta(z_s) + f_1(z_s) \}. \quad (2.4.2)$$

Так как все z_s независимы, то плотность вероятностей величины z будет представляться k -кратной сверткой распределений $p_0(z_s)$. Учитывая, что $f_k(z) * f_l(z) = f_{k+l}(z)$, и считая формально $\delta(z) = f_0(z)$, получим

$$p_0(z) = \frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^k C_k^l f_l(z), \quad (2.4.3)$$

где C_k^l — биномиальные коэффициенты.

Значение порога C находится из того условия, чтобы в отсутствие сигнала вероятность неравенства $(z > C)$ была равна заданной вероятности ложной тревоги α

$$\alpha = \frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^{k \infty} C_l^k \int_C f_l(z) dz. \quad (2.4.4)$$

Величина порога C для некоторых α и k дана в табл. 2.4.1.

Таблица 2.4.1

k	α				
	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
1	5,412	9,550	13,838	18,188	22,594
2	7,289	11,762	16,238	20,831	25,391
3	8,746	13,474	18,186	22,886	27,577
4	10,019	14,962	19,838	24,671	29,474
5	11,183	16,317	21,340	26,340	31,200
6	12,274	17,582	22,740	27,805	32,803

Перейдем теперь к вычислению вероятности пропуска цели β . Мы получим выражение для β в виде, аналогичном (2.3.24), т. е. в виде ряда по обратным степеням q_0 и C .

Рассмотрим величину $z_s = H_s^2 \cdot \theta(H_s)$. Преобразование Лапласа—Карлсона от плотности вероятностей величины z_s есть

$$g_z(s) = s \int_0^\infty \frac{q^{\nu-1} \cdot \nu^\nu}{q_0^\nu \Gamma(\nu)} e^{-\frac{q\nu}{q_0}} dq \int_{-\infty}^\infty e^{-sH^2\theta(H)} e^{-\frac{(H-q)^2}{2}} \frac{dH}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.4.5)$$

Разлагая $\exp\left\{-\frac{q\nu}{q_0}\right\}$ в ряд Тейлора, получим

$$g_z(s) = \frac{s \cdot \nu^\nu}{q_0^\nu \cdot \Gamma(\nu)} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\varphi_n(s) \nu^n}{q_0^n \cdot n!}, \quad (2.4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_n(s) &= \int_0^\infty q^{n+\nu-1} dq \int_{-\infty}^\infty e^{-sH^2\theta(H) - \frac{(H-q)^2}{2}} \frac{dH}{\sqrt{2\pi}} = \\ &= \int_0^\infty q^{n+\nu-1} dq \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{\frac{(H-q)^2}{2}} \frac{dH}{\sqrt{2\pi}} + \int_0^\infty e^{-sH^2 - \frac{(H-q)^2}{2}} \frac{dH}{\sqrt{2\pi}} \right\} = \\ &= g_n + p_n. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Так как

$$\int_{-8}^0 e^{-\frac{(H-q)^2}{2}} \frac{dH}{\sqrt{2\pi}} = \Phi(-q),$$

то, интегрируя по частям, получим

$$g_n = \int_0^{\infty} q^{n+\nu-1} \Phi(-q) dq = \frac{2^{\frac{n+\nu-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+\nu-1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}(n+\nu)}. \quad (2.4.8)$$

В выражении для p_n , вычисляя внутренний интеграл по формуле [36, формула (3.322.2)], получим

$$p_n = \frac{(1+2s)^{\frac{n+\nu-1}{2}}}{s^{\frac{n+\nu}{2}}} \int_0^{\infty} x^{n+\nu-1} e^{-x^2} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) dx. \quad (2.4.9)$$

Рассмотрим отдельно интеграл вида

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{n+\nu-1} e^{-x^2} \Phi(x \cdot \alpha) dx. \quad (2.4.10)$$

Дифференцируя $I(\alpha)$ по параметру α , получим

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{n+\nu} e^{-x^2 - \frac{\alpha^2 x^2}{2}} dx = \\ &= \frac{2^{\frac{n+\nu-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+\nu-1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi} (2+\alpha^2)^{\frac{n+\nu+1}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Интегрируя (2.4.11) по α , найдем другое выражение для $I(\alpha)$:

$$I(\alpha) = C + \frac{\Gamma\left(\frac{n+\nu+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha/\sqrt{2}} \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{n+\nu+1}{2}}}. \quad (2.4.12)$$

В этом выражении постоянная интегрирования легко находится, если положить $\alpha=0$.

$$I(0)=C=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x^{n+v-1}e^{-x^2}dx=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{n+v}{2}\right). \quad (2.4.13)$$

Таким образом, выражение для p_n принимает вид

$$p_n=\frac{(1+2s)^{\frac{n+v-1}{2}}}{s^{\frac{n+v}{2}}}\left\{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right)+\right. \\ \left.+\frac{\Gamma\left(\frac{n+v+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{1/\sqrt{2s}}\frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{n+v+1}{2}}}\right\}. \quad (2.4.14)$$

Найдем асимптотическое разложение интеграла, входящего в (2.4.14). В силу того, что

$$\frac{1}{(1+z^2)^p}=\frac{1}{z^{2p}}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^{-p}=\frac{1}{z^{2p}}- \\ -\frac{p}{1!z^{2p+2}}+\frac{p(p+1)}{2!z^{2p+4}}\dots, \quad (2.4.15)$$

получим

$$\int_0^x\frac{dz}{(1+z^2)^p}=C_1-\frac{1}{(2p-1)x^{2p-1}}+\frac{p}{1!}\frac{1}{(2p+1)x^{2p+1}}- \\ -\frac{p(p+1)}{2!}\times\frac{1}{(2p+3)x^{2p+3}}\dots \quad (2.4.16)$$

Постоянную C_1 находим, полагая $x=\infty$,

$$C_1=\int_0^{\infty}\frac{dz}{(1+z^2)^p}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma(p)} \quad (2.4.17)$$

Теперь можно выписать окончательное выражение для $\varphi_n(s)$

$$\varphi_n(s)=\frac{2^{\frac{n+v-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+v+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}(n+v)}+\frac{(1+2s)^{\frac{n+v-1}{2}}}{s^{\frac{n+v}{2}}}\left\{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{n+v}{2}\right)-\right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Gamma\left(\frac{n+\nu+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\nu+1}{2}\right)} - \frac{(2s)^{\frac{n-\nu}{2}}}{(n+\nu)} + \right. \\
& \quad + \frac{\left(\frac{n+\nu+1}{2}\right)(2s)^{\frac{n+\nu+2}{2}}}{1!(n+\nu+2)} - \\
& \quad \left. - \frac{\left(\frac{n+\nu+1}{2}\right)\left(\frac{n+\nu+2}{2}\right)(2s)^{\frac{n+\nu+4}{2}}}{2!(n+\nu+4)} + \dots \right] \Bigg\}. \quad (2.4.18)
\end{aligned}$$

В частности, при $n=0$ получаем

$$\begin{aligned}
\varphi_0(s) = & \frac{2^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi} \cdot \nu} + \frac{(1+2s)^{\frac{\nu-1}{2}}}{s^{\frac{\nu}{2}}} \left\{ \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) + \right. \\
& + \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} - \frac{(2s)^{\frac{\nu}{2}}}{\nu} + \frac{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)(2s)^{\frac{\nu+2}{2}}}{1! \cdot (\nu+2)} - \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\left(\frac{\nu+2}{2}\right)(2s)^{\frac{\nu+4}{2}}}{2! (\nu+4)} + \dots \right] \right\}. \quad (2.4.19)
\end{aligned}$$

В силу того, что при k импульсах полезного сигнала интересующая нас величина z представляет собой сумму k независимых случайных величин $z_1, \dots, z_k$, распределенных по одному и тому же закону, то преобразование Лапласа—Карсона от плотности вероятностей величины z имеет вид

$$g_k(s) = \frac{s \cdot \nu^{k\nu}}{q_0^{k\nu} \Gamma^k(\nu)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi_n(s) \cdot \nu^n}{q_0^n n!} \right)^k, \quad (2.4.20)$$

а преобразование Лапласа—Карсона от функций $\beta(C) =$

$= \int_{-\infty}^C p(z) dz$ имеет вид

$$g_{\hat{p}}(s) = \frac{\nu^{k\nu}}{q_0^{k\nu} \Gamma^k(\nu)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi_n(s) \nu^n}{q_0^n \cdot n!} \right]^k =$$

$$= \frac{\nu^{k\nu}}{q_0^{k\nu} \Gamma^k(\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi_{nk}(s)}{q_0^n}. \quad (2.4.21)$$

Производя обратное преобразование Лапласа—Карсона от функции $\Psi_{nk}(s)$, получим следующее выражение для вероятности ошибки типа пропуска сигнала:

$$\beta = \frac{\nu^{k\nu}}{q_0^{k\nu} \Gamma^k(\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Psi}_{nk}(C)}{q_0^n}, \quad (2.4.22)$$

где $\tilde{\Psi}_{nk}(C)$ —обратное преобразование Лапласа—Карсона от функций $\tilde{\Psi}_{nk}(s)$.

Найдем теперь асимптотический выигрыш (при $q_0 \rightarrow \infty$) θ -квадратичной схемы по сравнению с квадратичной схемой. В этом случае нам понадобится лишь функция $\Psi_{0k}(s) = \varphi_0(s)$.

Для $\nu=1$

$$\varphi_0(s) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} s - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} s^2 +$$

$$+ \frac{2}{7} \sqrt{\frac{2}{5}} s^3 - \frac{2}{9} \sqrt{\frac{2}{\pi}} s^4 + \dots \quad (2.4.23)$$

Возводя это выражение в k -ю степень и собирая члены с одинаковыми степенями s , получим

$$\Psi_{0k}(s) = \frac{\pi^{k/2}}{2^k s^{k/2}} + \frac{k \pi^{\frac{k-1}{2}}}{2^{k-1} \cdot 3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s^{\frac{k-3}{2}}} +$$

$$+ \frac{k \pi^{\frac{k-1}{2}} \cdot 2}{2^{k-1} \cdot 5} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s^{\frac{k-5}{2}}} + \dots \quad (2.4.24)$$

Производя обратное преобразование Лапласа—Карсона, будем иметь

$$\tilde{\Psi}_{0k}(C) = \frac{1}{k} C_{k,0}(1) C_{\theta}^{k/2} \left[1 + \frac{2k\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{3\pi\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \frac{1}{C_{\theta}^{3/2}} - \frac{4k\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{2\pi\Gamma\left(\frac{k-3}{2}\right)} \frac{1}{C_{\theta}^{5/2}} + \dots \right], \quad (2.4.25)$$

где C_{θ} — порог θ -квадратичной схемы. Отсюда асимптотический проигрыш квадратичной схемы по сравнению с θ -квадратичной определится как

$$G(\infty, k, 1) = 10 \lg \frac{\beta_{\text{KB}}}{\beta_{\theta}} = 10 \lg \left\{ \frac{C_{\text{KB}}^{k/2}}{C_{\theta}^{k/2} \left[1 + \frac{2k\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{3\pi\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \frac{1}{C_{\theta}^{3/2}} - \dots \right]} \right\}. \quad (2.4.26)$$

Выражения для $G(\infty, k, \nu)$ при других ν находятся аналогично; мы не будем их выписывать ввиду их громоздкости.

Графики величин $G(\infty, k, \nu)$ для различных k и ν приведены на рис. 2.3.5–2.3.7 пунктирными линиями. Из этих графиков видно, что эффективность обнаружения оптических локационных сигналов θ -квадратичной схемой по сравнению с квадратичной схемой возрастет с ростом k и ν и при больших k и ν может достигнуть значительных величин. Это связано с тем, что с ростом k и ν квадратичная схема обнаружения сильно отличается от оптимальной.

§ 5. Оптимальная схема обнаружения

При $h_0 \rightarrow 0$ можно получить также и оптимальный алгоритм обнаружения оптических локационных сиг-

налов, к чему мы и переходим. Вместо величин n_{is} введем в рассмотрение функции

$$h_s(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^M \tilde{n}_{is} \tilde{\mu}_{is} - \lambda_0 m_1}{\sqrt{\lambda_0 m_2}}, \quad -\frac{T}{2} \leq \tau \leq \frac{T}{2}, \quad (2.5.1)$$

где $\tilde{\mu} = \mu(t_i - sT - \tau)$, которые представляют собой отклик линейного фильтра с весовой функцией $\mu(t)$ на поток фотоэлектронов, если каждый фотоэлектрон создает δ -образный импульс напряжения. Так как линейное преобразование (за редким исключением) является преобразованием обратимым, то процессы $h_s(\tau)$ несут столько же информации, сколько несет ее исходный сигнал.

Так как общее число фотоэлектронов велико, то в силу центральной предельной теоремы процесс $h_s(\tau)$ можно считать приближенно нормальным случайным процессом. Найдем его характеристики. Вычисляя среднее значение $h_s(\tau)$ при фиксированном ρ_s , получим

$$\begin{aligned} M[h_s(\tau) | \rho_s] &= \frac{\rho_s}{\sqrt{\lambda_0 m_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t - sT) \mu(t - sT - \tau) dt = \\ &= \frac{\rho_s \sqrt{m_2}}{\sqrt{\lambda_0}} r(\tau) = q_s r(\tau), \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

где

$$r(\tau) = \frac{1}{m_2} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t) \mu(t - \tau) dt \quad (2.5.3)$$

нормированная функция корреляции импульса.

Находя функцию корреляции процесса $h_s(\tau)$, получим

$$\begin{aligned} R_h(\tau_1, \tau_2) &= M[(h_s(\tau_1) - \bar{h}_s(\tau_1))(h_s(\tau_2) - \bar{h}_s(\tau_2))] = \\ &= \frac{1}{m_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t + \tau_1) \mu(t + \tau_2) dt + \\ &+ \frac{\rho_s}{\lambda_0 m_2} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2(t) \mu(t + \tau_1) \mu(t + \tau_2) dt. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Считая, что $\rho_s/\lambda_0 \ll 1$ и пренебрегая вторым слагаемым, получим

$$R_h(\tau_1, \tau_2) = r(\tau_1 - \tau_2).$$

Так как для $-\frac{T}{2} \leq \tau \leq \frac{T}{2}$ импульсы не перекрываются, то процессы $h_s(\tau)$ независимы. Поэтому для отсчетов $h_{si} = h_s(\tau_i)$ процессов $h_s(\tau)$ при фиксированных $\rho_1, \dots, \rho_k$ плотность вероятностей имеет вид

$$p(\{h_{si}\} | \{\rho_s\}) = \prod_{s=1}^k \frac{\sqrt{\det K}}{(2\pi)^{M/2}} \exp \left\{ - \sum_{i,j}^M K_{ij} (h_{si} - q_s r_i) (h_{sj} - q_s r_j) \right\}, \quad (2.5.5)$$

где $r_i = r(\tau_i)$, $r_{ij} = r(\tau_i - \tau_j)$ и величины K_{ij} , составляющие матрицу K , находятся из уравнения

$$\sum_m K_{im} r_{mj} = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Так как r_{ij} зависят лишь от разности $(\tau_i - \tau_j)$ и интервал изменения $\tau \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$ больше длительности полезного импульса, то K_{ij} также зависят лишь от разности $(\tau_i - \tau_j)$. В силу этого выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} K_{ij} r_i r_j &= r_{00} = 1; \\ \sum_{i,j} K_{ij} h_{is} r_j &= H_s = h_{s0}, \end{aligned}$$

где H_s определена так же, как и в предыдущих параграфах этой главы, поэтому

$$p(\{h_{is}\} | \{\rho_s\}) = \prod_{s=1}^k \frac{\sqrt{\det K}}{(2\pi)^{M/2}} \exp \left\{ - \frac{q_s^2}{2} + q_s \dot{H}_s - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^M K_{ij} h_{si} h_{sj} \right\}.$$

Усредняя по величинам $q_1, q_2, \dots, q_k$, получим

$$p_1(\{h_{is}\}) =$$

$$= \prod_{s=1}^k \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j}^M K_{ij} h_{si} h_{sj}\right\} \sqrt{\det K}}{(2\pi)^{M/2}} \frac{v^v}{q_0^v} \exp\left\{\frac{1}{4}(H_s - \frac{v}{q_0})^2\right\} D_{-v}\left(\frac{v}{q_0} - H_s\right), \quad (2.5.6)$$

где $D_{-v}(\cdot)$ — функция параболического цилиндра.

Если мы будем находить плотность вероятностей величин h_{si} в отсутствие полезного сигнала, то все выкладки будут совершенно аналогичны, надо лишь считать все $p_s = 0$, тогда

$$p_0(\{h_{si}\}) = \prod_{s=1}^k \frac{\sqrt{\det K}}{(2\pi)^{M/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j}^M K_{ij} h_{si} h_{sj}\right\}. \quad (2.5.7)$$

Теперь легко вычисляется логарифм отношения правдоподобия, определяющий оптимальный способ обработки сигнала на выходе фотодетектора

$$z = \ln \frac{p_1(\{h_{si}\})}{p_0(\{h_{sj}\})} = \sum_{s=1}^k \left[\frac{1}{4} \left(H_s - \frac{v}{q_0} \right)^2 + \ln D_{-v}\left(\frac{v}{q_0} - H_s\right) - \ln D_{-v}(0) \right], \quad (2.5.8)$$

где отброшено слагаемое, не зависящее от данных наблюдения и поэтому не влияющее на алгоритм обнаружения. С технической точки зрения данный алгоритм соответствует линейному фильтру с весовой характеристикой $\mu(t)$, вычисляющему величины H_s , безынерционному нелинейному преобразователю с характеристикой

$$y = \frac{x^2}{4} + \ln D_{-v}(-x) - \ln D_{-v}(0) \quad (2.5.9)$$

и сумматору с задержанной обратной связью, производящему межимпульсное сложение.

Графики функций $y(x)$ (2.5.9) для различных v приведены на рис. 2.5.1. Заметим, что с увеличением v вид зависимости $y(x)$ все более приближается к прямой линии.

Основную роль в обнаружении играет участок характеристики для $|x| \leq 5$. В этой области зависимость $y(x)$ можно приближенно аппроксимировать параболой, разложив $y(x)$ в ряд Тейлора по степеням x . Отбрасывая несущественные постоянные слагаемые и сомножители, приведем алгоритм обнаружения к виду

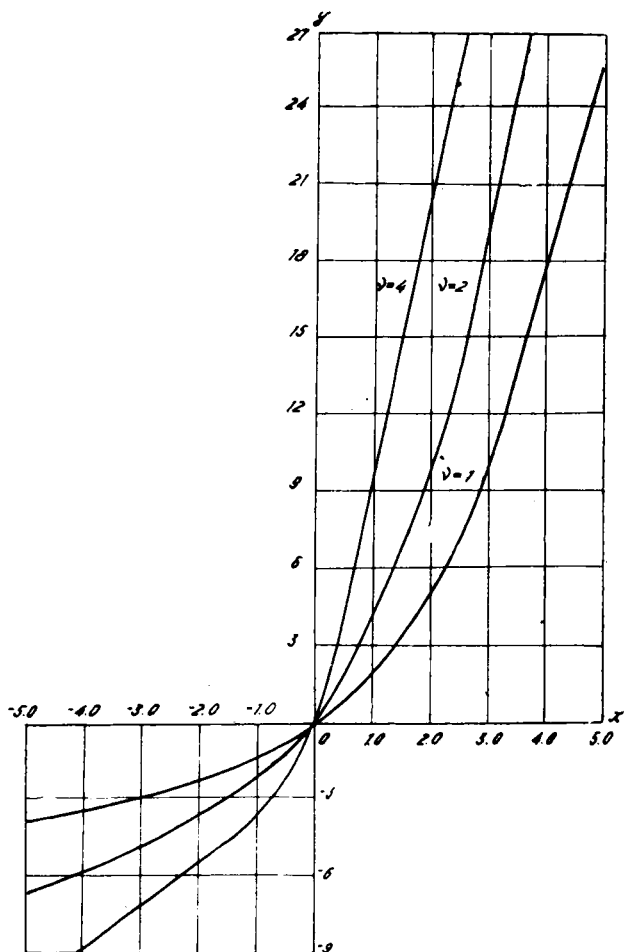


Рис. 2.5.1

$$z = \sum_{s=1}^k (\xi_s + A_v)^2 \text{ или } z = \sum_{s=1}^k (\xi_s + B_v \xi_s^2), \quad (2.5.10)$$

где $\xi_s \equiv H_s - \frac{v}{q_0}$. Выражения для коэффициентов A_v и B_v имеют вид

$$A_v = \frac{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{v \Gamma^2\left(\frac{v}{2}\right) - 2 \Gamma^2\left(\frac{v+1}{2}\right)}; \quad B_v = \frac{1}{2 A_v}. \quad (2.5.11)$$

При больших v , пользуясь асимптотическим разложением для $\ln\{\Gamma(x)\}$ [35, формула (8.344)], получим (табл. 2.5.1)

$$A_v \approx 2\sqrt{v}; \quad B_v \approx 1/4\sqrt{v}.$$

Т а б л и ц а 2.5.1

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_v	2,196	2,290	3,519	4,037	4,499	4,920	5,308	5,670	6,011
B_v	0,228	0,171	0,142	0,124	0,111	0,102	0,0942	0,0882	0,0832

Мы видим, что уже примерно с $v=5$ квадратичное слагаемое играет роль малой добавки, а при $v \rightarrow \infty$ обработка все более приближается к линейной.

Перейдем теперь к оценке вероятности ошибки типа ложной тревоги и пропуска цели оптимальной схемой обнаружения. Для β можно было бы вновь получить выражение в виде ряда по обратным степеням q_0 и C , однако ввиду громоздкости мы приводить его не будем. Вместо этого мы изложим другой метод вычисления вероятностей ошибок, который оказался в данном случае более эффективным.

Этот метод заключается в использовании дивергенции информации Кульбака с последующим использованием неравенства

$$(1-\alpha-\beta) \ln \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha \cdot \beta} \approx \ln \frac{1}{\alpha} + \ln \frac{1}{\beta} \leq k [I(0:1) +$$

$$+I(1:0)], \quad (2.5.12)$$

которое асимптотически переходит в равенство при больших отношениях сигнала к шуму и играет в теории проверки статистических гипотез ту же роль, что и неравенство информации в теории оценивания. В нашем случае значения β при α , $\beta < 10^{-2}$, полученные с использованием этого неравенства, как показали численные расчеты, отличаются от точных значений не более чем на 15%, что является вполне удовлетворительной для практических потребностей точностью.

В нашем случае в качестве несущих информацию величин выступают величины H_s . Если полезный сигнал отсутствует, то

$$p_0(H_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{H_s^2}{2}},$$

если же он присутствует, то

$$\begin{aligned} p_1(H_s) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\nu^\nu}{q_0^\nu \Gamma(\nu)} \int_0^\infty e^{-\frac{(H_s - q)^2}{2}} q^{\nu-1} e^{-\frac{q\nu}{q_0}} dq = \\ &= \left(\frac{\nu}{q_0}\right)^\nu e^{-\frac{H_s^2}{2} + \frac{1}{4}\left(H_s - \frac{\nu}{q_0}\right)^2} D_{-\nu}\left(\frac{\nu}{q_0} - H_s\right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I(1:0) &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\nu^2}{q_0^2} + q_0^2 \frac{\nu+1}{\nu} - 2\nu \right) + \nu \ln \frac{\nu}{q_0} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\nu}{q_0}\right)^\nu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\left(x - \frac{\nu}{q_0}\right)^2} \cdot \\ &\cdot D_{-\nu}\left(\frac{\nu}{q_0} - x\right) \ln D_{-\nu}\left(\frac{\nu}{q_0} - x\right) dx, \\ I(0:1) &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\nu^2}{q_0^2} \right) + \nu \ln \frac{\nu}{q_0} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \ln D_{-\nu}\left(\frac{\nu}{q_0} - x\right) dx. \end{aligned}$$

Входящие сюда интегралы в элементарных функциях не выражаются. Графики зависимостей $I(1:0)$ и $I(0:1)$ от q_0 и ν , полученные в результате численных расчетов, приведены на рис. 2.5.2 и 2.5.3.

Можно также указать некоторые довольно точные аппроксимации для $I(0:1)$ и $I(1:0)$. При больших ν , аппроксимируя $p(q)$ нормальным распределением [37]

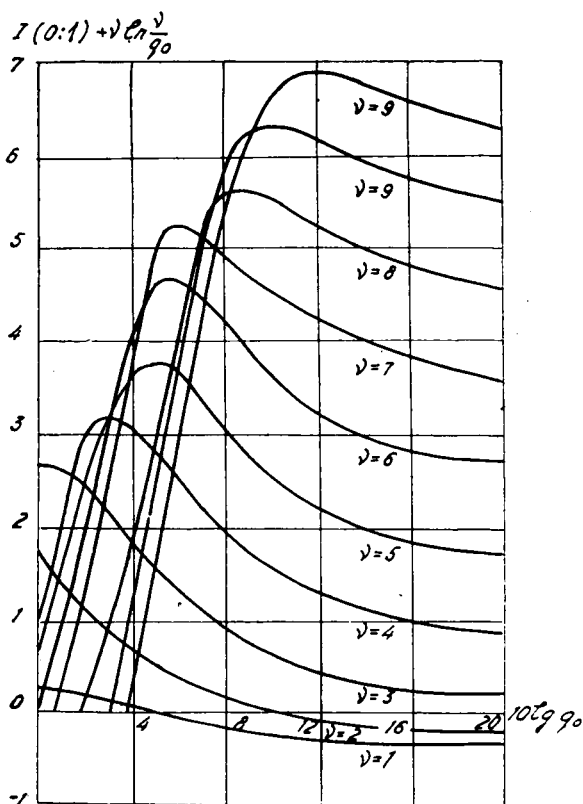


Рис. 2.5.2

$$p(q) = \frac{q^{\nu-1} \nu^{\nu}}{q_0^{\nu} \Gamma(\nu)} e^{-\frac{q^{\nu}}{q_0^{\nu}}} \approx \sqrt{\frac{\nu}{2\pi q_0}} e^{-\frac{(q-q_0)^2 \nu}{2 q_0^2}},$$

мы получим

$$I(0:1) \approx \frac{q_0^2(\nu-1)}{2(q_0^2+\nu)} + \ln\left(1 + \frac{q_0^2}{\nu}\right);$$

$$I(1:0) \approx q_0^2 \frac{\nu+1}{2\nu} - \ln\left(1 + \frac{q_0^2}{\nu}\right).$$

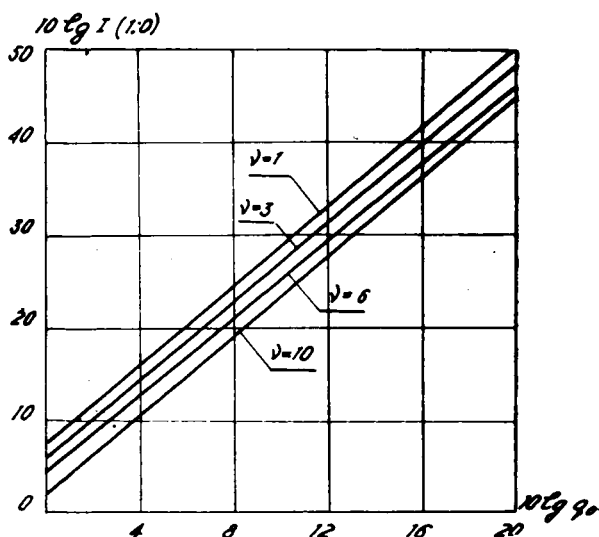


Рис. 2.5.3

§ 6. Субоптимальные линейные фильтры

То, что с увеличением ν оптимальный алгоритм обработки сигнала на выходе фотодетектора приближается к линейной фильтрации, наводит на мысль о том, что вообще применение линейных фильтров в системах обнаружения оптических сигналов является достаточно эффективным при любых k и ν . Поэтому мы займемся сейчас исследованием и оптимизацией системы обработки сигнала на выходе фотодетектора, состоящей из линейного фильтра и порогового устройства.

Начнем с определения оптимального или близкого к оптимальному вида переходной характеристики филь-

ра, полагая для простоты, что мы имеем пачку, состоящую всего из одного импульса. К нахождению этой оптимальной характеристики можно прийти двумя путями.

Первый путь. По известным моментам появления фотоэлектронов $t_1, \dots, t_M$ или числам n_i фотоэлектронов на тех отрезках, на которые разбивается интервал наблюдения, производится оценка $\hat{\rho}$ величины ρ . Сигнал считается присутствующим, если $\hat{\rho}$ превысит некоторый фиксированный порог P .

Находя, как и выше, оценку величины $\hat{\rho}$ по методу максимального правдоподобия, мы получим уравнение для нахождения $\hat{\rho}$

$$\sum_{i=1}^M \frac{n_i \mu_i}{\lambda_0 + \hat{\rho} \mu_i} = \sum_{i=1}^M \mu_i \Delta t. \quad (2.6.1)$$

Так как при $\hat{\rho} > 0$ левая часть этого уравнения монотонно убывает с ростом $\hat{\rho}$, сигнал следует считать присутствующим, если

$$\sum_{i=1}^M \frac{n_i \mu_i}{\lambda_0 + P \mu_i} > \sum_{i=1}^M \mu_i \Delta t. \quad (2.6.2)$$

Отсюда видно, что алгоритм обнаружения сводится к тому, что величины n_i подвергаются линейному преобразованию с весовой характеристикой

$$S_i = \frac{\mu_i}{1 + a \mu_i}, \quad (2.6.3)$$

где $a = \frac{P}{\lambda_0}$, а затем выход фильтра сравнивается с порогом $\lambda_0 \sum_{i=1}^M \mu_i \Delta t = \lambda_0 m_1$. Распространяя этот алгоритм на случай пачки из k импульсов, мы запишем его в виде

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^M n_{ij} S_{ij} \geq C, \quad S_{ij} = \frac{\mu(t_i - jT)}{1 + a \mu(t_i - jT)}. \quad (2.6.4)$$

Заметим, что параметру $a = \frac{PT}{\lambda_0 T}$ можно придать простой физический смысл: это есть отношение порогового значения среднего числа полезных фотоэлектронов к среднему числу шумовых фотоэлектронов. Отсюда ясно, что при сильных шумах, когда $\lambda_0 T \gg 1$, величина a будет малой, а при слабых шумах, когда $\lambda_0 T$ сравнимо с единицей, — большой. При $\lambda_0 T \rightarrow 0$, $a \rightarrow \infty$ S_i сходится к виду

$$S_i = \begin{cases} 1, & \mu_i > 0; \\ 0, & \mu_i \leq 0, \end{cases} \quad (2.6.5)$$

Таким образом, при $\lambda_0 T \ll 1$ оптимальной системы обнаружения является счетчик числа фотоэлектронов.

Второй путь получения оптимальной характеристики фильтра заключается в непосредственном рассмотрении процесса линейной фильтрации и вычислении его характеристик. Пусть величины n_i подвергаются линейному преобразованию с весовыми коэффициентами S_i , тогда на выходе фильтра будет величина

$$z = \sum_{i=1}^M n_i S_i. \quad (2.6.6)$$

Пусть полезный сигнал отсутствует.

Если среднее число шумовых фотоэлектронов достаточно велико и в сумме (2.6.6) нет явно преобладающих членов, то величину z можно считать приближенно нормальной со средним значением m_0 и дисперсией σ_0^2

$$m_0 = \lambda_0 \int_0^T S(t) dt; \quad \sigma_0^2 = \lambda_0 \int_0^T S^2(t) dt. \quad (2.6.7)$$

Устанавливая некоторый порог C , получим вероятность ложной тревоги в виде

$$\alpha = 1 - \Phi\left(\frac{C - m_0}{\sigma_0}\right). \quad (2.6.8)$$

Если полезный сигнал присутствует, то при фиксированном ρ величина z вновь будет нормальной, но с другим средним значением и дисперсией:

$$m_z = \lambda_0 \int_0^T \lambda_0 S(t) dt + \rho \int_0^T \mu(t) S(t) dt; \quad (2.6.9)$$

$$\sigma_z^2 = \lambda_0 \int_0^T S^2(t) dt + \rho \int_0^T \mu(t) S^2(t) dt; \quad (2.6.10)$$

и условная (при фиксированном ρ) вероятность пропуска сигнала запишется в виде

$$\beta(\rho) = P\{z \leq C | \rho\} = \Phi\left(\frac{C - m_z}{\sigma_z}\right). \quad (2.6.11)$$

Усредняя по ρ , получим выражение для безусловной вероятности пропуска сигнала в виде

$$\beta = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{C - m_z}{\sigma_z}\right) p(\rho) d\rho. \quad (2.6.12)$$

Из выражений (2.6.9) — (2.6.12) видно, что характеристики линейного фильтра зависят от его весовой характеристики $S(t)$ только через функционалы

$$\int_0^T S(t) dt; \int_0^T S^2(t) dt; \int_0^T \mu(t) S(t) dt; \int_0^T \mu(t) S^2(t) dt,$$

и поэтому задача оптимизации переходной характеристики сведется к нахождению экстремума некоторой функции от этих функционалов

$$f\left(\int_0^T S(t) dt; \int_0^T S^2(t) dt; \int_0^T \mu(t) S(t) dt; \int_0^T \mu(t) S^2(t) dt\right) = \text{extr}_{S(t)} \quad (2.6.13)$$

Варьируя функционал (2.6.13) по $S(t)$, мы придем к следующему уравнению:

$$A - B \cdot S(t) + C \mu(t) - D S(t) \mu(t) = 0,$$

где A, B, C, D — пока неопределенные коэффициенты (множители Лагранжа). Отсюда

$$S(t) = \frac{A + C \mu(t)}{B + D \mu(t)}. \quad (2.6.14)$$

Из физических соображений следует потребовать, чтобы при $t \rightarrow \infty$, когда $\mu(t) \rightarrow 0$, $S(t)$ также стремилось к нулю.

Это выполняется лишь при $A=0$. Далее, так как $S(t)$ определяется с точностью до произвольного постоянного множителя, можно положить $C=B$, тогда окончательно

$$S(t) = \frac{\mu(t)}{1 + a\mu(t)}, \quad (2.6.15)$$

где a — пока неопределенный множитель.

Таким образом, двумя путями мы получили одно и то же выражение для весовой характеристики оптимального фильтра с точностью до неопределенного параметра a . Нашей дальнейшей задачей является получение уравнений, определяющих оптимальное значение параметра a , порога C и вероятностей ошибок ложной тревоги и пропуска сигнала. Мы рассмотрим несколько частных случаев.

Нефлуктуирующий сигнал. Начнем с простейшего случая, когда $p(\rho) = \delta(\rho - \rho_0)$, т. е. сигнал не флуктуирует (предельный случай, когда $\nu \rightarrow \infty$). Перейдем к безразмерной переменной $\tau = \frac{t}{T}$ и введем обозначения

$$A_k \equiv A_k(a) = \int_0^1 \frac{\tilde{\mu}^k(\tau)}{[1 + a\tilde{\mu}(\tau)]^k} d\tau, \quad (2.6.16)$$

$$B_k \equiv B_k(a) = \int_0^1 \frac{\tilde{\mu}^{k+1}(\tau)}{[1 + a\tilde{\mu}(\tau)]^k} d\tau. \quad (2.6.17)$$

Тогда из (2.6.9) — (2.6.10) следует

$$\begin{aligned} m_0 &= \lambda_0 T A_1(a); \\ \sigma_0^2 &= \lambda_0 T A_2(a); \quad \sigma = 1 - \Phi\left(\frac{C - \lambda_0 T A_1}{\sqrt{\lambda_0 T A_2}}\right), \end{aligned} \quad (2.6.18)$$

откуда получается явное выражение для порога C решающей схемы

$$C = \lambda_0 T A_1 + g_a \sqrt{\lambda_0 T A_2}. \quad (2.6.19)$$

Подставив это выражение в формулу, определяющую вероятность пропуска сигнала, получим

$$\beta = \Phi \left(\frac{g_a - \sqrt{\lambda_0 T M}}{\sqrt{1 + hN}} \right), \quad (2.6.20)$$

$$h = \frac{\rho_0 T}{\lambda_0 T}; \quad N = \frac{B_2}{A_2}; \quad M = \frac{B_1}{\sqrt{A_2}}.$$

Так как $0 \leq \mu(t) \leq 1$, то $a \geq -1$. Можно показать, что при $a < 0$ $\frac{dM}{da} > 0$, а при $a > 0$ $\frac{dM}{da} < 0$, т. е. при $-1 \leq a \leq 0$ $M(a)$ монотонно возрастает, а при $a > 0$ $M(a)$ монотонно убывает с ростом a ; при $a = 0$ $M(a)$ имеет (единственный) максимум. Что касается $N(a)$, то $\frac{dN}{da} < 0$ при любых a , т. е. с ростом a $N(a)$ монотонно убывает.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса об оптимальном значении параметра a . Для того, чтобы при фиксированном a вероятность пропуска сигнала была минимальной, мы должны потребовать, чтобы

$$\frac{g_a - h\sqrt{\lambda_0 T M}}{\sqrt{1 + hN}} = \min_a. \quad (2.6.21)$$

Отсюда получается следующее уравнение:

$$h = K(a) \frac{g_a}{\sqrt{\lambda_0 T}} + L(a), \quad (2.6.22)$$

где

$$K(a) = \frac{N'}{N'M - 2NM'};$$

$$L(a) = \frac{2M'}{N'M - 2NM'}.$$

Это уравнение в явном виде относительно a не разрешается, однако его очень просто решить графически при помощи номограмм с параллельными шкалами. Пример таких номограмм для трапецеидального и гауссовского импульсов приведен на рис. 2.6.1—2.6.2.

Отметим еще, что при $\lambda_0 T \gg 1$, когда h и $g_a/\sqrt{\lambda_0 T}$ малы, a также мало.

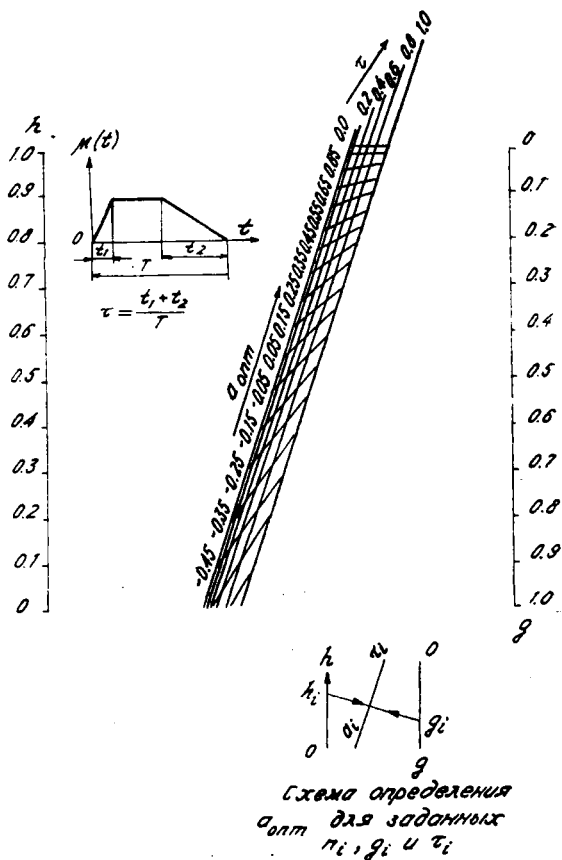


Рис. 2.6.1

Флуктуирующий сигнал. Пусть мы имеем пачку из k импульсов со случайными амплитудами, плотность вероятностей которых есть

$$p(p_s) = \frac{p_s^{\nu-1} \cdot \nu^{\nu}}{\Gamma(\nu) p_0^{\nu}} e^{-\frac{p_s}{p_0}}. \quad (2.6.23)$$

На выходе фильтра мы будем иметь величину z

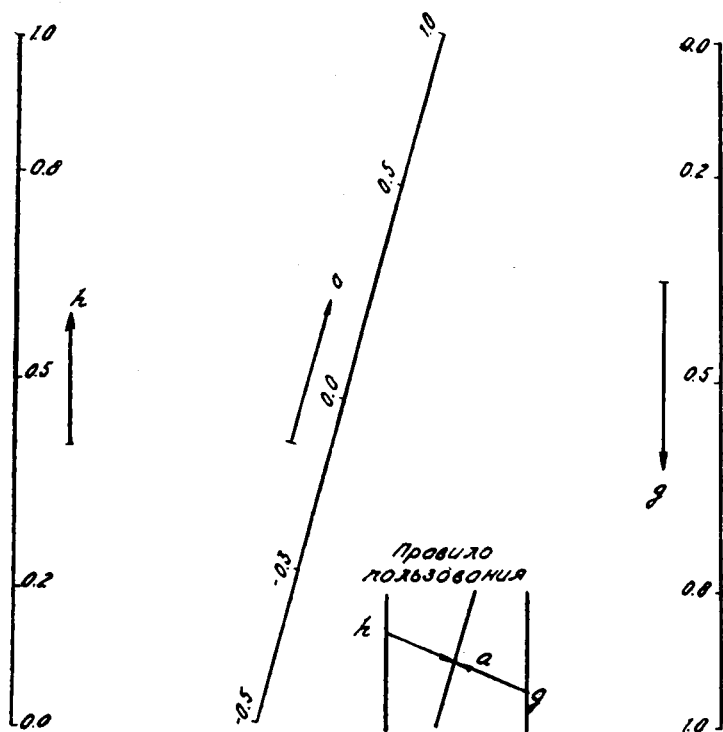


Рис. 2.6.2

$$z = \sum_{j=1}^k n_{ij} S_{ij}, \quad (2.6.24)$$

где $S_{ij} = S(t_i - jT)$. При фиксированных $\rho_1, \dots, \rho_k$ величина z будет приближенно нормальной случайной величиной с характеристиками

$$m_z = M[z | \rho_1, \dots, \rho_k] = \lambda_0 k \int_0^T S(t) dt + \sum_{j=1}^k \rho_j \int_0^T \mu(t) S(t) dt. \quad (2.6.25)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= D[z | \rho_1, \dots, \rho_k] = \\ &= \lambda_0 k \int_0^T S^2(t) dt + \sum_{j=1}^k \rho_j \int_0^T \mu(t) S^2(t) dt. \end{aligned} \quad (2.6.26)$$

В отсутствие полезного сигнала, когда все $\rho_j = 0$,

$$m_0 = M[z] = \lambda_0 k \int_0^T S(t) dt; \quad (2.6.27)$$

$$\sigma_0^2 = D[z] = \lambda_0 k \int_0^T S^2(t) dt. \quad (2.6.28)$$

Учитывая, что m_z и σ_z^2 зависят лишь от величины $\rho = \sum_{S=1}^k \rho_S$, плотность вероятности которой по свойствам Γ -распределения есть

$$p(\rho) = \frac{\rho^{k\nu-1} \cdot \nu^{k\nu}}{\rho_0^{k\nu} \Gamma(k\nu)} e^{-\frac{k\nu\rho}{\rho_0}}, \quad (2.6.29)$$

можно получить следующее выражение для вероятности пропуска сигнала:

$$\beta = \frac{\nu^{k\nu} k^{\nu k} \int_0^\infty \Phi\left(\frac{g_a - x}{\sqrt{1+bx}}\right) x^{k\nu-1} e^{-\frac{\sqrt{k\nu}}{q_0} x} dx}{\Gamma(k\nu q_0^{k\nu})}, \quad (2.6.30)$$

где введены обозначения

$$b = \frac{N}{M \sqrt{\lambda_0 T k}}; \quad q_0 = M h \sqrt{\lambda_0 T}.$$

Отметим, что при $S(t) = \mu(t)$ $q_0 = h \sqrt{\lambda_0 T m_2}$, это совпадает с тем выражением для q_0 , которое использовалось в предыдущих параграфах.

Мы получим выражение для β в виде знакопеременного ряда по обратным степеням величины q_0 , удобное в связи с тем, что при больших k_0 члены ряда быстро убывают, а знакопеременность ряда позволяет очень просто оценивать погрешность, возникающую из-за отбрасывания „хвоста“ ряда.

Разлагая $\exp\{-\sqrt{k\nu} x q_0\}$ в ряд Тейлора и интегрируя почленно, мы получим

$$\beta = \frac{\nu^{k\nu} \cdot k^{\frac{\nu}{2}}}{q_0^{k\nu} \Gamma(k\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{n/2} \nu^n}{q_0^n n!} I_{k\nu+n}(b), \quad (2.6.31)$$

где

$$I_{k\nu+n}(b) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{g_a - x}{\sqrt{1+bx}}\right) x^{k\nu+n-1} dx.$$

Рассмотрим несколько подробнее интеграл $I_p(b)$. При $b=0$

$$I_p(0) = \int_0^{\infty} \Phi(g_a - x) x^{p-1} dx = \frac{A_p(g_a)}{p}.$$

Полученное выражение совпадает с (2.3.34). При $b \neq 0$ интеграл для $I_p(b)$ через элементарные функции не выражается. На рис. 2.6.3—2.6.4 приведены графики функции $I_p(b) = \frac{I_p(b)}{I_p(0)}$,

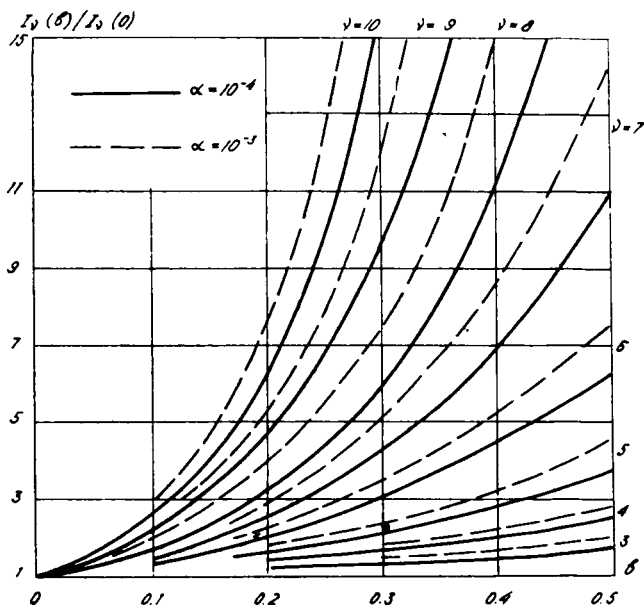


Рис. 2.6.3

рассчитанные численно на ЭВМ. Эти графики вместе с выражениями для $A_p(g_a)$ дают возможность рассчитывать β при любых q_0 и b .

Рассмотрим теперь вопрос о проигрыше линейной системы обнаружения сигналов оптимальной системы. Одну из оценок этого проигрыша можно получить, пользуясь нашей границей для вероятности пропуска сигнала (2.3.35). При $h \ll 1$, когда можно положить $a=0$, мы получим

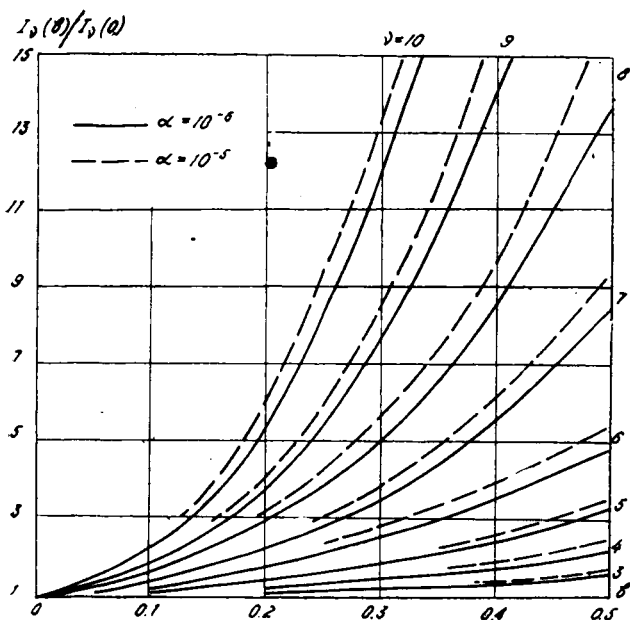


Рис. 2.6.4

$$G_A(\infty, k, \nu) = \lim_{q_0 \rightarrow \infty} \left(10 \lg \frac{\beta}{\beta_0} \right) = 10 \lg \frac{k^{\nu} \Gamma^k(\nu)}{\Gamma(k\nu) C_{k0}(\nu)} \quad (2.6.32)$$

Подставляя сюда выражение для $C_{k,0}(\nu)$ (2.3.18), окончательно получим (табл. (2.6.1))

Таблица 2.6.1

ν	k					
	1	2	3	4	5	6
1	0	1,05	2,09	3,25	4,52	5,69
2	0	1,25	2,55	3,87	5,20	6,52
3	0	2,33	2,71	4,09	5,47	6,84
4	0	1,37	2,77	4,18	5,59	7,01
5	0	1,40	2,83	5,69	7,11	7,11
6	0	1,41	2,85	4,30	5,74	7,18
∞	0	1,51	3,01	4,52	6,02	7,53

$$G_A(\infty, k, \nu) = 10 \lg \left[\frac{2^{k-1} k^{\frac{k\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{k\nu}{2}\right) \Gamma^k(\nu)}{\Gamma(k\nu) \Gamma^k\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right] \quad (2.6.33)$$

Однако эта таблица не полностью отражает существо дела, так как сравнение производится не собственно с оптимальной схемой обнаружения, а только с одной из возможных нижних границ для вероятности ошибки. На самом деле проигрыш линейной схемы обнаружения оптимальной системе убывает с ростом k и ν .

§ 7. Линейные фильтры для обнаружения флуктуирующих оптических сигналов

Выше мы рассматривали тот случай, когда время корреляции флуктуаций полезного сигнала больше его длительности, но меньше интервала времени между импульсами. В данном параграфе мы рассмотрим субоптимальные линейные схемы обнаружения оптических сигналов в том случае, когда время корреляции флуктуаций полезного сигнала меньше длительности импульса пачки.

Математически задача выглядит следующим образом: на фоне пуассоновского потока фотоэлектронов постоянной интенсивности λ_0 могут появляться k импульсов полезного сигнала, дающие пуассоновский поток фотоэлектронов, со случайной интенсивностью $|x(t)|^2$, где $x(t)$ — комплексный гауссовский случайный процесс $x(t) = u(t) + jv(t)$, состоящий из двух независимых компонент $u(t)$ и $v(t)$ с нулевыми средними значениями и функциями корреляции

$$R(t_1, t_2) = \frac{\rho_0}{2} \sqrt{\mu(t_1)\mu(t_2)} r(t_1 - t_2), \quad (2.7.1)$$

где $\mu(t)$ — „идеальная“ форма импульса пачки, а $r(\tau)$ — функция корреляций флуктуаций.

Система обнаружения вычисляет величину

$$z = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^M n_{lj} S_l, \quad (2.7.2)$$

где n_{ij} —число фотоэлектронов на i -м участке j -го импульса пачки, а S_i —весовые коэффициенты, равные значениям весовой характеристики фильтра $S(t)$ в момент времени $(t_i - jT)$. Затем величина z сравнивается с порогом C , а превышение порога означает вынесение решения о наличии сигнала.

В отсутствие полезного сигнала величину z можно считать приближенно нормальной со средним значением m_0 и дисперсией σ_0^2

$$m_0 = k\lambda_0 \int_0^T S(t) dt; \quad \sigma_0^2 = k\lambda_0 \int_0^T S^2(t) dt, \quad (2.7.3)$$

откуда получается следующее выражение для вероятности ложной тревоги:

$$\alpha = 1 - \Phi\left(\frac{C - m_0}{\sigma_0}\right); \quad C = m_0 + \sigma_0 \cdot g_\alpha. \quad (2.7.4)$$

При фиксированной реализации полезного сигнала величина z вновь будет приближенно нормальной с математическим ожиданием m_1 и дисперсией σ_1^2

$$m_1 = m_0 + \sum_{s=1}^k \int_0^T S(t) |x_s(t)|^2 dt, \\ \sigma_1^2 = \sigma_0^2 + \sum_{s=1}^k \int_0^T S^2(t) |x_s(t)|^2 dt, \quad (2.7.5)$$

откуда для условной вероятности пропуска сигнала получается следующее выражение:

$$\beta(x) = \Phi\left(\frac{C - m_1}{\sigma_1}\right) = \Phi\left(\frac{g_\alpha - \frac{\sum_{s=1}^k \int_0^T S(t) |x_s(t)|^2 dt}{k\lambda_0 \int_0^T S^2(t) dt}}{\sqrt{1 + \frac{\sum_{s=1}^k \int_0^T S^2(t) |x_s(t)|^2 dt}{k\lambda_0 \int_0^T S^2(t) dt}}}\right). \quad (2.7.6)$$

Мы рассмотрим лишь случай сильных помех, когда в области больших вероятностей пропуска сигнала выполняется соотношение

$$\frac{\sum_{s=1}^k \int_0^T S^2(t) |x_s(t)|^2 dt}{k \lambda_0 \int_0^T S^2(t) dt} \ll 1. \quad (2.7.7)$$

Вводя величину

$$\Psi_s = \frac{\int_0^T S(t) |x_s(t)|^2 dt}{\sqrt{\lambda_0 \int_0^T S^2(t) dt}}, \quad (2.7.8)$$

имеющую смысл условного отношения сигнала к шуму при фиксированной реализации полезного сигнала $x(t)$, мы получим

$$\beta(x) = \Phi \left(g_x - \frac{\sum_{s=1}^k \Psi_s}{\sqrt{k}} \right). \quad (2.7.9)$$

Как указывается в работе С. О. Райса [38], плотность вероятностей для величины Ψ_s хорошо аппроксимируется центральным χ^2 -распределением

$$p(\Psi_s) = \frac{\Psi_s^{\nu-1} \nu^\nu}{q_0^\nu \Gamma(\nu)} e^{-\frac{\Psi_s \nu}{q_0}} \quad (2.7.10)$$

с параметрами ν и q_0 , определяемыми следующими выражениями:

$$q_0 = M[\Psi_s]; \quad \nu = \frac{M^2[\Psi_s]}{D[\Psi_s]}.$$

Найдем явные выражения для этих параметров. Учитывая, что $|x(t)|^2 = u^2(t) + v^2(t)$ и что

$$\overline{u^2(t)} = \overline{v^2(t)} = \frac{\rho_0}{2} \mu(t), \text{ получим}$$

$$q_0 = \frac{\rho_0 \int_0^T S(t) \mu(t) dt}{\sqrt{\lambda_0 \int_0^T S^2(t) dt}}. \quad (2.7.11)$$

Так как по свойствам нормальных случайных процессов

$$|x_s(t_1)|^2 \cdot |x_s(t_2)|^2 = \mu(t_1) \mu(t_2) \rho_0^2 [1 + r^2(t_1 - t_2)],$$

то

$$\nu = \frac{\left[\int_0^T S(t) \mu(t) dt \right]^2}{\int_0^T \int_0^T \mu(t_1) \mu(t_2) S(t_1) S(t_2) r^2(t_1 - t_2) dt_1 dt_2}. \quad (2.7.12)$$

Усредняя теперь (2.7.9) по случайным величинам Ψ_s , мы получим для безусловной вероятности пропуска сигнала формулу, аналогичную (2.6.31), а из (2.7.11) и (2.7.12) следует тот факт, что величины q_0 и ν должны находиться из характеристик случайного процесса $x(t)$ через форму зондирующего импульса $\mu(t)$ и функцию корреляции флуктуаций цели.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса об оптимальной весовой характеристике фильтра $S(t)$. Мы видим, что характеристика системы обнаружения (вероятность пропуска сигнала) зависит от следующих функционалов:

$$I_1 = \int_0^T S^2(t) dt; \quad I_2 = \int_0^T S(t) \mu(t) dt; \quad (2.7.13)$$

$$I_3 = \int_0^T \int_0^T S(t_1) S(t_2) \mu(t_1) \mu(t_2) r(t_1 - t_2) dt_1 dt_2,$$

так что $\beta = \beta(I_1, I_2, I_3)$. Варьируя β по $S(t)$ с использованием метода неопределенных множителей Лагранжа, приходим к уравнению, определяющему нам субоптимальную весовую характеристику фильтра:

$$S(t) = \mu(t) \left[1 + \lambda \int_0^T S(\tau) \mu(\tau) r^2(t - \tau) d\tau \right]. \quad (2.7.14)$$

Эта характеристика является лишь субоптимальной, так как формула (2.7.10)—только хорошо подобранная аппроксимация, а не точная формула, и, кроме того, величина z лишь приближенно нормальна.

В случае, когда время корреляции флуктуаций сигнала больше его длительности, можно положить $r(t) \equiv 1$, тогда $S(t) = \mu(t)$, т. е. то, что мы получили в предыдущем параграфе.

Решение уравнения (2.7.14), являющегося уравнением Фредгольма II рода, проще всего искать методом последовательных приближений, беря в качестве исходного приближения $S(t) = \mu(t)$. В этом случае уже первое приближение

$$S(t) = \mu(t) \left[1 + \lambda \int_0^T \mu^2(\tau) r^2(t - \tau) d\tau \right] \quad (2.7.15)$$

является хорошим приближением к решению уравнения (2.7.14), совпадающему с точным решением в предельных случаях, когда время корреляции флуктуаций τ_k очень мало ($\tau_k \ll T$) или очень велико ($\tau_k \gg T$). Неопределенный множитель Лагранжа λ находится минимизацией β по λ после решения уравнения (2.7.14).

Глава III

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ОЦЕНКИ ДАЛЬНОСТИ

Как известно, в обычной радиолокации оптимальная схема оценки дальности в когерентном случае представляет собой согласованный фильтр, систему межимпульсного суммирования и систему определения положения максимума выходного сигнала. Именно временное положение максимума выходного сигнала системы и определяет момент прихода отраженного сигнала и, следовательно, дальность до цели.

В настоящей главе будем рассматривать оценку дальности до цели лидаром, имеющим приемник с безынерционным фотодетектором на входе, сигнал которого обрабатывается в дальнейшем по той же схеме, что и в обычной радиолокации, то есть на выходе фотодетектора стоят линейный фильтр, система межимпульсного суммирования и система, определяющая положение максимума выходного сигнала. Специфика сигнала на выходе фотодетектора (поток фотоэлектронов, в идеале являющийся потоком δ -образных импульсов напряжения или тока), а также специфика статистических законов распределения числа фотоэлектронов приводят к тому, что характеристики линейной системы отличаются от аналогичных характеристик линейной же системы в обычной радиолокации. Кроме того, специфика сигнала на выходе фотодетектора приводит к необходимости использовать другой математический аппарат, чем в обычной радиолокации.

§ 1. Оптимальные линейные фильтры для оценки момента прихода флуктуирующего оптического сигнала

Рассмотрим случай, когда на фотодетектор поступает пачка из k независимо флуктуирующих оптических им-

пульсов, переходящих в соответствующий поток фотоэлектронов, свойства которого описаны в предыдущей главе.

Итак, на фоне пуассоновского потока фотоэлектронов постоянной интенсивности λ_0 появляются k импульсов полезного сигнала, создающие пуассоновский поток фотоэлектронов переменной случайной интенсивности

$$\sum_{s=1}^k \rho_s \mu(t-sT-\tau_0), \quad (3.1.1)$$

где T —интервал времени между импульсами пачки; τ_0 —неизвестная величина, которую мы будем называть „момент прихода“ и которую будем оценивать; $\mu(t)$ —форма импульса пачки и ρ_s —„амплитуда“ импульса, которая является случайной величиной с плотностью вероятностей [39—40]

$$p(\rho_s) = \frac{\rho_s^{\nu-1} \cdot \nu^\nu}{\rho_0^\nu \Gamma(\nu)} e^{-\frac{\rho_s \nu}{\rho_0}}. \quad (3.1.2)$$

Пусть на выходе фотодетектора стоят линейный фильтр с весовой характеристикой $S(t)$ и система межимпульсного суммирования. Тогда на выходе такой системы мы будем иметь процесс

$$z(\tau) = \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^M S(t_i - sT - \tau), \quad (3.1.3)$$

где t_i —моменты появления фотоэлектронов, или

$$z(\tau) = \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^M n_i S(t_i - sT - \tau), \quad (3.1.4)$$

где n_i —число фотоэлектронов на i -м (бесконечно малом) отрезке времени длиной Δt .

В качестве оценки момента прихода оптического сигнала мы будем принимать временное положение главного максимума функции $z(\tau)$. От оценки τ величины τ_0 требуется выполнение следующих требований.

1. Несмещенность $M[\hat{\tau}] = \tau_0$. Мы, однако, будем тре-

бовать от оценки момента прихода более сильного условия, а именно

$$M[\hat{\tau} | \rho_1, \dots, \rho_k] = \tau_0. \quad (3.1.5)$$

Смысл этого условия заключается в том, что оценка времени прихода остается несмещенной при любых значениях амплитуд импульсов пачки полезного сигнала, то есть при любых замираниях полезного сигнала отсутствуют систематические ошибки в оценке момента прихода. Несмотря на то, что такие оценки имеют меньшую точность, они более определены с практической точки зрения.

2. Достаточно большая эффективность оценки. Качество оценки $\hat{\tau}$ момента прихода τ_0 измеряется ее условной вариацией

$$V(\hat{\tau} | \rho_1, \dots, \rho_k) = M[(\hat{\tau} - \tau_0)^2 | \rho_1, \dots, \rho_k] \quad (3.1.6)$$

безусловной вариацией

$$V(\hat{\tau}) = \int V(\hat{\tau} | \rho_1, \dots, \rho_k) \prod_{s=1}^k p(\rho_s) d\rho_s. \quad (3.1.7)$$

С другой стороны, при выполнении условия сильно несмещенности (3.1.5) условная вариация оценки не может быть меньше величины, даваемой неравенством информации

$$V(\hat{\tau} | \rho_1, \dots, \rho_k) \geq V_{\min}(\rho_1, \dots, \rho_k) = I_{\tau}^{-1}, \quad (3.1.8)$$

где I_{τ} — количество информации по Фишеру о величине τ_0 при фиксированных $\rho_1, \dots, \rho_k$ [4]

$$I_{\tau} = -M \left\{ \frac{\partial^2 \ln p(\{n_i\} | \rho_1, \dots, \rho_k, \tau_0)}{\partial \tau_0^2} \right\},$$

где $p(\{n_i\} | \rho_1, \dots, \rho_k, \tau_0)$ — условное распределение вероятностей величины n_i при фиксированных $\rho_1, \dots, \rho_k, \tau_0$. Безусловная вариация поэтому не может быть меньше величины

$$V_{\min}(\hat{\tau}) = \int V_{\min}(\hat{\tau} | \rho_1, \dots, \rho_k, \tau_0) \prod_{s=1}^k p(\rho_s) d\rho_s.$$

Эффективность оценки $\hat{\tau}$ величины τ_0 определяется величиной

$$e = V(\hat{\tau}) / V_{\min}(\hat{\tau}), \quad (3.1.9)$$

и от оценки требуется, чтобы ее эффективность была возможно ближе к единице.

Нас в основном будут интересовать те ситуации, когда погрешность $(\hat{\tau} - \tau_0)$ в оценке момента прихода сигнала с большой вероятностью мала. В этом случае, разлагая $z(\tau)$ в ряд Тейлора около точки τ_0 , мы имеем

$$z(\hat{\tau}) = z(\tau_0) + (\hat{\tau} - \tau_0) z''(\tau_0) + \dots$$

В этой формуле в случае малых погрешностей $(\hat{\tau} - \tau_0)$ $z''(\tau_0) \gg \sqrt{D(z''(\tau_0))}$, тогда приближенно

$$\hat{\tau} - \tau_0 = - \frac{z'(\tau_0)}{z''(\tau_0)},$$

где черта у $\overline{z''(\tau_0)}$ обозначает усреднение по пуассоновским флуктуациям сигнала (без усреднения по $\rho_1, \dots, \rho_k$). Условие сильной несмещенности в этом случае принимает вид

$$\overline{z'(\tau_0)} = 0, \quad (3.1.10)$$

а условная вариация равна

$$V(\hat{\tau} / \rho_1, \dots, \rho_k) = \frac{D[z'(\tau_0)]}{[z''(\tau_0)]^2}, \quad (3.1.10a)$$

где $D[z'(\tau_0)]$ означает дисперсию $z'(\tau_0)$.

Применим эти формулы к нашему случаю линейной фильтрации. В этом случае

$$z'(\tau_0) = - \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^M n_i S'(t - sT - \tau_0).$$

Усредняя по n_i с учетом того, что

$$\overline{n_i} = \left[\lambda_0 + \sum_{s=1}^k \rho_s \mu(t_i - sT - \tau_0) \right] \Delta t,$$

и так как импульсы в пачке не перекрываются, получим

$$\overline{z'(\tau_0)} = k \lambda_0 \int_0^S S'(t) dt + \sum_{s=1}^k \rho_s \int_0^T \mu(t) S'(t) dt = 0. \quad (3.1.11)$$

Из физических соображений $S'(t)$ и $S(t)$ должны быть равны нулю там, где $\mu(t) = 0$; первый интеграл в (3.1.11) тождественно равен нулю и условие сильной несмещенности приобретает вид

$$\int_0^T \mu(t) S'(t) dt = - \int_0^T \mu'(t) S(t) dt = 0. \quad (3.1.12)$$

Вычисляя $\overline{z''(\tau_0)}$ и $D[z'(\tau_0)]$, получим следующее выражение для условной вариации оценки момента прихода оптических сигналов:

$$\begin{aligned} V(\tau/\rho_1, \dots, \rho_k) &= \\ &= \frac{k \int_0^T S'^2(t) dt + \sum_{s=1}^k h_s \int_0^T \mu(t) S'(t) dt}{\lambda_0 \left(\sum_{s=1}^k h_s \right)^2 \left[\int_0^T \mu''(t) S(t) dt \right]^2}, \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

где $h_s = \frac{\rho_s}{\lambda_0}$. Учитывая, что плотность вероятностей величины $h = \sum_{s=1}^k h_s$ имеет плотность вероятностей

$$p(h) = \frac{h^{k\nu-1} \cdot \nu k\nu}{h_0^{k\nu} \Gamma(k\nu)} e^{-\frac{h\nu}{h_0}}, \quad (3.1.14)$$

где $h_0 = \rho_0/\lambda_0$, и усредняя (3.1.13) по (3.1.14), получим следующее выражение для безусловной вариации τ :

$$V(\tau) = \frac{1}{\lambda_0 \left[\int_0^T \mu''(t) S(t) dt \right]^2} \left\{ \frac{k\nu^2 \int_0^T S'^2(t) dt}{(k\nu-1)(k\nu-2)h_2^0} + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu \int_0^T \mu(t) S'^2(t) dt}{(k\nu - 1)h_0} \right\}. \quad (3.1.15)$$

Сделаем несколько замечаний по поводу этой формулы.

1. Если $\lambda_0 T$ мало, то для малости $V(\hat{\tau})$ должно быть велико h_0 . Основную роль в формуле (3.1.15) играет в этом случае второе слагаемое. Если пренебречь первым слагаемым, то приближенно

$$V(\hat{\tau}) = \frac{\nu \int_0^T \mu(t) S'^2(t) dt}{\rho_0(k\nu - 1) \left[\int_0^T \mu'(t) S(t) dt \right]^2}.$$

Заметим, что даже при $\lambda_0 T = 0$, то есть тогда, когда мешающие шумы отсутствуют, вариация оценки $V(\hat{\tau})$ момента прихода не равна нулю, что не имеет аналога в обычной радиолокации. Это объясняется собственными шумами сигнала, вызванными флуктуациями числа сигнальных фотоэлектронов, и, в конечном счете, имеет чисто квантовую природу, связанную с флуктуациями числа фотонов в приходящем сигнале.

2. Если $\lambda_0 T$ велико, то h_0 может быть мало, но должно быть велико $q_0^2 = \lambda_0 T h_0^2 = (\rho_0 T)^2 / \lambda_0 T$. Физически это объясняется тем, что при больших $\lambda_0 T$ квантовые флуктуации сигнала влияют очень мало и качество оценки дальности определяется отношением среднего числа сигнальных фотоэлектронов к среднеквадратическому отклонению числа шумовых фотоэлектронов. В формуле (3.1.15) основную роль играет первое слагаемое, приближенно

$$V(\hat{\tau}) = \frac{k \nu^2 \int_0^T S'^2(t) dt}{q_0^2 (k\nu - 1)(k\nu - 2) \left[\int_0^T \mu''(t) S(t) dt \right]^2}. \quad (3.1.16)$$

3. Безусловная вариация $V(\hat{\tau})$ конечна лишь при $k\nu > 2$. Это, однако, не означает, что при $k\nu < 2$ оценка момента невозможна, а означает лишь то, что вариация

ция как мера точности оценки в этом случае неприложима и надо пользоваться другими критериями точности, например доверительными интервалами. Подробнее это будет изучено ниже.

4. С ростом ν $V(\tau)$ монотонно убывает, и при $\nu \rightarrow \infty$ формула (3.1.15) переходит в выражение

$$V(\tau) = \frac{\int_0^T [1 + h_0 \mu(t)] S'^2(t) dt}{k \lambda_0 h_0^2 \left[\int_0^T \mu''(t) S(t) dt \right]^2}.$$

Физически это объясняется тем, что с ростом ν уменьшается размах флуктуаций сигнала и при $\nu = \infty$ $p(\rho_s)$ вырождается в δ -функцию, то есть флуктуации полезного сигнала вообще отсутствуют.

Перейдем теперь к нахождению оптимального вида весовой характеристики фильтра $S(t)$. Записывая формулу (3.1.15) в виде

$$V(\tau) = \frac{k \nu^2}{\lambda_0 h_0^2 \left[\int_0^T \mu''(t) S(t) dt \right]^2} \int_0^T \left[1 + \frac{k \nu - 2}{k \nu} h_0 \mu(t) \right] S'^2(t) dt$$

и варьируя $V(\tau)$ по $S(t)$ с учетом условия несмещенности (3.1.5), мы приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt} \left[S'(t) \left(1 + \frac{k \nu - 2}{k \nu} h_0 \mu(t) \right) \right] - \lambda_1 \mu''(t) - \lambda_2 \mu'(t) = 0,$$

где λ_1 и λ_2 — множители Лагранжа. Решение этого уравнения имеет вид

$$S(t) = \lambda_1 \ln[1 + \gamma_0 \mu(t)] + \int_0^t \frac{\lambda_2 \mu(t) + \lambda_3}{1 + \gamma_0 \mu(t)} dt,$$

где $\gamma_0 = h_0 \frac{k \nu - 2}{k \nu}$ и λ_3 — постоянная интегрирования. Так как при $t \rightarrow \infty$ $S(t) \rightarrow 0$ то должно быть $\lambda_3 = 0$. Условие несмещенности выполняется лишь при $\lambda_2 = 0$. Так как $S(t)$ определяется с точностью до произвольного пос-

тоянного сомножителя, то λ_1 можно положить равным единице. Окончательно

$$S(t) = \ln \left[1 + \frac{k\nu - 2}{k\nu} h_0 \mu(t) \right]. \quad (3.1.17)$$

Отметим следующие особенности решения (3.1.17).

а) При $\lambda_0 T \rightarrow \infty$, когда $h_0 \rightarrow 0$, $S(t) \approx \mu(t)$, т. е. оптимальным является обычный согласованный фильтр. Это вполне объяснимо, так как случай $h_0 \rightarrow 0$ означает, что квантовые флуктуации сигнала не играют роли. То, что при $\lambda_0 T = 0$ $S(t)$ отличается от согласованной фильтрации, связано именно с квантовыми флуктуациями полезного сигнала.

б) Формула (3.1.17) имеет смысл лишь при $k\nu > 2$. Это связано с тем, что при $k\nu < 2$ вариация как мера точности оценки неприменима.

в) Для оптимальной весовой функции выражение для вариации оценки момента прихода принимает вид

$$V(\tau) = \frac{k\nu^2}{\lambda_0 h_0^2 (k\nu - 1)(k\nu - 2)} \left[\int_0^T \frac{\mu'^2(t) dt}{1 + \frac{k\nu - 2}{k\nu} h_0 \mu(t)} \right]^{-1}. \quad (3.1.18)$$

Перейдем теперь к вычислению эффективности оценки момента прихода оптического сигнала линейными системами. Распределение вероятностей для величин n_i при фиксированных $\rho_1, \dots, \rho_k$ имеет вид

$$p(\{n_i\} | \rho_1, \dots, \rho_k, \tau_0) = \prod_{i=1}^M \frac{(\beta_i \Delta t)^{n_i}}{n_i!} e^{-\beta_i \Delta t},$$

где

$$\beta_i \Delta t = \left[\lambda_0 + \sum_{s=1}^k \rho_s \mu(t_i - sT - \tau_0) \right] \Delta t.$$

Вычисляя количество информации по Фишеру о величине τ_0 при фиксированных $\rho_1, \dots, \rho_k$, мы приходим к выражению

$$I_{\tau} = \lambda_0 \sum_{s=1}^k h_s^2 \int_0^T \frac{\mu^2(t) dt}{1 + h_s \mu(t)}.$$

Усредняя по величинам $\{h_s\}$ величину I_{τ}^{-1} , получим

$$V_{\min} = \frac{1}{\lambda_0 h_0} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \sum_{S=1}^k \frac{h_s^2 \int_0^T [\mu'^2(t)(1+h_s\mu(t))^{-1}] dt}{h_s^2 \int_0^T [\mu'^2(t)(1+h_s\mu(t))^{-1}] dt} dh_1 \dots dh_k.$$

Отсюда эффективность оценки момента прихода оптического сигнала линейными системами выразится как

$$e = \frac{V_{\min}}{V_\tau} = \frac{(k\nu-1)(k\nu-2)}{k\nu^2} \frac{\int_0^T \mu^2(t) dt}{\int_0^T 1 + \gamma_0 \mu(t) dt} \cdot \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\prod_{S=1}^k p(\{h_s\}) dh_s}{\sum_{S=1}^k h_s^2 \int_0^T [\mu'^2(t)(1+h_s\mu(t))^{-1}] dt}.$$

Заметим, что e зависит от λ_0 и ρ_0 только через их отношение $h_0 = \rho_0/\lambda_0$, а не от каждой из этих величин в отдельности.

$$\text{Можно доказать, что при } p(h_s) = \frac{h_s^{\nu-1} \nu^\nu}{h_0^\nu \Gamma(\nu)} e^{-\frac{h_s \nu}{h_0}}$$

эффективность оценки момента прихода оптических сигналов линейными системами монотонно возрастает с ростом h_0 . Поэтому достаточно исследовать лишь крайние случаи малых и больших h_0 . При больших h_0 , предполагая сходимость интеграла $\int_0^T \frac{\mu'^2(t) dt}{\mu(t)}$ и замечая, что $(1+h_s\mu(t)) \geq h_s\mu(t)$, получим

$$I_\tau \leq \lambda_0 \sum_{S=1}^k h_s \int_0^T \frac{\mu'^2(t) dt}{\mu(t)}.$$

Поэтому

$$V_{\min}(\tau) = \frac{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\prod_{S=1}^k p(\{h_s\}) dh_s}{\sum_{S=1}^k h_s}}{\lambda_0 \int_0^T \frac{\mu'^2(t) dt}{\mu(t)}} = \frac{\nu}{h_0 \lambda_0 (k\nu-1)} \frac{\int_0^T \frac{\mu'^2(t) dt}{\mu(t)}}{\int_0^T \frac{\mu'^2(t) dt}{\mu(t)}},$$

и для эффективности e мы получаем следующее неравенство:

$$e \geq \int_0^T \frac{\gamma_0 \mu'^2(t) dt}{1 + \gamma_0 \mu(t)} \cdot \left[\int_0^T \frac{\mu'^2(t) dt}{\mu(t)} \right]^{-1}. \quad (3.1.19)$$

Отсюда, в частности, следует, что при $h_0 \rightarrow \infty$, когда основную роль играют квантовые флуктуации полезного сигнала, $e \rightarrow 1$ и линейные системы оценки момента прихода являются асимптотически (при $h_0 \rightarrow \infty$) оптимальными. Это есть еще одно проявление того, что при $h_0 \rightarrow \infty$ оптимальными системами обработки оптических сигналов являются линейные системы.

Формула (3.1.19) достаточно проста для оценки эффективности при больших h_0 , так как интегралы, стоящие в ней, обычно легко вычисляются численно.

При малых h_0 , пользуясь неравенством $1 + h_{st} \mu(t) \geq 1$, получим

$$I_{\tau} \leq \lambda_0 \int_0^T \mu'^2(t) dt \cdot \sum_{S=1}^k h_S^2, \quad (3.1.19a)$$

откуда следует

$$V_{\min}(\tau) \geq \frac{C_{k,v} \cdot v^2}{\lambda_0 h_0^2 \int_0^T \mu'^2(t) dt};$$

$$e = C_{k,v} / (1 + \gamma_0 G),$$

где

$$C_{k,v} = \frac{(kv-1)(kv-2)}{k \Gamma^k(v)} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{(x_1 \dots x_k)^{v-1} e^{-\sum_{S=1}^k x_S}}{\sum_{S=1}^k x_S^2} \prod_{S=1}^k dx_S;$$

$$G = \frac{\int_0^T \mu(t) \mu'^2(t) dt}{\int_0^T \mu'^2(t) dt}. \quad (3.1.19b)$$

Таким образом, эффективность оценки момента прихода линейными системами не хуже величины $C_{k,v}$ (табл. 3.1.1).

k	v					
	1	2	3	4	5	6
1	—	—	1,000	1,000	1,000	1,000
2	—	0,856	0,890	0,911	0,925	0,935
3	0,706	0,872	0,910	0,937	—	—
4	0,832	0,920	0,945	0,964	—	—
5	0,945	0,962	0,975	0,988	—	—
6	0,980	0,987	0,995	0,999	—	—

Прочерки в таблице соответствуют случаю $k v \leq 2$, когда вариация как мера точности оценки момента прихода неприменима.

Отметим, что эффективность оценки момента прихода растет с ростом v , а также и с ростом k , случай же $k=1$, когда межимпульсная обработка теряет смысл, естественно, надо исключить. Вообще эффективность линейной системы довольно высока. В худшем случае $k=3$; $v=1$; $e=0,706$, то есть среднеквадратическая погрешность в оценке момента прихода сигнала возрастает по сравнению с оптимальной схемой не более чем на 19%.

Сделаем некоторые дополнительные замечания по поводу полученной оптимальной характеристики фильтра. Мы видим, что для построения оптимальной линейной системы необходимо точное значение величины $h_0 = \rho_0 / \lambda_0$, что не всегда возможно. Исследуем поэтому, насколько критичен фильтр к точному знанию константы h_0 .

Пусть истинное значение $\dot{h}_0$ есть $H_0 \left(\gamma_0 = H_0 \frac{k v - 2}{k v} \right)$, а построили линейную систему, считая, что $h_0 =$

$$= H \left(\gamma = H \frac{k v - 2}{k v} \right).$$

Насколько уменьшилась эффективность системы?

Подставляя в (3.1.15) $S(t) = \ln(1 + \gamma \mu(t))$,

получим

$$V(\tau, \gamma) = \frac{k\nu^2}{\lambda_0 h_0^2 (k\nu - 1)(k\nu - 2)} \int_0^\tau \frac{1 + \gamma \mu(t)}{(1 + \gamma \mu(t))^2} \mu''(t) dt \cdot \left[\int_0^\tau \frac{\mu''(t) dt}{1 + \gamma \mu(t)} \right]^{-1},$$

откуда эффективность этого фильтра по сравнению с оптимальным фильтром (C_{γ_0}) равна

$$e = \frac{V(\tau, \gamma_0)}{V(\tau, \gamma)} = \frac{\left[\int_0^\tau \frac{\mu''(t) dt}{1 + \gamma \mu(t)} \right]^2}{\int_0^\tau \frac{\mu''(t) dt}{1 + \gamma_0 \mu(t)} \cdot \int_0^\tau \frac{1 + \gamma_0 \mu(t)}{(1 + \gamma \mu(t))^2} \mu''(t) dt}. \quad (3.1.20)$$

Оценим величину e , воспользовавшись некоторыми результатами теории интегральных средних значений. Если подынтегральная функция $f(t)$ конечна на интервале $[a, b]$ и неотрицательна, а $\rho(t)$ („весовая функция“) конечна, интегрируема и положительна всюду на этом же интервале, то интегральное среднее имеет вид

$$m(f) = \int_a^b \rho(t) f(t) dt \cdot \left[\int_a^b \rho(t) dt \right]^{-1}. \quad (3.1.21)$$

Пусть ξ — некоторая произвольная величина, принимающая дискретные значения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$, лежащие в интервале $[1, 1+a]$, которая усредняется с весами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. Тогда имеем

$$m(\xi) m\left(\frac{1}{\xi}\right) = (\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_s \xi_s) \left(\frac{\lambda_1}{\xi_1} + \dots + \frac{\lambda_s}{\xi_s} \right),$$

где все λ_i и ξ_i положительны. По каждой переменной ξ_i зависимость приобретает вид $\alpha + \beta \xi_i + \frac{\gamma}{\xi_i}$ с положительными α, β, γ . Эта функция принимает свои мак-

симальные значения на концах интервала изменения для ξ , которые достигаются тогда, когда все распределение сосредоточено на границах интервала для ξ , то есть весовая функция имеет вид

$$p(\xi) = \lambda \delta(\xi - 1) + (1 - \lambda) \delta(\xi - 1 - a),$$

так как $\xi \in [1, 1 + a]$.

Находя для этой весовой функции $m(\xi)$ $m\left(\frac{1}{\xi}\right)$ и максимизируя его по λ , получим

$$1 \leq m(\xi) m\left(\frac{1}{\xi}\right) \leq \frac{(2+a)^2}{4(1+a)}. \quad (3.1.22)$$

Возьмем в качестве усредняемой величины $\xi = \frac{1 + \gamma_0 \mu(t)}{1 + \gamma \mu(t)}$, а в качестве весовой функции $p(t) = \frac{\mu'^2(t)}{1 + \gamma \mu(t)}$, тогда

(3.1.20) можно представить в виде

$$\frac{1}{e} = m(\xi) \cdot m\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Так как $\mu(t) \in [0, 1]$, то $\xi \in \left[1, \frac{1 + \gamma_0}{1 + \gamma}\right]$, поэтому согласно неравенству (3.1.22) получаем

$$e \geq \frac{4(1 + \gamma)(1 + \gamma_0)}{(2 + \gamma + \gamma_0)^2}. \quad (3.1.23)$$

Чтобы представить себе, насколько критичен фильтр к точному значению h_0 , рассмотрим пример: пусть γ лежит в интервале $\left[\frac{\gamma_0}{2}, 2\gamma_0\right]$. В этом случае $\frac{1 + \gamma_0}{1 + \gamma}$ не выходит из интервала $(1/2; 2)$ и $e \geq 0,889$. Таким образом, если γ отличается от истинного значения γ_0 в 2 раза, эффективность уменьшается не более чем на 11,1%, что говорит о том, что максимальная система малокритична к точному значению H_0 .

§ 2. Плотность вероятностей оценки момента прихода сигнала

Выше мы получили, что при $k\nu \leq 2$ оценка качества линейной системы дисперсией неприменима в силу бесконечности дисперсии. Для более подробного рассмотрения мы получим приближенные формулы для плотности вероятностей величины τ , в предельных случаях $\lambda_0 T \gg 1$ и $\lambda_0 T \ll 1$.

Рассмотрим сначала случай $\lambda_0 T \gg 1$. В этом случае оптимальный линейный фильтр имеет весовую характеристику $S(t)$. Как уже было указано выше, для погрешности в оценке момента прихода сигнала мы имеем формулу

$$\tau = \hat{\tau} - \tau_0 = -\frac{z'(\tau_0)}{z''(\tau_0)}, \quad (3.2.1)$$

в случае $S(t) = \mu(t)$

$$\overline{z''(\tau_0)} = \lambda_0 \int_0^T \mu''(t) dt + \sum_{s=1}^k \rho_s \int_0^T \mu(t) \mu''(t) dt = -a^2 \sum_{s=1}^k \rho_s, \quad (3.2.2)$$

где $a = \int_0^T \mu'^2(t) dt$. Что касается величины $z'(\tau_0)$, то в силу того, что $\lambda_0 T \gg 1$, она будет приближенно нормальной с нулевым средним значением и дисперсией

$$D[z'(\tau_0)] = k \lambda_0 \int_0^T \mu'^2(t) dt + \sum_{s=1}^k \rho_s \int_0^T \mu(t) \mu'(t) dt \approx \lambda_0 k a^2, \quad (3.2.3)$$

так как при $\lambda_0 T \gg 1$ $\rho_s / \lambda_0 \ll 1$.

Таким образом, при фиксированных $\{\rho_s\}$ величину τ можно считать приближенно нормальной с нулевым средним значением и дисперсией

$$D(\tau) = \frac{k}{a^2 \left(\sum_{s=1}^k q_s \right)^2}, \quad (3.2.4)$$

где $q_s = \frac{\rho_s}{V \lambda_0}$. Перейдем для стандартизации к безразмерной величине $v = \tau \frac{a q_0}{V \sqrt{k}}$, $q_0 = \rho_0 / V \lambda_0$, которая также

будет приближенно нормальной с нулевым средним значением и дисперсией

$$D[v] = \frac{q_0^2}{\left(\sum_{s=1}^k q_s\right)^2}, \quad (3.2.5)$$

то есть

$$p(v, \{q_s\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sum_{s=1}^k q_s}{q_0} e^{-\frac{v^2 \left(\sum_{s=1}^k q_s\right)^2}{2q_0^2}}. \quad (3.2.6)$$

Для нахождения безусловной плотности вероятностей величины v необходимо усреднить $p(v/\{q_s\})$ по величинам $\{q_s\}$. Обозначая $\frac{1}{q_0} \sum_{s=1}^k q_s$ через u , получаем, что u будет случайной величиной с плотностью вероятностей

$$p(u) = \frac{u^{kv-1} \cdot \gamma^{kv}}{\Gamma(kv)} e^{-u\gamma}. \quad (3.2.7)$$

Усредняя (3.2.6) по (3.2.7), получим

$$p_{kv}(v) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|\xi|^{kv+1}} e^{\frac{1}{k\xi^2}} D_{-(kv+1)}\left(\frac{1}{|\xi|}\right), \quad (3.2.8)$$

где $\xi = \frac{v}{\gamma}$, $D_p(\cdot)$ — функция параболического цилиндра.

Вообще говоря, при целых kv плотность вероятностей может быть выражена и через функцию ошибок. Так, при $kv=1$ ($k=1$, $v=1$)

$$p_1(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v^2} - \frac{1}{2|v|^3} e^{\frac{1}{2v^2}} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{|v|\sqrt{2}}\right) \right]. \quad (3.2.9)$$

При малых и больших v для $p_{kv}(v)$ можно получить более простые формулы, пользуясь разложениями для функций параболического цилиндра.

Так, при больших v приближенно

$$p_{kv}(v) \cong \frac{k D_{-(kv+1)}(0)}{\sqrt{2\pi} |\xi|^{kv+1}}. \quad (3.2.10)$$

Из (3.2.10) ясно, почему при $kv \leq 2$ дисперсия величины τ бесконечна. Действительно, при $kv=1$ на бесконечности $p_1(v)$ убывает как $\frac{1}{v^2}$ (аналогично распределению Коши), и интеграл, выражающий дисперсию, расходится. При $kv=2$ интеграл, выражающий дисперсию, имеет на бесконечности логарифмическую расходимость.

Как же следует оценивать качество оценки τ при $kv=2$? По-видимому, наиболее определенной является оценка качества доверительным интервалом, то есть таким интервалом, в который величина τ попадает с заранее заданной вероятностью α .

Задаваясь вероятностью α , найдем такой симметричный около нуля интервал $[-C(\alpha), C(\alpha)]$, в который величина v попадает с вероятностью α .

Задаваясь вероятностью α , найдем такой симметричный около нуля интервал $[-C(\alpha), C(\alpha)]$, в который величина v попадает с вероятностью α .

$$\int_{C(\alpha)}^{\infty} p_{kv}(v) dv = \frac{1-\alpha}{2}. \quad (3.2.11)$$

В этом случае с вероятностью α величина τ попадает в интервал $\left[-\frac{C(\alpha)\sqrt{k}}{aq_0}, \frac{C(\alpha)\sqrt{k}}{aq_0} \right]$.

Величина $C(\alpha)$ и является мерой точности оценки τ . Для ее нахождения при α , близких к 1, можно вместо точного выражения для $p_{kv}(v)$ пользоваться его асимптотикой (3.2.10).

Рассмотрим теперь другой крайний случай, когда $\lambda_0 T \ll \rho_0 T$. Если весовая характеристика фильтра есть $S(t)$, то, предполагая, что $S'(0)=S(0)=S(T)=S'(T)=0$,

$$\text{получим } \overline{z''(\tau_0)} = - \sum_{s=1}^k \rho_s \int_0^T \mu'(t) S'(t) dt. \quad (3.2.12)$$

Вычисляя $D[z'(\tau_0)]$, получим

$$D[z'(\tau_0)] = k \lambda_0 \int_0^T S''^2(t) dt + \sum_{s=1}^k \rho_s \int_0^T \mu(t) S'^2(t) dt. \quad (3.2.13)$$

Так как внешний шум слаб, то первым слагаемым в выражении для дисперсии можно пренебречь. Кроме

того, заметим, что для точного определения дальности число полезных фотоэлектронов должно быть достаточно велико (по крайней мере, несколько десятков). Это позволит (хотя и не слишком точно) применить нормальную аппроксимацию. Тогда ошибка в оценке момента прихода $\tau - \tau_0 = \tau$ будет нормальной (при фиксированных $\rho_1, \dots, \rho_k$) случайной величиной с нулевым средним значением и дисперсией

$$D[\tau] = \frac{\int_0^T \mu(t) S'^2(t) dt}{\sum_{s=1}^k \rho_s \left[\int_0^T \mu'(t) S'(t) dt \right]^2}. \quad (3.2.14)$$

Переходя к безразмерной величине

$$v = \tau \frac{a \sqrt{\rho_0}}{\sqrt{2\nu}};$$

$$a^2 = \frac{\left[\int_0^T \mu'(t) S'(t) dt \right]^2}{\int_0^T \mu(t) S^2(t) dt},$$

мы получим, что v будет нормальной (при фиксированных $\{\rho_s\}$) случайной величиной с нулевым средним

и дисперсией $D[v] = \frac{\rho_0}{2\nu} \sum_{s=1}^k \rho_s$, то есть

$$p(v | \{\rho_s\}) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \sqrt{\frac{\sum_{s=1}^k \rho_s}{\rho_0}} e^{-\frac{\nu v^2 \sum_{s=1}^k \rho_s}{\rho_0}}.$$

Так как случайная величина $u = \frac{1}{\rho_0} \sum_{s=1}^k \rho_s$ имеет плотность вероятностей

$$p(u) = \frac{u^{k\nu-1} \cdot \nu^{k\nu}}{\Gamma(k\nu)} e^{-u\nu},$$

то, усредняя $p(v/u)$ по u , получим следующее выражение для безусловной плотности вероятностей величины v :

$$p(v) = \frac{\Gamma\left(kv + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(kv)} \cdot \frac{1}{(v^2 + 1)^{kv + \frac{1}{2}}} \quad (3.2.15)$$

Теперь можно найти доверительные границы для величины v . Задаваясь доверительной вероятностью α , для границ интервала $[-C, C]$, в который величина v попадает с вероятностью α , получим

$$\frac{1-\alpha}{2} = \frac{\Gamma\left(kv + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(kv)} \int_{C(\alpha)}^{\infty} \frac{dv}{(1+v^2)^{kv + \frac{1}{2}}} \quad (3.2.16)$$

В частности, для $kv=1$

$$C(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Вообще говоря, при α , близких к 1, когда $C \gg 1$, пренебрегая в (3.2.16) единицей по сравнению с v^2 , получим приближенно

$$C(\alpha) = \sqrt{\frac{\Gamma\left(kv + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(kv)} \cdot \frac{1}{1-\alpha}}.$$

Доверительный интервал для погрешности τ есть

$$\left[-\frac{C}{\alpha} \sqrt{\frac{2v}{\rho_0}}, \frac{C}{\alpha} \sqrt{\frac{2v}{\rho_0}} \right].$$

Что же можно сказать об оптимальной весовой характеристике $S(t)$ фильтра в этом случае? В том приближении, в котором были выведены формулы для доверительного интервала величины τ , она зависит от характеристики фильтра только через величину α . Максимизируя α по $S(t)$, получим

$$S(t) = C_1 + \ln \mu(t),$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Однако данная формула не удовлетворяет физическим требованиям на вид функции $S(t)$, так как при $t \rightarrow \infty$ $S(t) \rightarrow \infty$. Поэтому следует отбросить те участки, где $S(t) < 0$, и считать

$$S(t) = \begin{cases} C_1 + \ln \mu(t), & \text{если } C + \ln \mu(t) > 0; \\ 0, & \text{если } C + \ln \mu(t) < 0, \end{cases}$$

или $S(t) \approx \ln(1 + \gamma \mu(t))$. Что касается констант C или γ , то они данными формулами не определяются; точнее, чем больше C или γ , тем лучше фильтр. По-видимому, γ следует брать примерно равным h_0 .

§ 3. Исследование линейных систем по функции неопределенности

Заметим, что все выведенные выше формулы приложимы лишь для достаточно гладких импульсов, для которых $z(\tau)$ в окрестности главного максимума хорошо аппроксимируется параболой. Чем более крутые участки имеет сигнал, тем больше требуется отношение сигнала к шуму, чтобы хорошо проявилась параболичность вершины $z(\tau)$. Математически это находит свое отражение в том, что $V(\tau)$ обратно пропорционально $\int_0^T \mu'^2(t) dt$ (при $\lambda_0 T \gg 1$) или $\int_0^T (\mu'^2(t) \mu(t)) dt$ (при малых $\lambda_0 T$).

Однако, например, для прямоугольного импульса $\int_0^T \mu'^2(t) dt = \infty$ и получается $V(\tau)$, что совершенно противоречит физическому смыслу задачи. Дело здесь в том, что для прямоугольного импульса параболическая аппроксимация $z(\tau)$ принципиально неприменима, так как $z(\tau)$ имеет вид ломаной прямой. Для подобных сигналов следует искать другие выражения для дисперсии.

Эти формулы мы получим на основе обобщенной функции неопределенности [41]. Они получаются лишь для случая $\lambda_0 T \gg 1$, $S(t) = \mu(t)$.

Оценка момента прихода сигнала производится на

основе наблюдения процесса $z(\tau)$, который в силу $\lambda_0 T \gg 1$ является приближенно нормальным случайным процессом. Его среднее значение

$$\overline{z(\tau)} = k \lambda_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t + \tau) dt + \sum_{s=1}^k \rho_s \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t + \tau_0) \mu(t + \tau) dt. \quad (3.3.1)$$

Вводя функцию автокорреляции полезного импульса

$$R(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t) \mu(t + \xi) dt \quad (3.3.2)$$

и замечая, что при бесконечных пределах интегрирования первое слагаемое в (3.3.1) постоянно и не зависит от τ и поэтому не играет роли (постоянная составляющая процесса $z(\tau)$), получим

$$\overline{z(\tau)} = \sum_{s=1}^k \rho_s R(\tau - \tau_0). \quad (3.3.3)$$

Находя функцию ковариации процесса $z(\tau)$ и пренебрегая слагаемыми с ρ_s/λ_0 , получим

$$R_z(\tau_1, \tau_2) = k \lambda_0 R(\tau_1 - \tau_2). \quad (3.3.4)$$

Плотность вероятностей процесса z можно теперь записать как

$$p(z_1, \dots, z_N | \rho_1, \dots, \rho_k) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} K_{ij} (z_j - \bar{z}_j) (z_i - \bar{z}_i) \right\}}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det R}}, \quad (3.3.5)$$

где $z_i = z(\tau_i)$, $R = \| R_{ij} \|$, $R_{ij} = k \lambda_0 R(\tau_i - \tau_j)$, а величины K_{ij} , составляющие матрицу K , находятся из уравнения

$$\sum_j K_{ij} R_{js} = \delta_{is}, \quad (3.3.6)$$

или, если устремить к нулю интервал между отсчетами τ_i в интегральной форме,

$$k \lambda_0 \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi - \eta) R(\eta) d\xi = \delta(\eta). \quad (3.3.7)$$

Заметим, что от неизвестного параметра τ_0 зависят лишь $\bar{z}_l$, так как K_{ij} , зависящие лишь от разности $\xi_i - \xi_j$, от τ_0 не зависят. Расписывая показатель экспоненты в (3.3.5) и переходя к пределу при $\Delta\tau \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^N K_{ij} (z_i - \bar{z}_i) (z_j - \bar{z}_j) = \\ &= -\frac{1}{2} \int \int K(\xi_1 - \xi_2) H(\xi_1) H(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 - \\ &- \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^k \rho_s \right)^2 \int \int K(\xi_1 - \xi_2) R(\xi_1 - \tau) R(\xi_2 - \tau) d\xi_1 d\xi_2 + \\ &+ \left(\sum_{s=1}^k \rho_s \right) \int \int K(\xi_1 - \xi_2) H(\xi_1) R(\xi_2 - \tau) d\xi_1 d\xi_2, \quad (3.3.8) \end{aligned}$$

где $H(\xi) = z(\tau) = \lambda_0 k m_1$, $m_1 = \int_0^\tau \mu(t) dt$.

Учитывая (3.3.6), получим

$$Q = Q_0 - \frac{m_1^2}{2\kappa} \left(\sum_{s=1}^k q_s \right)^2 + \frac{\sum_{s=1}^k q_s}{V \lambda_0} H(\tau), \quad (3.3.9)$$

где Q_0 от τ не зависит.

Учитывая, что $q = \sum_{s=1}^k q_s$ есть случайная величина с плотностью вероятностей $p(q) = \frac{q^{k\nu-1} \cdot \nu^{k\nu}}{q_0^{k\nu} \Gamma(k\nu)} e^{-\frac{q\nu}{q_0}}$, и усредняя (3.3.9) по q , получим

$$\begin{aligned} &p(z_1, \dots, z_N | \tau_0) = \\ &= \frac{e^{Q_0} \left(\frac{m_1^2}{k} \right)^{-\frac{k\nu}{2}}}{(2\pi)^{N/2} V \det R} \exp \left\{ \frac{k}{\lambda_0 m_1^2} \left(\frac{\nu}{q_0} - \frac{H(\tau)}{V \lambda_0} \right)^2 \right\} \cdot \\ &\cdot D_{-k\nu} \left(\frac{k}{\lambda_0 m_1^2} \left(\frac{H(\tau)}{V \lambda_0} - \frac{\nu}{q_0} \right) \right). \quad (3.3.10) \end{aligned}$$

Для нас основным является то, что $p(z_1, \dots, z_N | \tau)$ зависит от τ только через $H(\tau)$, и то, что $p(z_1, \dots, z_N | \tau)$ монотонно возрастает с ростом $H(\tau)$. Поэтому, находя оценку момента прихода по методу максимального правдоподобия (по наблюдениям процесса $z(\tau)$), мы получим, что оценку τ_0 следует искать из условия

$$z(\tau) = \max.$$

Таким образом, получился алгоритм, который и рассматривался с самого начала. Но теперь, так как этот алгоритм является следствием метода максимального правдоподобия, мы можем воспользоваться обобщенной функцией неопределенности и связанными с ней формулами.

Вообще говоря, при больших отношениях сигнала к шуму точное значение амплитуды сигнала ρ или его полное незнание мало сказывается на точности оценки дальности. Поэтому будем вычислять функцию неопределенности $\hat{g}(\tau, \tau_0)$, предполагая, что $\sum_{s=1}^k \rho_s$ нам известна.

Подставляя (3.3.5)–(3.3.9) в выражение для функции неопределенности, мы получим с точностью до слагаемых, не зависящих от τ и τ_0 :

$$\hat{g}(\tau, \tau_0) = \frac{\left(\sum_{s=1}^k \rho_s\right)^2}{k \lambda_0} R(\tau - \tau_0) = \frac{1}{k} \left(\sum_{s=1}^k q_s\right)^2 R(\tau), \quad (3.3.11)$$

где $\tau = \tau - \tau_0$ есть ошибка в оценке момента прихода сигнала.

Таким образом, условная плотность вероятностей ошибки в оценке момента прихода имеет вид

$$p(\tau | \{q_s\}) = C \cdot e^{-\frac{\left(\sum_{s=1}^k q_s\right)^2}{k}} R(\tau), \quad (3.3.12)$$

где C — нормировочный множитель.

Рассмотрим случай, когда $\mu(t)$ дважды дифферен-

цируема и $\sum_{s=1}^k q_s$ достаточно велика. В этом случае, разлагая $R(\tau)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членом с τ^2 , получим

$$p(\tau) = C e^{-\left(\frac{\left(\sum_{s=1}^k q_s \right)^2 \int_0^T \mu'^2(t) dt}{k} \right)}$$

Из условия нормировки $C = \frac{\sum_{s=1}^k q_s}{2\pi\sqrt{k} \sqrt{\int_0^T \mu'^2(t) dt}}$, и мы приходим к формуле (3.2.6). Дисперсия τ в этом случае равна

$$D[\tau] = \frac{k}{(\sum_{s=1}^k q_s)^2 \int_0^T \mu'^2(t) dt},$$

что совпадает с ранее полученной формулой (3.2.4).

Однако функция неопределенности и связанное с ней выражение для дисперсии позволяют получить правильные выражения для дисперсии ошибки в оценке момента прихода и ее плотности вероятностей и в тех случаях, когда формулы (3.2.4), (3.2.6) и т. п. неверны.

Рассмотрим, например, случай прямоугольного импульса

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{T}{2}; \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (3.3.13)$$

Его функция автокорреляции имеет вид

$$R(\xi) = \begin{cases} T \left(1 - \frac{|\xi|}{T} \right), & |\xi| < T; \\ 0, & |\xi| > T. \end{cases} \quad (3.3.14)$$

При больших отношениях сигнала к шуму, пренебрегая тем участком $R(\xi)$, где $R(\xi) = 0$, получим

$$p(\tau) = \frac{\left(\sum_{s=1}^k q_s\right)^2}{2kT} \exp\left\{-\frac{\left(\sum_{s=1}^k q_s\right)^2}{k} \frac{|\tau|}{T}\right\}, \quad (3.3.15)$$

здесь под q_s понимается $\frac{\rho_s T}{\sqrt{\lambda_0 T}}$, а сомножитель перед экспонентой найден из условия нормировки. Отсюда при фиксированных $\{q_s\}$ условная дисперсия ошибки τ будет

$$V(\tau | \{q_s\}) = \frac{k^2 T^2}{\left(\sum_{s=1}^k q_s\right)^4}. \quad (3.3.16)$$

Усредняя по случайным величинам $\{q_s\}$, получим безусловную дисперсию ошибки в виде

$$V(\tau) = \frac{T^2}{q_0^4} \frac{k^2 \nu^4}{(k\nu-1)(k\nu-2)(k\nu-3)(k\nu-4)}. \quad (3.3.17)$$

Отсюда видно, что безусловная дисперсия конечна лишь при $k\nu \geq 5$. Это, конечно, связано лишь с пренебрежением участком, где $q_0 \ll 1$.

Что касается безусловной плотности вероятностей ошибки, то, переходя к безразмерной величине $v = \frac{\tau}{T k q_0^2}$ и усредняя по $\{q_s\}$, получим

$$p_{kv}(v) = \frac{\nu^{k\nu+1} (k\nu+1) k\nu}{(2|v|)^{\frac{k\nu+2}{2}}} e^{\frac{\nu^2}{8|v|}} \cdot D_{-(k\nu+2)}\left(\frac{\nu}{\sqrt{2|v|}}\right),$$

что позволяет находить доверительные границы для величины v , а следовательно, и τ .

$R(\tau)$ всегда есть функция четная. Выше мы рассмотрели, таким образом, случай, когда $R(\tau)$ имеет в нуле угол, то есть при $\tau=0$ слева и справа существуют производные, не равные нулю, а в первом параграфе — случай, когда $\tau=0$, $R'(0)=0$, но $R'' \neq 0$. Нам осталось рассмотреть еще те вырожденные случаи, когда $R'(0)=0$, $R''(0)=0$, то есть непригодны ни пара-

болическая аппроксимация, ни аппроксимация ломаной линией.

Будем при $t=0$ рассматривать лишь производные справа. Пусть порядок первой, отличной от нуля, производной есть n .

В этом случае $R(\tau)$ имеет в окрестности $\tau=0$ аппроксимацию вида |

$$R(\tau) = R(0) - a_n \left(\frac{\tau}{T} \right)^n, \quad (3.3.18)$$

где $a_n = \frac{R_0^{(n)} \cdot T^n}{n!}$. Плотность вероятностей погрешности τ при фиксированных $\{q_s\}$ запишется в виде

$$p(\tau) = \frac{|1|}{2E_n} \sqrt[n]{\frac{\left(\sum_{s=1}^k q_s\right)^2 a_n}{k}} \exp \left\{ -\frac{\left(\sum_{s=1}^k q_s\right)^2}{k} a_n \left| \frac{\tau}{T} \right|^n \right\},$$

где $E_n = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$. Переходя к безразмерной величине

$v = \frac{\tau}{T} \sqrt[n]{\frac{q_0^2 a_n}{k}}$ и усредняя по величинам $\{q_s\}$, получим

$$p_{kv}(v) = \frac{k \Gamma\left(k\nu + \frac{2}{n}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma(k\nu) \frac{v^2}{n}} \left(\frac{v}{\sqrt{2|v|}} \right)^{\frac{v^2}{8|v|^n}} \cdot D_{-\left(k\nu + \frac{2}{n}\right)} \left(\frac{v}{\sqrt{2|v|^n}} \right).$$

Что касается дисперсии, то при фиксированных $\{q_s\}$ дисперсия величины v будет

$$D[v | \{q_s\}] = \frac{1}{z^{4/n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)},$$

где $z = \frac{1}{q_0} \sum_{s=1}^k q_s$, а безусловная дисперсия

$$D[v] = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(kv - \frac{4}{n}\right)}{\Gamma(kv)v^{4/n}}.$$

Безусловная дисперсия конечна при $kv > \frac{4}{n}$. Переходя к величине τ , окончательно получим

$$D[\tau] = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\Gamma\left(kv - \frac{4}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma(kv)v^{\frac{2}{n}}} \frac{K^{\frac{2}{n}}}{a_n^{2/n} q_0^{4/n}}, \quad (3.3.19)$$

т. е. с ростом q_0 дисперсия погрешности $D(\tau)$ убывает как $\sqrt[n]{q_0^4}$. Заметим, что чем больше $q_0^{-4/n}$, тем медленнее убывает $D[\tau]$ с ростом q_0 . Это, по-видимому, объясняется тем, что с увеличением k максимум $z(\tau)$ становится все более пологим и его положение все труднее зафиксировать точно.

§ 4. Согласованный фильтр

Для построения оптимального фильтра необходимо знание величины h_0 . Представляет интерес выяснить, насколько фильтр с весовой характеристикой $S(t) = \mu(t)$ будет хуже фильтра, изученного в предыдущих параграфах. Подставляя $S(t) = \mu(t)$ в формулу (3.1.15), получим, что для согласованного фильтра

$$V_{\tau_c} = \frac{kv - 2}{kv(kv - 1)h_0^2} \frac{\int_0^{\tau} (1 + \gamma_0 \mu(t)) \mu'^2(t) dt}{\left[\int_0^{\tau} \mu'^2(t) dt \right]^2}, \quad (3.4.1)$$

откуда относительная эффективность фильтра, согласованного со входным сигналом, по сравнению с эффективностью оптимального фильтра определится отношением

$$e = \frac{V_{\tau_0}}{V_{\tau_c}} \frac{\left[\int_0^T \mu'^2(t) dt \right]^2}{\int_0^T (1 + \gamma_0 \mu(t)) \mu'^2(t) dt \int_0^T \frac{\mu'^2(t) dt}{1 + \gamma_0 \mu(t)}}. \quad (3.4.2)$$

Выбирая в нашем случае в качестве весовой функции $p(t) = \mu'^2(t)$, мы будем иметь

$$e = \frac{1}{m(1 + \gamma_0 \mu(t)) \dot{m} \left(\frac{1}{1 + \gamma_0 \mu(t)} \right)}.$$

Поскольку функция $\frac{1}{x}$ при $x > 0$ является выпуклой, то в силу неравенства имеем

$$m \left(\frac{1}{1 + F \mu(t)} \right) \geq \frac{1}{m(1 + F \mu(t))},$$

а поэтому $e < 1$ всегда, что, вообще говоря, очевидно a priori. Дифференцируя $\frac{1}{e}$ по F , мы получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dF} \left(\frac{1}{e} \right) &= \frac{1}{\left[\int_0^T \mu'^2(t) dt \right]^2} \left\{ \int_0^T \mu \mu' dt \int_0^T \frac{\mu'^2 dt}{1 + F \mu} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T (1 + F \mu) \mu'^2(t) dt \int_0^T \frac{\mu \mu'^2 dt}{[1 + F \mu]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Для того чтобы исследовать знак производной (3.4.3), возьмем в качестве весовой функции $p(\mu) = \mu(t) \mu'^2(t)$.

В этом случае знак $\frac{d}{dF} \left(\frac{1}{e} \right)$ будет совпадать со знаком выражения

$$m \left\{ \frac{1}{\mu(t)(1 + F \mu(t))} \right\} - m \left\{ \frac{1 + F \mu(t)}{\mu(t)} \right\} m \left\{ \frac{1}{[1 + F \mu(t)]^2} \right\}. \quad (3.4.4)$$

Функции $\xi = \frac{1}{(1 + F \mu)^2}$ и $\eta = \frac{1 + F \mu}{\mu}$ при возрастании μ

убывают, то есть одинаково упорядочены. Применим к (3.4.4) неравенство Чебышева [34,39] для одинаково упорядоченных функций

$$m(\xi) \cdot m(\eta) \leq m(\xi\eta),$$

а отсюда получаем, что $\frac{d}{d\gamma_0} \left(\frac{1}{e} \right) \geq 0$, то есть эффективность $e(\gamma_0)$ является монотонно убывающей функцией от γ_0 .

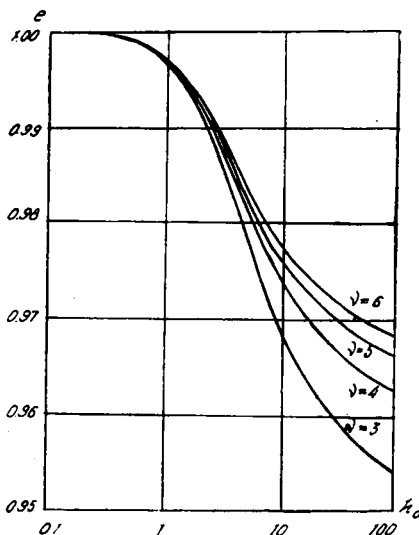


Рис. 3.4.1

Обозначая $(1 + \gamma_0 \mu(t))$ через ξ , будем иметь

$$e = \frac{1}{m(\xi) m\left(\frac{1}{\xi}\right)}.$$

Так как $\xi \in [1, 1 + \gamma_0]$, то имеем

$$\frac{4(1 + \gamma_0)}{(2 + \gamma_0)^2} \leq e \leq 1. \quad (3.4.5)$$

Эти границы изображены на рис. 2.2.1. Однако для реально встречающихся $\mu(t)$ $e(\gamma)$ лежат гораздо выше указанной в (3.4.5) границы. Для примера на рис. 3.4.1.

приведены $e(\gamma_0)$ для сигналов в виде трапеции

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau_1}, & 0 \leq t \leq \tau_1; \\ 1, & \tau_1 \leq t \leq 1 - \tau_2; \\ \frac{1-t}{\tau_2}, & 1 - \tau_2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

и в виде параболы

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & |t| < 1; \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

найденные по формуле (3.4.2). Из рис. 3.4.1 видно, что при малых h_0 согласованный фильтр обеспечивает почти такую же точность в оценке дальности, что и оптимальный.

§ 5. Случай нефлуктуирующего полезного сигнала

Рассмотрим оценку момента прихода сигнала в случае, когда флуктуации интенсивности полезного сигнала отсутствуют, то есть $p(\rho) = \delta(\rho - \rho_0)$. В этом случае выход кросс-коррелятора представляется в виде

$$z(\tau) = \sum_i S(t_i - \tau), \quad (3.5.1)$$

где t_i — моменты появления фотоэлектронов, или в виде

$$z(\tau) = \sum_i n_i S(t_i - \tau), \quad (3.5.2)$$

где n_i — число фотоэлектронов на элементарном интервале длиной Δt . Условие несмещенности оценки $\tau=0$ приводит в этом случае к требованию $z'(0)=0$, которое в явном виде с учетом того, что

$$\overline{n_i} = [\lambda_0 + \rho_0 \mu(t_i - \tau)] \Delta t,$$

после предельного перехода при $\Delta t \rightarrow 0$ запишется формулой

$$\lambda_0 \int_0^T S'(t) dt + \int_0^T S'(t) \mu(t) dt = 0,$$

где λ_0 — суммарная интенсивность темнового тока и потока фотоэлектронов от широкополосного внешнего фона. Из физических соображений следует, что $S(t)$ и её производные должны обращаться в нуль при $t=0$ и $t=T$. В этом случае условие несмещённости примет вид

$$\int_0^T \mu(t) S'(t) dt = \int_0^T \mu'(t) S(t) dt = 0. \quad (3.5.3)$$

Для вычисления вариации оценки момента прихода вновь воспользуемся формулой (3.1.15). Вычисляя $D[z'(0)]$ и $\overline{z''(0)}$, получим

$$D[z'(0)] = \int_0^T (\lambda_0 + \rho_0 \mu(t)) S'^2(t) dt; \quad (3.5.4)$$

$$\overline{z''(0)} = \rho_0 \int_0^T \mu''(t) S(t) dt. \quad (3.5.5)$$

Отсюда

$$V_\tau = \int_0^\infty V(\rho) p(\rho) d\rho = \frac{\int_0^T (1 + h_0 \mu(t)) S'^2(t) dt}{\lambda_0 h_0^2 \left[\int_0^T \mu''(t) S(t) dt \right]^2}, \quad (3.5.6)$$

где $h_0 = \frac{\rho_0}{\mu_0}$. Варьируя V_τ по $S(u)$ с учетом физического ограничения (3.5.3), получаем следующее уравнение для оптимальной весовой функции кросс-коррелятора:

$$\frac{d}{dt} [S'(t)(1 + h_0 \mu(t))] - \lambda_1 \mu''(t) - \lambda_2 \lambda'(t) = 0, \quad (3.5.7)$$

где λ_1 и λ_2 — неопределенные множители Лагранжа. Решение уравнения (3.5.7) имеет вид

$$S(t) = \lambda_1 \ln(1 + h_0 \mu(t)) + \int_0^T \frac{\lambda_2 + \lambda_3 \mu(t)}{1 + h_0 \mu(t)} dt, \quad (3.5.8)$$

где λ_3 — постоянная интегрирования. Из (3.1.17) следует, что $S(t)$ определяется с точностью до постоянного сомножителя, поэтому λ_1 можно положить равным 1.

Далее, так как $S(t)$ должно быть равно нулю при $t \rightarrow 0$, то $\lambda_3 = 0$. Что касается λ_2 , то оно определяется из условия несмещенности

$$\lambda_2 = - \frac{h_0 \int_0^T \frac{\mu(t)\mu'(t)dt}{1+h_0\mu(t)}}{\int_0^T \frac{\mu^2(t)dt}{1+h_0\mu(t)}}. \quad (3.5.9)$$

В силу того, что $\frac{\mu(t)\mu'(t)dt}{1+h_0\mu(t)} = d\left[\frac{1}{h_0}\left[\mu(t) - \frac{1}{h_0} \ln(1+h_0\mu(t))\right]\right]$,

то есть является полным дифференциалом, и на концах интервала $[0, T]$ полезный сигнал обращается в нуль, $\int_0^T \frac{\mu(t)\mu'(t)dt}{1+h_0\mu(t)} = 0$, а значит, и $\lambda_2 = 0$. Окончательно получаем

$$S(t) = \ln(1+h_0\mu(t)). \quad (3.5.10)$$

Заметим, что при $h_0 \ll 1$, когда пуассоновские флуктуации слабые, $S(t) \approx \mu(t)$, то есть мы имеем обычную весовую функцию кросс-коррелятора (согласованного фильтра). Учет пуассоновских флуктуаций приводит к тому, что $S(t)$ приобретает вид (3.5.10), отличный от обычно применяемого в радиолокации. Для весовой функции (3.5.10) после несложных преобразований вариация оценки τ_0 приобретает вид

$$V_{\tau} = \frac{1}{\lambda_0 h_0^2} \frac{1}{\int_0^T \frac{\mu'^2(t)dt}{1+h_0\mu(t)}}. \quad (3.5.11)$$

Оценим теперь эффективность кросс-коррелятора как прибора для оценки момента прихода сигнала.

Вычисляя количество информации по Фишеру I_{τ} о величине τ , получим

$$I_{\tau} = \lambda_0 h_0^2 \int_0^T \frac{\mu'^2(t)dt}{1+h_0\mu(t)},$$

откуда следует, что минимальная вариация оценки величины τ равна

$$V_{\tau} = \left[\lambda_0 h_0^2 \int_0^T \frac{\mu'^2(t) dt}{1 + h_0 \mu(t)} \right]^{-1}. \quad (3.5.12)$$

Совпадение (3.5.12) и (3.5.11) говорит о том, что в принятом нами приближении кросс-коррелятор (3.5.10) является оптимальной системой для определения момента прихода сигнала.

§ 6. Учет когерентной составляющей

Выше были рассмотрены лишь те случаи, когда случайные процессы на входе фотодетектора имеют нулевые средние значения. Если рассматривать не локационные, а связанные задачи, то процессы, поступающие на вход фотодетектора, могут иметь и не нулевые средние значения. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — независимые случайные процессы с ненулевыми средними значениями. В случае сильной корреляции их можно представить в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \xi \sqrt{\mu(t)}; \\ y(t) &= \eta \sqrt{\mu(t)}, \end{aligned}$$

где ξ и η — нормальные независимые случайные величины с дисперсиями ρ_n и средними значениями $\sqrt{\rho_c}$, а $\mu(t)$ определяет форму сигнала и считается заданной. Оценка момента прихода сигнала линейной системой ведется по k независимо флуктуирующим импульсам. От каждого импульса на фоне темнового тока фотодетектора постоянной интенсивности λ_0 появляется „сигнальный“ поток фотоэлектронов на выходе интенсивностью

$$\lambda_r = x_r^2(t) + y_r^2(t) = (\xi_r^2 + \eta_r^2) \mu(t) = \rho_r \mu(t). \quad (3.6.1)$$

Величины $\rho_r (r=1, k)$ как огибающие нормального случайного процесса распределены по закону

$$p(\rho_r) = \frac{1}{\rho_n} e^{-\frac{\rho_r + \rho_c}{\rho_n}} I_0 \left(2 \sqrt{\frac{\rho_r \rho_c}{\rho_n}} \right),$$

а сумма $\rho = \sum_{r=1}^k \rho_r$ имеет распределение [42]

$$p(\rho) = \frac{1}{\rho_n} \left(\frac{\rho}{k \rho_c} \right)^{\frac{k-1}{2}} e^{-\frac{\rho + k \rho_c}{\rho_n}} I_{k-1} \left(2 \sqrt{\frac{\rho \rho_c k}{\rho_n}} \right), \quad (3.6.2)$$

то есть нецентральное χ^2 -распределение с $2k$ степенями свободы.

Посмотрим, как изменятся полученные выше формулы дисперсии оценки τ для случая $\rho_c \neq 0$. В качестве независимых переменных мы возьмем $\rho_0 = \rho_c + \rho_n$ и $C = \rho_c / \rho_0$ („степень когерентности“), причем $0 \leq C \leq 1$. Требование несмещенности оценки τ приводит к ограничению

$$\widetilde{z'(0)} = 0, \quad (3.6.3)$$

где прямая означает усреднение по пуассоновским флуктуациям, а волнистая линия — усреднение по флуктуирующим независимо друг от друга импульсам. В явном виде после предельного перехода при $\Delta t \rightarrow 0$ ограничение (3.6.3) запишется в виде

$$k(\rho_n + \rho_c) \int_0^T S(t) \mu'(t) dt = 0. \quad (3.6.4)$$

Предполагая малость ошибок $\tau - \tau_0$ в оценке величины τ_0 , получим условную вариацию оценки τ при фиксированных ρ_r ($r = \overline{1, k}$)

$$V_{\tau}(\rho_1, \dots, \rho_k) = \frac{k \int_0^T S'^2(t) dt + \sum_{r=1}^k \rho_k \int_0^T S'^2(t) \mu(t) dt}{\lambda_0 \left(\sum_{s=1}^k \rho_s \right)^2 \left[\int_0^T S''(t) \mu(t) dt \right]^2}. \quad (3.6.5)$$

Усредняя формулу (3.6.5) по величине $\rho = \sum_{r=1}^k \rho_r$, получим

$$V_{\tau} = \frac{1}{\left[\int_0^T S''(t) \mu(t) dt \right]^2} \left\{ k \int_0^T S'^2(t) dt \cdot I_2 + \int_0^T S'^2(t) \mu(t) dt \cdot I_1 \right\};$$

$$I_1 = \frac{1}{k-1} \frac{1}{\rho_n} e^{-\frac{\rho_c k}{\rho_n}} {}_1F_1\left(k-1, k, \frac{\rho_c k}{\rho_n}\right);$$

$$I_2 = \frac{1}{(k-1)(k-2)} \frac{1}{\rho_n^2} e^{-\frac{\rho_c k}{\rho_n}} {}_1F_1\left(k-2, k, \frac{\rho_c k}{\rho_n}\right).$$

Переходя к величинам C и ρ_0 , имеем

$$V_z = \frac{1}{\lambda_0 T \left[\int_0^T S''(t) \mu(t) dt \right]^2} \left\{ \frac{k \int_0^T S'^2(t) dt}{(k-1)(k-2) h_0^2} B_{2k} + \right. \\ \left. + \frac{\int_0^T S'^2(t) \mu(t) dt}{(k-1) h_0} B_{1k} \right\}, \quad (3.6.6)$$

где $h_0 = \frac{\rho_0}{\lambda_0}$, а B_{2k} и B_{1k} определяются

$$B_{2k} = \frac{1}{(1-C)^C} e^{-\frac{Ck}{1-C}} {}_1F_1\left(k-2, k, \frac{Ck}{1-C}\right);$$

$$B_{1k} = \frac{1}{1-C} e^{-\frac{Ck}{1-C}} {}_1F_1\left(k-1, k, \frac{Ck}{1-C}\right).$$

При $C=0$ формула (3.6.6) переходит в соответствующую формулу дисперсии оценки τ для флуктуирующего сигнала с нулевым средним значением.

В наиболее важном случае, когда $\lambda_0 T$ и $q_0 = \frac{\rho_0}{\sqrt{\lambda_0}}$ велики (то есть случай сильных помех), а ρ_0/λ_0 мало, вторым слагаемым в (3.6.6) можно пренебречь, тогда имеем

$$V_z = \frac{1}{\lambda_0 T} \frac{k \int_0^T S'^2(t) dt}{h_0^2 (k-1)(k-2)} B_{2k}. \quad (3.6.7)$$

Приведем B_{2k} к более удобному для практических вычислений виду. По формуле [36, формула (9.212.4)]

преобразуем ${}_1F_1(k-2; k; \frac{Ck}{1-C})$ к виду

$${}_1F_1\left(k-2; k; \frac{Ck}{1-C}\right) = (k-1)e^u - (u+k-2){}_1F_1(k-1; k; u),$$

где $u = \frac{Ck}{1-C}$. Функция ${}_1F_1(\alpha, v, u)$ представима рядом

$${}_1F_1(\alpha, v, u) = 1 + \frac{\alpha}{v} \cdot \frac{u}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{v(v+1)} \cdot \frac{u^2}{2!} + \dots$$

В нашем случае $\alpha = k-1$, $v = k$, поэтому имеем

$${}_1F_1(k-1; k; u) = 1 + (k-1) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{u^s}{s!(k+s-1)}. \quad (3.6.8)$$

Вычислим интеграл $\int_0^u e^x x^{k-2} dx$, представляя e^x степенным рядом:

$$\int_0^u e^x x^{k-2} dx = \frac{u^{k-1}}{k-1} + u^{k-1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{u^s}{s!(k+s-1)}. \quad (3.6.9)$$

Сравнивая формулы (3.6.8) и (3.6.9), находим, что

$${}_1F_1(k-1, k, u) = \frac{k-1}{u^{k-1}} \int_0^u x^{k-2} e^x dx.$$

Поэтому имеем

$$B_{2k} = \frac{k-1}{(1-C)^2} \left\{ 1 - (u+k-2) \frac{\int_0^u e^x x^{k-2} dx}{u^{k-2}} e^{-u} \right\}. \quad (3.6.10)$$

Интеграл, входящий в (3.6.10) при $k = 3, 4, \dots$, легко выражается через элементарные функции. Исследуем поведение V_z при различных C и k .

Разлагая B_{2k} в ряд по степеням u , найдем предельное значение этой величины при стремлении C к единице

$$\lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ C \rightarrow 1}} B_{2k} = \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ C \rightarrow 1}} \frac{(k-1)(k+u)^2}{k^2} \left\{ \frac{(k-2)(k-2-k+3)}{u^2} + o(u) \right\} =$$

$$= \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ C \rightarrow 1}} \frac{(k-1)(k+u)^2}{k^2} \cdot \frac{(k-2)}{u^2} = \frac{(k-1)(k-2)}{k^2}, \quad (3.6.11)$$

где в $\theta(u)$ вошли слагаемые с u^{-3} , u^{-4} и т. д. Подставляя (3.6.11) в (3.6.7), получим

$$\lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ C \rightarrow 1}} V_{\tau} = \frac{k}{(k-1)(k-2)} \cdot \frac{\lim B_{2k}}{\lambda_0 T h_0^2} = \frac{1}{\lambda_0 T h_0^2 k \left[\int_0^T S(t) u''(t) dt \right]^2},$$

то есть при стремлении C к единице вариация V_{τ} убывает обратно пропорционально числу импульсов, по которым ведется оценка τ . Выражение для дисперсии момента появления в этом случае определяется

$$D[\tau] = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right) \Gamma\left(k\nu - \frac{4}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma(k\nu)} \cdot \frac{k^{2/n} \cdot \nu^{4/n}}{a_n^{2/n} \cdot q_0^{4/n}},$$

то есть с ростом q_0 дисперсия оценки $D[\tau]$ убывает как $q_0^{-4/n}$. Заметим, что чем больше n , тем медленнее убывает $D[\tau]$ с ростом q_0 . Это, по-видимому, объясняется тем, что с увеличением n максимум $z(\tau)$ становится все более пологим и его положение все труднее зафиксировать точно.

Глава IV

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ОЦЕНКИ ДАЛЬНОСТИ И СКОРОСТИ ЦЕЛИ

Обработка пачки сигналов состоит из внутриимпульсной и межимпульсной обработки. В предыдущей главе рассматривались системы оценки дальности, в которых и внутриимпульсная, и межимпульсная обработки были линейными. Эти системы оказались асимптотически оптимальными системами оценки дальности в случае сильных внешних шумов, когда $h_0 \gg 1$. В случае, когда h_0 невелико, эффективность систем оценки дальности может быть улучшена за счет применения нелинейной межимпульсной обработки сигналов. Эти схемы и рассматриваются в данной главе.

§ 1. Асимптотически оптимальная схема оценки момента прихода сигнала в случае сильных помех

Рассмотрим асимптотически оптимальные схемы в случае сильных помех, когда $h_0 \sim 1$.

Эти схемы можно получить тем же образом, что и оптимальные схемы обнаружения сигналов в случае сильных помех.

Перейдем от величин n_i к рассмотрению процессов

$$h_r(\tau) = \frac{\sum_i^M n_i \mu(t_i - rT - \tau) - \lambda m_1}{\sqrt{\lambda_0 m_2}}, \quad (4.1.1)$$

где $m_k = \int_0^T \mu^k(t) dt$. Как уже указывалось выше, эти процессы являются независимыми, приближенно нор-

мальными (при фиксированных $\{\rho_r\}$) случайными процессами с характеристиками (с точностью до членов порядка ρ_s/λ_0)

$$M[h_s(\tau)/\rho_s] = \rho_s/\sqrt{\lambda_0} m_2 r(\tau - \tau_0); \quad (4.1.2)$$

$$R_s(\tau_1, \tau_2) = r(\tau_1 - \tau_2), \quad (4.1.3)$$

где $r(\tau) = \frac{1}{m^2} \int_0^\tau \mu(t) \mu(t-\tau) dt$ — функция автокорреляции импульса пачки. Для отсчетов h_{sj} этих процессов мы имеем

$$p(\{h_{sj}\}|\{q_s\}) = \prod_{s=1}^k \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det r}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} K_{ij} \times \right. \\ \left. \times (h_{si} - q_s r_i)(h_{sj} - q_s r_j) \right\}, \quad (4.1.4)$$

где $q_s = \frac{\rho_s \sqrt{m_2}}{\sqrt{\lambda_0}}$, $r_j = r_{j0} = r(\tau_j - \tau_0)$, а величины K_{ij} находятся из уравнения

$$\sum_m K_{im} r_{mj} = \delta_{ij}.$$

С учетом того, что K_{ij} зависят лишь от разности $(\tau_i - \tau_j)$, получим

$$\sum_{i,j} K_{ij} r_i r_j = r_{00} = 1; \quad \sum_{i,j} K_{ij} r_i h_{js} = h_s(\tau).$$

Поэтому

$$p(\{h_{sj}\}|\{q_s\}, \tau_0) = \prod_{s=1}^k \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det r}} \exp \left\{ - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{i,j} K_{ij} h_{si} h_{sj} + q_s h_s(\tau_0) - \frac{q_s^2}{2} \right\}. \quad (4.1.5)$$

Учитывая, что величины q_s являются случайными величинами с плотностью вероятностей

$$p(q_s) = \frac{q_s^{\nu-1} \cdot \nu^\nu}{q_0^\nu \cdot \Gamma(\nu)} \exp \left\{ -\frac{q_s^\nu}{q_0} \right\},$$

и усредняя (4.1.5) по q_s , получим

$$p(\{h_{st}\}/\tau_0) = \prod_{s=1}^k \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j}^M K_{ij} h_{si} h_{sj}\right\}}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det r}} \cdot L\left(h_s(\tau_0) - \frac{\nu}{q_0}\right), \quad (4.1.6)$$

где $L(z) = e^{z^2/4} \cdot D_{-\nu}(-z) \cdot D_{-\nu}(0)$. Так как от τ_0 зависит лишь аргумент y функции $L(\cdot)$, то, находя оценку момента прихода по методу максимального правдоподобия, мы придем к уравнению

$$\sum_{s=1}^k \ln L(h_s(\tau) - \frac{\nu}{q_0}) = \max_{\tau}. \quad (4.1.7)$$

С технической точки зрения эта схема состоит из линейного фильтра с весовой характеристикой $\mu(t)$ (согласованный фильтр), безынерционного нелинейного преобразователя с характеристикой

$$y(z) = \ln L(z) = \frac{z^2}{4} + \ln D_{-\nu}(-z) - \ln D_{-\nu}(0),$$

системы межимпульсного суммирования и системы локализации максимума y процесса на выходе сумматора.

В отличие от системы обнаружения сигналов, где действует подобный же алгоритм, основную роль в характеристике $y(z)$ играет не участок малых z , а участок больших z , так как оценка момента прихода предполагает наличие достаточно сильного сигнала. Поэтому, пользуясь асимптотическим разложением для $D_{-\nu}(-z)$ при больших z , приближенно получим

$$y(z) \approx \frac{z^2}{2},$$

т. е. оценка момента прихода оптического сигнала при $\lambda_0 T \gg 1$ должна вестись по алгоритму

$$\frac{1}{2} \sum_{s=1}^k H_s^2(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^k \frac{n_i \mu(t_i - sT - \tau) - \lambda_0 m_1}{\sqrt{\lambda_0 m_2}} = \max_{\tau}. \quad (4.1.8)$$

Исследуем подробнее эту схему, предполагая дифференцируемость и достаточную гладкость функции $\mu(t)$.

Докажем сначала, что оценка момента прихода

Оптического сигнала по алгоритму (4.1.8) является несмещенной в усиленном смысле. Записывая условие сильной несмещенности

$$\overline{z'(\tau_0)} = \sum_{s=1}^k \overline{H_s(\tau_0)H'_s(\tau_0)} = 0,$$

получаем

$$\overline{H_s H'_s} = \overline{\left(\sum_i^M n_i \mu_{is} - \lambda_0 m_1 \right) \sum_j^M n_j \mu'_{js}}.$$

Так как в силу пуассоновского характера потока фотоэлектронов величины n_i и n_j независимы при $i \neq j$ (при фиксированном q_s), то

$$\overline{n_i n_j} = \begin{cases} (\lambda_0 + \rho_s \mu_i) \Delta t (\lambda_0 + \rho_s \mu_j) \Delta t, & i \neq j; \\ [(\lambda_0 + \rho_s \mu_i) \Delta t]^2 + (\lambda_0 + \rho_s \mu_i) \Delta t, & i = j, \end{cases}$$

производя предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \overline{H_s H'_s} &= \int_0^T \mu(t) (\lambda_0 + \rho_s \mu(t)) dt \int_0^T \mu'(t) (\lambda_0 + \rho_s \mu(t)) dt + \\ &+ \int_0^T \mu(t) \mu'(t) (\lambda_0 + \rho_s \mu(t)) dt - \lambda_0 m_1 \int_0^T \mu'(\lambda_0 + \rho_s \mu) dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим входящие сюда интегралы. Считая, что на концах импульса $\mu(t)$ обращается в нуль, получим

$$\begin{aligned} \int_0^T \mu'(t) dt &= \mu(t) \Big|_0^T = 0; \\ \int_0^T \mu(t) \mu'(t) dt &= \frac{\mu^2(t)}{2} \Big|_0^T = 0; \\ \int_0^T \mu^2(t) \mu'(t) dt &= \frac{\mu^3(t)}{3} \Big|_0^T = 0, \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

в силу чего $\overline{H_s H'_s} = 0$ и $\overline{z'(\tau)} = 0$ при любых q_s . Перейдем теперь к вычислению вариации оценки момента прихода сигнала. Так как

$$z''(\tau_0) \sum_{s=1}^k [H_s H''_s + (H'_s)^2] = \sum_{s=1}^k \left\{ \sum_{i,j}^M n_i n_j \mu_{is} \mu'_{js} + \right.$$

$$+ \left(\sum_i^n n_i \mu_{is} - \lambda_0 m_1 \right) \sum_j^M n_j \mu'_{js} \Big\},$$

то, усредняя по n_i и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\overline{z''(\tau)} = - \sum_{s=1}^k \left\{ \rho_s^2 \int_0^T \mu^2(t) dt \int_0^T \mu'^2(t) dt - \rho_s \int_0^T \mu(t) \mu'^2(t) dt \right\}.$$

Займемся теперь вычислением $D[z'(\tau_0)]$. Так как для различных s H_s независимы, то

$$D(z'(\tau)) = \sum_{s=1}^k D(H_s H'_s).$$

Поскольку $\overline{H_s H'_s} = 0$, то $D(H_s H'_s) = M[(H_s H'_s)^2]$, т. е.

$$\begin{aligned} D[H_s H'_s] &= M \left\{ \left[\sum_i^M n_i \mu_{is} - \lambda_0 m_1 \right]^2 \left[\sum_j^M n_j \mu'_{js} \right]^2 \right\} = \\ &= \sum_{i,j,k,l}^M \overline{n_{is} n_{js} n_{ks} n_{ls} \mu_{is} \mu'_{js} \mu_{ks} \mu'_{ls}} - 2 \lambda_0 m_1 \sum_{i,j,k}^M \left\{ \overline{n_{is} n_{js} n_{ks}} \times \right. \\ &\quad \times \mu'_{ks} \mu_{is} \mu'_{js} \Big\} + (\lambda_0 m_1)^2 \sum_{i,j}^M \overline{n_i n_j} \mu_i \mu_j. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

После усреднения по n_i и выполнения предельного перехода последнее слагаемое приобретает вид

$$\begin{aligned} \sum_{i,j}^M \overline{n_i n_j} \mu_i \mu_j &= \left[\int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu(t)) \mu(t) dt \right]^2 + \\ &+ \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu(t)) \mu'^2(t) dt = \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu(t)) \mu'^2(t) dt, \end{aligned}$$

так как в силу (4.1.9) первое слагаемое равно нулю. Далее, имеем

$$\overline{n_{is} n_{js} n_{ks}} = \begin{cases} (\lambda_0 + \rho_s \mu_i)(\lambda_0 + \rho_s \mu_j)(\lambda_0 + \rho_s \mu_k) \Delta t^3; & i \neq j; j \neq k; k \neq i; \\ (\lambda_0 + \rho_s \mu_i)^2 (\lambda_0 + \rho_s \mu_k) \Delta t^3 + (\lambda_0 + \rho_s \mu_i)(\lambda_0 + \\ \quad + \rho_s \mu_k) \Delta t^2; & i = j \neq k; \\ (\lambda_0 + \rho_s \mu_i)^3 \Delta t^3 + 3(\lambda_0 + \rho_s \mu_i)^2 \Delta t^2 + \\ \quad + (\lambda_0 + \rho_s \mu_k) \Delta t; & i = j = k. \end{cases}$$

В силу этого второе слагаемое в (4.1.10) приобретает вид

$$\sum_{i,j,k}^M \overline{n_{is} n_{js} n_{ks} \mu_{is} \mu'_{js} \mu'_{ks}} = \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu(t)) \mu(t) \mu'^2(t) dt + \\ + \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu) \mu dt \cdot \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu) \mu'^2(t) dt.$$

Самым сложным является первое слагаемое. Поскольку

$$\overline{n_{is} n_{js} n_{ks} n_{ls}} = \left\{ \begin{array}{l} (\lambda_0 + \rho_s \mu_i)(\lambda_0 + \rho_s \mu_j)(\lambda_0 + \rho_s \mu_k)(\lambda_0 + \rho_s \mu_l) \Delta t^4, \\ \quad i \neq j \neq k \neq l; \\ (\lambda_0 + \rho_s \mu_i)^2 (\lambda_0 + \rho_s \mu_k)(\lambda_0 + \rho_s \mu_l) \Delta t^4 + \\ \quad + (\lambda_0 + \rho_s \mu_i)(\lambda_0 + \rho_s \mu_k)(\lambda_0 + \rho_s \mu_l) \Delta t^3, \\ \quad i = j \neq k \neq l; \\ (\lambda_0 + \rho_s \mu_i)^3 (\lambda_0 + \rho_s \mu_l) \Delta t^4 + 3(\lambda_0 + \rho_s \mu_i)^2 (\lambda_0 + \\ \quad + \rho_s \mu_l) \Delta t^3 + (\lambda_0 + \rho_s \mu_i)(\lambda_0 + \rho_s \mu_l) \Delta t^2, \\ \quad i = j = k \neq l; \\ (\lambda_0 + \rho_s \mu_i)^4 \Delta t^4 + 6(\lambda_0 + \rho_s \mu_i)^3 \Delta t^3 + \\ \quad + 29(\lambda_0 + \rho_s \mu_i)^2 \Delta t^2 + 11(\lambda_0 + \\ \quad + \rho_s \mu_i) \Delta t, \quad i = j = k = l; \end{array} \right.$$

то первое слагаемое приобретает вид

$$\sum_{i,j,k,l}^M \overline{n_{is} n_{js} n_{ks} n_{ls} \mu_{is} \mu'_{js} \mu'_{ks} \mu'_{ls}} \rightarrow \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu) \mu^2 dt \mu'^2 + 2 \int_0^T (\lambda_0 + \\ + \rho_s \mu) \mu dt \times \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu) \mu \mu'^2 dt + \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu) \mu^2 dt \int_0^T (\lambda_0 + \\ + \rho_s \mu) \mu \mu' dt + \left[\int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu) \mu dt \right]^2 \cdot \\ \cdot \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu) \mu'^2 dt.$$

Обозначая

$$\alpha_{ks} = \int_0^T \mu^k(\mu')^s dt,$$

окончательно получим

$$D[z'(\tau_0)] = \left| \sum_{s=1}^k \left\{ \lambda_0^2 \alpha_{20} \alpha_{02} + \lambda_0 \rho_s^2 \alpha_{20} \alpha_{02} + \lambda_0 \rho_s (\alpha_{10} \sigma_{22} + \alpha_{12} \alpha_{20} + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_{20} \sigma_{12} + \alpha_{30} \sigma_{03} \right) + (\rho_s^3 \alpha_{20}^2 \alpha_{12} + \rho_s^2 \alpha_{30} \alpha_{13} + 2 \rho_s^2 \sigma_{20} \alpha_{22} + \rho_s \alpha_{32}) \right\} \right|.$$

Подставляя выражение для $D[z'(\tau_0)]$ и $\overline{z''(\tau_0)}$ в формулу для $V(\tau/q_s)$ и деля числитель и знаменатель на λ_0^2 , получим

$$V(\tau/q_s) = \frac{\sum_{s=1}^k \left\{ q_s^2 \alpha_{02} \alpha_{20} + \alpha_{20} \alpha_{02} + q_s \frac{\rho_s}{\lambda_0} \alpha_{20} \sigma_{12} + \dots \right\}}{\left\{ \sum_{s=1}^k \left(q_s^2 \alpha_{02} + \frac{\rho_s}{\lambda_0} \alpha_{12} \right) \right\}^2}, \quad (4.1.11)$$

где слагаемые расположены в порядке их убывания и где $q_s = \rho_s / \sqrt{\lambda_0}$.

В случае, когда $\lambda_0 T$ и q_s велики, ρ_s / λ_0 малы, основную роль играют лишь слагаемые с q_s^2 . Тогда приближенно (с точностью до членов 1-го порядка)

$$V(\tau/q_s) = \frac{1}{T \int_0^T \mu'^2(t) dt} \cdot \frac{1}{\sum_{s=1}^k \frac{\rho_s^2}{\lambda_0}} = \frac{m_2}{T \int_0^T \mu'^2(t) dt \cdot \sum_{s=1}^k q_s^2}. \quad (4.1.12)$$

Сравнивая (4.1.12) с (3.1.19а), мы видим, что $V(\tau/q_s) = 1/I_\tau$; это говорит о том, что при $h_0 \rightarrow 0$ оценка момента прихода сигнала квадратичной схемой является эффективной.

Что касается безусловной вариации $V(\tau)$, то, усредняя по величинам q_s , получим

$$V(\tau) = \frac{1}{\lambda_0 h_0^2 T \int_0^T \mu'^2(t) dt} \cdot \frac{C_{k,v} \cdot k v^2}{(k v - 1)(k v - 2)},$$

где $h_0 = \rho_0 / \lambda_0$ и $C_{k,v}$ выражается формулой (3.1.19б). Опять, как и в случае линейной системы, $V(\tau)$ конечна лишь при $k v > 2$; при $k v < 2$ оценка качества квадратичной схемы дисперсией ее погрешности неприменима, поэтому надо пользоваться доверительными интервалами.

§ 2. Плотность вероятностей оценки момента прихода сигнала квадратичной схемой

Для получения выражения для доверительных интервалов ошибки τ в оценке момента прихода сигнала мы должны исследовать плотность вероятностей оценки момента прихода. Записывая погрешность τ в виде

$$\tau = - \frac{\sum_{s=1}^k H_s(\tau_0) H'_s(\tau_0)}{\sum_{s=1}^k (H_s H''_s + H'^2_s)}, \quad (4.2.1)$$

исследуем статистические свойства величин $H_s(\tau_0)$; $H'_s(\tau_0)$; $H''_s(\tau_0)$. С точностью до слагаемых порядка ρ/λ_0 можно записать

$$\sum_{s=1}^k \overline{(H_s H''_s + H'^2_s)} = \alpha_{20} \alpha_{02} \sum_{s=1}^k \rho_s^2. \quad (4.2.2)$$

Рассмотрим теперь свойства величин

$$H_s = \sum_{i=1}^M n_i \mu_{is} - \lambda_0 m_1;$$

$$H'_s = \sum_{i=1}^M n_i \mu'_{is}.$$

Так как суммарное число фотоэлектронов при наличии полезного сигнала для точного определения момента прихода должно быть достаточно велико, то величины H_s и H'_s можно считать приближенно нормальными с характеристиками

$$M[H_s/\rho_s] = \rho_s \sigma_{20};$$

$$D[H_s/\rho_s] = \lambda_0 \alpha_{20} + \rho_s \alpha_{30} \approx \lambda_0 \alpha_{20},$$

поскольку по предложению $\rho_s \ll \lambda_0$. Далее,

$$M[H'_s | \rho_s] = \lambda_0 \int_0^T \mu'(t) dt + \rho_s \int_0^T \mu(t) \mu'(t) dt = 0;$$

$$D[H'_s | \rho_s] = \lambda_0 \int_0^T \mu'^2(t) dt + \rho_s \int_0^T \mu(t) \mu'(t) dt \approx \lambda_0 \sigma_{02};$$

$$\text{Cov}(H_s, H'_s) = \lambda_0 \int_0^T \mu(t) \mu'(t) dt + \rho_s \int_0^T \mu^2(t) \mu'(t) dt = 0.$$

В силу того, что ковариация величин H_s и H'_s равна нулю, они независимы.

Рассмотрим отношение $M[H_s]/D[H_s]$. Оно равно $\frac{\rho_s}{\sqrt{\lambda_0}}$.

$$\sqrt{\alpha_{20}}.$$

Так как мы предполагаем $\rho_s/\sqrt{\lambda_0} \gg 1$, то в первом приближении можно считать H_s неслучайной величиной, равной $\rho_s \alpha_{20}$ (поскольку ее среднее значение много больше флуктуаций, измеряемых среднеквадратическим отклонением). В этом случае при фиксированных ρ_s в силу нормальности H'_s величина τ будет приближенно нормальной с характеристиками

$$\bar{\tau} = 0; D[\tau] = \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{02} \sum_{s=1}^k q_s^2}.$$

Вводя безразмерную величину $x = \tau q_0 \sqrt{\frac{\alpha_{02}}{\alpha_{20}}}$ и усредняя по величинам q_s , получим

$$p_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \sqrt{\sum_{s=1}^k y_s^2} e^{-\frac{x^2}{2} \sum_{s=1}^k y_s^2 - \sum_{s=1}^k y_s^\nu} \cdot \prod_{s=1}^k \frac{y_s^{\nu-1} \cdot \nu^\nu}{\Gamma(\nu)} dy_s. \quad (4.2.3)$$

Рассмотрим частные случаи. При $k=1$ (оценка момента прихода одиночного импульса) получаем

$$p_1(x) = \frac{\nu^{\nu+1}}{\sqrt{2\pi} |x|^{\nu+1}} e^{\frac{\nu^2}{4x^2}} \cdot D_{-(\nu+1)}\left(\frac{\nu}{2|x|}\right). \quad (4.2.4)$$

При больших x получается следующая асимптотика:

$$p_1(x) \approx \frac{\nu^{\nu+1} D_{-(\nu+1)}(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|x|^{\nu+1}} = \frac{\nu^{\nu+1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) 2^{\frac{\nu}{2}-1}}{\sqrt{2\pi} \Gamma(\nu)} \cdot \frac{1}{|x|^{\nu+1}}. \quad (4.2.5)$$

Именно в связи с тем, что у данного распределения на бесконечности плотность вероятностей убывает как $1/|x|^{\nu+1}$, у него при $\nu=1$ и 2 отсутствует дисперсия.

В случае $k=2$ (после перехода к полярным координатам) получаем

$$p_2(x) = \frac{\nu^2 \Gamma(2\nu+1)}{\sqrt{2\pi} \Gamma^2(\nu) |x|^{2\nu+1}} \int_0^{2\pi} (\cos \psi \sin \psi)^{\nu-1} e^{\frac{\nu^2 (\cos \psi + \sin \psi)^2}{4x^2}} D_{-(2\nu+1)} \left(\frac{\nu (\cos \psi + \sin \psi)}{2|x|} \right) d\psi.$$

Входящий сюда интеграл в квадратурах не выражается.

При больших x , разлагая $\exp \left[\frac{\nu^2 (\cos \psi + \sin \psi)^2}{4x^2} \right]$ в ряд Тейлора и интегрируя почленно, получим

$$p_2(x) = \frac{1}{|x|^{2\nu+1}} \frac{\nu^2 2^{\nu-1} \Gamma^2\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma^3(\nu)}. \quad (4.2.6)$$

Что касается меры точности оценки момента прихода, то вновь вместо дисперсии следует пользоваться доверительными интервалами, вычисляемыми по формуле (3.2.11). При α , близких к 1, вместо точного выражения для $p_1(x)$ и $p_2(x)$ можно пользоваться их асимптотическими представлениями. Величина τ в этом случае с вероятностью α попадает в интервал

$$\left[-C \frac{1}{q_0} \sqrt{\frac{\sigma_{20}}{\alpha_{02}}}, \frac{C}{q_0} \sqrt{\frac{\sigma_{20}}{\alpha_{02}}} \right].$$

Все вышеприведенные выкладки справедливы лишь для достаточно гладких сигналов, функция корреляции которых в окрестности нуля достаточно хорошо аппроксимируется параболой. Если фронты сигнала достаточно крутые, как, например, у прямоугольного импульса, то аппроксимация функции корреляции параболой может оказаться неприменимой, и в этом случае следует получать выражения для плотности вероятностей ошибки в оценке момента прихода на основе функции неопределенности.

Пользуясь выражением (3.3.3) и вычисляя функцию неопределенности при фиксированных $\{q_s\}$, получим с точностью до слагаемых, не зависящих от τ_0 и τ :

$$g(\tau) = r(\tau) \sum_{s=1}^k q_s^2, \quad (4.2.7)$$

где $r(\tau)$ — нормированная функция автокорреляции импульса пачки. Поэтому условная плотность вероятностей для ошибки τ при фиксированных q_s имеет вид

$$p(\tau/q_s) = \frac{e^{-r(\tau) \sum_{s=1}^k q_s^2}}{\int_{\Omega} e^{-r(\tau) \sum_{s=1}^k q_s^2} d\tau}, \quad (4.2.8)$$

где Ω — область допустимых значений τ . Усредняя по величинам q_s , можно получить безусловное распределение вероятностей и безусловную вариацию ошибки τ .

Пусть в окрестности нуля функция корреляции $r(\tau)$ аппроксимируется выражением

$$r(\Delta\tau) = r(0) - a_p \left| \frac{\tau}{T} \right|^p.$$

Это может быть, например, тогда, когда первая отличная от нуля производная от $r(\tau)$ справа при $\tau=0$ имеет порядок p . В этом случае условная плотность $p(\tau/q_s)$ имеет вид

$$p(\tau/q_s) = \frac{\sqrt[p]{a_p \sum_{s=1}^k q_s^2}^{-p} e^{-a_p \sum_{s=1}^k q_s^2 \left| \frac{\tau}{T} \right|^p}}{2T \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}$$

Переходя к безразмерной величине $v = \sqrt[p]{a_p q_0^2} \cdot \frac{\tau}{T}$, имеем

$$p(v/q_s) = \frac{\sqrt[p]{\sum_{s=1}^k z_s^2}^{-p} e^{-|v|^p \sum_{s=1}^k z_s^2}}{\frac{2}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)},$$

а усредняя по $z_s = q_s / q_0$, получим

$$p_k(v) = \frac{v^{kv}}{\Gamma^k(v) \frac{2}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \sqrt[p]{\sum_{s=1}^k z_s^2} \cdot e^{-|v|^p \sum_{s=1}^k z_s^2 - v \sum_{s=1}^k z_s} dz_1 \dots dz_k. \quad (4.2.9)$$

При $k=1$ получаем

$$p_1(v) = \frac{v^v \Gamma\left(\frac{2}{p} + v\right) \exp\left(\frac{v^2}{8|v|^p}\right)}{\Gamma(v) \frac{2}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) 2^{v/p+1/p} |v|^{\frac{pv}{2}+1} D^{-(\frac{2}{p}+v)} \left(\frac{v}{\sqrt{2}|v|^p}\right)}.$$

Найдем асимптотику $p_k(v)$ при больших v . В этом случае, пренебрегая в (4.2.9) в показателе экспоненты $v \sum_{s=1}^k z_s$ по сравнению с $|v|^p \sum_{s=1}^k z_s^2$ и переходя к полярным координатам, получим

$$p_k(v) = \frac{1}{|v|^{\frac{kp}{2}+1}} \cdot \left(\frac{v^v \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{2 \Gamma(v)} \right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{kv}{2} + \frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{kv}{2}\right)} \frac{p}{2 \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}. \quad (4.2.10)$$

Эта асимптотика позволяет приближенно находить доверительные границы при α , близких к 1.

Переходя к дисперсии, отметим прежде всего, что интеграл, выражающий дисперсию, будет сходящимся лишь при $kp v > 4$; в остальных случаях дисперсия бесконечна и не может служить мерой точности.

Так как $D[\tau] = \frac{T^2 D[v]}{a_p^{2/p} q_0^{4/p}}$, то вычислим только дисперсию величины v . Для условной дисперсии получаем

$$D[v/q_s] = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \frac{1}{\left(\sum_{s=1}^k z_s^2\right)^{2/p}}.$$

Усредняя по z_s , получим

$$D_k[v] = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right) v^{4/p}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma^k(v)} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{(y_1, \dots, y_k)^{v-1} e^{-\sum_{s=1}^k y_s}}{\left(\sum_{s=1}^k y_s^2\right)^{2/p}} dy_1, \dots, dy_k.$$

В частности

$$D_1[v] = \frac{v^{4/p} \Gamma\left(\frac{3}{p}\right) \Gamma\left(v - \frac{4}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \cdot \Gamma(v)};$$

$$D_2[v] = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right) v^{4/p} \Gamma\left(2v - \frac{4}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \cdot \Gamma^2(v)} 2^{2-\frac{2}{p}} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^{v-1} 2x}{\cos^{2v-\frac{4}{p}} x} dx.$$

Для $k > 2$ соответствующий интеграл можно довольно просто найти численно.

§ 3. Линейно-квадратичная схема оценки момента прихода

Итак, мы получили, что при $h_0 \rightarrow \infty$ асимптотически оптимальной является схема

$$\sum_s^k \sum_i^M n_{is} \ln \left(1 + h_0 \frac{k^v - 2}{k^v} \mu(t_{is} - sT - \tau) \right) = \max_{\tau}, \quad (4.3.1)$$

а при $h_0 \rightarrow 0$ схема

$$\frac{1}{2} \sum_{s=1}^k \left(\sum_{i=1}^M n_{is} \mu(t_{is} - sT - \tau) - \lambda_0 m_1 \right)^2 = \max_{\tau}. \quad (4.3.2)$$

Эти результаты наводят на мысль о том, что при произвольных h_0 достаточно хорошей схемой для оценки момента прихода оптических сигналов будет схема, представляющая собой комбинацию (4.3.1) и (4.3.2), т. е.

$$\sum_{s=1}^k \left(\alpha H_s + \frac{H_s^2}{2} \right) = \max_{\tau}; \quad (4.3.3)$$

$$H_s = \sum_i^M \beta(t_{is} - sT + \tau) n_{is} - \lambda_0 \int_0^T \beta(t) dt, \quad (4.3.4)$$

с некоторой неизвестной функцией $\beta(t)$ и параметром α . Действительно, при $\beta(t) = \mu(t)$, $\alpha = 0$ схема (4.3.3) переходит в (4.3.2), а при $\beta(t) = \ln(1 + \frac{k_v - 2}{k_v} h_0 \mu(t))$, $\alpha \rightarrow \infty$ она переходит в схему (4.3.1).

Нашей дальнейшей целью является нахождение оптимального вида функции $\beta(t)$, оптимального значения α и исследование эффективности линейно-квадратичной схемы (4.3.3) при произвольных h_0 .

Требуя усиленной несмещенности оценки момента прихода сигнала $\overline{z'(\tau_0)} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \overline{z'(\tau_0)} = \sum_{s=1}^k \left\{ \alpha \int_0^T \beta'(t) \mu(t) dt + \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu(t)) \beta(t) \beta'(t) dt + \right. \\ \left. + \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu(t)) \beta(t) dt \cdot \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu(t)) \beta'(t) dt \right\}. \quad (4.3.5) \end{aligned}$$

Требуя дополнительно, чтобы на концах промежутка интегрирования $\beta(t)$ и ее производные обращались в нуль, получим

$$\int_0^T \beta'(t) dt = \int_0^T \beta(t) \beta'(t) dt = 0,$$

после чего имеем окончательно

$$\begin{aligned} \overline{z'(\tau_0)} = \sum_{s=1}^k \left\{ \alpha \int_0^T \mu \beta' dt + \rho_s \int_0^T \mu(t) \beta'(t) \beta(t) dt + \right. \\ \left. + \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu(t)) \beta(t) dt \int_0^T \rho_s \mu(t) \beta'(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для несмещенности оценки момента прихода при произвольных ρ необходимо выполнение двух условий несмещенности:

$$\int_0^T \mu(t) \beta'(t) dt = - \int_0^T \mu'(t) \beta(t) dt = 0; \quad (4.3.6)$$

$$\int_0^T \mu(t) \beta(t) \beta'(t) dt = 0. \quad (4.3.7)$$

Перейдем теперь к вычислению дисперсий оценки τ_0 при фиксированных $\rho_1, \dots, \rho_k$. Вычислим отдельно числитель и знаменатель формулы (3.1.10a). Начнем с $\overline{z''(\tau_0)}$

$$z''(\tau) = \sum_{s=1}^k (\alpha H_s'' + H_s H_s'' + H_s'^2).$$

Вычисляя $H_s''(\tau_0)$, получаем

$$H_s''(\tau_0) = \rho_s \int_0^T \beta''(t) \mu(t) dt = \rho_s \int_0^T \mu''(t) \beta(t) dt.$$

Далее

$$H_s H_s'' + H_s'^2 = \sum_{i,j}^M \{ (n_{is} - \lambda_0 \Delta t) (n_{js} - \lambda_0 \Delta) (\beta_{is} \beta_{js}'' + \beta_{is}' \beta_{js}') \}.$$

Усредняя по пуассоновским флуктуациям и учитывая условия несмещенности, получим

$$\begin{aligned} \overline{H_s H_s'' + H_s'^2} &= \rho_s^2 \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt \int_0^T \mu''(t) \beta(t) dt + \\ &+ \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu(t)) (\beta(t) \beta''(t) + \beta'^2(t)) dt. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \overline{z''(\tau_0)} &= \sum_{s=1}^k \cdot \left\{ \alpha \rho_s \int_0^T \mu''(t) \beta(t) dt + \rho_s \int_0^T \mu(t) (\beta(t) \beta'(t) + \beta'^2(t)) dt + \right. \\ &\quad \left. + \rho_s^2 \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt \int_0^T \mu''(t) \beta(t) dt \right\}. \quad (4.3.8) \end{aligned}$$

Рассмотрим величину входящих сюда слагаемых. Для точной оценки дальности среднее число полезных фотоэлектронов должно быть достаточно велико. Но тогда $(\rho_s^2 T^2) \gg \rho_s T$; в (4.3.8) можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с третьим слагаемым. Первое слагаемое выбрасывать нельзя, так как значение коэффициента α пока неопределенно. Таким образом, приближенно

$$\overline{z''(\tau_0)} = \int_0^T \mu''(t) \beta(t) dt \sum_{s=1}^k \rho_s (\alpha + \rho_s \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt)^2. \quad (4.3.9)$$

Перейдем теперь к вычислению $D(z'(\tau_0))$. В силу несмещенности оценки момента прихода при любых ρ_s и независимости флуктуаций отдельных импульсов пачки

$$D[z'(\tau_0)] = \sum_{s=1}^k D(\alpha H'_s + H_s H'_s);$$

$$D[\alpha H'_s + H_s H'_s] = \overline{\alpha^2 H_s'^2} + 2\alpha \overline{H_s H_s'^2} + \overline{H_s^2 H_s'^2}.$$

Вычислим входящие сюда слагаемые

$$\begin{aligned} \overline{H_s'^2} = D[H'_s] &= \sum_i \beta_i'^2 D(n_i - \lambda_0 \Delta t) = \lambda_0 \int_0^T \beta'^2(t) dt + \\ &+ \rho_s \int_0^T \mu(t) \beta'^2(t) dt = D_1. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} D_2 = \overline{H_s H_s'^2} &= \rho_s^2 \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt \int_0^T \mu(t) \beta'^2(t) dt + \\ &+ \lambda_0 \rho_s \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt \int_0^T \beta'^2(t) dt + \\ &+ \lambda_0 \int_0^T \beta(t) \beta'^2(t) dt + \rho_s \int_0^T \mu(t) \beta(t) \beta'^2(t) dt. \end{aligned}$$

В этом выражении можно пренебречь двумя последними слагаемыми, так как слагаемое с ρ_s^2 всегда много больше слагаемого ρ_s ($\rho_s T \gg 1$), а слагаемое с $\lambda_0 \rho_s$ много больше слагаемого с λ_0 по той же причине. Итак, приближенно

$$D_2 \approx \rho_s^2 \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt \int_0^T \mu(t) \beta'^2(t) dt + \lambda_0 \rho_s \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt \int_0^T \beta'^2(t) dt.$$

Аналогично вычисляется и последнее слагаемое

$$D_3 = \overline{H_s^2 H_s'^2} = \rho_s^3 \left(\int_0^T \mu(t) \beta(t) dt \right)^2 \int_0^T \mu(t) \beta'^2(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_0 \rho_s^2 \left(\int_0^T \mu(t) \beta(t) dt \right)^2 \int_0^T \beta'^2(t) dt + \\
& + \lambda_0^2 \int_0^T \beta^2(t) dt \int_0^T \beta'^2(t) dt + \lambda_0 \rho_s \left(\int_0^T \mu(t) \beta^2(t) dt \int_0^T \beta'^2(t) dt + \right. \\
& + 2 \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt \int_0^T \beta(t) \beta'^2(t) dt + \int_0^T \beta^2(t) dt \int_0^T \mu(t) \beta'^2(t) dt \Big) + \\
& + \rho_s^2 \left(\int_0^T \mu(t) \beta^2(t) dt \int_0^T \mu(t) \beta'^2(t) dt + \right. \\
& + 2 \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt \int_0^T \mu(t) \beta(t) \beta'^2(t) dt \Big) + \\
& + \lambda_0 \int_0^T \beta^2(t) \beta'^2(t) dt + \rho_s \int_0^T \mu(t) \beta^2(t) \beta'^2(t) dt.
\end{aligned}$$

В этом выражении существенными являются только два первых слагаемых, так как слагаемое с ρ_s^3 много больше слагаемых с ρ_s^2 и ρ_s , а слагаемое с $\lambda_0 \rho_s^2$ много больше слагаемых с $\lambda_0 \rho_s$ и λ_0 ; кроме того, слагаемым с λ можно пренебречь:

1) при малых $\lambda_0 T$ основную роль играет слагаемое с ρ_s^3 ;

2) при больших $\lambda_0 T$ величина $q_s^2 = \rho_s^2 T^2 / \lambda_0 T$ должна быть велика, поэтому $T^3 \rho_s^2 \lambda_0 \gg \lambda_0^2 T^2$.

С учетом сделанных приближений окончательно

$$D[z'(\tau_0)] = \sum_{s=1}^k \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu(t)) \beta'^2(t) dt \left[\alpha + \rho_s \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt \right]^2,$$

а условная вариация оценки момента прихода сигнала запишется в виде

$$\begin{aligned}
& V(\tau/\rho_1, \dots, \rho_k) = \\
& = \frac{\sum_s \int_0^T (\lambda_0 + \rho_s \mu(t)) \beta'^2(t) dt \left[\alpha + \rho_s \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt \right]^2}{\left[\sum_s \rho_s \left(\alpha + \rho_s \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt \right)^2 \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt \right]}. \quad (4.3.10)
\end{aligned}$$

Перейдем теперь к нахождению оптимального вида функции $\beta(t)$. Характеристики линейно-квадратичной схемы зависят от следующих функционалов:

$$\int_0^T \beta'^2(t) dt; \int_0^T \mu(t) \beta'^2(t) dt; \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt;$$

$$\int_0^T \mu''(t) \beta(t) dt; \int_0^T \mu(t) \beta'(t) dt; \int_0^T \beta(t) \mu(t) \beta'(t) dt.$$

Пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа и уравнением Эйлера из вариационного исчисления [43], получим следующее уравнение для определения оптимального вида $\beta(t)$:

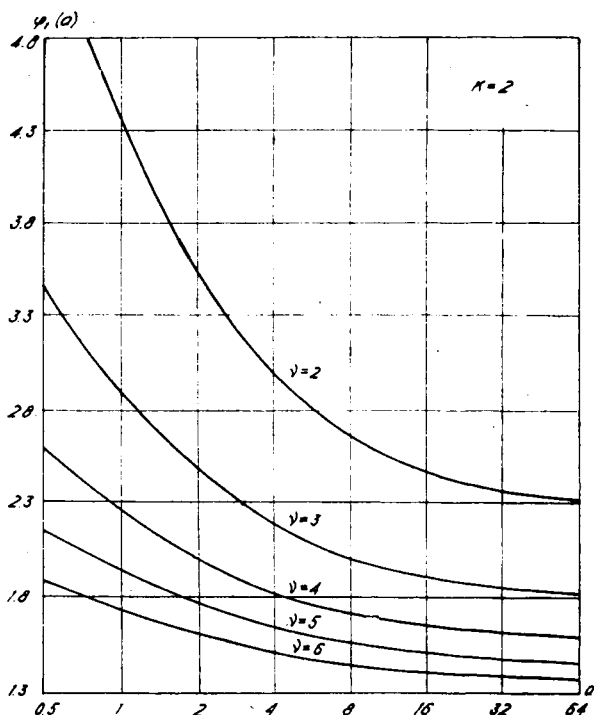


Рис. 4.3.1

$$\beta''(2+2\lambda_1\mu(t))+2\lambda_1\mu'(t)\beta'+\lambda_2\mu(t)-\lambda_3\mu''(t)-\lambda_4\mu'(t)=0,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — неопределенные множители Лагранжа. Решение этого уравнения имеет вид

$$\beta(t) = \lambda_7 \ln(1 + \gamma \mu(t)) + \int_0^t \frac{\lambda_4 \mu(t) + \lambda_5 + \lambda_2 \int_0^t \mu(t) dt}{2(1 + \lambda_1 \mu(t))} dt + \lambda_6,$$

где $\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \gamma$ — некоторые константы.

Это решение по физическим соображениям должно обращаться в нуль при $t < 0$ и $t > T$, так как $\mu(t)$ отлично от нуля лишь на интервале $0 < t < T$. Кроме того, должны выполняться два условия несмещенности. Совместное выполнение этих четырех условий возможно

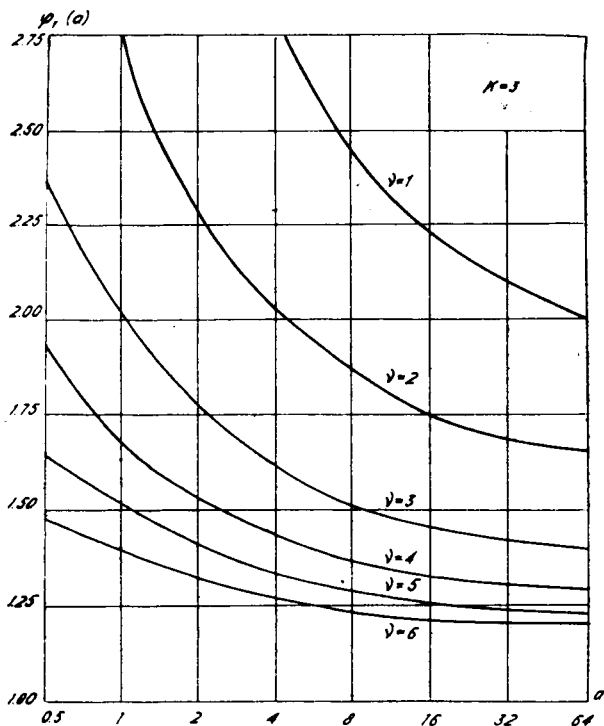


Рис. 4.3.2

лишь при $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. Учитывая также, что $\beta(t)$ определяется с точностью до произвольного постоянного множителя, можно положить $\lambda_7 = 0$ и окончательно

$$\beta(t) = n(1 + \gamma\mu(t)) \quad (4.3.11)$$

с некоторой неизвестной константой γ .

Таким образом, линейно-квадратичная схема определена с точностью до констант α и γ , к определению которых мы и переходим.

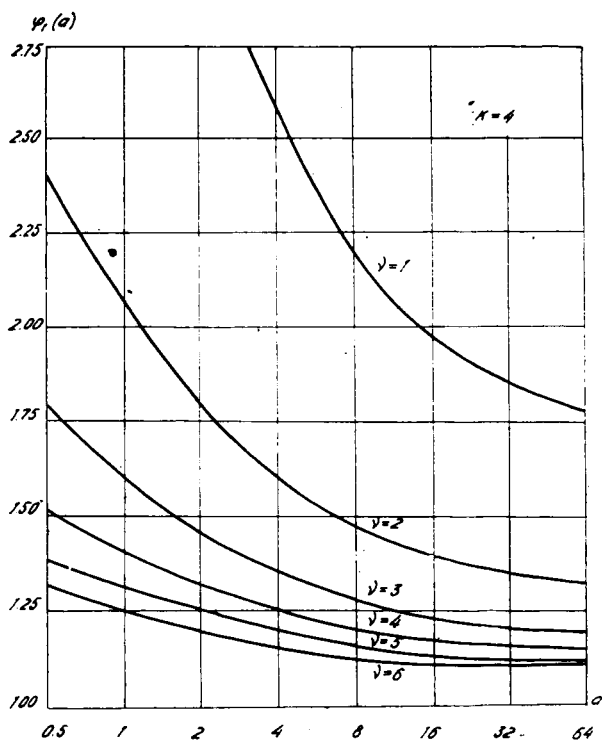


Рис. 4.3.3

Вводя обозначения

$$F = \frac{\int_0^T \mu(t) \beta^{1/2}(t) dt}{\int_0^T \beta^{1/2}(t) dt} = \frac{\int_0^T \frac{\mu(t) \mu'^{1/2}(t) dt}{(1 + \gamma\mu(t))^2}}{\int_0^T \frac{\mu'^{1/2}(t) dt}{(1 + \gamma\mu(t))^2}},$$

$$G = \int_0^T \mu(t) \beta(t) dt = \int_0^T \mu(t) \ln(1 + \gamma\mu(t)) dt, \quad f = F h_0;$$

$$g = G h_0, \quad a = \frac{\alpha}{\lambda_0 G h_0}, \quad x_s = \frac{p_s}{p_0},$$

приведем выражение (4.3.10) для условной вариации к виду

$$V(\tau/\rho_1, \dots, \rho_k) = \frac{\int_0^T \beta'^2(t) dt}{\lambda_0 h_0 \left(\int_0^T \mu''(t) \beta(t) dt \right)^2} \cdot \frac{\sum_{s=1}^k (1 + x_s f)(a + x_s)^2}{\left[\sum_{s=1}^k (a + x_s) x_s \right]^2}. \quad (4.3.12)$$

Замечая, что g и f зависят только от γ , в качестве независимых переменных будем рассматривать a и γ .

Угловыми скобками $\langle \dots \rangle$ мы будем обозначать усреднение по величинам x_s , плотность вероятностей которых

$$p(x_s) = \frac{x_s^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} e^{-x_s^\gamma}.$$

Приравняв нулю производную от $V = \langle V(\tau/\rho_1, \dots, \rho_k) \rangle$ по a , получим уравнение

$$\begin{aligned} a \frac{\left\langle \frac{k \sum_{s=1}^k x_s^2 - \left(\sum_{s=1}^k x_s \right)^2}{\left[\sum_{s=1}^k x_s (a + x_s)^2 \right]^3} \right\rangle}{\left\langle \frac{\sum_{s=1}^k x_s^3 \sum_{s=1}^k x_s - \left(\sum_{s=1}^k x_s^2 \right)^2}{\left[\sum_{s=1}^k x_s (a + x_s)^2 \right]^3} \right\rangle} = \\ = a \varphi_1(a) = f - h_0 \frac{\int_0^T \frac{\mu(t) \mu'^2(t) dt}{(1 + \gamma \mu(t))^2}}{\int_0^T \frac{\mu'^2(t) dt}{(1 + \gamma \mu(t))^2}}. \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Заметим, что в силу неравенств

$$k \sum_s x_s^2 \geq \left(\sum_s x_s \right)^2; \quad \sum_s x_s^3 \sum_s x_s \geq \left(\sum_s x_s^2 \right)^2$$

левая часть уравнения (4.3.13) всегда неотрицательна. Вид функций $\varphi_1(a)$ для разных ν и k показан на рис. 4.3.1—4.3.4.

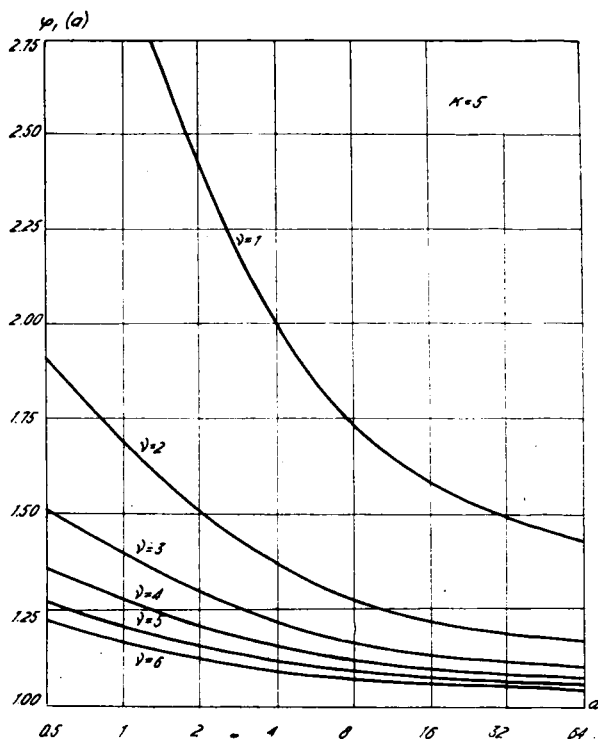


Рис. 4.3.4

Аналогично, приравнявая нулю производную от V по γ , приходим к уравнению

$$\frac{\left\langle \frac{\sum_s (a+x_s)^2}{\left[\sum_s x_s (a+x_s) \right]^2} \right\rangle}{\left\langle \frac{\sum_s x_s (a+x_s)^2}{\left[\sum_s x_s (a+x_s) \right]^2} \right\rangle} = \varphi_2(a) = \frac{h_0}{\gamma}. \quad (4.3.14)$$

Вид функций $\varphi_2(a)$ для разных ν и k показан на рис. 4.3.5—4.3.8.

Система уравнений (4.3.13), (4.3.14) и является той

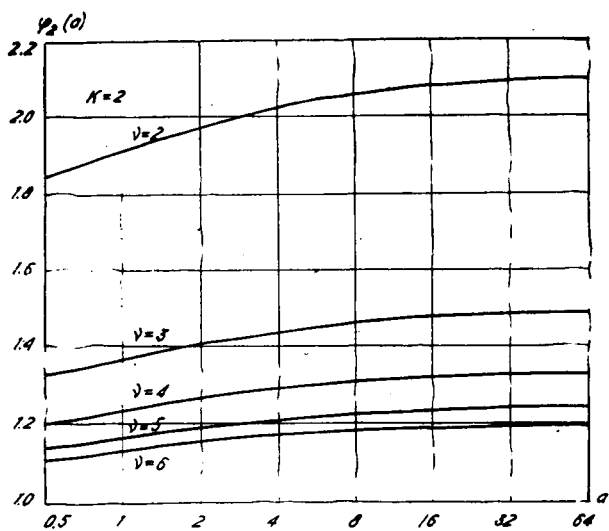


Рис. 4.3.5

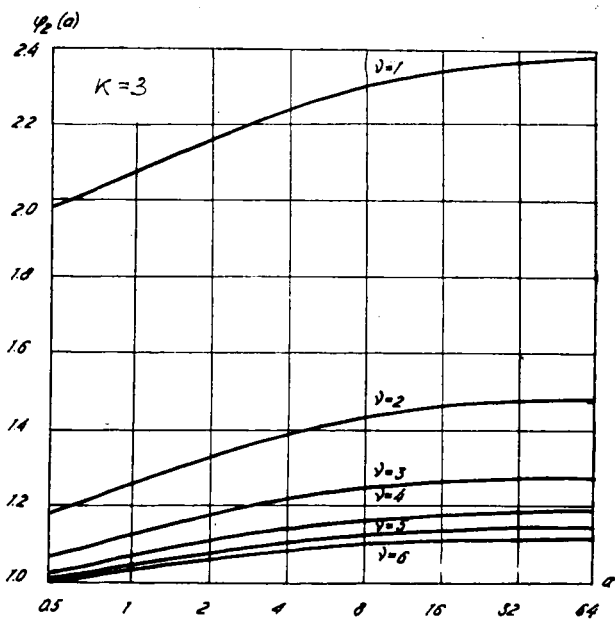


Рис. 4.3.6

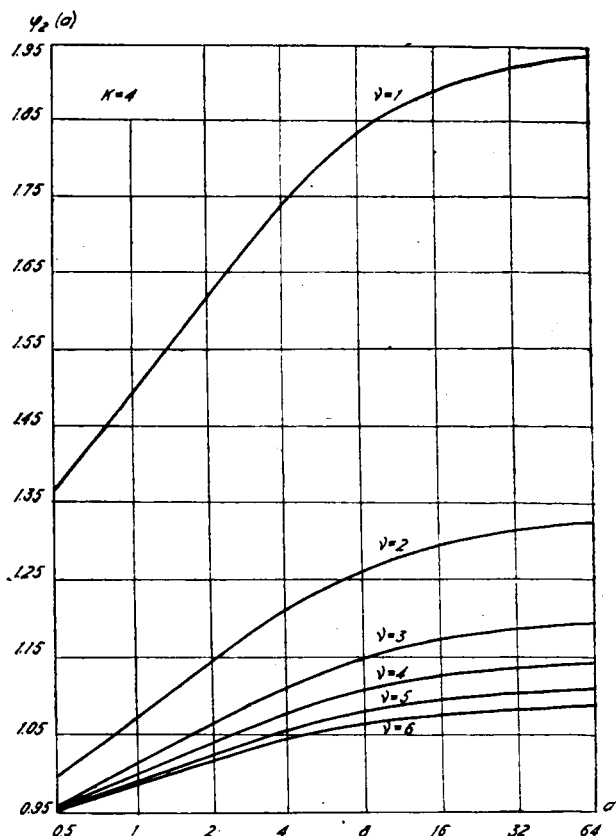


Рис. 4.3.7

системой, из которой следует находить оптимальные значения a и γ .

Исследуем в общем виде решение уравнений (4.3.13), (4.3.14) при больших и малых γ .

При $\gamma \rightarrow 0$ правая часть уравнения (4.3.13) стремится к выражению $h_0 \int_0^T \mu(t) \mu'^2(t) dt / \int_0^T \mu'^2(t) dt$ и (4.3.13) приобретает вид

$$a \varphi_1(a) \approx h_0 \int_0^T \mu(t) \mu'^2(t) dt / \int_0^T \mu'^2(t) dt. \quad (4.3.15)$$

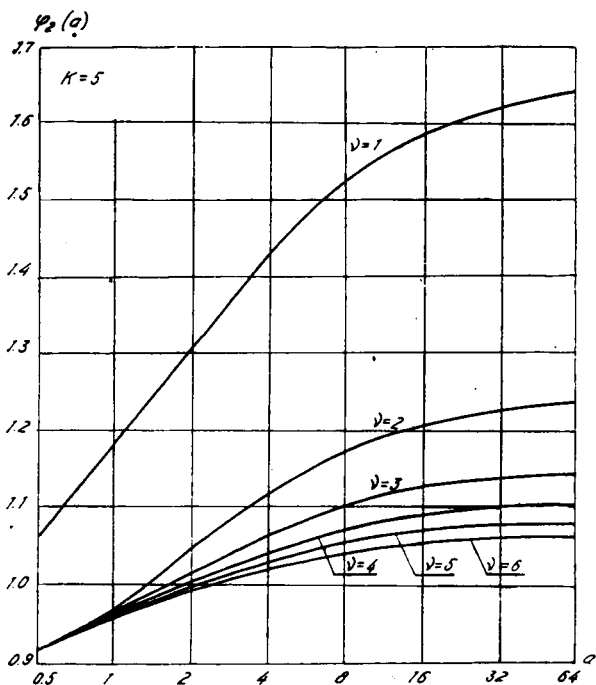


Рис. 4.3.8

Деля это уравнение на (4.3.14), получим

$$a \frac{\varphi_1(a)}{\varphi_2(a)} = \gamma \frac{\int_0^T \mu(t) \mu'^2(t) dt}{\int_0^T \mu'^2(t) dt}. \quad (4.3.16)$$

Так как при $a \rightarrow 0$ $\varphi_1(a)$ и $\varphi_2(a)$ сходятся к отличным от нуля величинам, то a также должно быть мало. Оставляя тогда лишь члены с высшей степенью a , получим

$$a = A \cdot h_0 \frac{\int_0^T \mu(t) \mu'^2(t) dt}{\int_0^T \mu^2(t) dt},$$

$$A = \frac{\left\langle \frac{\sum_s x_s^3 \sum_s x_s - (\sum_s x_s^2)^2}{(\sum_s x_s^2)^3} \right\rangle}{\left\langle \frac{n \sum_s x_s^2 - (\sum_s x_s)^2}{(\sum_s x_s^2)^3} \right\rangle} ;$$

$$\gamma = h_0 \cdot B ; B = \frac{\left\langle \sum_s x_s^3 / (\sum_s x_s^2)^2 \right\rangle}{\left\langle 1 / \sum_s x_s^2 \right\rangle} .$$

Отсюда видно, что это решение соответствует малым h_0 . Коэффициент $\int_0^T \mu(t) \mu'^2(t) dt / \int_0^T \mu'^2(t) dt$ легко вычисляется по известной форме сигнала. Коэффициенты A и B даны в табл. 4.3.1 и 4.3.2 соответственно.

Таблица 4.3.1

k	γ					
	1	2	3	4	5	6
2	—	0,121	0,183	0,265	0,347	0,421
3	0,107	0,183	0,315	0,435	0,522	0,587
4	0,126	0,278	0,450	0,562	0,638	0,691
5	0,157	0,405	0,508	0,650	0,694	0,765

Таблица 4.3.2

k	γ					
	1	2	3	4	5	6
2	—	0,628	0,794	0,869	0,908	0,932
3	0,544	0,920	1,004	1,030	1,039	1,042
4	0,842	1,104	1,127	1,123	1,131	1,134
5	1,099	1,103	1,120	1,133	1,140	1,143

Рассмотрим теперь случай больших γ , соответствующий большим h_0 и a (в этом случае основную роль должно играть линейное слагаемое). При больших a левая часть уравнения (4.3.10) стремится к

$$\frac{\langle 1/\sum_s x_s \rangle}{\langle k/(\sum_s x_s)^2 \rangle} = \frac{k\nu - 2}{k\nu},$$

поэтому уравнение (4.3.14) принимает вид

$$\gamma = \frac{k\nu - 2}{k\nu} \cdot h_0,$$

т. е. то же самое, что мы имели для оптимальной линейной системы. Уравнение (4.3.13) приобретает вид

$$a = C \cdot h_0 \frac{\int_0^T \frac{\mu(t) \mu'(t) dt}{(1 + \gamma \mu(t))^2}}{\int_0^T \frac{\mu'(t) dt}{(1 + \gamma \mu(t))^2}}, \quad (4.3.17)$$

где

$$C = \frac{\left\langle \frac{\sum_s x_s \sum_s x_s^3 - (\sum_s x_s^2)^2}{(\sum_s x_s)^3} \right\rangle}{\left\langle \frac{k \sum_s x_s - (\sum_s x_s)^2}{(\sum_s x_s)^3} \right\rangle} = \frac{k(\nu + 1)(k\nu - 1)}{(k\nu + 3)(k\nu + 2)}.$$

Если интегралы $\int_0^T \mu^2(t)/\mu(t) dt$ и $\int_0^T \frac{\mu'(t)}{\mu^2(t)} dt$ конечны, то (4.3.17) приобретает вид

$$a = C \cdot h_0 \frac{\int_0^T \frac{\mu'(t)}{\mu^2(t)} dt}{\int_0^T \frac{\mu'(t)}{\mu^2(t)} dt}. \quad (4.3.18)$$

Однако обычно интеграл $\int_0^T \frac{\mu'^2(t)}{\mu(t)} dt$ расходится, и для

нахождения a следует пользоваться непосредственно уравнением (4.3.17). Рассмотрим два примера.

Пусть $\mu(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$. В этом случае $\int_0^T \frac{\mu'^2(t) dt}{\mu(t)}$ сходится, но $\int_0^T \frac{\mu'^2(t)}{\mu^2(t)} dt$ расходится. Точное решение имеет вид

$$a = C \cdot h_0 \frac{\gamma - 2 \ln(1 + \gamma) - \frac{\gamma}{1 + \gamma}}{\gamma \left[\ln(1 + \gamma) - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \right]}$$

или (при больших γ) асимптотически

$$a = \frac{C \cdot h_0}{\ln(1 + \gamma)} = \frac{C \cdot h_0}{\ln \left(1 + \frac{k\nu - 2}{k\nu} h_0 \right)}$$

Для треугольного импульса

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| < T; \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

расходится не только $\int_0^T \frac{\mu'^2(t) dt}{\mu^2(t)}$, но и $\int_0^T \frac{\mu'^2(t)}{\mu(t)} dt$. Точное решение в этом случае имеет вид

$$a = C \cdot h_0 \frac{(1 + \gamma) \ln(1 + \gamma) - \gamma}{\gamma^2},$$

или асимптотически

$$a \approx C \cdot h_0 \frac{\ln(1 + \gamma)}{\gamma} = C \frac{k\nu}{k\nu - 2} \ln \left(1 + \frac{k\nu - 2}{k\nu} h_0 \right).$$

Приведем теперь некоторые оценки эффективности линейно-квадратичной схемы.

Так как эффективность линейно-квадратичной схемы не хуже эффективности линейной схемы ($a=\infty$) с $\gamma = \frac{k\nu-2}{k\nu} h_0$, то имеем

$$e \geq \frac{\int_0^T \frac{\gamma \mu'^2(t) dt}{1 + \gamma \mu(t)}}{\int_0^T \frac{\mu'^2(t)}{\mu(t)} dt}; \quad (4.3.19)$$

с другой стороны, в силу (3.1.19а)

$$V_{\min} \geq \frac{1}{\lambda_0 h_0^2 \int_0^T \mu'^2(t) dt} \left\langle \frac{1}{\sum_s x_s^2} \right\rangle$$

и эффективность линейно-квадратичной схемы не хуже эффективности квадратичной схемы с $a=0$, $\gamma \rightarrow 0$. Значит

$$V_{\tau} \leq \frac{1}{\lambda_0 h_0^2 \int_0^T \mu'^2(t) dt} \left[\left\langle \frac{1}{\sum_s x_s^2} \right\rangle + \right. \\ \left. + h_0 \frac{\int_0^T \mu(t) \mu'^2(t) dt}{\int_0^T \mu'^2(t) dt} \left\langle \frac{\sum_s x_s^3}{\sum_s x_s^2} \right\rangle \right],$$

откуда

$$e \geq \frac{1}{1 + h_0 F B}, \quad F = \frac{\int_0^T \mu(t) \mu'^2(t) dt}{\int_0^T \mu'^2(t) dt}. \quad (4.3.20)$$

Вообще говоря, оценки эффективности (4.3.19) и (4.3.20) сильно занижены, и реальная эффективность гораздо выше.

§ 4. Кросс-корреляционный метод оценки скорости цели

Наиболее обычным и точным способом оценки скорости цели является ее оценка по доплеровскому сдвигу

гу частоты. Однако если речь идет о приемниках прямого усиления в оптическом диапазоне частот, то использование доплеровского сдвига частоты для оценки скорости не представляется возможным, так как информация о частоте теряется при фотодетектировании. Оценку скорости в приемниках прямого усиления возможно производить по относительному смещению двух импульсов, отраженных целью через период повторения сигнала. Действительно, если скорость цели есть v , а период повторения импульсов T , то за период повторения цель сместится на расстояние vT , что вызовет временный сдвиг импульсов на величину $\Delta\tau = \frac{2vT}{C}$. Если T_0 — длительность импульса, то относительная величина сдвига будет $\delta = \frac{2vT}{C \cdot T_0}$.

Так как в оптическом диапазоне возможно получение очень коротких зондирующих импульсов, то δ может быть значительной величиной. Так, например, при $v=300$ м/с; $T=1$ мс, $T_0=1$ мс; $\delta=2$, т. е. через период повторения, импульсы смещаются на свою удвоенную длительность.

Для оценки скорости в этом случае достаточно было бы измерить моменты прихода t_1 и t_2 двух импульсов с последующим вычислением разности $t_1 - t_2$. Заметим, что эта процедура является оптимальной [44].

Как оценивать t_1 и t_2 , было подробно рассмотрено выше. Поэтому ниже исследуется другой метод оценки скорости, являющийся аналогом кросс-корреляционного метода в радиолокации.

Как известно [45], если имеется два процесса $x(t)$ и $y(t)$, то при кросс-корреляционном методе вычисляется величина

$$z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt, \quad (4.4.1)$$

и возможный сдвиг сигналов, присутствующих в реализациях $x(t)$ и $y(t)$, вычисляется по положению максимума функции $z(\tau)$.

Однако непосредственное перенесение формулы (4.4.1) на наш случай невозможно, так как процессы

$x(t)$ и $y(t)$, являющиеся потоками фотоэлектронов, могут рассматриваться как суммы δ -функций

$$x(t) = \sum_i \delta(t - t_i'), \quad y(t) = \sum_i \delta(t - t_i''), \quad (4.4.2)$$

где t_i' и t_i'' — моменты появления фотоэлектронов от первого и второго импульсов. Совпадение же двух δ -функций имеет нулевую вероятность. В силу этого $z(\tau) = 0$ всюду за исключением множества нулевой меры, и формула (4.4.1) требует некоторого обобщения.

К этому обобщению можно подойти разными путями.

1. Во-первых, формула (4.4.1) является частным случаем квадратичной формулы общего вида, которая записывается как

$$z(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_1 - t_2 + \tau) x(t_1) y(t_2) dt_1 dt_2 \quad (4.4.3)$$

и при $\varphi(t) = \delta(t)$ переходит в (4.4.1). Формула же (4.4.3) непосредственно обобщается на наш случай, так как при подстановке (4.4.2) в (4.4.3) получим выражение

$$z(\tau) = \sum_{i,j} \varphi(t_i' - t_j'' + \tau), \quad (4.4.4)$$

которое уже отлично от нуля почти всюду. Правда, при этом мы уже не можем считать $\varphi(t)$ δ -функцией.

2. Во-вторых, можно рассматривать следующую систему: сначала процессы $x(t)$ и $y(t)$ пропускаются через некоторые фильтры с переходными характеристиками $h_x(\tau)$ и $h_y(\tau)$, давая процессы

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_x(t - \tau) x(\tau) d\tau = \sum_i h_x(t - t_i'); \\ \tilde{y}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_y(t - \tau) y(\tau) d\tau = \sum_j h_y(t - t_j''), \end{aligned}$$

далее находится кросс-корреляционная функция уже между этими преобразованными процессами

$$z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t) \tilde{y}(t + \tau) dt = \sum_{i,j} \varphi(t_i' - t_j'' + \tau);$$

$$\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_x(t) h_y(t+\tau) dt,$$

т. е. мы вновь приходим к формуле (4.4.4), но $\varphi(t)$ имеет несколько иной смысл (свертка переходных характеристик фильтра).

Таким образом, в качестве обобщения кросс-корреляционного метода мы возьмем формулы (4.4.4) с некоторой пока неизвестной функцией $\varphi(t)$.

Если перейти от моментов появления фотоэлектронов к числам фотоэлектронов, то, центрируя h_i , (4.4.4) следует записать в виде

$$z(\tau) = \sum_{i,j} \varphi(t_i - t_j + \tau) (n_i - \lambda_0 \Delta t) (n_j - \lambda_0 \Delta t), \quad (4.4.5)$$

где n_i и n_j — числа фотоэлектронов на i -м и j -м участках первого и второго импульсов соответственно, а λ_0 — интенсивность шумового потока фотоэлектронов.

Итак, пусть мы имеем два импульса формы $\mu(t)$ с амплитудами ρ_1 и ρ_2 , так что интенсивность потоков фотоэлектронов будет равна соответственно

$$\lambda_1(t) = \lambda_0 + \rho_1 \mu(t)$$

и

$$\lambda_2(t) = \lambda_0 + \rho_2 \mu(t),$$

где τ_0 определяет относительный сдвиг между импульсами ρ_1 и ρ_2 , которые есть случайные величины с плотностями вероятностей

$$p(\rho_i) = \frac{\rho_i^{\nu-1} \nu^\nu}{\Gamma(\nu) \rho_0^\nu} e^{-\frac{\rho_i \nu}{\rho_0}}.$$

В этом случае главный максимум функции $z(\tau)$ должен находиться в окрестности $\tau = \tau_0$. Условие несмещенности оценки τ величины τ_0 будет по-прежнему иметь вид $\overline{z'(\tau_0)} = 0$. Производя усреднение по n_i и n_j , приведем условие несмещенности к виду

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x-y) \mu(x) \mu(y) dx dy = 0 \quad (4.4.6)$$

или, вводя в рассмотрение функцию автокорреляции полезного сигнала

$$z(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) \mu(x - \xi) dx, \quad (4.4.7)$$

являющуюся четной, положительной, определенной функцией от ξ , условие (4.4.6) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) r(x) dx = 0. \quad (4.4.8)$$

Дисперсию оценки τ величины τ_0 будем находить по формуле

$$V(\tau) = \left\langle \frac{D[z'(\tau_0)]}{[z''(\tau_0)]^2} \right\rangle_{\rho_1, \rho_2}, \quad (4.4.9)$$

где $\langle \dots \rangle_{\rho_1, \rho_2}$ означает усреднение по ρ_1 и ρ_2 . Вычислим входящие в эту формулу величины. Так как

$$z''(\tau) = \sum_{i,j} \varphi''(t_i - t_j + \tau_0) (n_i - \lambda_0 \Delta t) (n_j - \lambda_0 \Delta t),$$

то

$$\begin{aligned} \overline{z''(\tau_0)} &= \rho_1 \rho_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi''(x - y) \mu(x) \mu(y) dx dy = \\ &= -\rho_1 \rho_2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) r'(x) dx. \end{aligned}$$

Последнее равенство получилось после интегрирования по частям в предположении, что при $x \rightarrow \pm \infty$ $\varphi(x)$ и ее производные обращаются в нуль.

Вычисляя $D[z'(\tau_0)]$, получим

$$\begin{aligned} D[z'(\tau_0)] &= \rho_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x - y) \varphi'(z - y) (\lambda_0 + \\ &\quad + \rho_2 \mu(y)) \mu(x) \mu(y) dx dy dz + \\ &+ \rho_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x - y) \varphi'(x - v) (\lambda_0 + \rho_1 \mu(x)) \mu(y) \mu(v) dx dy dv + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_0 + \rho_1 \mu(x)) (\lambda_0 + \rho_2 \mu(y)) \varphi'^2(x - y) dx dy. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Выделим в этом выражении главное слагаемое. В (4.4.10) присутствуют слагаемые с коэффициентами

$$\lambda_0^2, \lambda_0 \rho_1^2, \lambda_0 \rho_2^2, \rho_1 \rho_2^2, \rho_2 \rho_1^2, \lambda_0 \rho_1, \lambda_0 \rho_2, \rho_1 \rho_2.$$

Если $\lambda_0 T$ мало, то основную роль играют слагаемые с $\rho_1 \rho_2^2$ и $\rho_1^2 \rho_2$. Если $\lambda_0 T$ велико, то должны быть велики отношения ρ_1^2/λ_0 , ρ_2^2/λ_0 , а отношения ρ_1/λ_0 , ρ_2/λ_0 и тем более $\rho_1 \rho_2/\lambda_0^2$ должны быть малы. В этом случае основную роль играют слагаемые $\lambda_0 \rho_1^2$ и $\lambda_0 \rho_2^2$.

Поэтому во всех случаях следует пренебречь слагаемыми с λ_0^2 , $\lambda_0 \rho_1$, $\lambda_0 \rho_2$, $\rho_1 \rho_2$, и $V(\tau/\rho_1, \rho_2)$ приобретает вид

$$\begin{aligned} V(\tau | \rho_1, \rho_2) = & \frac{1}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) r'(x) dx \right]^2} \left\{ \frac{1}{\rho_1} \iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x-y) \cdot \right. \\ & \cdot \varphi'(z-y) \mu(y) \mu(x) \mu(z) dx dy dz + \\ & + \frac{1}{\rho_2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x-y) \varphi'(x-v) \mu(x) \mu(y) \mu(v) dx dy dv + \\ & \left. + \left(\frac{\lambda_0}{\rho_1^2} + \frac{\lambda_0}{\rho_2^2} \right) \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x-y) \varphi'(z-y) \mu(x) \mu(z) dx dz \right\}. \quad (4.4.11) \end{aligned}$$

Усредняя это выражение по величинам ρ_1 , ρ_2 и вводя обозначения $\gamma = \frac{\nu-2}{\nu} \cdot \frac{\rho_0}{\lambda_0}$; $\theta(x) = \varphi'(x)$;

$$\begin{aligned} r_1(\xi, \eta) = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) [\mu(x+\xi) \mu(x+\eta) + \mu(x-\xi) \mu(x-\eta)] dx; \\ R(\xi, \eta) = & r(\xi-\eta) + \gamma r_1(\xi, \eta), \end{aligned}$$

мы получим окончательно

$$V(\tau) = \frac{2 \nu^2 \lambda_0}{(\nu-1)(\nu-2) \rho_0^2} \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) \theta(\eta) R(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) r'(\xi) d\xi \right]^2}. \quad (4.4.12)$$

Перейдем теперь к выводу уравнения, определяющего оптимальный вид функции $\varphi(x)$. Мы видим, что V и ус-

ловие несмещенности зависят от следующих функционалов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) \theta(\eta) R(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) r'(\xi) d\xi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) r(\xi) d\xi.$$

Вводя неопределенные множители Лагранжа и варьируя по $\theta(x)$, получим уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\xi, \eta) \theta(\eta) d\eta = \lambda_1 r'(\xi) + \lambda_2 r(\xi). \quad (4.4.13)$$

Исследуем вопрос о возможных значениях коэффициентов λ_1 и λ_2 . В силу линейности уравнения (4.4.13) его решение можно записать в виде

$$\theta(\xi) = \lambda_1 \theta_1(\xi) + \lambda_2 \theta_2(\xi),$$

где $\theta_1(\xi)$ и $\theta_2(\xi)$ есть решения уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_1(\xi) R(\xi, \eta) d\xi = r'(\eta); \quad (4.4.14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_2(\xi) R(\xi, \eta) d\xi = r(\eta); \quad (4.4.15)$$

$r(\xi)$ — четная функция. Как видно из определяющих формул, $R(-\xi, -\eta) = R(\xi, \eta)$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_2(\eta) R(-\xi, \eta) d\eta = r(-\xi). \quad (4.4.16)$$

Заменяя η на $-\eta$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_2(-\eta) R(-\xi, -\eta) d\eta = r(-\xi), \quad (4.4.17)$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_2(-\eta) R(\xi, \eta) d\eta = r(\xi). \quad (4.4.18)$$

Сравнивая (4.4.18) с (4.4.15), получаем, что $\theta_2(\eta)$ есть четная функция. Аналогично показывается, что $\theta_1(\xi)$ есть функция нечетная в силу нечетности $r'(\xi)$. Учиты-

вая нечетность $\theta_1(\xi)$ и четность $\theta_2(\xi)$, условие несмещенности запишется в виде

$$\lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} \theta_2(\xi) r(\xi) d\xi = 0, \quad (4.4.19)$$

откуда следует $\lambda_2 = 0$.

Так как $\varphi(x)$ определяется с точностью до произвольного постоянного сомножителя, то λ_1 произвольно. Беря $\lambda_1 = 1$, окончательно получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\eta) r(\xi - \eta) d\eta + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\eta) r_1(\xi, \eta) d\eta = r'(\xi). \quad (4.4.20)$$

Данное интегральное уравнение является уравнением Вольтерра. Записать его общее решение не представляется возможным. Отметим только, что при $h_0 \rightarrow 0$ (что выполняется при $\lambda_0 T \rightarrow \infty$), когда $\gamma \rightarrow 0$, решение уравнения (4.4.20) имеет вид

$$\theta(\xi) = \delta'(\xi), \quad \varphi(\xi) = \delta(\xi).$$

Так как случай $\lambda_0 T \rightarrow \infty$ соответствует переходу к классическому случаю, когда квантовые флуктуации сигнала не играют роли, сходимость нашего кросс-коррелятора к обычному кросс-коррелятору становится вполне понятной. Отличие $\varphi(x)$ от δ -функции, получающееся при $\gamma \neq 0$, отражает квантовую структуру сигнала.

Чтобы показать, как изменяется вид решения уравнения (4.4.20), рассмотрим один частный случай. Пусть мы имеем сигнал гауссовской формы, т. е. $\mu(t) = e^{-t^2}$. Тогда

$$r(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}; \quad r_1(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{-\frac{2}{3}(\xi^2 - \xi\eta + \eta^2)}$$

и уравнение (4.4.20) приобретает вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\eta) e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{2}} d\eta + \frac{\gamma-2}{\gamma} h_0 \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\eta) e^{-\frac{2}{3}(\xi^2 - \xi\eta + \eta^2)} d\eta = \\ = -\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}. \end{aligned}$$

Вид решения при $h_0 \rightarrow 0$ нам известен. При $h_0 \rightarrow \infty$, когда можно пренебречь первым членом, решение имеет вид

$$\theta(\xi) = -A\xi, \quad A = \frac{\nu}{\sqrt{\pi}(\nu-2)h_0} \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Точное решение уравнения (4.4.20) найти в аналитической форме не удастся. Однако вид предельных решений наводит на мысль, что достаточно хорошим приближением к точному решению является функция вида

$$\theta(\xi) = -\xi e^{-\frac{\xi^2}{2W}}, \quad (4.4.21)$$

которая при $W \rightarrow 0$ переходит в $\delta'(\xi)$, а при $W \rightarrow \infty$ — в линейную функцию. Найдем поэтому оптимальное значение W в зависимости от h_0 .

Вычисляя входящие в (4.4.12) интегралы, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) r'(\xi) d\xi = \pi^2 \frac{W^3}{(1+W)^3};$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) \theta(\eta) r(\xi - \eta) d\xi d\eta = 2\pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{W^3}{(1+2W)^{3/2}};$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) \theta(\eta) r_1(\xi, \eta) d\xi d\eta = 2\pi \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sqrt{3}W^3}{(3+8W+4W^2)^{3/2}};$$

и поэтому выражение для вариации оценки τ_0 приобретает вид

$$\begin{aligned} V(\tau_0) = & \frac{2\nu^2\lambda_0}{(\nu-1)(\nu-2)\rho_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{(1+W)^3}{(1+2W)^{3/2}} + \right. \\ & \left. + \frac{\nu-2}{\nu} h_0 \frac{(1+W)^3 2\sqrt{2}}{(3+8W+4W^2)^{3/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Приравняв нулю $\partial V / \partial W$, получим

$$\frac{\nu-2}{\nu} h_0 - \frac{W}{2\sqrt{2}} \left(\frac{3+8W+4W^2}{1+2W} \right)^{5/2}.$$

График зависимости W от $\left(\frac{\nu-2}{\nu} h_0 \right)$ приведен на рис.

4.4.1. Отметим, что при малых h_0

$$\frac{\nu-2}{\nu} h_0 \approx \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} W.$$

Таким образом, с ростом h_0 растет также и W , что приводит к расширению функции $\varphi(\xi) = e^{-\xi^2/2 W}$.

Рассмотрим еще коротко оценку скорости по пачке из k импульсов (выше рассматривался случай $k=2$). В этом случае все импульсы смещаются относительно

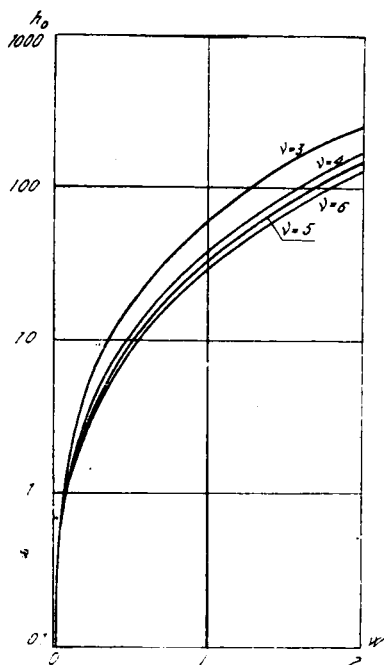


Рис. 4.4.1

друг друга, и для оценки их взаимного смещения необходимо вычислять кросс-корреляцию всевозможных пар импульсов. В силу этого естественно записывать алгоритм работы системы в виде

$$z(\tau) = \sum_{r,s=1}^k \sum_{i,j}^M \varphi(t_i^{(r)} - t_j^{(s)} + (r-s)\tau) (n_i^{(r)} - \lambda_0 \Delta t) (n_j^{(s)} - \lambda_0 \Delta t) = \max_{\tau}, \quad (4.4.23)$$

т. е. оценка τ_0 измеряется по положению максимума величины $z(\tau)$.

Вычисляя $z'(\tau_0)$, получим

$$\overline{z'(\tau_0)} = \sum_{r,s=1}^k (r-s) \rho_r \rho_s \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) \mu(\xi) d\xi, \quad (4.4.24)$$

поэтому по-прежнему условие несмещенности имеет вид (4.4.8). Вычисляя условную вариацию оценки τ_0 и оставляя лишь главные слагаемые, получим

$$\begin{aligned} V(\tau | \rho_1, \dots, \rho_k) = & \frac{1}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) r'(\xi) d\xi \right]^2} \left\{ \frac{4\lambda_0 \sum_{r,s,m}^k (r-s)(r-m) \rho_s \rho_m}{\left(\sum_{r,s}^k (r-s)^2 \rho_s \rho_r \right)^2} \times \right. \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) \theta(\eta) r(\xi - \eta) d\xi d\eta + \\ & \left. + \frac{\sum_{r=1}^k \rho_r}{\sum_r^k r^2 \rho_r \sum_s^k \rho_s - \left(\sum_r^k r \rho_r \right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) \theta(\eta) r_1(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\}. \end{aligned}$$

Усредняя по $\rho_1, \dots, \rho_k$, получим

$$V(\tau) = L \frac{\lambda_0}{\rho_0^2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) \theta(\eta) [r(\xi - \eta) + \kappa h_0 r_1(\xi, \eta)] d\xi d\eta}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) r'(\xi) d\xi \right]^2},$$

где

$$\begin{aligned} L = & \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \frac{\sum_{r,s,m} (r-s)(r-m) x_s x_m}{\left[\sum_r r^2 x_r \sum_s x_s - \left(\sum_r r x_r \right)^2 \right]^2} \prod_{r=1}^k \frac{x_r^{\nu-1} \nu^{\nu}}{\Gamma(\nu)} e^{-x_r \nu} dx_r; \\ \kappa = & \left[\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \frac{\sum_r x_r}{\sum_r r^2 x_r \sum_r x_r - \left(\sum_r r x_r \right)^2} \prod_{r=1}^k \frac{x_r^{\nu-1} \nu^{\nu}}{\Gamma(\nu)} e^{-x_r \nu} dx_r \right] L. \end{aligned}$$

Ниже приведены табл. 4.4.1 и 4.4.2 значений L и κ со-

ответственно, полученные в результате численных расчетов.

Таблица 4.4.1

k	v					
	1	2	3	4	5	6
2	—	—	9,000	5,333	4,167	3,600
3	5,778	1,996	1,251	0,984	0,851	0,777
4	1,510	0,586	0,402	0,336	0,302	0,281
5	0,548	0,236	0,175	0,152	0,139	0,132

Таблица 4.4.2

k	v					
	1	2	3	4	5	6
2	—	—	0,333	0,500	0,600	0,667
3	0,338	0,392	0,538	0,631	0,700	0,741
4	0,365	0,482	0,624	0,707	0,720	0,798
5	0,422	0,560	0,686	0,756	0,805	0,835

Уравнение, определяющее оптимальный вид $\theta(\xi)$, приобретает теперь вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\eta) [r(\xi - \eta) + x h_0 r_1(\xi, \eta)] d\eta = r'(\xi),$$

отличаясь от (4.4.20) только множителем перед h_0 .

§ 5. Эффективность оценки скорости цели кросс-корреляционным методом

Пусть мы имеем пачку из k импульсов, так что момент прихода первого импульса есть t_0 , второго $t_0 + \tau$, ..., k -го — $t_0 + (k-1)\tau$. Пусть x_r — оценка момента прихода r -го импульса, являющаяся несмещенной оценкой с дисперсией σ^2 . Для всей пачки мы получаем совокупность $x_1, \dots, x_k$, по которой можем найти оценку $\hat{\tau}$ величины τ .

Так как при больших отношениях сигнала к шуму оценки распределены асимптотически нормально, то оптимальная оценка $\hat{\tau}$ есть линейная комбинация величин $x_1, \dots, x_k$, для ее нахождения воспользуемся методом наименьших квадратов

$$\theta = \sum_{r=1}^{k-1} (x_{r+1} - t_0 - r\tau)^2 = \min_{\tau, t_0}. \quad (4.5.1)$$

Приравнивая нулю $\partial\theta/\partial t_0$ и $\partial\theta/\partial\tau$ и разрешая полученную систему относительно τ , получим

$$\hat{\tau} = \frac{G}{(k^2-1)(k+1)} \sum_{r=1}^{k-1} x_{r+1} (2r-k+1). \quad (4.5.2)$$

Вычисляя дисперсию величины $\hat{\tau}$, мы получим

$$D[\hat{\tau}] = \frac{12}{k(k^2-1)} \tau^2.$$

Величина σ^2 не может превышать величину $1/I_\tau$, где I_τ — количество информации по Фишеру о моменте прихода сигнала t_0 . Для нашего случая

$$\sigma^2 \geq \int_0^\infty \frac{p(\rho) d\rho}{\rho^2 \int_0^T \frac{\mu'^2(t) dt}{\lambda_0 + \rho_0 \mu(t)}}.$$

Пусть $\lambda_0 T \gg 1$. В этом случае, пренебрегая $\rho_0/\lambda_0 \ll 1$, получим

$$\sigma^2 \geq \frac{\nu^2}{(\nu-1)(\nu-2)} \cdot \frac{\lambda_0}{\rho_0^2} \cdot \frac{1}{T \int_0^T \mu'^2(t) dt}.$$

В случае двух импульсов

$$D[\tau] \geq \frac{2\nu^2}{(\nu-1)(\nu-2)} \cdot \frac{\lambda_0}{\rho_0^2} \cdot \frac{1}{T \int_0^T \mu'^2(t) dt}.$$

С другой стороны, если $\theta(\xi)$ определяется уравнением (4.4.20), то

$$V = \frac{2\nu^2}{(\nu-1)(\nu-2)} \cdot \frac{\lambda_0}{\rho_0^2} \cdot \frac{1}{\left| \int_0^\infty \theta(\xi) r'(\xi) d\xi \right|}.$$

При $q_0 \rightarrow 0$, когда $\theta(\xi) \rightarrow -\delta'(\xi)$, получим

$$\int_0^\infty \theta(\xi) r'(\xi) d\xi \rightarrow r''(0) = \int_0^\infty \mu(x) \mu''(x) dx = - \int_0^\infty \mu'^2(x) dx,$$

выражение для V совпадает с нижней границей для дисперсии оценки τ . Таким образом, в случае двух импульсов при сильных шумах ($\lambda_0 T \rightarrow \infty$) $e \rightarrow 1$, т. е. оценка скорости кросс-корреляционным методом является эффективной.

Рассмотрим теперь для $k=2$ другой крайний случай, когда $\lambda_0 T$ мало и $\rho_0/\lambda_0 \gg 1$. Тогда, пренебрегая λ_0 по сравнению с $\rho_0 \mu(t)$, получим

$$D[\tau] \geq \frac{\nu}{(\nu-1) \sqrt{\pi} \cdot \rho_0}.$$

С другой стороны, в случае импульса гауссовской формы, когда $\theta(\xi) = -\xi$, получаем

$$V = \frac{\nu}{(\nu-1) \sqrt{2} \rho_0},$$

эффективность оценки скорости кросс-корреляционным методом в этом предельном случае ($\lambda_0 T \rightarrow 0$) равна

$$e = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0,798, \text{ т. е. дисперсия оценки } \tau \text{ возрастает}$$

по сравнению со своим минимальным значением лишь на 25,3%, а соответствующая ей среднеквадратичная погрешность — лишь на 11,9%. Это возрастание с практической точки зрения очень мало, что говорит о том, что кросс-корреляционный метод оценки скорости цели может применяться во всем диапазоне значений $\lambda_0 T$.

§ 6. Учет инерционности фотодетектора

В предыдущих главах предполагалось, что каждый фотоэлектрон дает бесконечно узкий δ -образный импульс тока или напряжения. На самом деле каждый фотоэлек-

трон дает импульс тока конечной длительности и некоторой формы $H(t)$. Математически это можно представить в виде безынерционного фотодетектора, на выходе которого стоит линейный фильтр с переходной характеристикой $H(t)$. Рассмотрим, каким образом изменится схема обработки сигналов с учетом этой инерционности фотодетектора.

В случае системы оценки дальности оптимальная схема обработки состояла из линейного фильтра с переходной характеристикой $S(t) = \ln(1 + \gamma_0 \mu(t))$ и схемы межимпульсной обработки. Очевидно, что учет инерционности фотодетектора не повлияет на межимпульсную обработку, а вот фильтр, осуществляющий внутриимпульсную обработку, должен быть изменен. Это изменение будет в том, что новый фильтр, осуществляющий межимпульсную обработку, в сочетании с фильтром с характеристикой $H(t)$ должен быть эквивалентен старому фильтру. Так как при последовательном соединении двух фильтров результирующая характеристика равна свертке соответствующих переходных характеристик, то переходная характеристика $S(t)$ фильтра, осуществляющего внутриимпульсную обработку, должна находиться из уравнения

$$\int_0^t H(\tau) S(t-\tau) d\tau = \ln(1 + \gamma_0 \mu(t)).$$

Это уравнение можно решить, применив к нему преобразование Лапласа

$$\tilde{S}(p) = \frac{F(p)}{\tilde{H}(p)},$$

где $\tilde{S}(p)$, $\tilde{H}(p)$, $F(p)$ — преобразования Лапласа от функций $S(t)$, $H(t)$, $\ln(1 + \gamma_0 \mu(t))$ соответственно. Аналогично в случае кросс-корреляционной системы оценки скорости характеристика с учетом инерционности $\Phi(t)$ связана с характеристикой кросс-коррелятора без учета инерционности $\varphi(t)$ соотношением

$$\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} H(\tau_1) H(\tau_2) \Phi(t_1 - \tau_1; t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \varphi(t_1 - t_2).$$

Глава V

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ПОЯВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ПОРОГОВЫМИ ФИЛЬТРАМИ

В предыдущих главах рассматривались системы оценки момента появления сигналов приемников с безынерционным фотодетектором на входе, когда интенсивность оптического сигнала мала, т. е. число фотоэлектронов относительно невелико. В этой главе рассматривается оценка момента прихода в случае инерционных фотоприемников типа болометра, когда интенсивность сигнала велика и сигналы от отдельных фотонов, сильно перекрываясь, образуют единый случайный процесс. С такими приемниками приходится сталкиваться, например, в системах ориентации космических аппаратов. В дальнейшем в качестве численного примера будет рассматриваться система ориентации космического аппарата на центр Земли.

§ 1. Потенциальная точность оценки момента появления оптического сигнала

Пусть на ФЭП поступает процесс, определяемый формулой (1.5.1). Обозначая через $h(t) = 1(t) e^{-\alpha t}$ переходную характеристику ФЭП и через τ сдвиг полезного сигнала относительно начала отсчета, мы получим на выходе ФЭП процесс

$$z(t, \tau) = \int_{\tau}^t h(t-\xi) S_0(\xi-\tau) x(\xi) d\xi \quad (5.1.1)$$

со средним значением

$$m_z(t-\tau) = \overline{z(t)} = A_x \int_0^{t-\tau} h(t-\tau-\xi) S_0(\xi) d\xi. \quad (5.1.2)$$

Центрируя случайный процесс $z(t)$ [42]

$$\overset{\circ}{z}(t) = z(t) - \overline{z(t)} = \int_{\tau}^t h(t-\xi) S_0(\xi-\tau) \overset{\circ}{x}(\xi) d\xi, \quad (5.1.3)$$

мы получим, что функция корреляции процесса $\overset{\circ}{z}(t)$ равна

$$K_{\overset{\circ}{z}(t)}(t_1, t_2) = \sigma_x^2 \int_0^{t_1-\tau} \int_0^{t_2-\tau} h_1(t_1-\tau-\xi) h_2(t_2-\tau-\eta) S_0(\xi) S_0(\eta) \rho(\xi-\eta) d\xi d\eta. \quad (5.1.4)$$

На выходе ФЭП к нашему процессу добавляются собственные шумы $n(t)$. Обозначая $y(t) = \overset{\circ}{z}(t) + n(t)$, мы получим, что $y(t)$ есть нормальный случайный процесс со средним значением $\overline{y(t)} = m_z(t-\tau)$ и функцией корреляции

$$K_{y(t)}(t_1, t_2) = \sigma_x^2 \int_0^{t_1-\tau} \int_0^{t_2-\tau} h_1(t_1-\tau-\xi) h_2(t_2-\tau-\eta) S_0(\xi) S_0(\eta) \times \\ \times \rho(\xi-\eta) d\xi d\eta + N \delta(t_1 - t_2). \quad (5.1.5)$$

Переходя к отсчетам $y_1, \dots, y_M$ процесса $y(t)$, мы получим выражение для плотности вероятности отсчетов

$$p(y|\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} \sqrt{\det K_y}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^M R_{ij} (y_i - m_{zi})(y_j - m_{zj}) \right\}, \quad (5.1.6)$$

где K_y — матрица $\|K_{ij}\|$, а $\|R_{ij}\|$ есть матрица, обратная к матрице $\|K_{ij}\|$.

Для нахождения потенциальной точности оценки момента появления сигнала τ мы воспользуемся неравенством информации по Фишеру [46]

$$\sigma_{\tau}^2 \geq \frac{1}{I_{\tau}}, \quad (5.1.7)$$

где I_{τ} — количество информации по Фишеру о величине τ

$$I_{\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \log p(y_j|\tau)}{\partial \tau} \right)^2 p(y_j|\tau) dy_j. \quad (5.1.8)$$

Учитывая распределение (5.1.6), мы получим

$$\log p(y/\tau) = -\frac{1}{2} \log(\det K_y) - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^M R_{ij} (y_i - m_{zi})(y_j - m_{zj}). \quad (5.1.9)$$

Отметим, что при достаточно большом времени наблюдения ($\gg T$ — длительности импульса) матрицу K_y можно считать бесконечно мерной. Изменение τ вызовет сдвиг столбцов и строк этой матрицы, но ее детерминант от этого не изменится, поэтому, если время наблюдения велико, можно считать, что $\det K_y$ от τ не зависит. Тогда, дифференцируя (5.1.8) по τ и возводя результат в квадрат с усреднением по y_l , с учетом того, что

$$\begin{aligned} \overline{(y_i - m_{zi})(y_j - m_{zj})} &= K_{ij}; \\ \overline{(y_i - m_{zi})(y_j - m_{zj})(y_k - m_{zk})} &= 0; \\ \overline{(y_l - m_{zl})(y_j - m_{zj})(y_k - m_{zk})(y_l - m_{zl})} &= K_{lj}K_{kl} + \\ &+ K_{lk}K_{jl} + K_{il}K_{jk}, \end{aligned}$$

мы получим

$$\begin{aligned} I_\tau = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k}^M R'_{ij} R'_{kl} (K_{lj}K_{kl} + K_{lk}K_{jl} + K_{il}K_{jk}) + \\ + \sum_{i,j,k,l}^M R_{ij} R_{kl} m'_{zj} m'_{zk} K_{ik}. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Переходя теперь к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ (когда интервал времени между отсчетами стремится к нулю), мы получим, что уравнение для R_{ij}

$$\sum_m R_{im} K_{mj} = \delta_{ij}$$

перейдет в интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_y(t_1, t) R(t, t_2) dt = \delta(t_1 - t_2), \quad (5.1.11)$$

где $\delta(t)$ — дельта функции Дирака. Представляя $K_y(t_1, t_2)$ в виде

$$K_y(t_1, t_2) = \sigma_x^2 \cdot f(t_1, t_2) + N \delta(t_1 - t_2),$$

будем искать решение уравнения (5.1.11) в виде

$$R(t_1, t_2) = \alpha \psi(t_1, t_2) + \frac{1}{N} \delta(t_1 - t_2),$$

где α — размерная единица, то есть $\alpha = 1$, но в нее внесена вся размерность величин. Вычисляя интегралы, получим неоднородное уравнение Фредгольма II рода, поддающееся численному решению

$$\alpha \psi(t_1, t_2) = -\frac{\sigma_x^2}{N} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t) \alpha \psi(t, t_2) dt - \frac{\sigma_x^2}{N^2} f(t_1, t_2). \quad (5.1.12)$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ в формуле (5.1.10), учитывая (5.1.12), после замен и упрощений в многократных интегралах мы получим для количества информации по Фишеру выражение

$$\begin{aligned} I_{\tau} = & \alpha \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(t_1, t_2) m'(t_1) m'(t_2) dt_1 dt_2 + \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} m'^2(t) dt + \\ & + (\alpha \sigma_x^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(t_1, t_2) [f'_{t_1}(t_1, t_2) + f'_{t_2}(t_1, t_2)] dt_1 dt_2)^2 + \\ & + 4 \alpha \sigma_x^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(t_1, t_2) [f''_{t_1, t_1}(t_1, t_2) + f''_{t_1, t_2}(t_1, t_2)] dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

В выражение для m входит большой сомножитель A_x , в то время как в выражения для Ψ и f сомножитель A_x не входит, поэтому в (5.1.13) для I_{τ} главную роль играют первые два слагаемые. Вводя для них обозначения I_1 и I_2 , преобразуем их к виду, удобному для вычислений. Пусть угол зрения оптической системы приемника составляет $3^\circ (180')$ и соответствует τ_ϕ , тогда ошибка τ в оценке момента появления оптического сигнала соответствует ошибке ϕ в оценке углового положения центра Земли, равной

$$\phi = 180 \frac{\tau}{\tau_\phi}, \quad (5.1.14)$$

поэтому

$$\sigma_\phi = \frac{180}{\sqrt{I_{\tau} \cdot \tau_\phi^2}}.$$

Нас интересует лишь $I_\tau \cdot \tau_\Phi^2$. Обозначая через $S_0(\xi)$ функции $S(\xi \tau_\Phi)$, согласно (1.5.1) имеем

$$S_0(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0; \\ \xi, & 0 \leq \xi \leq 1; \\ 1, & 1 \leq \xi \leq \frac{T}{\tau_\Phi} - 1; \\ \frac{T\xi}{\tau_\Phi}, & \frac{T}{\tau_\Phi} - 1 \leq \xi \leq \frac{T}{\tau_\Phi}; \\ 0, & \xi > \frac{T}{\tau_\Phi}, \end{cases} \quad (5.1.15)$$

Преобразование главных слагаемых (5.1.13) начнем со 2-го. Так как $S_0(0) = 0$, то, находя $m'(t)$, делая замену переменных $t = u \cdot \tau_\Phi$, $\xi = \eta \cdot \tau_\Phi$ и учитывая выражение (5.1.15), мы получим

$$I_2 \cdot \tau_\Phi^2 = \frac{\alpha_0^2 (F_0 \tau_\Phi)^2}{q_1^2} \int_0^\infty [S_0(u) - \alpha_0 \int_0^u e^{-\alpha(u-\eta)} S_0(\eta) d\eta]^2 du, \quad (5.1.16)$$

где $\alpha_0 = \alpha \cdot \tau_\Phi$. Интеграл (5.1.16) можно вычислить в явном виде; мы не будем выписывать его ввиду крайней громоздкости выражения. Отметим лишь, что при $\tau/\tau_\Phi \gg 1$ слагаемое $I_2 \cdot \tau_\Phi^2$ практически не зависит от τ/τ_Φ .

Перейдем теперь к 1-му слагаемому выражения (5.1.13). Вводя обозначения $M(x) = S_0(x) - \alpha_0 \int_0^x S_0(\eta) \times \times e^{-\alpha_0(x-\eta)} d\eta$ и делая замену $t_1 = x \cdot \tau_\Phi$, $t_2 = y \cdot \tau_\Phi$, мы получим

$$I_1 \tau_\Phi = \tau_\Phi A_x^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(x \cdot \tau_\Phi) \Psi(y \cdot \tau_\Phi) M[x] M[y] dx dy. \quad (5.1.17)$$

Введем обозначение $\Psi(x, y) = A_x^2 \tau_\Phi^4 \Psi(x \cdot \tau_\Phi, y \cdot \tau_\Phi)$, тогда получим

$$I_1 \cdot \tau_\Phi = \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(x, y) M[x] M[y] dx dy. \quad (5.1.18)$$

Выведем уравнение для $\Psi(x, y)$. Переходя в уравнении

(5.1.12) к переменным $x = \frac{t_1}{\tau_\Phi}$, $y = \frac{t_2}{\tau_\Phi}$, $z = \frac{t}{\tau_\Phi}$ и вводя функцию

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y S_0(\xi) \tilde{S}(\eta) \rho(\xi \leftarrow \eta) e^{-\alpha_0(x-\xi) - \alpha_0(y-\eta)} d\xi d\eta,$$

мы получим

$$\Psi(x, y) = - \frac{\sigma_x^2 \tau_\Phi^3}{N} \int_0^\infty \Psi(x, z) F(z, y) dz - \frac{\sigma_x^2 A_x^2 \tau_\Phi^6}{N^2} F(x, y). \quad (5.1.19)$$

Константы $\frac{\sigma_x^2 \tau_\Phi^3}{N}$ и $\frac{\sigma_x^2 A_x^2 \tau_\Phi^6}{N^2}$ безразмерные. Действительно,

$$\frac{\sigma_x^2 \tau_\Phi^3}{N} = \frac{\sigma_x^2 A_x^2}{A_x^2 N} \tau_\Phi^3 = \frac{q_0^2}{q_1^2} (\alpha_0 \tau_\Phi)^2 (F_0 \tau_\Phi) = Q_1 = 10,65;$$

$$\frac{\sigma_x^2 A_x^2 \tau_\Phi^6}{N^2} = \frac{\sigma_x^2}{A_x^2} \left(\frac{A_x^2}{N} \right)^2 \tau_\Phi^6 = \frac{q_0^2}{q_1^4} (\alpha_0 \tau_\Phi)^4 (F \tau_\Phi)^2 = Q_2 = 3,85 \cdot 10^4.$$

Интегральное уравнение (5.1.19) можно решить численно. Записывая интеграл в виде римановой суммы с шагом h и переходя к матрицам $\hat{\Psi} = \|\Psi(x_i, y_i)\|$, $F = \|F(x_i, y_i)\|$, мы сведем уравнение (5.1.19) к виду

$$\hat{\Psi} = -Q_1 \hat{\Psi} \times F - Q_2 F, \quad (5.1.20)$$

откуда

$$\hat{\Psi} = (-Q_2 F) \cdot (E + Q_1 F)^{-1}, \quad (5.1.21)$$

где E — единичная матрица, а Q_1 и Q_2 — коэффициенты, определенные выше. Теперь легко провести численный анализ выражения (5.1.14). Результаты численных расчетов для σ_Φ в зависимости от высоты H приводятся на рис. 5.1.1. При численных расчетах принималось $\tau_\Phi = 3,75$ мс; $\alpha = \frac{1}{3 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[\frac{1}{c} \right]$, $F_0 = 180$ Гц; $q_0 = 16/300$; $q_1 = 3/200$. Длительность импульса T вычислялась из углового диаметра Земли

$$\varphi = 2 \arcsin \frac{R}{R+H} \text{ (град),}$$

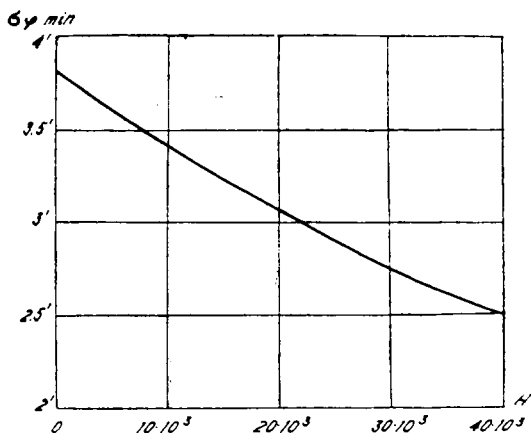


Рис. 5.1.1

где R — радиус Земли, H — высота орбиты ИСЗ, по формуле

$$\frac{T}{\tau_{\phi}} = \frac{2 \arcsin \frac{R}{R+H}}{3^{\circ}},$$

так как τ_{ϕ} соответствует 3° . Численный анализ показывает, что потенциальная точность оценки, направленная на центр Земли, имеет порядок 4 угловых минут, причем при высотах орбит порядка $10 \div 40$ тыс. км. Потенциальная погрешность убывает с увеличением высоты полета ИСЗ.

§ 2. Исследование системы с полосовым фильтром

Исследованию различных аспектов пороговых схем посвящены работы [47, 48]. Рассмотрим следующую задачу: будем определять момент появления оптического сигнала пороговой системой, когда в качестве оценки момента появления сигнала принимается момент пересечения процесса на выходе системы с некоторым пороговым значением C .

Пусть мы имеем некоторый процесс $y(t)$, который

мы представим в виде регулярной составляющей $s(t)$ и шумовой компоненты $n(t)$, то есть имеем

$$y(t) = s(t) + n(t).$$

Если бы шумовая компонента $n(t)$ отсутствовала, то пересечение процесса $S(t)$ с порогом C наступало бы в момент времени t_0 , то есть мы имели бы

$$s(t_0) = C.$$

В присутствии шума момент пересечения порога C изменяется и становится равным $t_1 = t_0 - \tau$, где τ — ошибка в оценке момента разладки. Мы имеем тогда

$$y(t_1) = s(t_1) + n(t_1) = C.$$

Предполагая величину τ малой, что оправдано, так как все практические системы имеют смысл лишь при малых ошибках измерения, и разлагая $s(t_1)$ и $n(t_1)$ в ряд Тейлора по степеням τ , мы получим

$$s(t_0) - \tau s'(t_0) + n(t_0) - \tau n'(t_0) = C = s(t_0).$$

Оставляя лишь главные слагаемые, будем иметь

$$\tau = \frac{n(t_0)}{s'(t_0)}. \quad (5.2.1)$$

Отсюда для дисперсии величины τ получаем выражение

$$\sigma_\tau^2 = \frac{\sigma_n^2}{[s'(t_0)]^2},$$

где σ_n^2 — дисперсия шумовой компоненты. Оптимизация данной системы сводится к следующим моментам:

1) выбор оптимального порога C , что математически эквивалентно выбору оптимального значения t_0 , так как t_0 однозначно определяет C : $C = s(t_0)$;

2) прежде чем подавать процесс $y(t)$ на пороговое устройство, может оказаться выгодным подвергнуть его некоторому преобразованию, имеющему своей целью увеличить $s'(t)$ (крутизну фронта полезного сигнала) и уменьшить σ_n^2 (дисперсию шумовой составляющей). Из таких преобразований процесса $y(t)$ мы рассмотрим линейную фильтрацию как наиболее простой в смысле технической реализации вид преобразования;

3) возможна оптимизация и по некоторым другим

параметрам системы, если они могут быть варьируемы.

Начнем рассмотрение с системы, в которой сигнал $I(t)$, описанный в § 5 (гл. 1), проходит сначала через линейный фильтр с переходной характеристикой $1(t)e^{-\alpha t}$ (например, болометр) и затем через полосовой фильтр с полосой пропускания $[0, F_0]$ (рис. 5.2.1). Найдем величину σ_φ и связанную с ней среднеквадратичную ошибку σ_φ в оценке угла φ (направления на центр Земли).

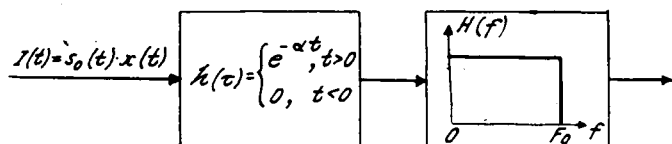


Рис. 5.2.1

Пусть оценка момента появления сигнала ведется по переднему фронту импульса. Рассмотрим вначале прохождение через нашу систему регулярной составляющей сигнала, описываемой выражением

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ A_x \frac{t}{\tau_\phi}, & 0 \leq t \leq \tau_\phi; \\ A_x, & \tau_\phi \leq t \leq T - \tau_\phi; \\ A_x \frac{T-t}{\tau_\phi}, & T - \tau_\phi \leq t \leq T; \\ 0, & t \geq T. \end{cases} \quad (5.2.2)$$

После фильтра с характеристикой $h(t) = 1(t)e^{-\alpha t}$ мы получим сигнал

$$s_1(t) = \int_{-\infty}^t s(\xi) h(t-\xi) d\xi. \quad (5.2.3)$$

В силу (5.2.2) мы получим при $t < 0$ $s_1(t) = 0$; при $0 \leq t \leq \tau_\phi$

$$s_1(t) = A_x \int_0^t \frac{\xi}{\tau_\phi} e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi = A_x \frac{\alpha t - 1 + e^{-\alpha t}}{\alpha^2 \tau_\phi} = A_x \tilde{s}_1(t). \quad (5.2.4)$$

При $T - \tau_\phi \leq t \leq T$ получаем

$$s_1(t) = A_x \int_0^{\tau_\Phi} \frac{\xi}{\tau_\Phi} e^{-a(t-\xi)} d\xi + A_x \int_{\tau_\Phi}^t e^{-a(t-\xi)} d\xi = \\ = A_x \left\{ \frac{(\alpha\tau_\Phi - 1)e^{\alpha\tau_\Phi} + 1}{\alpha^2 \tau_\Phi} e^{-at} + \frac{1 - e^{-a(t-\tau_\Phi)}}{\alpha} \right\} = A_x \bar{s}_1(t). \quad (5.2.5)$$

При $T - \tau_\Phi \leq t \leq T$ получаем

$$s_1(t) = A_x \int_0^{\tau_\Phi} \frac{\xi}{\tau_\Phi} e^{-a(t-\xi)} d\xi + A_x \left| \int_{\tau_\Phi}^{T-\tau_\Phi} e^{-a(t-\xi)} d\xi + \right. \\ \left. + A_x \int_{T-\tau_\Phi}^T \frac{T-\xi}{\tau_\Phi} e^{-a(t-\xi)} d\xi \right| = A_x \left\{ \left[\frac{(\alpha\tau_\Phi - 1)e^{\alpha\tau_\Phi} + 1}{\alpha^2 \tau_\Phi} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e^{\alpha(T-\tau_\Phi)} - e^{\alpha\tau_\Phi}}{\alpha} \right] e^{-at} + \frac{e^{-at+\alpha T}}{\alpha^2 \tau_\Phi} [(\alpha\tau_\Phi - 1)e^{\alpha\tau_\Phi} - \right. \\ \left. - (\alpha T - \alpha t - 1)e^{\alpha(T+\tau_\Phi)}] \right\} = A_x \bar{s}_1(t). \quad (5.2.6)$$

И, наконец, при $t > T$ мы имеем

$$s_1(t) = A_x \int_0^{\tau_\Phi} \frac{\xi}{\tau_\Phi} e^{-a(t-\xi)} d\xi + A_x \int_{\tau_\Phi}^{T-\tau_\Phi} e^{-a(t-\xi)} d\xi + \\ + A_x \int_{T-\tau_\Phi}^T \frac{T-\xi}{\tau_\Phi} e^{-a(t-\xi)} d\xi = A_x e^{-at} \left\{ \frac{(\alpha\tau_\Phi - 1)e^{\alpha\tau_\Phi} + 1}{\alpha^2 \tau_\Phi} + \right. \\ \left. + \frac{e^{\alpha(T-\tau_\Phi)} - e^{\alpha\tau_\Phi}}{\alpha} + \frac{e^{\alpha T} [(\alpha\tau_\Phi - 1)e^{\alpha\tau_\Phi} + 1]}{\alpha^2 \tau_\Phi} \right\} = A_x \bar{s}_1(t). \quad (5.2.7)$$

Полосовой фильтр с полосой пропускания F имеет переходную характеристику [49]

$$h(\tau) = \frac{\sin 2\pi F\tau}{\pi\tau},$$

и поэтому регулярная составляющая на выходе полосового фильтра будет равна

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi) \frac{\sin 2\pi F(t-\xi)}{\pi(t-\xi)} d\xi = A_x \bar{s}_2(t). \quad (5.2.8)$$

Из-за крайней громоздкости мы не будем выписывать входящие сюда интегралы.

Перейдем теперь к шумовой составляющей σ_n^2 , которая складывается из 2 частей: дисперсии, обусловленной собственными шумами приемного устройства, и диспер-

сии, обусловленной флуктуациями полезного сигнала. Что касается собственных шумов, то их дисперсия будет равна NF , где N — мощность шума на единицу полосы частот, а F — ширина полосы фильтра.

Перейдем теперь к случайной составляющей сигнала. Отметим, что основную роль в оценке момента прихода играют передний фронт сигнала и начальная часть пологого участка. При угле зрения оптической системы приемника в 3° и малых высотах ИСЗ переднему фронту импульса соответствует участок земной поверхности, размеры которого много меньше радиуса корреляции излучения [19]. В силу этого можно считать, что нормированная функция корреляции для процесса $x(t)$ в нашем случае тождественно равна единице, поэтому слабое в σ_n^2 , обязанное случайным флуктуациям сигнала, будет в данном случае равно $\sigma_x^2 \cdot \tilde{s}_2(t)$, а отсюда мы получаем

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{\sigma_x^2 \cdot \tilde{s}_2(t) + NF}{A_x^2 [\tilde{s}_2(t)]}. \quad (5.2.9)$$

Перейдем к безразмерным величинам. Обозначая $\alpha_0 = \alpha \tau_\Phi$; $x = t/\tau_\Phi$; $\beta = F \cdot \tau_\Phi$ и вводя функции

$$L_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \frac{\alpha_0 x - 1 + e^{-\alpha_0 x}}{\alpha_0}, & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{(\alpha_0 - 1)e^{\alpha_0} + 1}{\alpha_0} e^{-\alpha_0 x} + \frac{1 - e^{-\alpha_0(x-1)}}{\alpha_0}, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$L_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1 - e^{-\alpha_0 x}}{\alpha_0}, & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{(1 - \alpha_0)e^{\alpha_0} + 1}{\alpha_0} e^{-\alpha_0 x} + e^{-\alpha_0(x-1)}, & x \geq 1, \end{cases}$$

мы приведем формулу (5.2.9) к виду

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{\tau_\Phi \frac{\sigma_x^2}{A_x^2} \left[\int_0^\infty L_0(\xi) \frac{\sin 2\pi\beta(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} d\xi \right]^2 + \frac{NF}{A_x^2}}{\left[\int_0^\infty L_1(\xi) \frac{\sin 2\pi\beta(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} d\xi \right]^2}. \quad (5.2.10)$$

Перейдем теперь от времени к углам. τ_Φ соответствует углу зрения оптической системы в 3° ($180'$), поэтому оценка ошибки в оценке момента прихода τ будет соответствовать ошибке в оценке угла φ

$$\varphi = 180' \frac{\tau}{\tau_\Phi} \text{ (угл. мин),}$$

следовательно

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{(180')^2}{\tau_\Phi^2} \sigma_\tau^2 = 180^2 \frac{q_0^2 \left[\int_0^\infty L_0(\xi) \frac{\sin 2\pi\beta(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} d\xi \right] + \frac{NF}{A_x^2 \tau_\Phi^2}}{\left[\int_0^\infty L_1(\xi) \frac{\sin 2\pi\beta(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} d\xi \right]^2},$$

где

$$q_0 = \frac{\sigma_x}{A_x} = \frac{16}{300}.$$

Полоса фильтра могла бы быть и произвольной. Однако имеет смысл определить оптимальную полосу пропускания полосового фильтра. О том, что оптимальная полоса должна существовать, говорят следующие соображения: если мы будем уменьшать полосу, то у нас будет уменьшаться влияние собственных шумов, но будут сильно завалены фронты и σ_φ возрастет. При широкой полосе пропускания крутизна фронта стремится к определенному пределу; в этом случае сильно возрастают собственные шумы системы, поэтому σ_φ также возрастет. Значит, имеет смысл определить оптимальное значение β . Оценим для этого второе слагаемое. Согласно (1.5.16) имеем $N/A_x^2 = q_1^2 \cdot 1/F_0 \cdot \alpha^2$, где $q_1 = 3/200$, по-

этому $\frac{N}{A_x^2 \tau_\Phi^3} = \frac{q_1^2}{(\alpha \tau_\Phi)^2 (F_0 \tau_\Phi)}$; τ_Φ мы оценим из следующих соображений: если время выдачи информации $t = 0,3$ с, а угол сканирования 120° , то τ_Φ , соответствующее углу зрения оптики системы в 3° , равно $\frac{300 \cdot 3}{2 \cdot 120} = 3,75$ мс; поэтому $\alpha \cdot \tau_\Phi = 1,25$, $F_0 \cdot \tau_\Phi = 0,675$. Окончательно имеем выражение для σ_φ

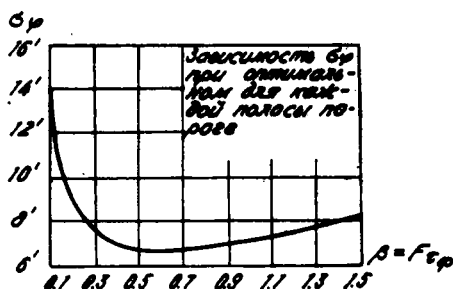


Рис. 5.2.2

$$\sigma_{\varphi} = (180) \frac{\sqrt{q_0^2 \left[\int_0^{\infty} L_0(\xi) \frac{\sin 2\pi\beta(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} d\xi \right]^2 + \frac{q_1^2 \beta}{\alpha_0^2 (F_0 \tau_{\phi})}}}{\left[\int_0^{\infty} L_1(\xi) \frac{\sin 2\pi\beta(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} d\xi \right]}$$

нам надо найти $\min \sigma_{\varphi}$ по x и β . Эта задача решена численно. Результаты приведены на рис. 5.2.2—5.2.4.

На рис. 5.2.2 приведена зависимость σ_{φ} от β , если для каждого значения полосы берется оптимальное для этой полосы значение x_{opt} . Мы видим, что $\min$ значение σ_{φ} равно 6,6', причем $\min$ по β очень тупой (практически в интервале значений $0,5 < \beta < 0,7$), что соответствует диапазону частот 130—190 Гц; при этом σ_{φ} остается практически постоянной. Оптимальное значение $\beta = 0,6$, что соответствует полосе пропускания фильтра 160 Гц.

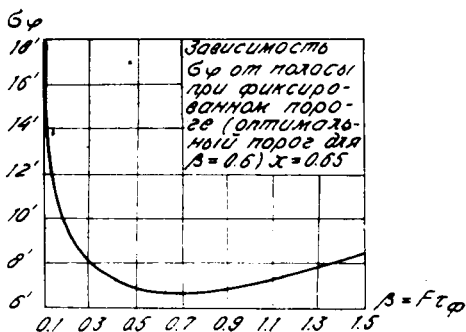


Рис. 5.2.3

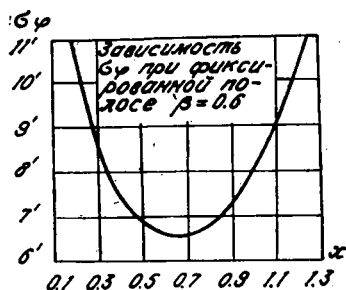


Рис. 5.2.4

При $\beta = 0,6$ оптимальное значение $x_{\text{opt}} = 0,65$, что соответствует установке порога C на уровне 0,214 от амплитуды импульса на выходе фильтра.

На рис. 5.2.3 приведена зависимость σ_φ от β , если x_{opt} берется постоянным и равным 0,65. Опять-таки зависимость от β слабая, практически диапазон значений β [0,5; 0,7] равноценен в смысле величины σ_φ .

На рис. 5.2.4 приведена зависимость σ_φ от x при $\beta_{\text{opt}} = 0,6$. Здесь зависимость уже более острая, но диапазон значений x [0,6; 0,7] (что соответствует установке порога на уровне [0,185; 0,240] от амплитуды выходного импульса фильтра) равноценен в смысле σ_φ .

Таким образом, уже простейшая пороговая система обеспечивает довольно высокую точность и не критична к полосе пропускания фильтра; критичность по отношению к порогу несколько более высокая.

§ 3. Исследование системы с корректирующим фильтром

Рассмотрим в нашей системе вместо полосового фильтра некоторый корректирующий фильтр, который бы подправлял фронты импульсов и уменьшал шумы приемного устройства. Перейдем к расчету такого фильтра.

Пусть переходная характеристика корректирующего фильтра есть $h(\tau)$. Для физической реализуемости этого фильтра необходимо следует [49], чтобы $h(\tau) = 0$ при $\tau < 0$. Исследование начнем с регулярной составляющей. На выходе ФЭП мы имеем сигнал $A_x \cdot \bar{s}_1(t)$ согласно (5.2.4) — (5.2.7). На выходе корректирующего фильтра будет сигнал

$$s_2(t) = A_x \int_0^t h(t-\xi) \bar{s}_1(\xi) d\xi = A_x \int_0^t h(\xi) \bar{s}_1(t-\xi) d\xi. \quad (5.3.1)$$

Дифференцируя по t , мы получим (с учетом того, что $s(0)=0$)

$$s'_2(t) = A_x \int_0^t h(\xi) \bar{s}'_1(t-\xi) d\xi. \quad (5.3.2)$$

Перейдем теперь к случайной компоненте сигнала. В силу того, что при малых высотах флуктуации сигнала жестко коррелированы, они дают вклад в σ_n^2 , равный

$$\sigma_x \left[\int_0^\infty h(\xi) \bar{s}_1(t-\xi) d\xi \right]^2.$$

Что касается собственных шумов приемной системы, то в силу того, что этот шум является белым, их вклад в дисперсию σ_n^2 будет равен

$$N \int_0^\infty h^2(\xi) d\xi, \quad (5.3.2a)$$

поэтому имеем

$$\sigma_\tau^2 = \frac{\sigma_x^2 \left[\int_0^t h(\xi) s_1(t-\xi) d\xi \right]^2 + N \int_0^\infty h^2(\xi) d\xi}{A_x^2 \left[\int_0^t h(\xi) \bar{s}'_1(t-\xi) d\xi \right]^2}. \quad (5.3.3)$$

Из формулы (5.3.3) следует, что $h(\xi)$ должно быть отлично от нуля лишь на интервале $[0, t]$, так как если $h(\xi)$ будет отлично от нуля при $\xi > t$, то это приведет к увеличению $\int_0^\infty h^2(\xi) d\xi$, в то время как все остальные величины останутся неизменными и σ_τ^2 возрастет. Видим, что σ_τ^2 зависит от 3 функционалов:

$$\int_0^t h^2(\xi) d\xi; \quad \int_0^t h(\xi) \bar{s}_1(t-\xi) d\xi; \quad \int_0^t h(\xi) \bar{s}'_1(t-\xi) d\xi;$$

поэтому, решая вариационную задачу на $\min \sigma_\tau^2$ методом неопределенных множителей Лагранжа [43], мы получим

$$h(\tau) = \lambda_1 \bar{s}'_1(t-\tau) + \lambda_2 \bar{s}_1(t-\tau). \quad (5.3.4)$$

Отметим, что, как следует из выражения (5.3.3) для σ_τ , $h(\tau)$ определяется с точностью до постоянного множителя, поэтому один из сомножителей (λ_1, λ_2) можно выбрать произвольно. Беря $\lambda_1=1$ и используя выражения для $\tilde{s}_1(t)$ из § 2 формулы (5.2.4) — (5.2.7), мы получим

$$h(\tau) = \begin{cases} \frac{1-e^{-a(t-\tau)}}{\alpha\tau_\phi} + \lambda \frac{\alpha(t-\tau)-1+e^{-a(t-\tau)}}{(\alpha\tau_\phi)^2}, & \text{если } t < \tau_\phi; \\ \frac{1-e^{-a(t-\tau)}}{\alpha\tau_\phi} + \lambda \frac{\alpha(t-\tau)-1+e^{-a(t-\tau)}}{(\alpha\tau_\phi)^2}, & 0 \leq \tau \leq \tau_\phi; \\ -\frac{(\alpha\tau_\phi-1)e^{\alpha\tau_\phi}-1}{\alpha\tau_\phi} e^{-a\tau} + e^{-a(t-\tau_\phi)} + \\ + \lambda \left[\frac{(\alpha\tau_\phi-1)e^{\alpha\tau_\phi}-1}{(\alpha\tau_\phi)^2} e^{-a\tau} + \frac{1-e^{-a(t-\tau_\phi)}}{\alpha\tau_\phi} \right], & \text{если } t > \tau_\phi, \end{cases} \quad (5.3.5)$$

Таким образом, наш корректирующий фильтр определен с точностью до некоторого параметра λ .

Перейдем к определению величины λ . Выпишем формулы для случая $t < \tau_\phi$. Беря $h(\tau)$ в виде (5.3.5) и подставляя в выражение для σ_τ^2 (5.3.3), мы получим

$$\int_0^t h(\xi) \tilde{s}_1(t-\xi) d\xi = \tau_\phi (\lambda I_2 + I_0);$$

$$\int_0^t h(\xi) \tilde{s}_1'(t-\xi) d\xi = I_1 + \lambda I_0;$$

$$\int_0^t h^2(\xi) d\xi = \tau_\phi (I_1 + 2\lambda I_0 + \lambda^2 I_2),$$

где обозначено

$$I_0 = \frac{(\alpha_0 x - 1 + e^{-\alpha_0 x})^2}{2\alpha_0^4};$$

$$I_1 = \frac{1}{\alpha_0^2} \int_0^x (1 - e^{-\alpha_0 z})^2 dz;$$

$$I_2 = \frac{1}{\alpha_0^4} \int_0^x (\tau_0 z - 1 + e^{-\alpha_0 z})^2 dz,$$

а $x = \frac{t}{\tau_\phi}$; $\alpha_0 = \alpha \cdot \tau_\phi$. Переходя от τ к углам ϕ , мы получим

$$\sigma_{\varphi}^2 = (180)^2 \frac{q_0^2(I_0 + \lambda I_2)^2 + \frac{q_1^2}{\alpha_0^2(F_0 \tau_{\Phi})} (I_1 + 2\lambda I_0 + \lambda^2 I_2)}{(I_1 + \lambda I_0)^2}. \quad (5.3.6)$$

Из (5.3.6) видим, что σ_{φ} зависит от λ , причем зависимость имеет вид

$$\frac{\alpha + 2\beta\lambda - \gamma\lambda^2}{(I_1 + \lambda I_0)^2}, \quad (5.3.7)$$

где $\alpha = q_0^2 I_0 + Q^2 I_1$; $\beta = q_0^2 I_2 I_0 + Q^2 I_0$; $\gamma = q_0^2 I_2^2 + Q^2 I_2$,

а $Q = \frac{q_1^2}{\alpha_0^2 F_0 \tau_{\Phi}}$. Зависимость (5.3.7) имеет min по λ , при котором σ_{φ}^2 минимально; приравнявая нулю производную от (5.3.6) по λ , мы придем к уравнению

$$(\beta + \gamma\lambda)(I_1 + \lambda I_0) - I_0(\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2) = 0. \quad (5.3.8)$$

Из выражения (5.3.8) мы получаем оптимальное значение для λ

$$\lambda_{\text{opt}} = \frac{\alpha I_0 - \beta I_1}{\gamma I_1 - \beta I_0}.$$

Окончательно имеем

$$\sigma_{\varphi} = 180 \frac{\sqrt{q_0^2(I_0 + \lambda_{\text{opt}} I_2)^2 + Q^2(I_1 + 2\lambda_{\text{opt}} I_0 + \lambda_{\text{opt}}^2 I_2)}}{(I_1 + \lambda_{\text{opt}} I_0)} \quad (\text{угл. мин}) \quad (5.3.9)$$

Аналогичные, но более громоздкие формулы можно написать и для $t > \tau_{\Phi}$.

Дальнейшие вычисления были проведены численно. Вид зависимости σ_{φ} от x дан на рис. 5.3.1, а оптимальное значение λ от x — на рис. 5.3.2. Видим, что до $x = 20$ σ_{φ} монотонно убывает с возрастанием x . Это, конечно, не значит, что σ_{φ} будет убывать до нуля. Такое монотонное убывание происходит потому, что мы учитываем лишь передний фронт импульса и не учитываем заднего его фронта. Учет конечной длительности импульса оказывает влияние на убывание σ_{φ} . Впрочем, при $x > 6$ σ_{φ} убывает очень медленно, и общий выигрыш от применения корректирующего фильтра невелик. Так, при $x = 10$ мы получаем $\sigma_{\varphi} = 5,8'$, в то время как при использовании полосового фильтра мы достигли точности $\sigma_{\varphi} = 6,6'$, то

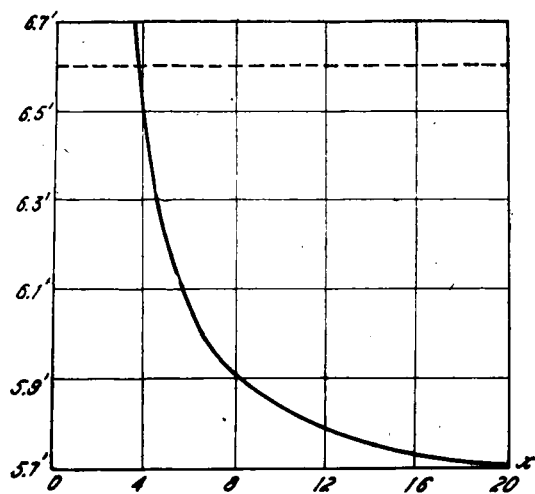


Рис. 5.3.1

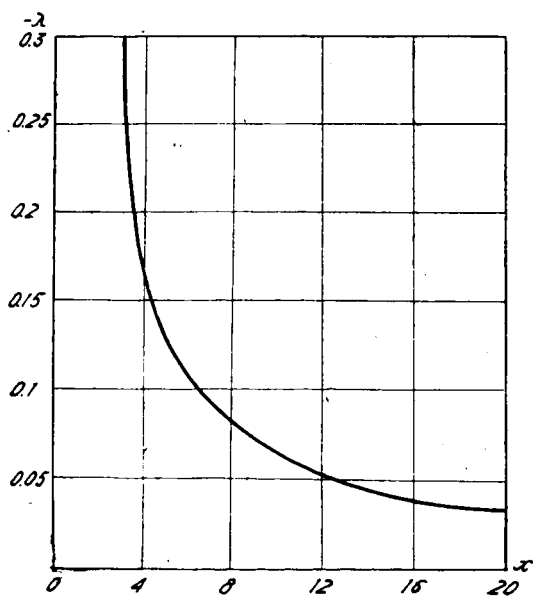


Рис. 5.3.2

есть использование корректирующего фильтра уменьшает погрешность в оценке угла $\varphi \sim 1'$.

Проанализируем применение корректирующего фильтра качественно. Видим, что с увеличением x λ монотонно убывает, стремясь к нулю, и переходная характеристика фильтра сходится к $s'(t-\tau)$. Переходя к частотной характеристике, мы получим

$$H(\omega) = H_c(\omega) \cdot H\delta(\omega) \cdot j\omega e^{-j\omega\tau},$$

где $H_c(\omega)$ — спектр сигнала (трапецеидального) на входе ФЭП (болометра); $H\delta(\omega)$ — частотная характеристика ФЭП; а сомножитель $j\omega$ вышел от производной $s'(t-\tau)$. Таким образом, корректирующий фильтр поднимает высокие частоты (сомножитель $j\omega$), заваленные ФЭП, обостряя тем самым фронты импульса и уменьшая соответственно σ_φ .

§ 4. Вопросы оптимизации по скорости сканирования

Все предыдущее исследование было посвящено случаю, когда скорость сканирования оптической системы задана и нам надо было минимизировать ошибку в оценке момента появления сигнала при этой фиксированной скорости сканирования. В настоящем параграфе рассмотрим вопрос о выборе оптимальной скорости сканирования оптической системы приемника.

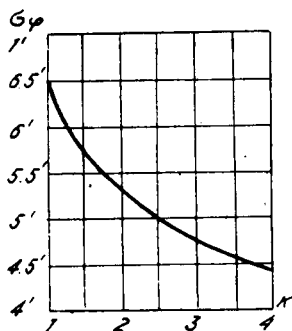


Рис. 5.4.1

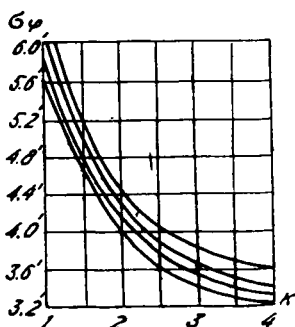


Рис. 5.4.2

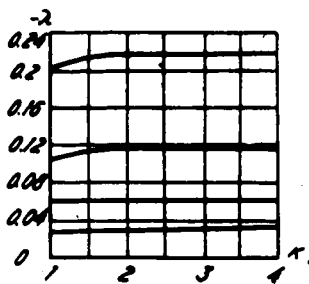


Рис. 5.4.3

Исследование начнем со схемы с полосовым фильтром. Предположим, что частота сканирования увеличится в k раз. Что изменится в нашей системе? Если $A_x(k)$ от k не зависит, то σ_φ убывает с ростом k . На рис. 5.4.1—5.4.2 приведена зависимость σ_φ от k для некоторых значений x , а на рис. 5.4.3 — зависимость λ от k для тех же значений x .

Отметим, что эти заключения справедливы лишь до тех пор, пока длительность импульса полезного сигнала много больше постоянной времени ФЭП. Когда длительность импульса становится сравнимой с постоянной времени ФЭП, то начинается сильное уменьшение амплитуды сигнала на выходе ФЭП, вызванное тем, что переходные процессы не успевают закончиться, и σ_φ возрастает.

§ 5. Исследование системы для случая больших высот

В настоящем параграфе рассмотрим вопрос о построении оптимального корректирующего фильтра в случае полета ИСЗ на больших высотах. Отличие от рассмотренных случаев состоит в том, что угол зрения оптической системы охватывает большую область земной поверхности, а флуктуации интенсивности излучения даже на протяжении фронта импульса нельзя считать жестко коррелированными.

Начнем с регулярной составляющей. На выходе ФЭП мы имеем импульс формы $s_1(t) = A_x \tilde{s}_1(t)$, а пропуская его через фильтр с переходной характеристикой $h(\tau)$, мы будем получать импульс формы

$$s_2(t) = \int_0^t h(\xi) s_1(t-\xi) d\xi, \quad (5.5.1)$$

отсюда

$$s_2'(t) = A_x \int_0^t h(\xi) \bar{s}_1'(t-\xi) d\xi. \quad (5.5.2)$$

Перейдем теперь к случайной составляющей. Собственные шумы приемника дают вклад в дисперсию, который по-прежнему равен $N \int_0^t h^2(\xi) d\xi$, как и в § 3 [формула (5.3.2a)]. Сложнее обстоит дело со случайной составляющей, возникшей из-за флуктуаций интенсивности излучения Земли. Записывая интенсивность излучения формулой (5.1.1), мы будем иметь на выходе ФЭП процесс

$$y(t) = \int_0^t s_0(t-\xi) x(t-\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi, \quad (5.5.3)$$

а на выходе корректирующего фильтра

$$z(\tau) = \int_0^t h(\xi) y(t-\xi) d\xi. \quad (5.5.4)$$

Отсюда для дисперсии величины $z(t)$ мы получаем выражение

$$\sigma_z^2 = \int_0^t \int_0^t h(\xi) h(\xi') \text{Cov}(y(t-\xi), y(t-\xi')) d\xi d\xi'. \quad (5.5.5)$$

Вычисляя $\text{Cov}(y(t-\xi), y(t-\xi'))$, мы получим

$$\begin{aligned} \text{Cov}(y(t-\xi), y(t-\xi')) &= \sigma_x^2 \int_0^{t-\xi} \int_0^{t-\xi'} s_0(t-\xi-\eta) s_0(t-\xi'-\eta') \times \\ &\times \rho(\xi+\eta-\xi'-\eta') e^{-\alpha(t-\xi-\eta)-\alpha(t-\xi'-\eta')} d\eta d\eta'. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Подставляя выражение (5.5.6) в (5.5.5), мы получим

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 \int_0^t \int_0^t h(\xi) h(\xi') R(t-\xi, t-\xi') d\xi d\xi', \quad (5.5.7)$$

где

$$\begin{aligned} R(u, v) &= \int_0^u \int_0^v s_0(u-\eta) s_0(v-\eta') e^{-\alpha(u-\eta)-\alpha(v-\eta')} \rho(u-\eta, \\ &\quad v-\eta') d\eta d\eta', \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

а $s_0(t)$ — трапецеидальный импульс [формула (5.2.2)]. Дисперсия оценки момента появления сигнала выразится теперь формулой

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{q_0^2 \int_0^t \int_0^t h(\xi) h(\xi') R(t-\xi, t-\xi') d\xi d\xi' + \frac{N}{A_{x0}^3} \int_0^t h^2(\xi) d\xi}{\left[\int_0^t h(\xi) \tilde{s}_1'(t-\xi) d\xi \right]^2} \quad (5.5.9)$$

Для нахождения оптимальной переходной характеристики фильтра отметим, что σ_{τ}^2 зависит от h через два функционала

$$\int_0^t h(\xi) \tilde{s}_1(t-\xi) d\xi; \quad \int_0^t h^2(\xi) d\xi + \frac{q_0^2 A_x^2}{N} \int_0^t \int_0^t h(\xi) h(\xi') R(t-\xi, t-\xi') d\xi d\xi', \quad (5.5.10)$$

поэтому, варьируя σ_{τ}^2 по $h(\xi)$ с использованием метода неопределенных множителей Лагранжа, мы придем к уравнению

$$h(\xi) + \frac{q_0^2 A_x^2}{N} \int_0^t R(t-\xi, t-\xi') h(\xi') d\xi' = \lambda \tilde{s}_1'(t-\xi). \quad (5.5.11)$$

Из формулы (5.5.9) для σ_{τ}^2 следует, что $h(\xi)$ определяется с точностью до произвольного постоянного множителя, и поэтому λ можно считать равным 1. Переходя к безразмерным переменным по формулам $x = \frac{\xi}{\tau_{\Phi}}$, $t_0 = \frac{t}{\tau_{\Phi}}$ мы приведем уравнение (5.5.11) к виду

$$h(x) + \varepsilon \int_0^{t_0} R_0(t_0 - x, t_0 - x') h(x') dx' = f(t_0 - x), \quad (5.5.12)$$

где

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-\alpha_0 u}}{\alpha_0}, & \text{если } u < 1; \\ -\frac{(\alpha_0 - 1)e^{\alpha_0} + 1}{\alpha_0} e^{-\alpha_0 u} + e^{-\alpha_0(u-1)}, & \text{если } u > 1. \end{cases} \quad (5.5.13)$$

Выражение для $R_0(u, v)$ имеет вид

$$R_0(u, v) = \int_0^u \int_0^v S(u-\eta) S(v-\eta') e^{-a(u-\eta)-a(v-\eta')} \rho(u-\eta, -v-\eta') d\eta d\eta', \quad (5.5.14)$$

где

$$S(x) = \begin{cases} x, & x < 1; \\ 1, & x > 1, \end{cases} \quad (5.5.15)$$

а величина ε равна, принимая прежние величины для α_0 ; F_0 ; τ_Φ ; q_0 ; q_1 :

$$\varepsilon = \frac{q_0^2 \alpha_0^2 (F_0 \tau_\Phi)}{q_1^2} = 13,3. \quad (5.5.16)$$

Для решения уравнения (5.5.12) умножим его на $h(x)dx$ и, интегрируя по x , получим

$$\begin{aligned} \int_0^t h^2(x) dx + \varepsilon \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} R_0(t_0-x, t_0-x') \dot{h}(x) h(x') dx' dx = \\ = \int_0^{t_0-x} f(t_0-x) h(x) dx. \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

Тогда σ_Φ записывается выражением

$$\sigma_\Phi = \frac{180 q_1}{\alpha_0 \sqrt{F_0 \tau_\Phi} \sqrt{\int_0^{t_0} f(t_0-x) h(x) dx}}. \quad (5.5.18)$$

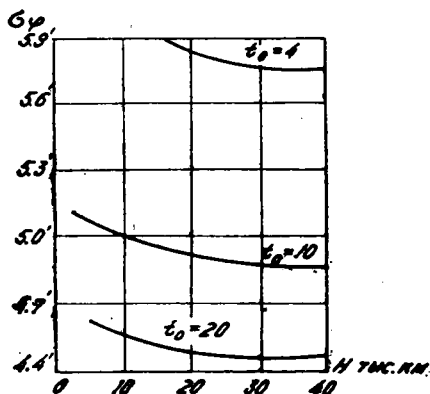


Рис. 5.5.1

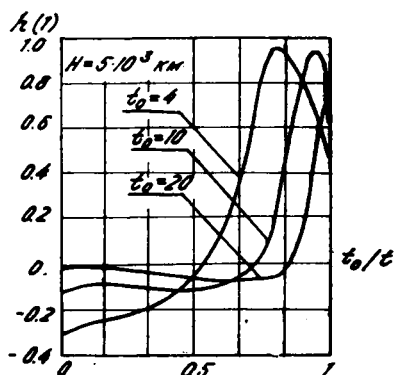


Рис. 5.5.2

Изменение высоты полета спутника H приводит к тому, что меняется вид функции $\rho(\cdot)$, а следовательно, меняются и решения уравнения (5.5.12). Зависимость σ_p от высоты H при оптимальном t_0 приведена на рис. 5.5.1; на рис. 5.5.2 и 5.5.3 показаны зависимости семейств оптимальных переходных характеристик для разных высот.

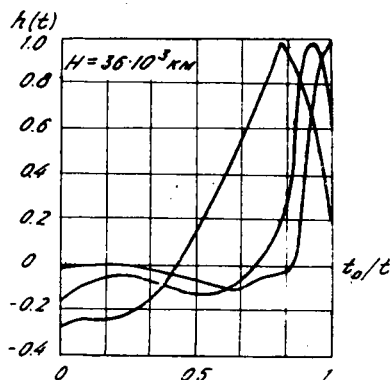


Рис. 5.5.3

Рассмотрим вопрос о работе полосового фильтра для случая больших высот. Полагая в (5.5.9) $h(\xi) = \frac{\sin 2\pi F\xi}{\pi\xi}$ и изменяя пределы интегрирования на бесконечные, мы получим

$$\sigma_{\varphi} = 180 \frac{\sqrt{q_{00}^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R(u, v) \frac{\sin 2\pi\beta(x-u)}{\pi(x-u)} \frac{\sin 2\pi\beta(x-v)}{\pi(x-v)} du dv + Q^2\beta}}{\left| \int_0^{\infty} f(u) \frac{\sin 2\pi\beta(x-u)}{\pi(x-u)} du \right|} \quad (\text{угл. мин}). \quad (5.5.19)$$

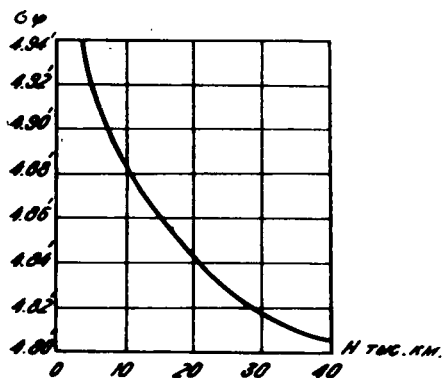


Рис. 5.5.4

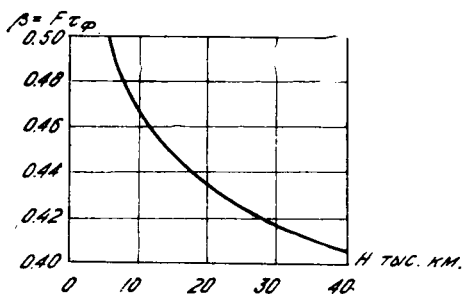


Рис. 5.5.5

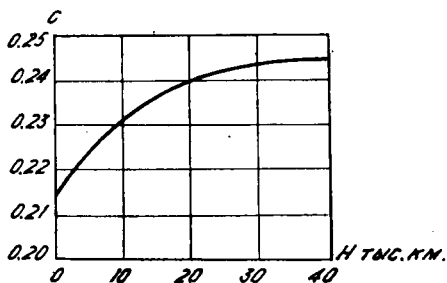


Рис. 5.5.6

Результаты численного анализа формулы (5.5.19) приведены на рис. 5.5.4—5.5.6. На рис. 5.5.4 дана зависимость σ_{φ} от высоты H . Видим, что с увеличением высоты полета σ_{φ} уменьшается. На рис. 5.5.5 дана зависимость оптимальной полосы пропускания фильтра от высоты H , а на рис. 5.5.6 — зависимость уровня ограничения (в долях амплитуды от выходного импульса фильтра) от высоты H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ПОЯВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ СИСТЕМАМИ С ИНТЕГРАТОРОМ И ФИЛЬТРАМИ

§ 1. Приемник с интегратором и вычисление сигнала рассогласования

Идеи и основные результаты, излагаемые ниже, приводятся в работе [48]. Построение системы приема с интегратором заключается в следующем: пусть оптическая система определила направление на центр Земли совершенно точно. В этом случае при сканировании Земля будет расположена симметрично относительно биссектрисы угла сканирования. Форма сигналов на выходе болометра в такой системе будет иметь вид, изображенный на рис. 6.1.1. Здесь через a обозначен момент прохождения биссектрисы угла сканирования; а I — моменты поворота сканирующей системы.

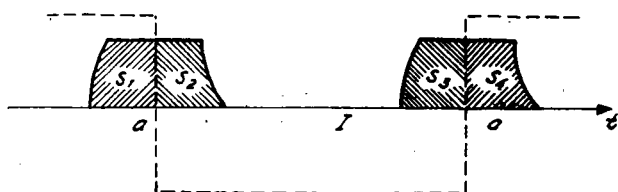


Рис. 6.1.1

Пусть сигнал на выходе ФЭП умножается на сигнал, изображенный на рис. 6.1.1 пунктиром, и интегрируется. В этом случае сигнал на выходе интегратора будет пропорционален величине $(s_1-s_2-s_3+s_4)$, где s_i — площади, изображенные на рис. 6.1.1. Очевидно, что если шумов отсутствуют, то $s_1=s_3$ и $s_2=s_4$, а сигнал на выходе интегратора будет равен нулю.

Если же биссектриса угла сканирования не совпадает с центром Земли, то импульсы на выходе ФЭП сме-

щаются во времени. Если при прямом ходе сканирующей системы один импульс начинает поступать позже (рис. 6.1.2), то при обратном ходе сканирующей системы импульс поступает раньше, то есть смещение происходит в разные стороны. Баланс площадей в этом случае нарушается, и на выходе интегратора появляется сигнал

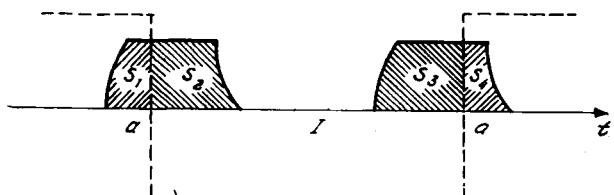


Рис. 6.1.2

рассогласования, который монотонно возрастает с увеличением рассогласования и меняет знак одновременно с ним. Измеряя это рассогласование, можно выбрать сигнал, определяющий смещение биссектрисы угла сканирования от центра Земли. Собственные шумы прием-

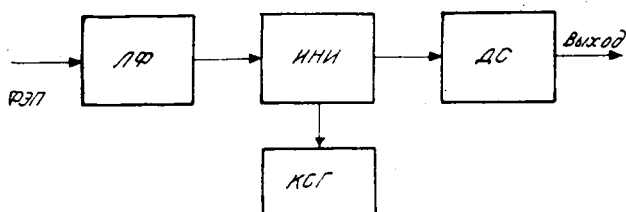


Рис. 6.1.3

ника и флуктуации интенсивности излучения приводят к тому, что у нас появляются ошибки, величины которых зависят от интенсивности шумовых составляющих. Дальнейшее изложение посвятим исследованию системы приема с интегратором, функциональная схема которой приводится на рис. 6.1.3. Сигнал с выхода ФЭП поступает на ЛФ (линейный фильтр), выход которого является входом для КФ (корректирующего фильтра). С корректирующего фильтра сигнал поступает на ИНИ (интегратор с инвертором), выход которого является входом

для ДС (дискриминатора). Кроме того, на ИНИ поступает сигнал с КСГ (кварцевого синхронизованного генератора).

Отметим, что в отличие от рассмотренных в гл. V пороговых систем крутизна фронтов импульсов в этом случае играет очень малую роль, так как работа ведется по интегральным характеристикам. Поэтому, представляя интенсивность излучения Земли в виде $I(t) = s_0(t) \cdot x(t)$, мы будем считать $s_0(t)$ не трапецеидальным импульсом, а прямоугольным. Площади в этом случае изменяются незначительно, и ошибки от такой замены будут незначительными.

Перейдем к вычислению сигнала рассогласования. Пусть шумы отсутствуют, а длительность импульса на входе ФЭП есть T , то есть имеем

$$s_0(t) = \begin{cases} A_x, & 0 \leq t \leq T; \\ 0, & t < 0, t > T. \end{cases} \quad (6.1.1)$$

В этом случае регулярная составляющая на выходе ФЭП может быть записана в виде

$$s_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ A_x \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}, & 0 < t \leq T, \\ A_x \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} e^{-\alpha(t-T)}, & t \geq T. \end{cases} \quad (6.1.2)$$

Обозначим сигнал, поступающий на вход ФЭП, через $x(t)$. Пусть момент прохождения сканирующей системой центра Земли отстоит от момента прохождения биссектрисы угла сканирования на время τ . Перейдем к вычислению площадей s_1, s_2, s_3, s_4 . При прямом ходе сканирующей системы на выходе ФЭП будет сигнал

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \int_0^t x(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi, & 0 \leq t \leq T; \\ \int_0^T x(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi, & t > T. \end{cases} \quad (6.1.3)$$

В этом случае для площади s_1 мы получаем выражение

$$s_1 = \int_0^{T/2-\tau} dt \int_0^t x(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi. \quad (6.1.4)$$

Меняя порядок интегрирования в (6.1.4), получим

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^{T/2-\tau} x(\xi) d\xi \int_{\xi}^{T/2-\tau} e^{-\alpha(t-\xi)} dt = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{T/2-\tau} (1 - \exp(-\alpha \frac{T}{2} + \alpha\tau + \alpha\xi)) x(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

Для величины s_2 получается выражение

$$s_2 = \int_{T/2-\tau}^T dt \int_0^t x(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi + \int_T^{\infty} dt \int_0^T x(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi. \quad (6.1.6)$$

При обратном ходе сканирующей системы импульс будет смещен на величину τ в противоположную сторону, и, кроме того, реализация интенсивности излучения от Земли будет просматриваться в обратном порядке, то есть вместо $x(\xi)$ будет стоять $x(T-\xi)$. Тогда имеем

$$s_3 = \int_0^{T/2+\tau} dt \int_0^t x(T-\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi; \quad (6.1.7)$$

$$\begin{aligned} s_4 &= \int_{T/2+\tau}^T dt \int_0^t x(T-\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi + \\ &+ \int_T^{\infty} dt \int_0^T x(T-\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

В силу того, что $\overline{x(T-\xi)} = \overline{x(\xi)} = A_x$, мы имеем

$$\begin{aligned} \bar{s}_1 &= \int_0^{T/2-\tau} dt \int_0^t \overline{x(\xi)} e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi = \\ &= \frac{A_x}{\alpha} \left[\left(\frac{T}{2} - \tau \right) - \frac{1 - e^{-\alpha(T/2-\tau)}}{\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Аналогично вычисляются величины

$$\begin{aligned} \bar{s}_2 &= A_x \int_{T/2-\tau}^T dt \int_0^t e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi + A_x \int_T^{\infty} dt \int_0^T e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi = \\ &= \frac{A_x}{\alpha} \left[\left(\frac{T}{2} + \tau \right) - \frac{e^{-\alpha(T/2+\tau)} - e^{-\alpha T}}{\alpha} \right] + \end{aligned}$$

$$+ A_x \int_T^\infty dt \int_0^T e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi; \quad (6.1.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{s}_3 &= A_x \int_0^{T/2+\tau} dt \int_0^t e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi = \\ &= \frac{A_x}{\alpha} \left[\left(\frac{T}{2} + \tau \right) - \frac{1 - e^{-\alpha(T/2+\tau)}}{\alpha} \right]; \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{s}_4 &= A_x \int_{T/2+\tau}^T dt \int_0^t e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi + A_x \int_T^\infty dt \int_0^T e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi = \\ &= \frac{A_x}{\alpha} \left[\left(\frac{T}{2} + \tau \right) - \frac{e^{-\alpha(T/2+\tau)} - e^{-\alpha T}}{\alpha} \right] + A_x \int_T^\infty dt \int_0^T e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

Исходя из выражений (6.1.9) — (6.1.12), мы получаем формулу для среднего значения сигнала рассогласования

$$\bar{\Delta} = \bar{s}_1 - \bar{s}_2 - \bar{s}_3 + \bar{s}_4 = -\frac{4A_x}{\alpha} \left(\tau - \frac{e^{-\alpha T/2}}{\alpha} \operatorname{sh}(\alpha\tau) \right). \quad (6.1.13)$$

Графики функции $(\alpha\tau - \exp(-\frac{F_a T}{2}) \cdot \operatorname{sh}(\alpha\tau))$ приводятся на рис. 6.1.4. При малых $\alpha\tau$ эта зависимость хорошо аппроксимируется прямой линией

$$\bar{\Delta} = -\frac{4A_x \tau}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T/2}). \quad (6.1.14)$$

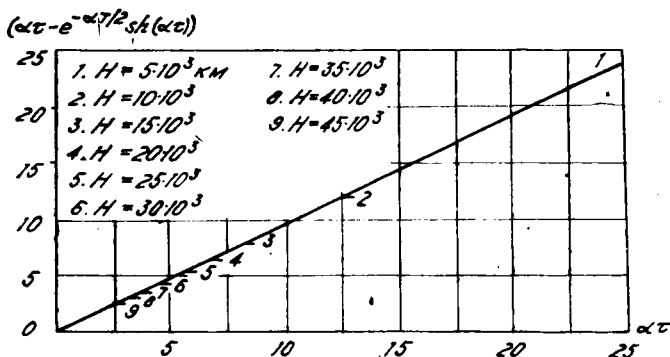


Рис. 6.1.4

которая и определяет нам крутизну дискриминационной характеристики в установившемся режиме

$$\delta = \left. \frac{d\bar{\Delta}}{d\tau} \right|_{\tau=0} = -\frac{4A_x}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T/2}). \quad (6.1.15)$$

§ 2. Определение погрешности оценки момента появления сигнала в системе с интегратором

Перейдем к определению погрешности в оценке момента появления, возникающей в системе с интегратором. Эти погрешности возникают по 2 причинам: 1) из-за флуктуаций интенсивности излучения Земли, что дает нам некоторую погрешность, медленно меняющуюся во времени; 2) из-за влияния собственных шумов приемного устройства, что дает нам погрешность, которая является случайной величиной, принимающей независимые значения в соседних периодах сканирования.

Начнем исследование с вычисления погрешности, обусловленной флуктуациями интенсивности излучения Земли. Так как ошибки в оценке τ обычно малы, то нам достаточно вычислить дисперсию величины Δ_1 лишь для $\tau=0$ ввиду того, что при малых τ дисперсия мало меняется с изменением τ . Полагая $\tau=0$, можем записать

$$s_1 = \int_0^{T/2} x(\xi) d\xi \int_{\xi}^{T/2} e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi = \frac{1}{\alpha} \int_0^{T/2} x(\xi) [1 - e^{-\alpha(T/2-\xi)}] d\xi. \quad (6.2.1)$$

Далее, для s_2 имеем

$$s_2 = \int_{T/2}^T dt \int_0^t x(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi + \int_T^{\infty} dt \int_0^T x(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi. \quad (6.2.2)$$

Меняя в интегралах (6.2.2) порядок интегрирования по ξ и t , мы получим

$$s_2 = \frac{1}{\alpha} \int_0^T x(\xi) d\xi. \quad (6.2.3)$$

Величины s_3 и s_4 будут отличаться от s_2 и s_1 лишь заменой ξ на $(T-\xi)$. Поэтому для $\Delta_1(0)$ мы получим

$$\Delta_1(0) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{T/2} [x(\xi) - x(T-\xi)] [1 - e^{-\alpha(T/2-\xi)}] d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \int_0^T [x(\xi) - x(T - \xi)] d\xi. \quad (6.2.4)$$

Заменяя переменные $T - \xi = u$, легко убедиться, что второй интеграл в (6.2.4) равен нулю, и окончательно мы имеем

$$\Delta_1(0) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{T/2} [x(\xi) - x(T - \xi)] [1 - e^{-\alpha(T/2 - \xi)}] d\xi. \quad (6.2.5)$$

В силу (6.2.5) для дисперсии величины $\Delta(0)$ мы получаем

$$D(\Delta_1(0)) = D_0 = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} [1 - e^{-\alpha(T/2 - \xi)}] [1 - e^{-\alpha(T/2 - \xi')}] \bar{R}(\xi, \xi') d\xi d\xi',$$

где $\bar{R}(\xi, \xi')$ — функция корреляции процесса $\{x(\xi) - x(T - \xi)\}$. Вычислим ее

$$\begin{aligned} \bar{R}(\xi, \xi') &= \text{Cov}[(x(\xi) - x(T - \xi))(x(\xi') - x(T - \xi'))] = \\ &= \text{Cov}(x(\xi)x(\xi')) - \text{Cov}(x(\xi)x(T - \xi')) - \text{Cov}(x(T - \xi)x(\xi')) + \\ &+ \text{Cov}(x(T - \xi)x(T - \xi')) = 2\sigma_x^2 (\rho(\xi - \xi') - \rho(T - \xi - \xi')). \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Дисперсия $D(\Delta(0))$ определится

$$D_0 = \frac{2\sigma_x^2}{\alpha^2} \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} \rho(\xi - \xi') [1 - e^{-\alpha(T/2 - \xi)}] [1 - e^{-\alpha(T/2 - \xi')}] d\xi d\xi'. \quad (6.2.7)$$

Преобразуем (6.2.7) к более удобному виду, сводя двукратный интеграл к однократному. Будем преобразовывать по отдельности все входящие в (6.2.7) интегралы. Первый из них имеет вид

$$I_1 = \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} \rho(\xi - \xi') d\xi d\xi'. \quad (6.2.8)$$

Делая замену переменных в (6.2.8) $\xi - \xi' = u$; $\xi' = v$, мы получим область интегрирования, изображенную на рис. 6.2.1; учитывая четность $\rho(u)$, мы получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-T/2}^0 \rho(u) du \int_u^{T/2} dv + \int_0^{T/2} \rho(u) du \int_0^{T/2 - u} dv = \\ &= 2 \int_0^{T/2} \left(\frac{T}{2} - u \right) \rho(u) du. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

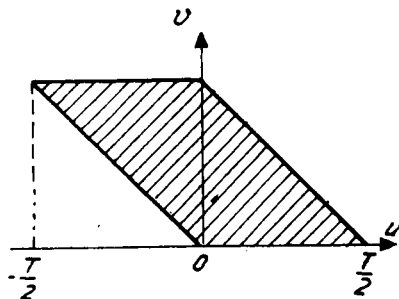


Рис. 6.2.1

Для интеграла

$$\tilde{I}_1 = \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} \rho(T - \xi - \xi') d\xi d\xi', \quad (6.2.10)$$

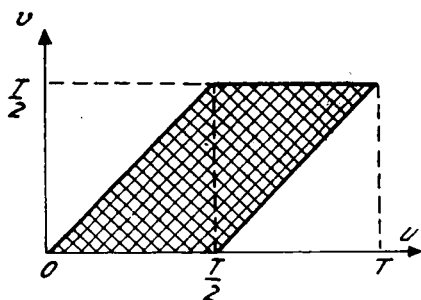


Рис. 6.2.2

делая замену переменных $\xi + \xi' = u$; $\xi' = v$, мы получим область интегрирования, изображенную на рис. 6.2.2, поэтому имеем

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \int_0^{T/2} \rho(T-u) du \int_0^u dv + \int_{T/2}^T \rho(T-u) du \int_{u-T/2}^{T/2} dv = \\ &= \int_0^{T/2} u \rho(T-u) du + \int_{T/2}^T (T-u) \rho(T-u) du. \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

Делая замену переменных в (6.2.11) $T-u \rightarrow u$, мы получим окончательно

$$\tilde{I}_1 = \int_0^{T/2} u \rho(u) du + \int_{T/2}^T (T-u) \rho(u) du. \quad (6.2.12)$$

Следующий интеграл имеет вид

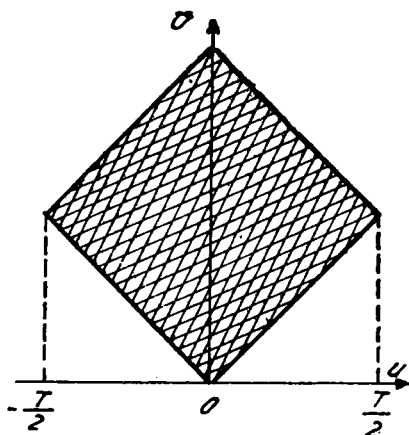


Рис. 6.2.3

$$I_2 = \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} \rho(\xi - \xi') e^{-\alpha(T/2 - \xi')} d\xi d\xi'. \quad (6.2.13)$$

Делая замену переменных в (6.2.13) $\xi - \xi' = u$, $\xi' = v$ и интегрируя по области, изображенной на рис. 6.2.3, мы получим

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-T/2}^0 \rho(u) du \int_{-u}^{T/2} e^{-\alpha(T/2 - v)} dv + \\ &+ \int_0^{T/2} \rho(u) du \int_0^{T/2 - u} e^{-\alpha(T/2 - v)} dv = \\ &= \int_0^{T/2} \rho(u) du \left[\frac{e^{-\alpha u} - e^{-\alpha T/2}}{\alpha} + \frac{1 - e^{-\alpha u - \alpha T/2}}{\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Для интеграла

$$\tilde{I}_2 = \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} \rho(T - \xi - \xi') e^{-\alpha(T - \xi - \xi')} d\xi d\xi', \quad (6.2.15)$$

делая замену переменных $T - \xi - \xi' = u$, $\frac{T}{2} - \xi' = v$ и интегрируя по области типа рис. 6.2.2, мы получим

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= \int_0^{T/2} \rho(u) du \int_0^u e^{-\alpha v} dv + \int_{T/2}^T \rho(u) du \int_{u - T/2}^{T/2} e^{-\alpha v} dv = \\ &= \int_0^{T/2} \rho(u) \frac{1 - e^{-\alpha u}}{\alpha} du + \int_{T/2}^T \rho(u) \frac{e^{-\alpha(u - T/2)} - e^{-\alpha T/2}}{\alpha} du. \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Для интеграла

$$I_3 = \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} \rho(\xi - \xi') e^{-\alpha(T - \xi - \xi')} d\xi d\xi', \quad (6.2.17)$$

делая замену переменных $\xi - \xi' = u$, $T - \xi - \xi' = v$, мы придем к области интегрирования, изображенной на рис. 6.2.3, поэтому имеем

$$I_3 = \int_0^{T/2} \rho(u) du \int_u^{T-u} e^{-\alpha v} dv = \int_0^{T/2} \rho(u) \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\alpha(T-u)}}{\alpha} du. \quad (6.2.18)$$

Наконец, для интеграла

$$\tilde{I}_3 = \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} \rho(T - \xi - \xi') e^{-\alpha(T - \xi - \xi')} d\xi d\xi', \quad (6.2.19)$$

делая замену переменных $T - \xi - \xi' = u$, $\xi' = v$, мы получим

$$\tilde{I}_3 = \int_0^{T/2} \rho(u) u e^{-\alpha u} du + \int_{T/2}^T (T-u) e^{-\alpha u} \rho(u) du. \quad (6.2.20)$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{2\sigma_x^2} D_0 &= I_1 - \tilde{I}_1 - 2(I_2 - \tilde{I}_2) + I_3 - \tilde{I}_3 = \\ &= \int_0^{T/2} \rho(u) \left[T - 3u - u e^{-\alpha u} + \frac{4}{\alpha} e^{\alpha/2(u-T/2)} \operatorname{sh} \left[\frac{\alpha}{2} \left(u + \frac{T}{2} \right) \right] + \right. \\ &+ \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha T/2} \operatorname{sh} \left[\alpha \left(u - \frac{T}{2} \right) \right] \Big] du + \int_{T/2}^T \rho(u) \left[(T-u)(1 + e^{-\alpha u}) + \right. \\ &+ \left. \frac{4}{\alpha} e^{-\alpha u/2} \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha}{2} (u-T) \right) \right] du = G. \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

Так как ошибка Δ_1 эквивалентна ошибке в оценке τ

$$\tau_1 = \frac{\Delta_1}{\frac{4A_x}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T/2})}, \quad (6.2.22)$$

дисперсия ошибки в оценке величины τ , обязанная своим появлением флуктуациям интенсивности излучения Земли, будет равна

$$\sigma_{\tau_1}^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sigma_x^2}{A_x^2} \frac{G}{\left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha T}{2}\right)\right)^2}. \quad (6.2.23)$$

Что касается ошибки, вносимой собственными шумами приемника, то она равна

$$\Delta_2 = \int_0^{T_0} n(t) dt, \quad (6.2.24)$$

где T_0 — период сканирования. Находя дисперсию ошибки, мы получим

$$\sigma_{\Delta_2}^2 = NT_0. \quad (6.2.25)$$

Окончательно дисперсия ошибки в оценке величины τ равна

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{\frac{1}{8} q_0^2 G + q_1^2 \frac{T_0}{F_0}}{\left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha T}{2}\right)\right)^2}, \quad (6.2.26)$$

В формуле (6.2.26) удобно перейти от величины τ к величине r , соответствующей ошибке в положении центра Земли на ее поверхности. Пусть ось оптической системы проходит по поверхности Земли путь, равный l , тогда τ соответствует ошибке $r = l \frac{\tau}{T}$, и поэтому, переходя

в интеграле G к переменной $r = \frac{l}{T} u$, мы получим

$$\sigma_r^2 = \frac{\frac{q_0^2}{8} G' + q_1^2 \frac{T_0 l^2}{F_0 T^2}}{(1 - \exp(-\alpha_0))^2}, \quad (6.2.27)$$

где $\alpha_0 = \alpha \frac{T}{2}$ и

$$\begin{aligned} G' = \int_0^H \rho(r) \left(l - 3r - \frac{l}{\alpha_0} (e^{-2\alpha_0 \frac{r}{l}} - e^{-\alpha_0} + 1 - e^{2\alpha_0 \frac{\tau}{l} - \alpha_0}) + \right. \\ \left. + \frac{l}{\alpha_0} (1 - e^{-\alpha_0 \frac{r}{l}}) + \frac{l}{2\alpha_0} (e^{-2\alpha_0 \frac{r}{l}} - \right. \\ \left. - e^{-\alpha_0 (r - \frac{2r}{l})}) - r e^{-2\alpha_0 \frac{r}{l}} \right) dr. \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

Это соответствует ошибке в оценке угла, равной

$$\sigma_{\varphi}^2 = \sigma_f^2 / H^2,$$

где H — высота орбиты ИСЗ.

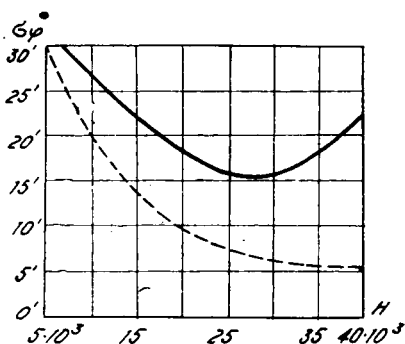


Рис. 6.2.4

Для случая, когда l равно диаметру Земли, была просчитана величина σ_{φ} как функция высоты H . Зависимость σ_{φ} от H приводится на рис. 6.2.4 (сплошная кривая). Мы видим, что в данном случае ошибка в оценке угла φ недопустимо велика по сравнению с потенциально возможной (см. гл. V, § 1). Как показывает сравнение отдельных компонент, входящих в выражение для σ_{φ} , такая ошибка получилась из-за собственных шумов приемника. Дело в том, что при больших H длительность сигнала T будет много меньше периода сканирования T_0 и интегрирование собственных шумов дает большую ошибку. Эта ошибка может быть существенно уменьшена, если уменьшить угол сканирования так, чтобы он лишь немного превышал угловой размер Земли. В этом случае T будет близка к $T_0/2$ и σ_{φ} резко уменьшится. График зависимости σ_{φ} от H при $T = T_0/2$ дан на рис. 6.2.4 (пунктирная кривая). Видим, что применение схемы с интегратором оправдано в случае больших высот, причем чем больше H , тем лучше работает даже простейшая схема с интегратором.

Характеристики простейшей схемы могут быть улучшены применением корректирующих цепей. Рассмотрению таких систем посвящены следующие параграфы.

§ 3. Исследование приемника с интегратором и корректирующим фильтром

Роль включаемого между линейным фильтром и интегратором корректирующего фильтра (рис. 6.1.3) заключается в подавлении собственных шумов приемного устройства.

Пусть после ФЭП и линейного фильтра стоит корректирующий фильтр (КФ) с переходной характеристикой $h(\tau)$. Обозначим через $h^*(\tau)$ свертку переходных характеристик корректирующего фильтра и линейного, то есть имеем

$$h^*(\tau) = \int_0^{\tau} h(\xi) e^{-a(\tau-\xi)} d\xi. \quad (6.3.1)$$

В этом случае, если $x(t)$ — процесс на входе ФЭП, то на выходе КФ будет процесс

$$y(t) = \int_0^t x(\xi) h^*(t-\xi) d\xi, \quad (6.3.27)$$

Найдем крутизну дискриминационной характеристики в этом случае. Пусть импульсы смещены на время τ , тогда

$$s_1(\tau) = \int_0^{T/2-\tau} y(t) dt = \int_0^{T/2-\tau} dt \int_0^t x(\xi) h^*(t-\xi) d\xi. \quad (6.3.3)$$

Усредняя выражение (6.3.3) по процессу $x(\xi)$, мы получим

$$\overline{s_1(\tau)} = A_x \int_0^{T/2-\tau} dt \int_0^t h^*(t-\xi) d\xi. \quad (6.3.4)$$

Отсюда имеем

$$\left. \frac{d\bar{s}_1}{d\tau} \right|_{\tau=0} = -A_x \int_0^{T/2} h^* \left(\frac{T}{2} - \xi \right) d\xi = -A_x \int_0^{T/2} h^*(u) du. \quad (6.3.5)$$

Аналогично получаем

$$\bar{s}_2 = A_x \int_{T/2-\tau}^T dt \int_0^t h^*(t-\xi) d\xi + A_x \int_T^\infty dt \int_0^T h^*(t-\xi) d\xi. \quad (6.3.6)$$

Отсюда имеем

$$\left. \frac{d\bar{s}_2}{d\tau} \right|_{\tau=0} = A_x \int_0^{T/2} h^* \left(\frac{T}{2} - \xi \right) d\xi = A_x \int_0^{T/2} h^*(u) du. \quad (6.3.7)$$

Величины $\bar{s}_3$ и $\bar{s}_4$ отличаются от $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$ заменой $x(\xi)$ на $x(T-\xi)$, но при вычислении среднего значения это различие пропадает. Поэтому имеем

$$\frac{d\bar{s}_3}{d\tau} = \frac{d\bar{s}_2}{d\tau}; \quad \frac{d\bar{s}_4}{d\tau} = \frac{d\bar{s}_1}{d\tau}. \quad (6.3.8)$$

Таким образом, получаем

$$\delta = \left. \frac{d\bar{\Delta}}{d\tau} \right|_{\tau=0} = -4A_x \int_0^{T/2} h^*(u) du. \quad (6.3.9)$$

Подставляя в (6.3.9) вместо $h^*(u)$ его выражение из (6.3.1), получим

$$\delta = -4A_x \int_0^{T/2} du \int_0^u h(\xi) e^{-\alpha(u-\xi)} d\xi. \quad (6.3.10)$$

Меняя в (6.3.10) порядок интегрирования, мы получим

$$\begin{aligned} \delta &= -4A_x \int_0^{T/2} h(\xi) d\xi \int_{\xi}^{T/2} e^{-\alpha(u-\xi)} du = \\ &= -\frac{4A_x}{\alpha} \int_0^{T/2} h(\xi) (1 - e^{-\alpha(T/2-\xi)}) d\xi. \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Перейдем к вычислению дисперсии величины Δ при $\tau=0$. Начнем с той компоненты, которая обусловлена флуктуациями интенсивности излучения Земли. Полагая $\tau=0$, получаем

$$s_1 = \int_0^{T/2} dt \int_0^t x(\xi) h^*(t-\xi) d\xi = \int_0^{T/2} x(\xi) d\xi \int_0^{T/2-\xi} h^*(u) du; \quad (6.3.12)$$

$$s_2 = \int_{T/2}^T dt \int_0^t x(\xi) h^*(t-\xi) d\xi + \int_0^{\infty} dt \int_0^T x(\xi) h^*(t-\xi) d\xi. \quad (6.3.13)$$

Меняя в (6.3.13) порядок интегрирования, мы получим

$$\begin{aligned} s_2 &= \int_0^{T/2} x(\xi) d\xi \int_{T/2}^T h^*(t-\xi) dt + \int_{T/2}^T x(\xi) d\xi \int_{\xi}^t h^*(t-\xi) dt + \\ &+ \int_0^T x(\xi) d\xi \int_T^{\infty} h^*(t-\xi) dt. \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

Делая замену переменных в интеграле (6.3.14) $t - \xi = u$, мы будем иметь

$$\begin{aligned} s_2 &= \int_0^{T/2} x(\xi) d\xi \int_{T/2-\xi}^{T-\xi} h^*(u) du + \int_{T/2}^T x(\xi) g\xi \int_0^{T-\xi} h^*(u) du + \\ &+ \int_0^T x(\xi) d\xi \int_{T-\xi}^{\infty} h^*(u) du = \int_0^{T/2} x(\xi) d\xi \left[\int_{T/2-\xi}^{T-\xi} h^*(u) du - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{T-\xi} h^*(u) du \right] + \int_0^T x(\xi) d\xi \int_0^{\infty} h^*(u) du = \\ &= \int_0^T x(\xi) d\xi \int_0^{\infty} h^*(u) du - \int_0^{T/2} x(\xi) d\xi \int_0^{T/2-\xi} h^*(u) du. \quad (6.3.15) \end{aligned}$$

Величины s_3 и s_4 отличаются от s_2 и s_1 заменой $x(\xi)$ на $x(T-\xi)$, поэтому

$$\Delta = s_1 - s_2 - s_3 + s_4 = 2 \int_0^{T/2} [x(\xi) - x(T-\xi)] d\xi \int_0^{T/2-\xi} h^*(u) du. \quad (6.3.16)$$

Так как функция корреляции процесса $(x(\xi) - x(T-\xi))$ равна $2\sigma_x^2(\rho(\xi - \xi') - \rho(T - \xi - \xi'))$, то дисперсия определится

$$\begin{aligned} D[\Delta] &= 8\sigma_x^2 \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} [\rho(\xi - \xi') - \\ &- \rho(T - \xi - \xi')] d\xi d\xi' \int_0^{T/2-\xi} \int_0^{T/2-\xi'} h^*(u) h^*(v) du dv. \quad (6.3.17) \end{aligned}$$

Представляя $h^*(u)$ в виде (6.3.17), мы приведем $D[\Delta]$ к виду

$$D[\Delta] = 8\sigma_x^2 \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} h(u) h(v) R(u, v) du dv, \quad (6.3.18)$$

где ядро $R(u, v)$ имеет вид

$$\begin{aligned} R(u, v) &= \int_u^{T/2} \int_v^{T/2} e^{-\alpha(\eta-u) - \alpha(\eta'-v)} d\eta d\eta' \cdot \\ &\cdot \int_0^{T/2-\eta} \int_0^{T/2-\eta'} [\rho(\xi - \xi') - \rho(T - \xi - \xi')] d\xi d\xi'. \quad (6.3.19) \end{aligned}$$

Преобразуем выражение (6.3.15) к более простому виду. Снова меняя порядок интегрирования в (6.3.19), мы получим

$$R(u, v) = \int_0^{T/2-u} \int_0^{T/2-v} [\rho(\xi - \xi') - \rho(T - \xi - \xi')] d\xi d\xi' \cdot \\ \cdot \int_u^{T/2-\xi} \int_v^{T/2-\xi'} e^{-\alpha(\eta-u) - \alpha(\eta'-v)} d\eta d\eta'. \quad (6.3.20)$$

В выражении (6.3.20) внутренние интегралы легко вычисляются, поэтому имеем

$$R(u, v) = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{T/2-u} \int_0^{T/2-v} [\rho(\xi - \xi') - \\ - \rho(T - \xi - \xi')] \left[1 - \exp \left(-\alpha \left(\frac{T}{2} - \xi - u \right) \right) \right] \times \\ \times \left[1 - \exp \left(-\alpha \left(\frac{T}{2} - \xi' - v \right) \right) \right] d\xi d\xi' = \frac{1}{\alpha^2} \bar{R}(u, v). \quad (6.3.21)$$

Таким образом, вклад в $D[\Delta]$ флуктуаций интенсивности излучения Земли равен

$$D[\Delta_1] = \frac{8\sigma^2}{\alpha^2} \int_0^x \int_0^{T/2} h(u) h(v) \bar{R}(u, v) du dv. \quad (6.3.22)$$

Перейдем теперь к вычислению ошибки, обусловленной собственными шумами приемника. Если по-прежнему через $n(t)$ обозначить собственные шумы, то на выходе КФ будем иметь процесс

$$y(t) = \int_0^t h(u) n(t-u) du. \quad (6.3.23)$$

Считая функцию корреляции шума равной $N\delta(t_1 - t_2)$, где δ — дельта функция Дирака, мы получаем функцию корреляции процесса в виде

$$R_y(t, t') = N \int_{-\infty}^{\infty} h(u) h(u - t' + t) du, \quad (6.3.24)$$

Вклад, вносимый в Δ собственными шумами приемника, будет равен

$$\Delta_2 = \int_0^{T_0/4} y(t) dt - \int_{T_0/4}^{T_0/2} y(t) dt - \int_{T_0/2}^{3/4 T_0} y(t) dt + \int_{3/4 T_0}^{T_0} y(t) dt. \quad (6.3.25)$$

Рассмотрим наилучший для нас случай, когда $T_0 \approx 2T$, тогда имеем

$$\Delta_2 = \int_0^{T/2} y(t) dt - \int_{T/2}^T y(t) dt - \int_T^{3T/2} y(t) dt + \int_{3T/2}^{2T} y(t) dt. \quad (6.326)$$

Слагаемые в (6.326) обычно слабо коррелированы [49], тогда приближенно имеем

$$\begin{aligned} D[\Delta_2] &= 4 \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} R_y(t, t') dt dt' = \\ &= 4N \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} dt dt' \int_{-\infty}^{\infty} h(u) h(u - t' + t) du. \end{aligned} \quad (6.327)$$

Делая замену переменных $t - t' = \xi$, $t' = \eta$, приведем выражение (6.327) к виду

$$D[\Delta_2] = 4N \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} h(\xi) h(\eta) \left(\frac{T}{2} - |\xi - \eta| \right) d\xi d\eta. \quad (6.328)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\begin{aligned} D[\Delta] &= D[\Delta_1] + D[\Delta_2] = \frac{8\sigma_x^2}{\alpha^2} \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} h(u) h(v) \bar{R}(u, v) du dv + \\ &+ 4N \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} h(u) h(v) \left(\frac{T}{2} - |u - v| \right) du dv. \end{aligned} \quad (6.329)$$

Так как ошибка Δ приводит к ошибке в измерении τ , равной Δ/δ , для σ_{τ} получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\tau}^2 &= \frac{\frac{\sigma_x^2}{2A_x^2} \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} h(u) h(v) \bar{R}(u, v) du dv + \\ &+ \frac{4N}{16A_x^2} \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} h(u) h(v) \left(\frac{T}{2} - |u - v| \right) du dv}{\left[\int_0^{T/2} h(u) (1 - e^{-\alpha(T/2-u)}) du \right]^2}. \end{aligned} \quad (6.330)$$

Переходя в выражении (6.330) к нормированным переменным $v = \frac{T}{2}y$, $u = \frac{T}{2}x$ и обозначая $\alpha_0 = \frac{\alpha T}{2}$, $h\left(\frac{T}{2}x\right) = H(x)$, мы получим

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{q_0^2 \left(\frac{T}{2}\right)^2}{2} \frac{\int_0^1 \int_0^1 H(x)H(y)R_0(x,y)dx dy + \lambda \int_0^1 \int_0^1 H(x)H(y)(1-|x-y|)dx dy}{\left[\int_0^1 H(x)(1-e^{-\alpha(1-x)})dx\right]^2}, \quad (6.3.31)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{q_1^2}{q_0^2(F_0 T)}; \quad R_0(x, y) = \\ &= \int_0^{1-x} \int_0^{1-y} [\rho(\xi - \xi') - \rho(T - \xi - \xi')] [1 - e^{-\alpha(1-\xi-x)}] \times \\ &\quad \times [1 - e^{-\alpha(1-\xi'-y)}] d\xi d\xi'. \end{aligned} \quad (6.3.32)$$

Если вновь взять $2T=0,3$ с, $F_0=180$ Гц, то $\lambda=2,93 \cdot 10^{-3}$. Теперь для этого случая мы можем найти оптимальную переходную характеристику КФ. Варьируя σ_{τ}^2 по $H(x)$ и учитывая, что $H(x)$ определяется с точностью до произвольного постоянного множителя, мы получаем для $H(x)$ уравнение

$$\int_0^1 H(y)[R_0(x, y) + \lambda(1-|x-y|)]dy = 1 - e^{-\alpha_0(1-x)}. \quad (6.3.33)$$

Решение уравнения (6.3.33) дано на рис. 6.3.1. Выведем

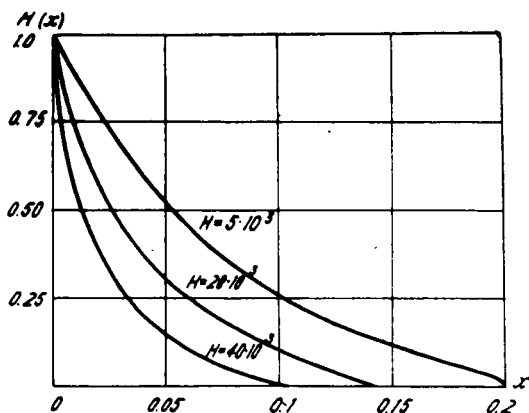


Рис. 6.3.1

формулу для определения величины выигрыша, получаемого от применения КФ. Отсутствие КФ эквивалентно тому, что $H(x) = \delta(x)$, где δ — функция Дирака. В этом случае

$$\sigma_{\tau_0}^2 = \frac{q_0^2}{2} \left(\frac{T}{2} \right)^2 \frac{R_0(0,0) + \lambda}{(1 - \exp(-\alpha_0))^2},$$

поэтому выигрыш, определяемый как уменьшение σ_{τ} по сравнению с σ_{τ_0} , будет равен

$$V = \frac{\sigma_{\tau_0}}{\sigma_{\tau}} = \frac{\sqrt{R_0(0,0) + \lambda} \cdot \int_0^1 H(x)(1 - e^{-\alpha_0(1-x)}) dx}{(1 - e^{-\alpha_0}) \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 H(x)H(y)[R_0(x,y) + \lambda(1 - |x-y|)] dx dy}}$$

График этой зависимости для различных величин T (то есть для разных высот) приведен на рис. 6.3.2. Ви-

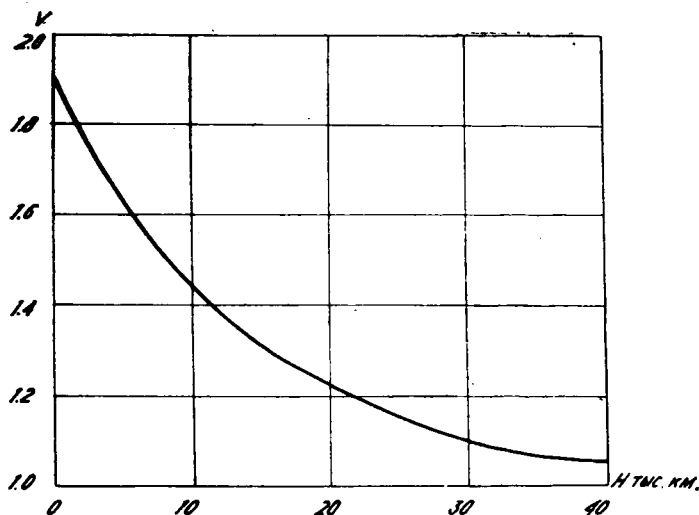


Рис. 6.3.2

дим, что применение КФ уменьшает погрешность в оценке направления на центр Земли, однако схема все равно хороша лишь на больших высотах.

§ 4. Исследование интегратора с идеальным ограничителем

Ошибки в схеме с интегратором возникают из-за нескольких причин. Во-первых, из-за того, что в отсутствие полезного сигнала происходит интегрирование собственных шумов приемника. С этой ошибкой можно бороться с помощью оптимизации сканирования, исследованного в § 5 предыдущей главы, делая угол сканирования возможно более близким к угловому размеру Земли так, чтобы полезный сигнал присутствовал большую часть времени. Во-вторых, причина ошибок состоит в том, что при наличии сигнала на нем наблюдаются флуктуации, которые, интегрируясь, также дают ошибки. С флуктуациями на пологом участке сигнала можно бороться, ставя после усилителя перед интегратором идеальный ограничитель, который срезал бы флуктуации на вершине импульса. Если сделать двустороннее ограничение, такое, как изображено на рис. 6.4.1, то будут срезаться не толь-

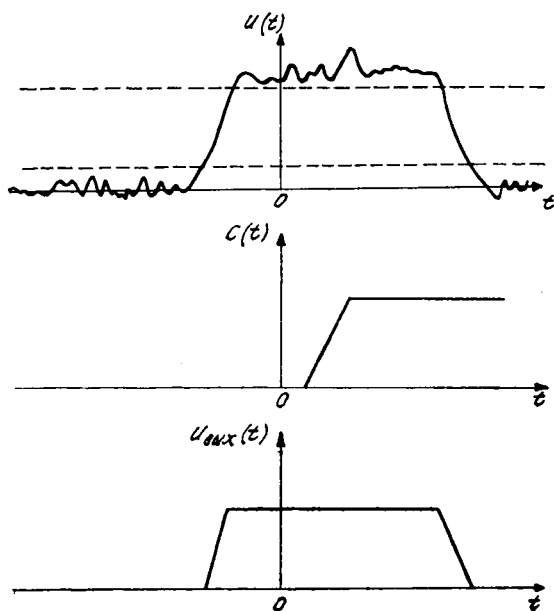


Рис. 6.4.1

ко флуктуации полезного сигнала, но флуктуации мешающего шума в отсутствие сигнала, а останутся лишь флуктуации на фронтах импульса, дающие малый вклад в суммарную площадь. Таким образом, можно надеяться, что характеристики такой системы будут существенно лучше.

Проведем расчет этой схемы для случая малых высот. Пусть C_1 — порог ограничения по минимуму, а C_2 — порог ограничения по максимуму. Обозначим

$$C = \frac{C_1 + C_2}{2}; \quad \gamma = C_2 - C_1, \quad (6.4.1)$$

то есть C есть середина зоны ограничения, а γ — ширина ее. Начнем с вычисления крутизны дискриминационной характеристики. При смещении импульса на величину τ , если это смещение много меньше длительности импульса, изменяются лишь площади под верхним уровнем ограничения, s_1 уменьшается на величину $\gamma \cdot \tau$, а s_2 увеличивается на $\gamma \cdot \tau$ и т. д. Поэтому

$$\frac{d\bar{\Delta}}{d\tau} = -4 \quad (6.4.2)$$

Пусть ширина зоны ограничения мала по сравнению с амплитудой импульса. Обозначим через t_1 и t_2 моменты пересечения регулярной составляющей на выходе ФЭП уровня C . Если на входе ФЭП импульс действует время $[0, T]$, то величины t_1 и t_2 находятся из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_x}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_1}) &= C; \\ \frac{A_x}{\alpha} e^{-\alpha(t_2 - T)} &= C. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.3)$$

Начнем с вычисления вклада в дисперсию величины Δ собственных шумов приемника. Если t_1' — момент пересечения сигналом уровня C_1 с выхода ФЭП со стороны переднего фронта, а t_1'' — момент пересечения уровня C_2 со стороны переднего фронта, то искажение переднего фронта импульса собственными шумами приемника дает дополнительное приращение на выходе интегратора, равное

$$\Delta' = \int_{t_1'}^{t_1''} n(t) dt, \quad (6.4.4)$$

где $n(t)$ — собственные шумы. Находя дисперсию Δ' , получим

$$\begin{aligned} D[\Delta'] &= \int_{t_1'}^{t_1''} \int_{t_1'}^{t_1''} \overline{n(t)n(t')} dt dt' = \\ &= N \int_{t_1'}^{t_1''} \int_{t_1'}^{t_1''} \delta(t-t') dt dt' = N(t_1'' - t_1'). \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Усредняя по моментам пересечения [50] t_1' и t_1'' , получим

$$D[\Delta'] = N(\bar{t}_1'' - \bar{t}_1'). \quad (6.4.6)$$

Так как мы предполагали величину γ малой, то в зоне ограничения фронт импульса можно приближенно аппроксимировать прямой линией. В этом случае имеем

$$\bar{t}_1'' - \bar{t}_1' = \frac{\gamma}{|s_0'(t_1)|}. \quad (6.4.7)$$

Находя $s_0'(t_1)$, получим

$$s_0'(t_1) = \frac{A_x}{\alpha} e^{-\alpha t_1}. \quad (6.4.8)$$

Сравнивая выражение (6.4.8) с первой формулой (6.4.3), получим

$$\bar{t}_1'' - \bar{t}_1' = \frac{\gamma}{A_x - C\alpha}; \quad D[\bar{\Delta}'] = \frac{N\gamma}{A_x - C\alpha}, \quad (6.4.9)$$

Совершенно аналогично получаем для заднего фронта импульса

$$D[\bar{\Delta}''] = N(\bar{t}_2'' - \bar{t}_2') = \frac{N\gamma}{|s_0'(t_2)|}, \quad (6.4.10)$$

где

$$s_0'(t_2) = \frac{A_x}{\alpha} e^{-\alpha(t_2 - T)}. \quad (6.4.11)$$

Из сравнения формулы (6.4.11) со второй формулой (6.4.3) получим

$$D[\bar{\Delta}'] = \frac{N\gamma}{C\alpha}. \quad (6.4.12)$$

Так как второй импульс дает те же самые вклады в дисперсию величины Δ , что и первый, то окончательно слагаемое в дисперсии величины Δ , обусловленное влиянием собственных шумов приемника, будет равно

$$2N \left(\frac{\gamma}{A_x - C\alpha} + \frac{\gamma}{C\alpha} \right) = 2N\gamma \frac{A_x}{C\alpha(A_x - C\alpha)}. \quad (6.4.13)$$

Перейдем теперь к вычислению вклада в дисперсию величины Δ , обусловленного влиянием флуктуаций интенсивности излучения Земли. Пусть из-за этих флуктуаций момент пересечения передним фронтом уровня C изменится на Δt_1 . Тогда площадь изменится на величину $\gamma \cdot \Delta t_1$, а дисперсия этого изменения равна $\gamma^2 \cdot \overline{\Delta t_1^2}$. На малых высотах полета ИСЗ излучение Земли по всему переднему фронту импульса можно считать сильно коррелированным [22], поэтому сигнал на выходе ФЭП можно представить в виде

$$\frac{x}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}), \quad (6.4.14)$$

где x — случайная величина со средним значением A_x и дисперсией σ_x^2 . Согласно формуле (5.2.1) имеем

$$\Delta t_1 = \frac{\frac{x - A_x}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_1})}{|s'_0(t_1)|}. \quad (6.4.15)$$

При обратном ходе сканирующей системы переднему фронту первого импульса соответствует задний фронт второго импульса, поэтому s_4 изменится на величину $\gamma \Delta t_2$; по аналогии с формулой (6.4.15) имеем

$$\Delta t_2 = \frac{\frac{x - A_x}{\alpha} e^{-\alpha(t_2 - T)}}{|s'_0(t_2)|}. \quad (6.4.16)$$

Согласно (6.4.15) и (6.4.16) $s_1 + s_4$ изменится на величину

$$\Delta s_{14} = \gamma \frac{x - A_x}{\alpha} \left(\frac{1 - e^{-\alpha t_1}}{|s'_0(t_1)|} + \frac{e^{-\alpha(t_2 - T)}}{|s'_0(t_2)|} \right). \quad (6.4.17)$$

Используя (6.4.8), (6.4.11) и учитывая (6.4.3), мы получим

$$D[\Delta s_{14}] = \frac{\sigma_x^2}{\alpha^2} \gamma^2 \left(\frac{C \cdot \alpha}{A_x (A_x - C\alpha)} + \frac{C\alpha}{A_x C\alpha} \right). \quad (6.4.18)$$

Так как интенсивность излучения на заднем фронте импульса статистически не зависит от интенсивности излучения на переднем фронте, то $D[\Delta s_{23}] = D[\Delta s_{14}]$, и мы имеем

$$D[\Delta_2] = D[\Delta s_{14}] + D[\Delta s_{23}] = 2 \frac{\sigma_x^2}{\alpha^2} \gamma^2 \frac{1}{(A_x - C\alpha)^2}. \quad (6.4.19)$$

Окончательно суммируя вклады в дисперсию Δ , получим

$$D[\Delta] = 2 \frac{\sigma_x^2}{\alpha^2} \frac{\gamma^2}{(A_x - C\alpha)^2} + 2N\gamma \frac{A_x}{C\alpha(A_x - C\alpha)}. \quad (6.4.20)$$

Учитывая выражение для крутизны дискриминационной характеристики, видим, что

$$\sigma_\tau^2 = \frac{2 \frac{\sigma_x^2}{\alpha^2} \frac{\gamma^2}{(A_x - C\alpha)^2} + 2N\gamma \frac{A_x}{C\alpha(A_x - C\alpha)}}{(4\gamma)^2}. \quad (6.4.21)$$

Приведем уравнение (6.4.21) к более удобному виду с привычными для нас параметрами q_0 и q_1 . Учитывая, что амплитуда импульса на выходе ФЭП равна A_x/α , вводя относительный уровень зоны ограничения $z = C\alpha/A_x$ и относительную зону ограничения $\varepsilon = \gamma\alpha/A_x$ можем записать для σ_τ^2 формулу

$$\sigma_\tau^2 = \frac{1}{8\alpha^2} \left[\frac{q_0^2}{(1-z)^2} + \frac{q_1^2 \alpha}{\varepsilon \cdot F_0} \frac{1}{z(1-z)} \right]. \quad (6.4.22)$$

Перейдем от величины τ к угловой ошибке φ . Пусть полный период сканирования равен времени выдачи информации, то есть $T_0 = 0,3$ с и угол сканирования равен 120° . Тогда ошибка в оценке момента появления сигнала τ эквивалентна угловой ошибке φ (в угловых минутах)

$$\varphi = \tau \cdot \frac{120 \cdot 60}{0,15},$$

поэтому имеем

$$\sigma_{\varphi} = \frac{120 \cdot 60}{0,15} \sigma_{\tau} \text{ (угл. мин.)}.$$

Принимая, как и раньше, $q_0=16/300$, $q_1=3/200$, $\alpha = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\text{мс}} \right]$, $F_0=180$ Гц, мы получим

$$\sigma_{\varphi} = 1,7 \sqrt{\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{0,147}{\epsilon} \frac{1}{z(1-z)}}. \quad (6.4.23)$$

При заданной ширине зоны ограничения ϵ существует оптимальное положение середины ограничения z , при котором σ_{φ} минимально. Находя $\min$ выражения (6.4.23), приходим к уравнению

$$z^2 = \frac{3a}{2(1-a)} z - \frac{a}{2(1-a)} = 0, \quad (6.4.24)$$

где $a=0,147/\epsilon$. Корень уравнения (6.4.24) лежит в интервале $[0, 1]$ и дает оптимальное значение порога ограничения. Графики функции z и σ_{φ} в зависимости от ϵ приводятся на рис. 6.4.2 и 6.4.3. Из этих графиков ви-

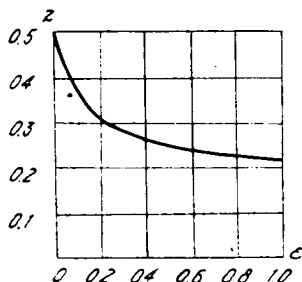


Рис. 6.4.2

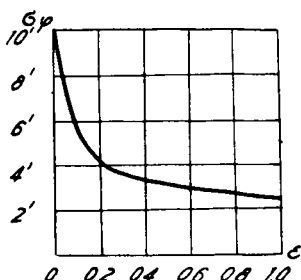


Рис. 6.4.3

дим, что предлагаемая система интегратора с двусторонним ограничением может обеспечить допустимую погрешность в оценке углового положения центра Земли. Так, при $\epsilon=0,1$ оптимальное значение $z=0,36$ и $\sigma_{\varphi}=5'$. При увеличении ϵ σ_{φ} убывает. Однако увеличение ϵ ограничено, с одной стороны, собственными шумами приемника (нижний уровень ограничения не следует опус-

кать ниже 1 мкВ), а с другой стороны, необходимо обрезать флуктуации полезного сигнала. Кроме того, выведенные нами формулы верны при малых ε , поэтому следует рекомендовать $\varepsilon \sim 0,1-0,2$.

Погрешность предлагаемой схемы может быть уменьшена применением КФ, рассмотренного в § 5 предыдущей главы и включенного после ограничителя, задачей которого будет уменьшение собственных шумов приемного устройства и коррекция фронтов полезного сигнала.

§ 5. Фильтровая система, использующая главный максимум для определения момента прихода сигнала

В случае аддитивных шумов оптимальной системой для оценки момента прихода импульса является такая [45], которая использует определение момента прихода по положению главного максимума от сигнала на выходе линейного фильтра. У нас кроме аддитивной составляющей шума имеется еще и мультипликативная составляющая, обусловленная флуктуациями полезного сигнала; но в силу малости этой мультипликативной составляющей можно надеяться, что оценка момента прихода импульса по положению главного максимума сигнала на выходе линейного фильтра будет достаточно эффективна.

Выведем общие формулы относительно ошибок в такой системе с учетом мультипликативной составляющей шума. Пусть $x(t)$ — сигнал на входе ФЭП; как и прежде, на его выходе будем иметь сигнал

$$y(t) = \int_0^t x(\xi) s_0(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi + n(t). \quad (6.5.1)$$

Если обозначим через $s(t)$ весовую функцию нашего фильтра, то на его выходе будет процесс

$$z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) s(t-\tau) dt. \quad (6.5.2)$$

Как показано в [5], дисперсию оценки момента прихода сигнала в подобных системах следует вычислять по формуле

$$\sigma_z^2 = \frac{D(z'(0))}{(\overline{z''(0)})^2}, \quad (6.5.3)$$

где $\overline{z''}$ есть среднее значение, а $D(\cdot)$ — дисперсия. Находя $z'(0)$, $z''(0)$ и усредняя $z''(0)$, получим

$$z'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s'(t) dt \cdot \int_0^t s_0(\xi) x(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} n(t) s'(t) dt; \quad (6.5.4)$$

$$z''(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s''(t) dt \cdot \int_0^t s_0(\xi) x(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} n(t) s''(t) dt; \quad (6.5.5)$$

$$\overline{z''(0)} = A_x \int_{-\infty}^{\infty} s''(t) dt \cdot \int_0^t s_0(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi. \quad (6.5.6)$$

Вводя обозначение

$$L_0(t) = \int_0^t s_0(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi, \quad L_1(t) = L'_0(t), \quad C(t) = s'(t), \quad (6.5.7)$$

и интегрируя (6.5.6) по частям, получим

$$\overline{z''(0)} = -A_x \int_{-\infty}^{\infty} C(t) L_1(t) dt. \quad (6.5.8)$$

Для определения дисперсии $D[z'(0)]$ мы имеем

$$D[z'(0)] = D_1 + D_2, \quad (6.5.9)$$

где

$$D_1 = D\left[\int_{-\infty}^{\infty} n(t) C(t) dt\right] = N \int_{-\infty}^{\infty} C^2(t) dt; \quad (6.5.10)$$

$$D_2 = D\left[\int_{-\infty}^{\infty} C(t) dt \int_0^t x(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi\right] = \\ = \sigma_x^2 \iint_{-\infty}^{\infty} C(t_1) C(t_2) R(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (6.5.11)$$

и где

$$R(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} s_0(\xi) s_0(\xi') \rho_0(\xi) \rho(\xi - \xi') e^{-\alpha(t_1 - \xi) - \alpha(t_2 - \xi')} d\xi d\xi'. \quad (6.5.12)$$

Подставляя (6.5.10) и (6.5.11) в (6.5.9) и (6.5.9) в (6.5.3), получим

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{\sigma_r^2 \iint_{-\infty}^{\infty} C(t_1) C(t_2) R(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + N \int_{-\infty}^{\infty} C^2(t) dt}{A_x^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} C(t) L_1(t) dt \right]^2}. \quad (6.5.13)$$

Вводя привычные нам параметры q_0, q_1, τ_{Φ}, F и переходя к σ_{φ}^2 , получим

$$\sigma_{\varphi}^2 = 180^2 \frac{q_0^2 \iint_{-\infty}^{\infty} C(t_1) C(t_2) R(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \frac{q_1^2}{\alpha^2 (F \tau_{\Phi})} \int_{-\infty}^{\infty} C^2(t) dt}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} C(t) L_1(t) dt \right]^2} \quad (6.5.14)$$

где $R(t_1, t_2)$ определяется выражением (6.5.12). Упростим (6.5.14), приняв во внимание свойства функций $C(t)$ и $s_0(t)$. Для нашего случая (по крайней мере для трапецидального импульса) $s_0(\xi)$ можно представить в виде разности весовых функций фильтра в моменты времени ξ и $(\xi - x)$, то есть имеем

$$s_0(\xi) = s(\xi) - s(\xi - x). \quad (6.5.15)$$

где $S(\xi) \equiv 0$ при $\xi < 0$. В этом случае $C(t)$ также получается в виде

$$C(t) = C_0(t) - C_0(t - x), \quad (6.5.16)$$

где $C_0(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и $C_0(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Имеем тогда следующее преобразование:

$$\begin{aligned} L_0(t) &= \int_0^t s(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi - \int_x^t s(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi = \\ &= l_0(t) - l_0(t - x), \end{aligned} \quad (6.5.17)$$

где

$$l_0(t) = \int_0^t S(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi; \quad (6.5.18)$$

$$L_1(t) = L_0'(t) = l_1(t) - l_1(t-x); \quad l_1(t) = l_0'(t). \quad (6.5.19)$$

Упростим теперь выражение, входящее в σ_Φ^2 . Получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty C^2(t) dt &= \int_0^\infty C_0^2(t) dt + \int_0^\infty C^2(t-x) dt - \\ &- 2 \int_0^\infty C_0(t) C_0(t-x) dt. \end{aligned} \quad (6.5.20)$$

Однако обычно произведение $C_0(t)C_0(t-x)$ мало, так как на протяжении x , что соответствует приблизительно длительности импульса, $C_0(t)$ очень сильно уменьшается по сравнению с $C_0(0)$, поэтому

$$\int_0^\infty C^2(t) dt \approx 2 \int_0^\infty C_0^2(t) dt. \quad (6.5.21)$$

Аналогично имеем

$$\int_0^\infty C(t) L_1(t) dt \approx 2 \int_0^\infty C_0(t) l_1(t) dt. \quad (6.5.22)$$

Упростим теперь 4-кратные интегралы

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^\infty C(t_1) C(t_2) dt_1 dt_2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} s_0(\xi) s_0(\xi') \rho(\xi - \xi') \cdot \\ &\cdot e^{-\alpha(t-\xi) - \alpha(t-\xi')} d\xi d\xi'. \end{aligned} \quad (6.5.23)$$

Меняя порядок интегрирования по t и ξ , получим

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^\infty S_0(\xi) S_0(\xi') \rho(\xi, \xi') e^{\alpha_0(\xi + \xi')} d\xi d\xi' \cdot \\ &\cdot \int_0^\infty \int_0^\infty C(t_1) C(t_2) e^{-\alpha(t_1 + t_2)} dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (6.5.24)$$

Для выражения $f(\xi) = \exp(\alpha\xi) \int_\xi^\infty C(t) e^{-\alpha t} dt$ мы имеем

$$\begin{aligned} f(\xi) &= e^{\alpha\xi} \int_\xi^\infty (C_0(t) + C_0(t-x)) e^{-\alpha t} dt = \\ &= f_0(\xi) - f_0(\xi-x), \end{aligned} \quad (6.5.25)$$

где

$$f_0(\xi) = e^{\alpha \xi} \int_{\xi}^{\infty} C_0(t) e^{-\alpha t} dt. \quad (6.5.26)$$

Ввиду этого получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \rho(\xi - \xi') s_0(\xi) s_0(\xi') f(\xi) f(\xi') d\xi d\xi' = \\ & = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \rho(\xi - \xi') s_0(\xi') s_0(\xi) f_0(\xi') f_0(\xi) d\xi d\xi' + \\ & + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \rho(\xi - \xi') s_0(\xi) s_0(\xi') f_0(\xi - x) f_0(\xi' - x) d\xi d\xi' - \\ & - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \rho(\xi - \xi') s_0(\xi) s_0(\xi') f_0(\xi) f_0(\xi') d\xi d\xi' - \\ & - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \rho(\xi - \xi') s_0(\xi) s_0(\xi') f_0(\xi - x) f_0(\xi' - x) d\xi d\xi'. \end{aligned} \quad (6.5.27)$$

В выражении (6.5.27) последними двумя интегралами можно пренебречь, так как там, где $\rho(\xi - \xi')$ велико, ξ и ξ' должны мало различаться, а следовательно, будет мало произведение $f_0(\xi) f_0(\xi' - x)$; там, где велико произведение $f_0(\xi) f_0(\xi' - x)$, будет мало $\rho(\xi - \xi')$ вследствие того, что разность $(\xi - \xi')$ велика. Вместо $s_0(\xi)$ в первом интеграле можно поставить $S(\xi)$, а во втором $S(\xi - x)$, тогда получим

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \rho(\xi - \xi') S(\xi) S(\xi') f_0(\xi) f_0(\xi') d\xi d\xi' = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} C_0(t_1) C_0(t_2) R_0(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (6.5.28)$$

где

$$\begin{aligned} R_0(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} S(\xi) S(\xi') e^{-\alpha(t_1 - \xi) - \alpha(t_2 - \xi')} \\ &\cdot \rho(\xi - \xi') d\xi d\xi'. \end{aligned} \quad (6.5.29)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\sigma_{\varphi}^2 = 180^2 \frac{q_0^2 \int_0^\infty \int_0^\infty C_0(t_1) C_0(t_2) \overline{R_0(t_1, t_2)} dt_1 dt_2 + Q^2 \int_0^\infty C_0^2(t) dt}{2 \left[\int_0^\infty C_0(t) l_1(t) dt \right]^2}, \quad (6.5.30)$$

где Q определяется формулой $Q = \frac{q_1^2}{\alpha_0^2 \cdot F_0 \cdot \tau_{\Phi}}$. Отметим, что проведенное выше исследование линейного фильтра, определяющего главный максимум импульса с характеристикой (6.5.30), позволяет просто рассмотреть случай согласованного фильтра.

§ 6. Исследование согласованного и оптимального фильтров

По результатам исследования предыдущего параграфа рассмотрим более подробно случай согласованного фильтра для трапецеидального импульса, когда

$$S(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0; \\ \xi, & 0 \leq \xi \leq 1; \\ 1, & \xi > 1. \end{cases} \quad (6.6.1)$$

В этом случае на выходе ФЭП имеем

$$l_0(t) = \int_0^t S(\xi) e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{\alpha_0 t - 1 + e^{-\alpha_0 t}}{\alpha_0^2}, & 0 \leq t \leq 1; \\ \frac{\alpha_0 - 1 + e^{-\alpha_0(t-1)}}{\alpha_0^2} e^{-\alpha_0(t-1)} + \frac{1 - e^{-\alpha_0(t+1)}}{\alpha_0}, & t > 1 \end{cases} \quad (6.6.2)$$

и соответственно

$$l_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{1 - e^{-\alpha_0 t}}{\alpha_0}, & 0 < t < 1; \\ \frac{1 - e^{-\alpha_0}}{\alpha_0} e^{-\alpha_0(t-1)}, & t > 1. \end{cases} \quad (6.6.3)$$

Возьмем фильтр с весовой характеристикой, согласованной с формой сигнала на выходе ФЭП, то есть возьмем $S(t) = l_0(t)$, тогда имеем $C(t) = l_1(t)$ и

$$\int_0^{\infty} C_0^2(t) dt = \int_0^{\infty} C_0(t) l_1(t) dt = \frac{1}{\alpha_0^2} \int_0^1 (1 - e^{-\alpha_0 t})^2 dt + \\ + \frac{(1 - e^{-\alpha_0})^2}{\alpha_0^2} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha_0 u} du = \frac{1 - e^{-2\alpha_0}}{2\alpha_0^3}. \quad (6.6.4)$$

Для функции $f_0(\xi)$ при $0 \leq \xi < 1$ мы получим

$$f_0(\xi) = e^{\alpha_0 \xi} \left[\int_{\xi}^1 \frac{1 - e^{-\alpha_0 t}}{\alpha_0} e^{-\alpha_0 t} dt + \int_1^{\infty} \frac{1 - e^{-\alpha_0}}{\alpha_0} e^{-\alpha_0(t-1)} dt \right] = \\ = \frac{1}{2\alpha_0^3} \left[2 - e^{\alpha_0(\xi-1)} - e^{-\alpha_0 \xi} \right], \quad (6.6.5)$$

а при $\xi > 1$

$$f_0(\xi) = e^{\alpha_0 \xi} \int_{\xi}^{\infty} \frac{1 - e^{-\alpha_0}}{\alpha_0} e^{-\alpha_0(t-1) - \alpha_0 t} dt = \\ = \frac{1 - e^{-\alpha_0}}{2\alpha_0^2} e^{-\alpha_0(\xi-1)}. \quad (6.6.6)$$

Таким образом, для $\varphi(\xi) = f_0(\xi) \cdot S(\xi)$ мы получим

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0; \\ \frac{\xi}{2\alpha_0^2} [2 - e^{\alpha_0(\xi-1)} - e^{-\alpha_0 \xi}] = \tilde{\psi}(\xi), & 0 < \xi < 1; \\ -\frac{1 - e^{-\alpha_0}}{2\alpha_0^2} e^{-\alpha_0(\xi-1)} = \psi(\xi), & \xi > 1. \end{cases} \quad (6.6.7)$$

Займемся преобразованием интеграла

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \rho(\xi - \xi') \varphi(\xi) \varphi(\xi') d\xi d\xi'. \quad (6.6.8)$$

Путем замены переменных $\xi - \xi' = u$; $\xi' = v$ получаем

$$I = \int_{-\infty}^0 \rho(u) du \int_{-u}^{\infty} \varphi(v) \varphi(v+u) dv + \int_0^{\infty} \rho(u) du \int_0^{\infty} \varphi(v) \varphi(v+u) dv = \\ = \int_0^{\infty} \rho(u) du \left[\int_0^{\infty} \varphi(v) \varphi(v-u) dv + \int_0^{\infty} \varphi(v) \varphi(v+u) dv \right]. \quad (6.6.9)$$

Делая в интеграле $\int_u^\infty \varphi(v)\varphi(v-u)dv$ замену переменных

$v-u=\eta$, мы получаем

$$I=2\int_0^\infty \rho(u) du \int_0^\infty \varphi(v)\varphi(v+u)dv=2\int_0^\infty \rho(u)F(u)du. \quad (6.610)$$

Перейдем к вычислению $F(u)$. При $0 < u < 1$ мы имеем

$$F(u)=\int_0^{1-u} \tilde{\psi}(u)\tilde{\psi}(v+u)dv + \int_{1-u}^1 \tilde{\psi}(v)\psi(v+u)dv + \\ + \int_1^\infty \psi(v)\psi(v+u)dv. \quad (6.611)$$

При $u > 1$ получаем

$$F(u)=\int_0^{1-u} \tilde{\psi}(v)\tilde{\psi}(v+u)dv + \int_1^\infty \psi(v)\psi(v+u)dv. \quad (6.612)$$

Возьмем входящие в формулу (6.611) интегралы

$$\int_1^\infty \psi(v)\psi(v+u)dv = \frac{(1-e^{-\alpha_0})^2}{4\alpha_0^4} \int_1^\infty e^{-\alpha_0(v-1)} e^{-\alpha_0(v-1+u)} dv = \\ = \frac{(1-e^{-\alpha_0})^2}{2\alpha_0^5} e^{-\alpha_0 u}. \quad (6.613)$$

$$\int_{1-u}^1 \tilde{\psi}(v)\psi(v+u)dv = \frac{(1-e^{-\alpha_0})}{4\alpha_0^4} \int_{1-u}^1 v(2-e^{-\alpha_0(v-1)} - \\ - e^{-\alpha_0 v}) e^{\alpha_0(v+u-1)} dv = \\ = \frac{1-e^{-\alpha_0}}{4\alpha_0^4} \left[2e^{\alpha_0} \frac{(\alpha_0+1)e^{-\alpha_0} - (\alpha_0+1-\alpha_0 u)e^{-\alpha_0(1-u)}}{\alpha_0^2} - \right. \\ \left. - \frac{1-(1-u)^2}{2} - e^{\alpha_0} \frac{(2\alpha_0+1)e^{-2\alpha_0} - (2\alpha_0+1-2u\alpha_0)e^{-2\alpha_0(1-u)}}{4\alpha_0^2} \right]. \quad (6.614)$$

Выражение для последнего интеграла из (6.611) мы выписывать не будем ввиду крайней громоздкости а

запишем сразу формулу для σ_φ в случае согласованного фильтра

$$\sigma_\varphi = 180 \frac{\sqrt{2q_0^2 \int_0^\infty \rho(u)F(u)du + Q^2 \left(\frac{1+Q^{-2\alpha_0}}{2\alpha_0^3} \right)}}{\sqrt{2} \left(\frac{1+e^{-2\alpha_0}}{2\alpha_0^3} \right)}. \quad (6.6.15)$$

Так как $\rho(u)$ зависит от высоты H , то σ_φ также зависит от H . График зависимости σ_φ от H приведен на рис. 6.6.1. Видим, что при малых высотах $\sigma_\varphi = 6,2'$, то есть система с согласованным фильтром обеспечивает нам почти такую же точность, что и пороговая система. С увеличением высоты σ_φ убывает, как и во всех остальных рассмотренных выше случаях.

Перейдем к вопросу о вычислении оптимальной весовой характеристики фильтра или, что то же самое, об оптимальном виде функции $C_0(t)$. Как следует из формулы (6.5.30), σ_φ зависит от двух функционалов:

$$\varepsilon \iint C_0(t_1)C_0(t_2)R_0(t_1, t_2)dt_1 dt_2 + \int C_0^2(t)dt; \quad (6.6.16)$$

$$\int C_0(t)l_1(t)dt, \quad (6.6.17)$$

$$\text{где } \varepsilon = \frac{q_0^2}{Q^2} = \frac{q_0 \sigma_0^2(F \tau_\Phi)}{q_1^2} =$$

$= 13,3$. Варьируя σ по $C_0(t)$, мы получим интегральное уравнение Фредгельма II рода, определяющее оптимальную форму для $C_0(t)$. Имеем

$$C_0(t) + \varepsilon \int_0^\infty C_0(\tau)R_0(t, \tau)d\tau = \lambda l_1(t). \quad (6.6.18)$$

$\lambda = 1$, так как $C_0(t)$ определяется с точностью до произвольного постоянного множителя. В случае малых высот на том интервале времени t , где $C_0(t)$ существенно отлично от нуля, можно считать $\rho(\xi) \equiv 1$; тогда

$$R_0(t, \tau) = l_0(t) \cdot l_0(\tau). \quad (6.6.19)$$

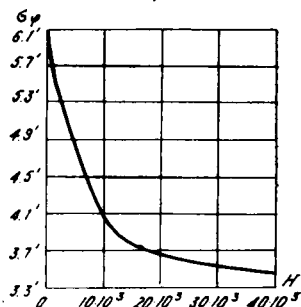


Рис. 6.6.1

В этом случае

$$C_0(t) = l_1(t) - \gamma l_0(t), \quad (6.6.20)$$

где $\gamma = \varepsilon \int_0^{\infty} C_0(t) l_0(t) dt$ — некоторый пока неопределенный коэффициент. Однако нетрудно показать, что γ должно равняться нулю. Действительно, из физических соображений следует, что $C_0(t)$ должно стремиться к нулю, лишь только $t \rightarrow \infty$, $l_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а $l_0(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к некоторому конечному пределу. Поэтому чтобы $C_0(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, необходимо положить $\gamma = 0$, тогда $C_0(t) = l_1(t)$, то есть оптимальной являются согласованная фильтрация в случае малых высот и рассмотренная выше.

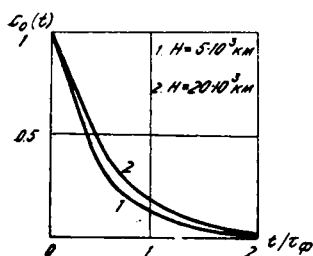


Рис. 6.6.2

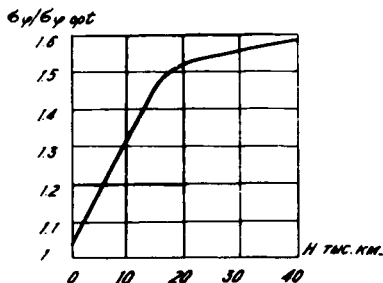


Рис. 6.6.3

В случае больших высот, когда $\rho(\xi)$ нельзя считать тождественно равной единице, решить уравнения (6.6.20) и

$$\gamma = \varepsilon \int_0^{\infty} C_0(t) l_0(t) dt \quad (6.6.21)$$

можно лишь численно. Результаты этих расчетов приведены на рис. 6.6.2. Применение оптимального фильтра вместо согласованного в этом случае приводит к некоторому уменьшению σ_ϕ . График выигрыша, подсчитанного по формуле

$$\frac{\sigma_{\varphi}}{\sigma_{\varphi \text{ opt}}} = \frac{\sqrt{\left[\frac{1+e^{-2\alpha_0}}{2\alpha_0^3} + 2\varepsilon \int_0^{\infty} \rho(u)F(u)du \right] \int_0^{\infty} C_1(t)l_1(t)dt}}{\frac{1+\exp(-2\alpha_0)}{2\alpha_0^3}}, \quad (6.6.22)$$

приведен на рис. 6.6.3. Видим, что с увеличением высоты H выигрыш линейно растет лишь до высот ~ 20 тыс. км, затем рост почти прекращается, впрочем, как для всех случаев, рассмотренных выше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проанализируем кратко рассмотренные в монографии вопросы и сделаем выводы из проведенных исследований.

Глава, посвященная синтезу алгоритмов обнаружения оптических локационных сигналов приемником с безынерционным фотодетектором на входе на фоне собственных шумов его и широкополосного сильного внешнего фона, строится на основе теории полезности и теории игр при отсутствии какой-либо априорной информации об энергии сигнала. Предложены аксиомы, приводящие к новому критерию оптимальности, названному вторым минимаксным критерием, суть которого сводится к тому, что надо добиваться не минимакса средних потерь, т. е. потерь по ансамблю реализаций, а минимакса потерь по каждой реализации, минимакса потерь в каждой партии игры. Этот критерий оптимальности дает логические обоснования широко применяемому на практике обобщенному отношению правдоподобия.

В приложении к задаче обнаружения оптических сигналов данный критерий привел к системам обнаружения, состоящим из линейного фильтра, безынерционного нелинейного преобразования и межимпульсного сумматора. Подробно изучены случаи, когда безынерционный нелинейный преобразователь представляет собой:

1) квадратор $y = x^2$;

2) полуквадратор $y = x^2 \cdot \theta(x)$, где $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$

3) оптимальный преобразователь $y = \frac{x^2}{4} + \ln D_{-1}(-x)$.

Показано, что с ростом «изрезанности» полезного сигнала, т. е. с уменьшением времени корреляции его, оптимальная обработка все более приближается к линейной фильтрации. В связи с этим особо рассмотрены линейные системы обнаружения оптических локационных сигналов. Показано, что если время корреляции полезного сигнала больше длительности импульса, то оптимальная весовая характеристика фильтра имеет вид

$$S(t) = \frac{\mu(t)}{1+a\mu(t)},$$
 где $\mu(t)$ — форма зондирующего импульса; a — некоторый коэффициент, выбираемый из условий того или другого необходимого нам критерия. В случае, когда время корреляции флуктуаций сравнимо с длительностью импульса, получено интегральное уравнение, определяющее оптимальную весовую характеристику фильтра, и указаны пути его решения.

Необходимо подчеркнуть, что во всех случаях при рассмотрении задачи обнаружения удалось найти замкнутые выражения, позволяющие всякий раз оценивать качество и эффективность работы найденных алгоритмов.

В главах, посвященных оценкам моментов прихода оптических слабых сигналов на фоне сильных помех, исследованы оптимальные линейные системы и оптимальные нелинейные системы. Показано, что в случае флуктуирующего полезного сигнала с временем корреляции больше длительности импульса оптимальными системами оценки будут линейная фильтрация, согласованный фильтр и линейный фильтр, определяющий главный максимум приходящего сигнала. В случае, когда время корреляции сравнимо с длительностью импульса, оптимальными системами будут линейно-квадратичная и кросс-корреляционная схемы оценки.

Следует также подчеркнуть, что во всех рассмотренных случаях найдены количественные характеристики, позволяющие оценить качество и эффективность работы рассмотренных систем оценки момента прихода оптических сигналов.

В главах, посвященных оценкам моментов прихода мощных оптических сигналов, основное внимание было

обращено на качественную сторону дела. Необходимо было построить такие системы оценки, которые бы обеспечивали высокую эффективность определения углового направления на цель и в то же время обладали бы простотой технической реализации.

Несомненным достоинством всех исследованных систем обнаружения и определения момента появления оптических сигналов является наряду с их высокой эффективностью также и простота в техническом плане, что позволяет надеяться на успех при инженерной разработке подобных систем для различных целей практики.

Успехи в развитии лазерной техники и широкое внедрение ее в практику народного хозяйства ставят вопрос исследования оптимальных систем обнаружения и определения момента появления оптических сигналов в ряд наиболее насущных проблем сегодняшнего дня. Именно широта практического использования оптико-электронных систем обуславливает необходимость широкого фронта исследования проблемы обнаружения и оценки параметров оптических сигналов.

Возможность перехода от полученных в книге результатов к классическим при определенных условиях делает результаты исследований универсальными, а методику приложимой к разработкам оптимальных систем для других целей, например связи и различных систем массового обслуживания, идентификации и т. д.

Наконец, хотелось бы кратко остановиться на вопросах, которые не были затронуты изложенным материалом, но могут оказать решающее значение при инженерном проектировании систем, а следовательно, целесообразность их исследования необходима. Это прежде всего вопросы энергетики передающей части оптической локационной системы. В работе, как правило, рассмотрен случай обнаружения и определения момента появления сигнала пачкой полезных импульсов. Однако вопрос об оптимальном числе импульсов в пачке не рассматривался, хотя во многих практически важных случаях этот вопрос может играть решающую роль при проектировании локационных систем. При рассмотрении вопросов оценки момента прихода не рассматривались вопросы оценок других параметров, позволяющих идентифицировать цель. Вопросы же идентификации могут быть определяющими при создании, например, систем оптики

атмосферы. Однако авторам кажется, что эти вопросы имеют самостоятельное значение, а примененная в исследованиях методика может оказаться полезной для разработчиков целевых систем.

Список литературы, приводимый в конце книги, ни в коем случае не отражает всех публикаций по данной тематике, да авторы и не ставили перед собой задачи составления полного библиографического списка по обсуждаемой проблеме. Приводимый список отражает скорее тот минимум, который был использован авторами при написании книги.

В заключение авторы благодарят всех товарищей и специалистов, принявших участие в обсуждении материала книги.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестов Н. С. Выделение оптических сигналов на фоне случайных помех.— М.: Сов. радио, 1967.— 347 с.
2. Волохатюк В. А. и др. Вопросы оптической локаши. Под редакцией Р. Р. Красовского.— М.: Сов. радио, 1971.— 256 с.
3. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика.— М.: ИЛ, 1960.— 434 с.
4. Терпугов А. Ф. Математическая статистика.— Томск: Изд-во ТГУ, 1974.— 136 с.
5. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений.— М.: ГИФМЛ, 1958.— 333 с.
6. Гудмен Д. В. Зависимость характеристик оптических юкационных станций от вызванного целью мерцаний отраженного сигнала.— ТИИЭР, 1965, т. 53, № 11, с. 1892—1906.
7. Чернышев В. Н., Шереметьев А. Г., Кобзев В. В. Лазеры в системах связи.— М.: Связь, 1966.— 320 с.
8. Мортон Г. А. Принципы построения счетчиков фотонов.— Зарубежная радиоэлектроника, 1969, № 12, с. 92—109.
9. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики.— М.: Мир, 1970.— 424 с.
10. Ходара Г. Статистика теплового и лазерного излучения.— ТИИР, 1965, т. 53, № 7, с. 802—811.
11. Ванштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех.— М.: Сов. радио, 1960.— 447 с.
12. Бакут В. А. и др. Вопросы статистической теории радиолокации. Т. 2.— М.: Сов. радио, 1966.— 1075 с.
13. Росс М. Лазерные приемники.— М.: Мир, 1966.— 519 с.
14. Смит Р., Джонс Ф., Чесмер Р. Обнаружение и измерение инфракрасного излучения.— М.: ИЛ, 1959.— 448 с.
15. Кондратьев К. Я. и др. Поле излучения Земли как планеты.— Л.: Гидрометеиздат, 1967.— 314 с.
16. Хэнэл, Уэрк. Результаты измерений, полученные с метеоспутника «Тирос-П».— Зарубежная радиоэлектроника, 1963, № 1, с. 91—99.
17. Долинин Н. А. Выбор оптимального оптического дила-

вона для целей организации локационных и связанных приемников.— Изв. вузов. Сер. Физика, 1977, № 10, с. 157.

18. Болдырев В. Г., Копрова Л. И., Малкевич М. С. Об учете вариаций вертикальных профилей температуры и влажности при определении температуры подстилающей поверхности по уходящему излучению.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 7, с. 703—714.

19. Болдырев В. Г., Ветлов И. П. Пространственная и временная изменчивость уходящей радиации.— Метрология и гидрология, 1970, № 10, с. 23—32.

20. Романовский В. И. Математическая статистика.— М.— Л.: ГИТТЛ, 1938.— 528 с.

21. Малкевич М. С., Сячинов В. И., Истомина В. Г. Некоторые результаты исследования яркости Земли с помощью ИСЗ «Космос-143».— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1969, т. 5, № 4, с. 341—354.

22. Болдырев В. Г. Расчет передаточных функций в интервале 8—12 мкм для территории северного полушария.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 7, с. 696—702.

23. Ветлов И. П., Еремин В. П., Листратов А. В., Радионов В. Г. Инфракрасная аппаратура спутников системы «Метеор».— Метеорология и гидрология, 1970, № 4, с. 80—91.

24. Долинин Н. А. Оценка точности методов построения местной вертикали оптимальным сканирующим приемником оптических сигналов.— Космические исследования, 1980, т. 18, № 3, с. 366—372.

25. Лассер, Чолей, Эмонс. Система с электронной разверткой для прямого видения в инфракрасных лучах.— Зарубежная радиоэлектроника, 1960, № 4, с. 104—116.

26. Долинин Н. А. Оптимальная система с интегратором для определения момента появления оптических сигналов.— Изв. вузов, сер. Радиоэлектроника, 1977, т. 20, № 11, с. 88—93.

27. Фалькович С. Е. Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех.— М.: Сов. радио, 1961.— 311 с.

28. Долинин Н. А. Исследование оптимальной многофильтровой системы лазерного зондирования атмосферы.— Изв. вузов, Сер. Физика, 1977, № 9, с. 156.

29. Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения.— М.: ИЛ, 1961.— 642 с.

30. Де Гроот М. Оптимальные решения.— М.: Мир, 1974.— 491 с.

31. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.— М.: ГИФМЛ, 1961.— 406 с.

32. Долинин Н. А. К вопросу о синтезе оптимального алгоритма для обнаружения пачки флуктуирующих светолокационных импульсов.— В кн.: Четвертая конференция по теории передачи и кодирования информации, секция II: Статистическая теория сигналов и помех. Методы оптимального приема: Тр. Всесоюз. конф. М.— Ташкент, 1969, с. 38—43.

33. Варакин Л. Е. Синтез фазоманипулированных сигналов.— Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, № 5, с. 796—806.

34. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства.— М.: ИЛ, 1948.— 456 с.

35. Кузнецов Д. С. Специальные функции.— М.: Высшая школа, 1962.— 246 с.

36. Градштейн И. О., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: ГИФМЛ, 1963.— 1100 с.

37. Уилкс С. Математическая статистика.— М.: Наука, 1967.— 632 с.

38. Райс С. О. Теория флуктуационных шумов.— В кн.: Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Под ред. Н. А. Железнова.— М.: ИЛ, 1953, с. 88—238.

39. Долинин Н. А., Терпугов А. Ф. О некоторых субоптимальных схемах для обнаружения флуктуирующих пуассоновских сигналов.— Проблемы передачи информации, 1969, т. 5, вып. 1, с. 56—70.

40. Долинин Н. А., Терпугов А. Ф. Оптимальное обнаружение пачки флуктуирующих световых импульсов на фоне тепловых помех.— Проблемы передачи информации, 1970, т. 6, вып. 4, с. 98—102.

41. Терпугов А. Ф. О вычислении потенциальной точности и асимптотической плотности вероятностей оценок неизвестных параметров.— В кн.: Третья конференция по теории передачи и кодирования информации: доклады Всесоюзной конференции, секции IV. М.— Ужгород, 1967, с. 18—22.

42. Долинин Н. А. Оценка момента появления флуктуирующего сигнала автоматом с непрерывным множеством состояний.— Изв. вузов, сер. Радиоэлектроника, 1979, т. 22, № 9, с. 78—80.

43. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики.— М.: Наука, 1965.— 615 с.

44. Рейфен, Шермен. Оптимальный демодулятор для пуассоновских процессов. Фотонный детектор.— ТИИЭР, 1963, т. 51, № 10, с. 15.

45. Долинин Н. А. Оптимальная и субоптимальная схемы обнаружения светолокационных флуктуирующих импульсов.— Радиотехника, 1972, т. 27, № 2, с. 56—63.

46. Крамер Г. Математические методы статистики.— М.: Мир, 1975.— 648 с.

47. Долинин Н. А. Пассивный локатор с минимальной погрешностью определения направления на цель.— Изв. вузов, сер. Физика, 1974, № 12, с. 162.

48. Долинин Н. А. Использование интеграла в пассивном локаторе с минимальной ошибкой обнаружения.— Изв. вузов, сер. Физика, 1974, № 12, с. 162.

49. Долинин Н. А. Определение фильтром момента появления инфракрасного флуктуирующего сигнала.— Радиотехника, 1981, № 1, с. 33—34.

50. Долинин Н. А. Оптимальная селекция помех по длительности в пассивной инфракрасной системе.— Радиотехника и электроника, 1979, № 1, с. 186—188.

51. Бунимович В. И. Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах.— М.: Сов. радио, 1951.— 360 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ, ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ И СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ	5
§ 1. Основные сведения из теории обнаружения сигналов	5
§ 2. Основные сведения из теории оценки параметров сигналов	8
§ 3. Математическое описание квантовых сигналов и шумов	14
§ 4. Статистические характеристики излучения Земли	19
§ 5. Математическое описание сигнала и шума от пассивного источника излучения	31
Глава II. ОБНАРУЖЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ЛОКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ	42
§ 1. Обнаружение сигналов при наличии неизвестных параметров	42
§ 2. Субоптимальные алгоритмы обнаружения оптических локационных сигналов	52
§ 3. Исследование квадратичной схемы обнаружения	61
§ 4. Исследование полуквадратичной схемы	77
§ 5. Оптимальная схема обнаружения	83
§ 6. Субоптимальные линейные фильтры	91
§ 7. Линейные фильтры для обнаружения флуктуирующих оптических сигналов	102
Глава III. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ОЦЕНКИ ДАЛЬНОСТИ	107
§ 1. Оптимальные линейные фильтры для оценки момента прихода флуктуирующего оптического сигнала	107
§ 2. Плотность вероятностей оценки момента прихода сигнала	120
§ 3. Исследование линейных систем по функции неопределенности	125
§ 4. Согласованный фильтр	132
§ 5. Случай нефлуктуирующего полезного сигнала	135
§ 6. Учет когерентной составляющей	138
Глава IV. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ОЦЕНКИ ДАЛЬНОСТИ И СКОРОСТИ ЦЕЛИ	143
§ 1. Асимптотически оптимальная схема оценки момента прихода сигнала в случае сильных помех	143
§ 2. Плотность вероятностей оценки момента прихода сигнала квадратичной схемой	150

§ 3. Линейно-квадратичная схема оценки момента прихода	155
§ 4. Кросс-корреляционный метод оценки скорости цели	171
§ 5. Эффективность оценки скорости цели кросс-корреляционным методом	182
§ 6. Учет инерционности фотодетектора	184
Глава V. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ПОЯВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ПОРОГОВЫМИ ФИЛЬТРАМИ	186
§ 1. Потенциальная точность оценки момента появления оптического сигнала	186
§ 2. Исследование системы с полосовым фильтром	192
§ 3. Исследование системы с корректирующим фильтром	199
§ 4. Вопросы оптимизации по скорости сканирования	204
§ 5. Исследование системы для случая больших высот	205
Глава VI. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ПОЯВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ СИСТЕМАМИ С ИНТЕГРАТОРОМ И ФИЛЬТРАМИ	212
§ 1. Приемник с интегратором и вычисление сигнала рассогласования	212
§ 2. Определение погрешности оценки момента появления сигнала в системе с интегратором	217
§ 3. Исследование приемника с интегратором и корректирующим фильтром	224
§ 4. Исследование интегратора с идеальным ограничителем	231
§ 5. Фильтровая система, использующая главный максимум для определения момента прихода сигнала	237
§ 6. Исследование согласованного и оптимального фильтров	242
Заключение	248
Литература	252

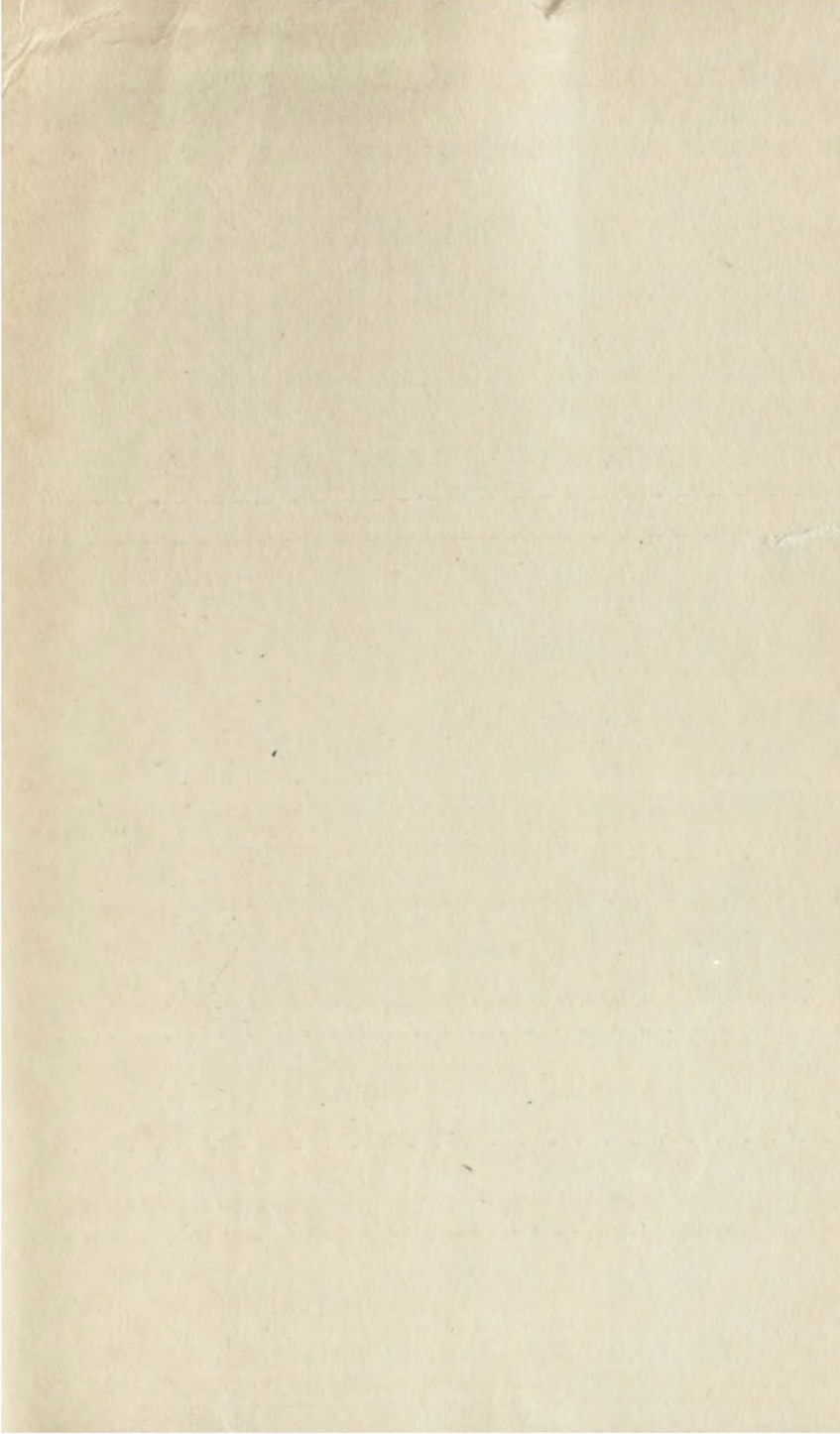
Николай Александрович ДОЛИНН,
Александр Федорович ТЕРПУГОВ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ОПТИЧЕСКОЙ ЛОКАЦИИ.

Редактор **К. Г. Шилько**, технический редактор **Р. М. Подгорбунская**,
корректор **Е. С. Юзефович**.

ИБ 891. Подписано к печати 23.03.1983 г.
КЗ 06075. Формат 84×108_{1/32}, бумага типографская № 3. Гарни-
тура Литературная. Высокая печать. П. л. 8; уч.-изд. л. 12,25;
усл. п. л. 13,44. Заказ 6128. Тираж 1500. Цена 1р. 80к.

Издательство ТГУ. 634010. Томск, пр. Ленина, 136.
Типография изд-ва «Омская правда», г. Омск, пр. Маркова, 39.



1 р. 80 коп.