

**ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ
ЗАДАЧИ ТЕОРИИ
ФУНКЦИЙ. 6**

ТОМСКИЙ ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ. 6

Под редакцией кандидата физико-математических наук

В. В. Черникова

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Томск — 1988

Экстремальные задачи теории функций. 6: Сборник статей/Под ред. В. В. Черникова — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988. — 140 с. — 1 р. 10 к. 500 экз. 1702030000.

В сборнике помещены статьи, охватывающие следующий круг проблем: изучение специальных классов регулярных функций (типично вещественные, спиралеобразные, регулярные в круге и полосе), свойства пространственных отображений (торы вращения в многомерном пространстве, граничное поведение квазиизометрических отображений), некоторые вопросы общей топологии.

Для научных работников, занимающихся теорией функций и математическим анализом.

Рецензент — М. Р. Куваев

9 $\frac{1702030000}{77(012)-88}$ — 75—88

© Издательство Томского университета, 1988

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЯХ, РЕГУЛЯРНЫХ В КРУГЕ

О. И. Алехова

Найдем множества значений параметра a , при которых регулярные в круге $|z| < 1$ функции

$$f(z) = \frac{z + az^2}{1 - z}, \quad f(z) = \frac{z + az^3}{1 - z^2}, \quad f(z) = \frac{z + az^2}{1 + 2az + z^2}$$

однолиственны.

Теорема 1. Регулярная в $|z| < 1$ функция

$$f(z) = \frac{z + az^2}{1 - z}$$

однолистка в нем тогда и только тогда, когда

$$a = \frac{\rho e^{-i\varphi}}{2 + \rho e^{i\varphi}}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \rho < 1.$$

Доказательство. При $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ и $z_1 \neq z_2$ отношение

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = \frac{1 + a(z_1 + z_2) - az_1z_2}{(1 - z_1)(1 - z_2)} \neq 0,$$

если

$$a \neq \frac{1}{z_1z_2 - z_1 - z_2}.$$

Найдем множество D значений функции

$$\Psi(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1z_2 + z_1 + z_2}$$

в бицилиндре $\{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. Для однолиственности $f(z)$ в круге $|z| < 1$ необходимо и достаточно, чтобы $a \in D$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(z_1, z_2) = z_2 + z_1(1 + z_2).$$

При фиксированном значении $z_2 = \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \rho < 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, и переменном z_1 , $|z_1| < 1$, множество значений функции $\Phi(z_1, z_2)$ на плоскости $w = u + iv$ представляет собой круг $|\omega - z_2| < |1 + z_2|$ с центром в точке z_2 и радиусом $|1 + z_2|$. Если ρ , $0 < \rho < 1$, фиксировать, а φ изменять от 0 до 2π , то получим однопараметрическое семейство кругов, ограниченных окружностями:

$$(u - \rho \cos \varphi)^2 + (v - \rho \sin \varphi)^2 = 1 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2. \quad (1)$$

Параметрическое уравнение огибающей семейства окружностей (1) имеет вид

$$u = 2\rho \cos \varphi + \cos 2\varphi, \quad v = 2\rho \sin \varphi + \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (2)$$

показывающий, что огибающая является улиткой Паскаля. Обозначим через Δ_ρ односвязную область, ограниченную кривой (2). Легко видеть, что $\Delta_{\rho_1} \subset \Delta_{\rho_2}$ при $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$ и при $\rho \rightarrow 1$, семейство областей Δ_ρ сходится как к ядру (относительно точки $\omega = 0$) к области Δ , ограниченной кардиоидой $\omega = 2e^{i\varphi} + e^{2i\varphi}$.

При отображении $\omega = 1/\omega$ область Δ переходит в область D , ограниченную линией

$$\omega = \frac{e^{-i\varphi}}{2 + e^{i\varphi}}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (3)$$

Областью допустимых значений параметра a является дополнение области D , т. е. замыкание области, содержащей начало координат и ограниченной линией (3).

Все допустимые значения параметра a можно записать в виде

$$a = \frac{\rho e^{-i\varphi}}{2 + \rho e^{i\varphi}}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Следствие. Все коэффициенты разложения функции $f(z) = \frac{z + az^2}{1 - z} = z + c_2 z^2 + \dots$ класса S , начиная со второго, имеют точную оценку $|c_n| \leq 4/3$, где знак равенства достигается только при $a = 1/3$.

Действительно, $c_n = 1 + a$, $n = 2, 3, \dots$, и в соответствии с теоремой 1 $|1 + a| \leq 4/3$.

Теорема 2. Регулярная в круге $|z| < 1$ функция $f(z) = \frac{z + az^3}{1 - z^2}$ однолистка в нем тогда и только тогда, когда

$$a = -\rho t \frac{1+t^2}{2t+3t+t^3}, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Доказательство. При $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ и $z_1 \neq z_2$ отношение

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = \frac{1}{(1 - z_1^2)(1 - z_2^2)} \frac{z_1 z_2 + a(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 - z_1^2 z_2^2)}{\neq 0},$$

если

$$a \neq \frac{1 + z_1 z_2}{z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 - z_1^2 z_2^2}.$$

Найдем множество D значений функции $w = \frac{z_1^2 + z_1 z_2 + 1 + z_2^2 - z_1^2 z_2^2}{1 + z_1 z_2}$

в бицилиндре $\{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. Можно считать, что $|z_1| = |z_2|$. Если положить $z_2 = z_1 e^{i\theta}$, $z_1^2 = z = \rho e^{i\varphi}$, $\psi = \varphi + \theta$, то

$$w = \rho \frac{(1 + 2 \cos \theta) e^{i\psi} + \rho(1 + 2 \cos \theta) - \rho e^{2i\varphi} - \rho^2 e^{i\psi}}{1 + 2\rho \cos \psi + \rho^2}.$$

Отсюда, полагая $w = u + iv$ и отделяя действительную и мнимую части, получим

$$u = \rho \frac{(1 + 2 \cos \theta - \rho^2) \cos \psi + \rho(1 + 2 \cos \theta) - \rho \cos 2\psi}{1 + 2\rho \cos \psi + \rho^2};$$

$$v = \rho \frac{(1 + 2 \cos \theta - \rho^2) \sin \psi - \rho \sin 2\psi}{1 + 2\rho \cos \psi + \rho^2}.$$

В силу введенных обозначений $\theta = \arg z_2 - \arg z_1$, $\psi = \arg z_1 + \arg z_2$. При фиксированном ψ , $0 \leq \psi \leq 2\pi$, и изменяющемся θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, точка w отрезает на прямой

$$v = \frac{\sin \psi}{\cos \psi + \rho} (u - \rho^2)$$

отрезок с концами

$$u_1 = \rho \frac{\rho^2 + (3 - \rho^2) \cos \psi - \rho \cos 2\psi}{1 + 2\rho \cos \psi + \rho^2};$$

$$v_1 = \rho \frac{(3 - \rho^2) \sin \psi - \rho \sin 2\psi}{1 + 2\rho \cos \psi + \rho^2}$$

и $u_2 = -\rho \cos \psi$, $v_2 = -\rho \sin \psi$.

Точка (u_2, v_2) лежит на окружности $|w| = \rho$. Если полюс полярной системы координат поместить в точку $(\rho^2, 0)$, то полярное уравнение кривой, на которой лежат точки (u_1, v_1) , примет вид

$$r = \rho \frac{3 - 2\rho \cos \psi - \rho^2}{\sqrt{1 + 2\rho \cos \psi + \rho^2}}.$$

При $\rho = 1$ получаем циссоиду

$$r = \frac{2 \sin^2 \frac{\psi}{2}}{\cos \frac{\psi}{2}},$$

параметрическое уравнение которой имеет вид

$$u = \frac{1 + 3t^2}{1 + t^2}; v = \frac{2t^3}{1 + t^2}, \text{ где } t = \tan \frac{\psi}{2}, -\infty < t < +\infty.$$

Множество допустимых значений параметра a является дополнением к образу области D при отображении $w = -\frac{1}{z}$:

$$a = -\rho \frac{1 + t^2}{1 + 3t^2 + 2it^3} = -\rho t_1 \frac{1 + t_1^2}{2i + 3t_1 + t_1^3}, \text{ где } t_1 = 1/t; -\infty < t_1 < +\infty; 0 \leq \rho \leq 1.$$

Следствие 1. Каждый коэффициент разложения функции

$$f(z) = \frac{z + az^3}{1 - z^2} = z + c_2 z^2 + \dots \in S,$$

начиная со второго, имеет область значений, ограниченную кривой

$$a = \frac{2}{t^2 - it + 2}, \text{ где } -\infty < t < +\infty.$$

Следствие 2. Коэффициенты c_n , $n=2, 3, \dots$, функции

$$f^2(z^{1/2}) = \frac{z(1 + az)^2}{(1 - z)^2} = z + c_2 z^2 + \dots$$

удовлетворяют неравенству $|c_n| \leq n$.

Теорема 3. Регулярная в круге $|z| < 1$ функция

$$f(z) = \frac{z + az^2}{1 + 2\alpha z + z^2}, \quad -1 \leq \alpha \leq 1, a \in C,$$

однолистной в нем тогда и только тогда, когда

$$a = \frac{1}{\alpha \pm i\lambda \sqrt{1-\alpha^2}}, \text{ где } 1 \leq \lambda \leq +\infty, |\alpha| < 1,$$

и

$$\left| \alpha \pm \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4} \text{ при } \alpha = \pm 1.$$

Доказательство. При $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ и $z_1 \neq z_2$ отношение

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = \frac{1 + a(z_1 + z_2) + (2a\alpha - 1)z_1z_2}{(1 + 2\alpha z_1 + z_1^2)(1 + 2\alpha z_2 + z_2^2)} \neq 0,$$

если

$$a \neq \frac{z_1z_2 - 1}{z_1 + z_2 + 2\alpha z_1z_2}.$$

Заменим z_1 на $-z_1$, z_2 на $-z_2$. Функция

$$w = \psi(z_1, z_2) = \frac{z_1 + z_2 - 2\alpha z_1z_2}{1 - z_1z_2}$$

при фиксированном $z_2 = z_2^0 = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$, отображает круг $|z_1| < 1$ на круг $K_\alpha(z_2^0)$, даваемый неравенством

$$\left| w - \frac{2r \cos \theta - 2\alpha r^2}{1 - r^2} \right| < \frac{|1 - 2\alpha re^{i\theta} \pm r^2 e^{2i\theta}|}{1 - r^2}.$$

Рассмотрим области $B_\alpha(r) = K_\alpha(r) \cup K_\alpha(-r)$, $0 \leq r < 1$. Они содержат $w = 0$ и имеют в качестве ядра (относительно $w = 0$) при $r > 1$ и $|z| < 1$ плоскость с исключенными лучами $w = \alpha \pm i\lambda \sqrt{1-\alpha^2}$, $\lambda \geq 1$, а при $|\alpha| = 1$ — полуплоскость с границей $\operatorname{Re} w = \alpha$.

Таким образом, $f(z)$ может быть при $|\alpha| < 1$ однолистной, только если

$$a = \frac{1}{\alpha \pm i\lambda \sqrt{1-\alpha^2}},$$

а при $|\alpha| = 1$ для однолистности $f(z)$ необходимо, чтобы $|a \pm 1/2| \leq 1/4$.

Функция

$$f(z) = \frac{z + \frac{1}{\alpha \pm i\lambda \sqrt{1-\alpha^2}} z^2}{1 + 2\alpha z + z^2}$$

при $\lambda > 1$ однолистно и конформно отображает круг $|z| < 1$ на плоскость с разрезами по двум, непересекающимся лучам, один из которых соединяет точку

$$\frac{\sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{\lambda^2-1} \pm i}{2 \sqrt{1-\alpha^2} (\alpha \sqrt{\lambda^2-1} \mp \lambda)}$$

с бесконечностью, а другой — точку

$$\frac{\sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{\lambda^2-1} - i}{2 \sqrt{1-\alpha^2} (\alpha \sqrt{\lambda^2-1} \pm \lambda)}$$

с бесконечностью. Оба луча лежат на прямой

$$2 \operatorname{Re} [(\alpha \pm i \lambda \sqrt{1-\alpha^2}) w] - 1 = 0.$$

Функция

$$f(z) = \frac{z + \frac{1}{\alpha \pm i \sqrt{1-\alpha^2}} z^2}{1 - 2\alpha z + z^2}$$

однолистно и конформно отображает $|z| < 1$ на полуплоскость, содержащую $w=0$ и ограниченную прямой

$$2 \operatorname{Re} [(\alpha \pm i \sqrt{1-\alpha^2}) w] - 1 = 0.$$

Среди функций

$$f(z) = \frac{z + az^2}{1 \pm 2z + z^2}, \quad \left| a \pm \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{4},$$

однолистными являются лишь те, для которых $\left| a \pm \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4}$. Они отображают при $|a| < 1$ круг $|z| < 1$ на плоскость с двумя прямолинейными разрезами, а при $|a| = 1$ — на полуплоскость.

ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУНКЦИЙ КЛАССА $\tilde{C}_s$

Л. П. Ильина

Пусть $\eta_l = e^{\frac{2\pi i l}{s}}$, $l = 0, \pm 1, \dots$, $s = 2, 3, \dots$. Через $\tilde{C}_s$ обозначают класс регулярных однолистных в $E = \{z: |z| < 1\}$ функций $\varphi(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$ таких, что для любых точек $z_1, z_2 \in E$ имеем $\varphi(z_1) \neq \eta_l \varphi(z_2)$. Функции $\varphi(z)$, $\eta_l \varphi(z)$, ..., $\eta_{s-1} \varphi(z)$ отображают E на области, попарно не имеющие общих точек.

В статье дается доказательство следующей теоремы автора, сформулированной в [1, с. 209].

Теорема. Пусть $\varphi(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} b_p z^p \in \tilde{C}_s$, $s = 2, 3, \dots$. Тогда при $m = 2, 3, \dots$

$$|b_m| \leq 6,496 \frac{1}{s^2} \frac{1}{s^s} e^{\left(\frac{2}{s^2} - \frac{1}{2}\right)c} \left(m + \frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{s^2} - \frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2sm}}, \quad (1)$$

где c — постоянная Эйлера ($c > 0,577$).

Прежде чем доказывать эту теорему, отметим, что Н. А. Лебедев [2], [3], Н. А. Лебедев и Л. В. Мамай [4] на основе принципа площадей получили ряд неравенств для коэффициентов функций класса $\tilde{C}_s$. Приведем одно из них, используемое в дальнейшем.

Пусть $\varphi(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} b_p z^p \in \tilde{C}_s$, $s = 2, 3, \dots$

Введем следующие обозначения:

$$\Omega_{(0)}^{(s)} = \ln |b_1| + \sum_{l=1}^{s-1} \eta_l^s \ln |1 - \eta_l|; \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\Omega_{p,0}^{(\nu)} &= \omega_{p,0}^{(0)} + \sum_{l=1}^{s-1} \eta_l^\nu \omega_{p,0}^{(l)} = \sum_{l=0}^{s-1} \eta_l^\nu \omega_{p,0}^{(l)}; \\ \Omega_{0,q}^{(\nu)} &= \omega_{0,q}^{(0)} + \sum_{l=1}^{s-1} \eta_l^\nu \omega_{0,q}^{(l)} = \sum_{l=0}^{s-1} \eta_l^\nu \omega_{0,q}^{(l)},\end{aligned}\quad (3)$$

где

$$\sum_{q=1}^{\infty} \omega_{0,q}^{(0)} z^q = \ln \frac{\varphi(z) - 1}{b_1 z}; \quad (4)$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} \omega_{0,q}^{(l)} z^q = \ln \frac{1 - \eta_l \varphi(z)}{1 - \eta_l}; \quad (5)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \omega_{p,0}^{(0)} z^p = \ln \frac{\varphi(z) - 1}{b_1 z}; \quad \sum_{p=1}^{\infty} \omega_{p,0}^{(l)} z^p = \ln \frac{\varphi(z) - \eta_l}{1 - \eta_l}.$$

Пусть $\Omega_{p,q}^{(\nu)}$, $p \neq 0$, $q \neq 0$, определяются разложением

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} \Omega_{p,q}^{(\nu)} z^p z^q = \ln \frac{\varphi(z) - \varphi(z)}{b_1(z-z)} + \sum_{l=1}^{\infty} \eta_l^\nu \frac{\varphi(z) - \eta_l \varphi(z)}{1 - \eta_l}.$$

Возьмем произвольные числа x_p , $p = 0, 1, \dots$, такие, что

$$0 < A = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|x_p|^2}{p} < \infty.$$

Положим

$$R_\nu = -2 \operatorname{Re} \sum_{p=0}^{\infty} \Omega_{p,0}^{(\nu)} x_p \bar{x}_0, \quad \nu = 1, \dots, s-1.$$

Тогда при $\nu = 1, \dots, s-1$ выполняется неравенство

$$\sum_{q=1}^{\infty} q \left| \sum_{p=0}^{\infty} \Omega_{p,q}^{(\nu)} x_p \right|^2 \leq A + R_\nu. \quad (6)$$

Переходим к доказательству теоремы.

Лемма 1. Для функций $\varphi(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} b_p z^p \in \tilde{C}_s$, $s = 2,$

3, ..., справедливо неравенство

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{s-1} \eta_j^\nu \omega_{0,q}^{(j)} \right|^2 \leq -2 \left\{ \ln |b_1| + \sum_{l=1}^{s-1} \cos \frac{2\pi l \nu}{s} \ln |1 - \eta_l| \right\}, \quad (7)$$

где $\omega_{0,0}^{(0)} = \ln |b_1|$, $\omega_{0,0}^{(l)} = \ln |1 - \gamma_l|$, $l = 1, \dots, s-1$, и $\omega_{0,q}^{(l)}$, $q = 1, 2, \dots$, определяются разложениями (4), (5).

Доказательство. Полагая в (6) $x_0 = 1$, $x_1 = x_2 = \dots = 0$, получим

$$\sum_{q=1}^{\infty} q |\Omega_{0,q}^{(v)}|^2 \leq -2 \operatorname{Re} \Omega_{0,0}^{(v)}, \quad v = 1, \dots, s-1.$$

Учитывая (2) и (3), получаем (7). Лемма доказана.

Лемма 2. Для функций $\varphi(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} b_p z^p \in \tilde{C}_s$, $s = 2, 3, \dots$, справедливо неравенство

$$\sum_{q=1}^n q \left(\sum_{l=0}^{s-1} |\omega_{0,q}^{(l)}|^2 \right) \leq \frac{4}{s} \sum_{q=1}^n \frac{1}{q} + \frac{4}{s} \delta + \frac{2}{s} \ln \frac{s}{|b_1|^{s-1}}, \quad (8)$$

где $\delta < 0,312$.

Доказательство. Известно [1, с. 13], что функция $f(z) = \frac{\varphi^s(z) - 1}{b_1 s}$ принадлежит классу S регулярных однолистных в E функций, нормированных условиями $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Так как

$$\ln \frac{f(z)}{z} = \ln \frac{z^s(z) - 1}{b_1 s z} = \sum_{q=1}^{\infty} 2\gamma_q z^q = \sum_{q=1}^{\infty} \left| \sum_{l=0}^{s-1} \omega_{0,q}^{(l)} \right| z^q,$$

то в силу неравенства И. М. Милина [5, с. 70, теорема 3.1] имеем

$$\sum_{q=1}^n q \left| \sum_{l=0}^{s-1} \omega_{0,q}^{(l)} \right|^2 \leq 4 \sum_{q=1}^n \frac{1}{q} + 4\delta, \quad \delta < 0,312, \quad (9)$$

при $n = 1, 2, \dots$.

$$\text{Заменим в (7) } \sum_{q=1}^{\infty} q \left| \sum_{l=0}^{s-1} \gamma_l \omega_{0,q}^{(l)} \right|^2 \text{ на } \sum_{q=1}^n q \left| \sum_{l=0}^{s-1} \gamma_l \omega_{0,q}^{(l)} \right|^2$$

и полученные при этом неравенства почленно просуммируем по v от 1 до $s-1$. Затем результат почленно сложим с неравенством (9). Будем иметь

$$\sum_{v=0}^{s-1} \left(\sum_{q=1}^n q \left| \sum_{l=0}^{s-1} \omega_{0,q}^{(l)} \right|^2 \right) \leq 4 \sum_{q=1}^n \frac{1}{q} + 4\delta - 2 \left\{ (s-1) \ln |b_1| + \operatorname{Re} \times \right.$$

$$\times \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{v=1}^{s-1} \eta_l^v \ln |1 - \eta_l| \}.$$

Отсюда, учитывая, что $\sum_{v=1}^{s-1} \eta_l^v = \frac{\eta_l - \eta_l^s}{1 - \eta_l} = -1$ и $\prod_{l=1}^{s-1} |1 - \eta_l| = s$, получаем неравенство (8). Лемма доказана.

Следствие.

$$\sum_{q=1}^{n-1} q |\omega_{0,q}^{(0)}|^2 + \sum_{l=1}^{s-1} \left(\sum_{q=1}^n q |\omega_{0,q}^{(l)}|^2 \right) \leq \frac{4}{s} \sum_{q=1}^n \frac{1}{q} + \frac{4}{s} \delta + \frac{2}{s} \ln \frac{s}{|b_1|^{s-1}}. \quad (10)$$

Доказательство теоремы. Пусть $\varphi(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \times b_m z^m \in \tilde{C}_s$. Тогда $\frac{\varphi(z) - 1}{b_1} \in S$ и в силу (4)

$$\frac{\varphi(z) - 1}{b_1 z} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{b_1} z^{m-1} = \exp \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{0,q}^{(0)} z^q.$$

Применим к коэффициентам функции $\frac{\varphi(z) - 1}{b_1 z}$ неравенство И. М. Милина [5, с. 51, следствие 1].

Получим

$$\left| \frac{b_m}{b_1} \right| \leq \exp \frac{1}{2} \left(\sum_{q=1}^{m-1} q |\omega_{0,q}^{(0)}|^2 - \sum_{q=1}^{m-1} \frac{1}{q} \right). \quad (11)$$

Аналогично, так как $\frac{1 - \eta_l \varphi(z)}{1 - \eta_l} \in S$, имеем

$$\frac{1 - \eta_l \varphi(z)}{1 - \eta_l} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta_l b_m}{1 - \eta_l} z^m$$

и

$$\left| \frac{\eta_l b_m}{1 - \eta_l} \right| = \left| \frac{b_m}{1 - \eta_l} \right| \leq \exp \frac{1}{2} \left(\sum_{q=1}^m q |\omega_{0,q}^{(l)}|^2 - \sum_{q=1}^m \frac{1}{q} \right),$$

$$l = 1, \dots, s-1.$$

Отсюда и из неравенства (11) получим

$$\frac{|b_m|^s}{|b_1|^s} \prod_{l=1}^{s-1} \frac{1}{|1 - \gamma_l|} \leq \exp \frac{1}{2} \left[\sum_{q=1}^{m-1} q |\omega_{0,q}^{(0)}|^2 + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{s-1} \left(\sum_{q=1}^m q |\omega_{0,q}^{(l)}|^2 \right) - \sum_{q=1}^{m-1} \frac{1}{q} - (s-1) \sum_{q=1}^m \frac{1}{q} \right]. \quad (12)$$

Используя неравенство (10) и неравенство

$$\sum_{q=1}^m \frac{1}{q} > \ln \left(m + \frac{1}{2} \right) + c,$$

где c — постоянная Эйлера, из (12) будем иметь

$$|b_m|^s \leq |b_1|^s \prod_{l=1}^{s-1} |1 - \gamma_l| \exp \frac{1}{2} \left[\left(\frac{4}{s} - s \right) \ln \left(m + \frac{1}{2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{4}{s} - s \right) c + \frac{4}{s} \delta + \frac{1}{m} + \frac{2}{s} \ln \frac{s}{|b_1|^{s-1}} \right].$$

Значит,

$$|b_m| \leq |b_1|^{\frac{1}{s^2} s^{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}}} \left(m + \frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{s} - \frac{1}{2}} \exp \frac{1}{s} \left[\frac{1}{2m} + \frac{2}{s} \delta + \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{s} - \frac{s}{2} \right) c \right].$$

Для окончания доказательства теоремы остается учесть, что $|b_1| \leq \frac{4}{s}$ [1, с. 191].

Теорема доказана.

В 1973 г. Макгрегор [6] получил для коэффициентов функций класса $\mathcal{C}_s$ при $2 \leq s < 4$ оценку

$$|b_n| \leq M(s) n^{1 - \frac{2}{s}}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

точную по порядку.

Этот результат был дополнен в 1974 г. оценкой

$$|b_n| \leq \begin{cases} M(s) \frac{\ln n}{V n}, & s = 4; \\ M(s) \sqrt{\frac{\ln n}{n}}, & s > 4, \end{cases}$$

полученной В. А. Барановой и Н. А. Лебедевым [7]. Вид функции $M(s)$ в этих работах не приводится. Класс $\tilde{C}_s$ является обобщением известного класса однолистных функций С. А. Гельфера [8] — класса $\tilde{C}_2$. Оценка (1) является обобщением оценки $\{b_n\} \leq 2,34 e^{1/4n}$, $n = 2, 3, \dots$, полученной А. З. Гриншпаном [9] для класса $\tilde{C}_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Н. А. Принцип площадей в теории однолистных функций. — М.: Наука, 1975. — 336 с.
2. Лебедев Н. А. Приложение принципа площадей к задачам о неналегающих областях. — Тр./МИАН, 1961, т. 60, с. 211—231.
3. Лебедев Н. А. Дополнение к статье «Приложение принципа площадей к задачам о неналегающих областях». — Вестник ЛГУ, 1967, т. 7, № 2, с. 64—73.
4. Лебедев Н. А., Мамай Л. В. Обобщение одного неравенства Гарабедяна и Шиффера — Вестник ЛГУ, 1970, № 19, с. 41—45.
5. Милин И. М. Однолистные функции и ортонормированные системы. — М.: Наука, 1971. — 128 с.
6. MacGregor T. H. Rotations of the Range of an analytic function. — Math. Ann, B 201, № 2, 1973, p. 113—126.
7. Баранова В. А., Лебедев Н. А. Об одной лемме Г. М. Голузина. — Записки научных семинаров ЛОМИ. Л., 1974, т. 44, с. 7—16.
8. Гельфер С. А. О классе регулярных функций, не принимающих ни одной пары значений ω и $-\omega$. — Мат. сб., 1946, т. 19(61), № 1, с. 33—46.
9. Гриншпан А. З. О коэффициентах однолистных функций, не принимающих ни одной пары значений ω и $-\omega$ — Мат. заметки, 1972, т. 11, № 1, с. 3—14.

ОБ ОЦЕНКАХ СФЕРИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

И. В. Кан

Пусть $\rho(z_1, z_2)$ — сферическая метрика на расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$, определяемая формулами (см., например, [1, с. 12—13; 2, с. 33; 3, с. 24]):

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{V(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}, \quad z_1 \neq \infty, \quad z_2 \neq \infty;$$

$$\rho(z_1, \infty) = \frac{1}{V1 + |z_1|^2}.$$

Пусть $f(z)$ — регулярная или мероморфная в некоторой области $B \subset \bar{C}$ функция, $z_0 \in B$ — фиксированная точка. Предел

$$D[f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\rho(f(z), f(z_0))}{\rho(z, z_0)}$$

называется сферической производной функции $f(z)$ в точке z_0 [3, с. 25]. Если $f(z)$ регулярна в точке $z_0 \neq \infty$, то эта сферическая производная равна

$$D[f(z)] = |f'(z_0)| \frac{1 + |z_0|^2}{1 + |f(z_0)|^2}. \quad (1)$$

Функционал (1) исследовался в различных классах функций. В частности, в классе S всех регулярных однолистных в круге $|z| < 1$ функций $f(z) = z + \dots$ точные оценки величины (1) при $|z_0| < 1$ получены в работе [4].

Мы рассмотрим задачу об оценках функционала (1) при $z_0 \in (0, 1)$ в классе T_R типично вещественных в круге $|z| < 1$ функций [5, с. 516].

Теорема. В классе T_R для сферической производной $D[f(r)]$ имеют место точные оценки:
при $0 < r < 1$

$$D[f(r)] \geq \frac{1-r^4}{r^2 + (1+r)^4}; \quad (2)$$

при $0 < r \leq r_0$

$$D[f(r)] \leq \frac{1-r^4}{r^2 + (1-r)^4}; \quad (3)$$

при $r_0 < r < 1$

$$D[f(r)] \leq \frac{2(1+r^2)^3}{r(1-r^2)(r + \sqrt{r^2 + 4(1+r^2)^2})}, \quad (4)$$

где $r_0 \in (0, 1)$ — единственный корень уравнения

$$r^6 - 4r^5 + 7r^4 - 10r^3 + 7r^2 - 4r + 1 = 0. \quad (5)$$

Знак равенства в (2) доставляет только функция

$$f(z) = \frac{z}{(1+z)^2}, \text{ в (3) — только функция} \quad (6)$$

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \text{ в (4) — только функция} \quad (7)$$

$$f(z) = (1-\lambda) \frac{z}{(1+z)^2} + \lambda \frac{z}{(1-z)^2}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (8)$$

при

$$\lambda = \frac{(1-r)^2[(1+r)^2\sqrt{r^2 + 4(1+r^2)^2} - r(1-r)^2]}{8r^2(1-r^2)}. \quad (9)$$

Доказательство. Пусть r — фиксированное число, $0 < r < 1$. Рассмотрим в классе T_R функций $f(z) = z + \dots$, регулярных и типично вещественных в $|z| < 1$, задачу об оценках величины (1) при $z_0 = z$:

$$D[f(r)] = f'(r) \frac{1+r^2}{1+f^2(r)}. \quad (10)$$

Используя теорему 1 из [6], заключаем, что экстремальные значения функционалу (10) доставляют в классе T_R только функции семейства

$$f(z) = \sum_{\kappa=1}^N \lambda_{\kappa} \frac{z}{1 - 2t_{\kappa}z + z^2}, \quad t_{\kappa} = \frac{2r + (1+r^2)t_{\kappa}}{1 + r^2 + 2rt_{\kappa}},$$

где вещественные параметры λ_{κ} , t_{κ} ($\kappa = 1, \dots, N$) подчинены следующим условиям:

$\lambda_\kappa > 0; \lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1; \tau_1 = \pm 1; -1 \leq \tau_2 < \dots \leq \tau_N \leq 1, N \leq 2.$

Следовательно, возможными экстремальными функциями для $D[f(r)]$ являются только функции

$$f_1(z) = \frac{z}{(1+z)^2}; \quad (11)$$

$$f_2(z) = \frac{z}{(1-z)^2}; \quad (12)$$

$$f_3(z) = \frac{z}{1-2t_2z+z^2}, \quad -1 < t_2 < 1; \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} f_4(z) &= (1-\lambda_2) \frac{z}{(1+z)^2} + \lambda_2 \frac{z}{1-2t_2z+z^2}, \\ t_2 &= \frac{2r + (1+r^2)\tau_2}{1+r^2+2r\tau_2}, \quad 0 < \lambda_2 < 1, \quad -1 < \tau_2 < 1; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} f_5(z) &= (1-\lambda_2) \frac{z}{(1-z)^2} + \lambda_2 \frac{z}{1-2t_2z+z^2}, \\ t_2 &= \frac{2r + (1+r^2)\tau_2}{1+r^2+2r\tau_2}, \quad 0 < \lambda_2 < 1, \quad -1 < \tau_2 < 1; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$f_6(z) = (1-\lambda) \frac{z}{(1+z)^2} + \lambda \frac{z}{(1-z)^2}, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (16)$$

Переходим к нахождению экстремальных значений $D[f_\kappa]$, $\kappa = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, которые доставляют величине (10) функции $f_\kappa(z)$, $\kappa = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Для функции $f_1(z)$ (см. (11)) по (10) находим

$$D[f_1] = \frac{1-r^4}{r^2 + (1+r)^4}. \quad (17)$$

Мы убедимся далее, что это значение является наименьшим для $D[f(r)]$. Тем самым будет доказано неравенство (2) со знаком равенства для функции (6).

Для функции (12) по (10) находим

$$D[f_2] = \frac{1-r^4}{r^2 + (1-r)^4}. \quad (18)$$

Сравнивая выражения (17) и (18), будем иметь $D[f_1] < D[f_2]$, поэтому значение (18) не является наимень-

шим для $D[f(r)]$. Мы увидим, что это значение будет для $D[f(r)]$ наибольшим при $0 < r \leq r_0$, где $r_0 \in (0, 1)$ — единственный корень уравнения (5). Тем самым будет доказано неравенство (3) со знаком равенства для функции (7).

Для функции (16) по (10) находим

$$\frac{D[f_6]}{1-r^4} = \frac{(1-r)^4 + (8r+8r^3)\lambda}{(1-r^2)^4 + r^2[(1-r)^2 + 4r]^2}, \quad (19)$$

где $0 < \lambda < 1$. Естественно, что из (19) при $\lambda=0$ и $\lambda=1$ приходим к значениям (17) и (18) производной $D[f(r)]$. В интервале $0 < \lambda < \infty$ функция (19) принимает максимальное значение при единственном значении $\lambda = \lambda(r)$, определяемом по равенству (9), из которого следует, что функция $\lambda = \lambda(r)$ строго убывает в интервале $0 < r < 1$ от бесконечности до нуля, причем $1 \leq \lambda < \infty$, когда $0 < r \leq r_0$, и $0 < \lambda < 1$, когда $r_0 < r < 1$, где r_0 — корень уравнения (5), $r_0 = 0,412 \dots$, $\lambda(r_0) = 1$. Отсюда легко заключить, что функция (19) при $0 < r < r_0$ принимает максимальное значение, если $\lambda=1$, т. е. в рассматриваемом случае

$$\max D[f_6] = D[f_2], \quad 0 < r \leq r_0,$$

а при $r_0 < r < 1$ максимальное значение этой функции отмечается, если $\lambda = \lambda(r) < 1$ есть величина (9). Подсчитывая при этом λ значение $D[f_6]$ по (19), будем иметь

$$\max D[f_6] = \frac{2(1+r^2)^3}{r(1-r^2)(r + \sqrt{r^2 + 4(1+r^2)^2})}, \quad r_0 < r < 1. \quad (20)$$

Мы убедимся, что это значение является наибольшим для $D[f(r)]$. Тем самым доказано неравенство (4), следующее из оценки $D[f(r)] \leq \max D[f_6]$ (см. (20)), со знаком равенства для функции (8) с λ , определяемым равенством (9).

Мы доказали, что

$$D[f_1] < D[f_2] \text{ при } 0 < r \leq r_0; \quad (21)$$

$$D[f_1] = \min D[f_6] < D[f_2] < \max D[f_6] \quad (22)$$

при $r_0 < r < 1$.

Остается для завершения доказательства теоремы рассмотреть функции $f_\kappa(z)$, $\kappa = 3, 4, 5$.

Для функции $f_3(z)$ имеем (см. (13), (10))

$$D[f_3] = \frac{1-r^4}{r^2 + (1-2t_2r+r^2)^2}, \quad (23)$$

где $-1 < t_2 < 1$. Ясно, что если в (23) взять $t_2 = -1$ и $t_2 = 1$, то получатся соответственно значения (17) и (18) производной $D[f(r)]$. Из (23), (17), (18) непосредственно следует, что при $0 < r < 1$, $-1 < t_2 < 1$

$$D[f_1] < D[f_3] < D[f_2]. \quad (24)$$

Отсюда заключаем, что функция $f_3(z)$ не экстремальна.

Предположим, что функция $f_4(z)$ экстремальна. Пусть $(\delta) = \{0 < \lambda_2 < 1, -1 < \tau_2 < 1\}$ — область изменения параметров в формуле (14). Из (11), (12), (13), (16), (14) видим, что на сторонах $\tau_2 = -1$, $\lambda_2 = 0$ прямоугольника (δ) $f_4(z) = f_1(z)$, на стороне $\lambda_2 = 1$ этого прямоугольника $f_4(z) = f_3(z)$, на стороне $\tau_2 = 1$ $f_4(z) = f_6(z)$, а в точке $\lambda_2 = 1$, $\tau_2 = 1$, $f_4(z) = f_2(z)$. Для функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, $f_6(z)$ мы нашли экстремальные значения величины (10) и установили соотношения (21), (22), (24), т. е. нам известны уже экстремальные значения функции $D[f_4]$ на границе прямоугольника (δ) , так что допущенные неравенства

$$\begin{aligned} \min D[f_4] < D[f_1], \quad \max D[f_4] > D[f_2] \quad \text{при } 0 < r \leq r_0, \\ \min D[f_4] < D[f_1], \quad \max D[f_4] > \max D[f_6] \quad \text{при } r_0 < r < 1 \end{aligned}$$

(или одно из них) могут выполняться лишь во внутренних точках области (δ) . Но в этих точках функция $D[f_4]$ не имеет экстремумов. Это будет означать, что функция $f_4(z)$ не экстремальна.

В самом деле, используя формулы (14), (10), получим

$$\begin{aligned} \frac{D[f_4]}{1-r^4} \{ (1-r^2)^4 + r^2 [1+r^2+r(2\lambda_2+2\lambda_2\tau_2-2)]^2 \} = 1+3r^2+ \\ + r^4 + (2r+2r^3)(2\lambda_2+2\lambda_2\tau_2-2) + r^2(-4\lambda_2+4\lambda_2\tau_2^2+3). \end{aligned}$$

Полагая в этом равенстве

$$\begin{aligned} u = 2(1-\tau_2)-1; \\ v = 2\lambda_2(1+\tau_2), \end{aligned} \quad (25)$$

приведем его к виду

$$\begin{aligned} \frac{D[f_4]}{1-r^4} \{ (1-r^2)^4 + r^2 [(1-r)^2 + rv]^2 \} = -r^2 uv + (2r-r^3 + \\ + 2r^3)v + (1-r^4). \end{aligned} \quad (25)$$

Обозначим через (Δ) открытый треугольник, ограниченный в плоскости (u, v) отрезками $v=0$, $-1 \leq u \leq 3$; $u+v=3$, $-1 \leq u \leq 3$; $u=-1$, $0 \leq v \leq 4$. Нетрудно проверить, что при

помощи формул (25) прямоугольник (δ) взаимно однозначно отображается на треугольник (Δ) , так что внутренним точкам области (δ) соответствуют внутренние точки области (Δ) . Если теперь $\mu(\lambda_2, \tau_2)$ — внутренняя точка области (δ) , в которой функция $D[f_4]$ имеет экстремум, то в этой точке

$$\frac{\partial D[f_4]}{\partial \lambda_2} = 0; \quad \frac{\partial D[f_4]}{\partial \tau_2} = 0. \quad (27)$$

Пусть точке $\mu(\lambda_2, \tau_2)$ по формулам (25) соответствует точка $M(u, v) \in (\Delta)$. После перехода к переменным (u, v) по (25) равенства (27) примут вид

$$\frac{\partial D[f_4]}{\partial v} 2(1 - \tau_2) = 0; \quad -2 \frac{\partial D[f_4]}{\partial u} + \frac{\partial D[f_4]}{\partial v} 2\lambda_2 = 0.$$

Так как $\mu(\lambda_2, \tau_2)$ — внутренняя точка области (δ) , то отсюда имеем $\partial D[f_4]/\partial u = 0$ во внутренней точке $M(u, v)$ области (Δ) . В силу этого по (26) находим

$$\frac{-(1-r^4)r^2v}{(1-r^2)^4 + r^2[(1-r)^2 + rv]^2} = 0.$$

Отсюда $v=0$, что невозможно, так как точка $M(u, v)$ лежит в треугольнике (Δ) и, следовательно, $0 < v < 4$. Полученное противоречие означает, что функция $f_4(z)$ не экстремальна.

Рассмотрим функцию $f_5(z)$ (см. (15)). Допустим, что она экстремальна. Обозначим через (ϵ) область изменения параметров в формуле (15):

$$(\epsilon) = \{-1 < \tau_2 < 1, 0 < \lambda_2 < 1\}.$$

Из (11), (12), (13), (16), (15) видим, что на сторонах $\tau_2=1$ и $\lambda_2=0$ прямоугольника (ϵ) $f_5(z)=f_2(z)$, на стороне $\tau_2=-1$ этого прямоугольника $f_5(z)=f_6(z)$ (при $\lambda_2=1-\lambda$), на стороне $\lambda_2=1$ $f_5(z)=f_3(z)$, а в точке $\tau_2=-1$ $\lambda_2=1$ $f_5(z)=f_1(z)$. Для функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, $f_6(z)$ мы нашли экстремальные значения величины (10) и установили соотношения (21), (22), (24), т. е. нам известны уже экстремальные значения функции $D[f_5]$ на границе прямоугольника (ϵ) , так что допущенные неравенства

$$\min D[f_5] < D[f_1], \max D[f_5] > D[f_2] \quad \text{при } 0 < r \leq r_0,$$

$$\min D[f_5] < D[f_1], \max D[f_5] > \max D[f_6] \quad \text{при } r_0 < r < 1$$

(или одно из них) могут выполняться лишь во внутренних

точках области (е). Но в таких точках области (е) функция $D[f_5]$ не имеет экстремумов. Это будет означать, что функция $f_5(z)$ не экстремальна.

Действительно, используя формулы (15), (10), находим

$$\frac{D[f_5]}{1-r^4} \{ (1-r^2)^4 + r^2 [1 + r^2 + r(-2\lambda_2 + 2\lambda_2\tau_2 + 2)]^2 \} = \\ = 1 + 3r^2 + r^4 + (2r + 2r^3)(-2\lambda_2 + 2\lambda_2\tau_2 + 2) + r^2(-4\lambda_2 + \\ + 4\lambda_2\tau_2^2 + 3).$$

Полагая в этом равенстве

$$\begin{aligned} u &= 2(1 + \tau_2) - 1; \\ v &= 2\lambda_2(1 - \tau_2), \end{aligned} \quad (28)$$

приведем его к виду

$$\frac{D[f_5]}{1-r^4} \{ (1-r^2)^4 + r^2 [(1+r)^2 - rv]^2 \} = -r^2 uv - (2r + r^2 + \\ + 2r^3)v + (1+r)^4. \quad (29)$$

Обозначим через (Δ) открытый треугольник, ограниченный в плоскости (u, v) отрезками: $v=0, -1 \leq u \leq 3; u+v=3, -1 \leq u \leq 3; u=-1, 0 \leq v \leq 4$. Легко видеть, что при помощи формул (29) прямоугольник (е) взаимно однозначно отображается на треугольник (Δ) , так что внутренним точкам области (е) соответствуют внутренние точки области (Δ) . Если теперь $v(\tau_2, \lambda_2)$ — внутренняя точка области (е), в которой функция $D[f_5]$ имеет экстремум, то в этой точке

$$\frac{\partial D[f_5]}{\partial \tau_2} = 0; \quad \frac{\partial D[f_5]}{\partial \lambda_2} = 0. \quad (30)$$

Пусть точке $v(\tau_2, \lambda_2)$ по формулам (28) соответствует точка $M(u, v) \in (\Delta)$. После перехода к переменным (u, v) по (28) равенства (30) примут вид

$$2 \frac{\partial D[f_5]}{\partial u} - \frac{\partial D[f_5]}{\partial v} 2\lambda_2 = 0; \quad \frac{\partial D[f_5]}{\partial v} 2(1 - \tau_2) = 0.$$

Так как $v(\tau_2, \lambda_2)$ — внутренняя точка области (е), то отсюда будем иметь $\partial D[f_5]/\partial u = 0$ во внутренней точке $M(u, v)$ области (Δ) .

В силу этого по (29) находим

$$\frac{-(1-r^4)r^2v}{(1-r^2)^4 + r^2[(1+r)^2 - rv]^2} = 0.$$

Отсюда $v=0$, что невозможно, так как точка $M(u, v)$ лежит в треугольнике (Δ) и, следовательно, $0 < v < 4$. Полученное противоречие означает, что функция $f_5(z)$ не экстремальна. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Евграфов М. А., Бежанов К. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Сборник задач по теории аналитических функций. — М.: Наука, 1972. — 416 с.
- 2 Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1972. — 264 с.
- 3 Валирон Ж. Аналитические функции. — М.: Гостехиздат, 1957. — 236 с.
- 4 Oikawa Kotaro. A distortion theorem on schlicht functions. — Kodai Math. Semin. Repts, 1957, 9, № 3, p. 140—144.
5. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М. Наука, 1966. — 628 с.
6. Черников В. В. О некоторых экстремальных свойствах типично вещественных функций. — Сиб. матем. журн., 1980, т. 21, № 6, с. 208—209

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ δ -КВАЗИИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. П. Кармазин

1. Введение

Введем следующие обозначения: R^n — евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с метрикой $d(x, y)$; для множества $A \subset D$ $d(A)$ — евклидов диаметр A , $\bar{A}$ — замыкание A в R^n , ∂A — евклидова граница множества A ; $B^n(x, r) = \{y \in R^n, d(x, y) < r\}$ — шар в R^n с центром в точке $x \in R^n$ радиуса $r > 0$, $S^{n-1}(x, r) = \partial B^n(x, r)$.

В области $D \subset R^n$ введем в рассмотрение следующие две относительные метрики: $\rho_D(x, y)$, равную точной нижней грани длин кривых, соединяющих точки $x, y \in D$ по области D (см. [1]) и $\delta_D(x, y)$, равную точной нижней грани евклидовых диаметров связных множеств из D , содержащих точки $x, y \in D$ (относительное расстояние Мазуркевича [2, т. 2, с. 225]).

Через $\delta_D(A)$ будем обозначать диаметр множества $A \subset D$ в метрике δ_D ; $\delta_D(A) = d(A)$, если множество $A \subset D$ связно. Для точек $x, y \in D$ всегда $d(x, y) \leq \delta_D(x, y) \leq \rho_D(x, y)$.

Гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ областей $D, D' \subset R^n$ назовем δ -квазиизометрией, если метрика δ_D квазиинвариантна при отображении $f: \exists K \in [1, \infty]$ такое, что для любых точек $x, y \in D$

$$\frac{1}{K} \delta_D(x, y) \leq \delta_{D'}(f(x), f(y)) \leq K \delta_D(x, y).$$

Гомеоморфизм f назовем ρ -квазиизометрией, если при отображении f квазиинвариантна метрика ρ_D .

В работе [1] показано, что класс ρ -квазиизометрий на области D совпадает с классом локально билипшицевых отображений на D . Легко видеть, что δ -квазиизометрия локально билипшицева и, следовательно, является ρ -квазиизометрией.

Граничное поведение ρ -квазиизометрий подробно изучалось в работах [3]—[6]. Некоторые вопросы граничного

поведения δ -квазиизометрий рассматривались в работах Т. Г. Латфуллина [7, 8]. Конечно, все результаты о граничном поведении ρ -квазиизометрий справедливы и для δ -квазиизометрий. Однако метрика δ_D не квазиинвариантна при ρ -квазиизометриях, и, кроме того, геометрия области, описываемая с помощью метрики δ_D , отличается от геометрии области, описываемой метрикой ρ_D . Отсюда возникает необходимость в специальном изучении граничного поведения δ -квазиизометрий.

Основная методика исследования основана на нахождении понятий и величин, сохраняющихся или квазиинвариантных при δ -квазиизометриях и описывающих некоторым образом геометрию области. Это, например, метрики δ_D и ρ_D , такие понятия, как связность, достижимость граничной точки области, простой конец и т. д.

Основной результат работы — построение теории простых концов пространственных областей при помощи свойств, сохраняющихся при δ -квазиизометриях. Введенные нами простые концы пространственной области совпадают с простыми концами, которые рассматривал ранее И. С. Овчинников в работах [9, 10]. Попутно мы изучаем вопросы о геометрии областей, гомеоморфных шару.

Все области и соответственно отображения этих областей, рассматриваемые в работе, предполагаются ограниченными.

2. Пополнение области по метрике δ_D , продолжение δ -квазиизометрий на евклидовы замыкания областей

Пусть $D \subset R^n$ есть область. Путем в D называется непрерывное отображение $L: \Delta \rightarrow D$, где Δ есть интервал из R^1 ; у нас обычно будет $\Delta = [0, 1)$. Путь $L: \Delta \rightarrow D$ жорданов, если отображение L гомеоморфно. Обычным образом [11] определяется длина пути; обозначаем ее через $l(L)$. Если $l(L) < \infty$, путь L называется спрямляемым.

Обозначим через $\bar{D}$ пополнение области D по метрике δ_D . Пусть $f: D \rightarrow D'$ — δ -квазиизометрия. Отображение f билиппшицево относительно метрик $\delta_D, \delta_{D'}$. Из анализа известно, что тогда f всегда продолжается до гомеоморфизма $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$. Отсюда возникает вопрос о строении множества $\bar{D}$.

2.1. Л е м м а. Последовательность точек $\{x_m\} \subset D$ фундаментальна по метрике δ_D тогда и только тогда, когда она

лежит на некотором пути $L: [0, 1] \rightarrow D$, оканчивающемся в точке из $\bar{D}$.

Доказательство. Пусть $\{x_m\}$ фундаментальна по δ_D и b есть элемент D , представителем которого является последовательность $\{x_m\}$. Последовательность $\{x_m\}$ фундаментальна по метрике d и, следовательно, сходится к некоторой точке $b \in \bar{D}$.

Имеем: $\varepsilon_m = \delta_D(x_m, x_{m+1}) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ в силу условия Коши. Тогда найдется ломаная $K_m(x_m, x_{m+1}) \subset D$ такая, что $\delta_D(K_m) = d(K_m) < 2\varepsilon_m$. Кривая $K = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \subset D$ содержит $\{x_m\}$ и оканчивается в точке b . Действительно, $d(K_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и $K_m \rightarrow b$ при $m \rightarrow \infty$. Пусть $L_m(t): \left[\frac{1}{2^{m-1}}, \frac{1}{2^m}\right] \rightarrow K_m$ есть гомеоморфизм такой, что $L_m \times \left(\frac{1}{2^{m-1}}, \frac{1}{2^m}\right) = x_m$, $L_m\left(\frac{1}{2^m}\right) = x_{m+1}$ и $L_m(t) \in K_m(x_m, x_{m+1})$, $t \in \left(\frac{1}{2^{m-1}}, \frac{1}{2^m}\right)$. Такой гомеоморфизм, кусочно-линейный, легко построить. (Заметим, что ломаную $K_m(x_m, x_{m+1})$ всегда можно выбрать без точек самопересечения). Тогда

$$L(t): [0, 1] \rightarrow K, L(t) \Big| \left[\frac{1}{2^{m-1}}, \frac{1}{2^m}\right] = L_m(t)$$

есть требуемый непрерывный путь, содержащий $\{x_m\}$, лежащий в D и оканчивающийся в точке $b \in \bar{D}$.

Обратное утверждение леммы легко доказывается непосредственно.

Следствием леммы 2.1 является следующее утверждение.

2.2. Теорема (см. также [7]). Пополнение $\bar{D}$ области D по метрике δ_D присоединяет к D все точки ∂D , достижимые некоторым путем из D .

Заметим, что «носителем» элемента из $\bar{D} \setminus D$ всегда является точка на ∂D . При этом одна и та же точка ∂D может быть «носителем» нескольких, и даже континуума элементов из $\bar{D}$.

2.3. Определение. Пусть D есть область в R^n , $n \geq 2$ и точка $b \in \partial D$. Говорим, что область D в точке b :

1) локально связна, если точка b имеет произвольно малые окрестности U такие, что $U \cap D$ связно;

2) конечно связна, если точка b имеет произвольно малые окрестности U , для которых $U \cap D$ состоит из конечного числа компонент;

3) достижима, если существует путь L в D , оканчивающийся в точке b ;

4) сильно достижима, если для любой последовательности точек $\{x_m\} \subset D$, $x_m \rightarrow b$ при $m \rightarrow \infty$, $\exists$ путь $L: [0, 1) \rightarrow D$, оканчивающийся в точке b и содержащий подпоследовательность из $\{x_m\}$;

5) R -достижима, если для любой последовательности точек $\{x_m\} \subset D$, сходящейся к b , $\exists$ спрямляемый путь $L: [0, 1) \rightarrow D$, содержащий подпоследовательность из $\{x_m\}$ и оканчивающийся в точке b ;

6) δ -гладка, если $\delta_D(E, F) = 0$, $\forall$ связные множества $E, F \subset D$ такие, что $b \in \bar{E} \cap \bar{F}$;

7) δ -связна, если существуют произвольно малые окрестности U точки b и число $\lambda \in [1, \infty)$ такие, что $U \cap D$ связно и для любых точек $x, y \in U \cap D$;

$$\delta_D(x, y) \leq \lambda d(x, y);$$

8) D обладает одним из перечисленных выше свойств на границе, если это свойство выполнено для каждой точки ∂D .

Свойства 1 и 2 рассмотрены в работах [11—13], свойства 4 — в [13 и 14]. Известно, что свойства 1, 2, 3, 4 являются топологическими инвариантами [11, 17.8]. Нетрудно показать, что свойства 5, 6 инвариантны при δ -квазиизометриях замкнутых областей.

2.4. Предложение. Область D конечно связна на границе тогда и только тогда, когда она сильно достижима на границе.

Доказательство. 1) В силу [14, 3.10] условие конечной связности D в точке b влечет сильную достижимость D в точке b .

2) Предположим, что область D сильно достижима в точке $b \in \partial D$. Пусть U есть окрестность точки b , $\{x_m\} \subset D$ и $x_m \rightarrow b$ при $m \rightarrow \infty$. По условию существует путь $L: [0, 1) \rightarrow D$, содержащий подпоследовательность из $\{x_m\}$ и оканчивающийся в точке b . Тогда найдется $t_0 \in [0, 1)$ такое, что $L[t_0, 1) \subset U$. Обозначим через E_0 компоненту $U \cap D$, содержащую связное множество $L[t_0, 1)$. Множество E_0 содержит подпоследовательность из $\{x_m\}$, лежащую на $L[t_0, 1)$, и мы находимся в условиях теоремы 17.7(3) из [11]. Следовательно, область D конечно связна в точке b .

2.5. Теорема. $\bar{D} = \bar{D}$ тогда и только тогда, когда область D локально связна на границе.

Доказательство. 1) Предположим, что D локально связна на границе. Покажем, что последовательности Коши в евклидовой метрике и в метрике δ_D совпадают в D . Отсюда и будет следовать утверждение теоремы.

Пусть последовательность точек $\{x_m\} \subset D$ фундаментальна по метрике d . Тогда $\{x_m\}$ сходится к некоторой точке $b \in \bar{D}$ при $m \rightarrow \infty$. Если точка $b \in D$, то $d(x_m, b) = \delta_D(x_m, b)$ при всех достаточно больших m и $\{x_m\}$ фундаментальна по d и по δ_D одновременно.

Предположим, что $b \in \partial D$. По условию найдется последовательность окрестностей $\{U_\kappa\}$ точки b такая, что $U_\kappa \subset U_{\kappa+1}$, $\kappa = 1, 2, \dots$, $U_\kappa \cap D$ связно и $d(U_\kappa) = \varepsilon_\kappa \rightarrow 0$, $\kappa \rightarrow \infty$. При этом для каждого $\kappa \exists m(\kappa)$ такое, что все $x_m \in U_\kappa \cap D$, если $m \geq m(\kappa)$. Отсюда для точек $x_i, x_j \in U_\kappa$, $i, j \geq m(\kappa)$ будем иметь, что $\delta_D(x_i, x_j) \leq 2\varepsilon_\kappa$, отсюда последовательность $\{x_m\}$ фундаментальна по метрике δ_D .

2) Пусть $\bar{D} = \bar{D}$. Покажем, что область D локально связна на границе. Выберем точку $b \in \partial D$. Точка b индуцирует граничный элемент $\bar{b} \in \bar{D}$, и любая последовательность точек $\{x_m\} \subset D$, $x_m \rightarrow b$ при $m \rightarrow \infty$, фундаментальна в метрике δ_D и является представителем $\bar{b}$. В силу 2.1 найдется путь L в D , содержащий $\{x_m\}$ и оканчивающийся в точке b . Следовательно, область D сильно достижима в точке b , а поэтому и конечно связна в этой точке (см. 2.4).

Выберем связные множества $F_1, F_2 \subset D$ такие, что $b \in F_1 \cap F_2$, и пусть $\{x_m\} \subset F_1$, $\{y_m\} \subset F_2$ и $x_m, y_m \rightarrow b$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда $\{x_m\}, \{y_m\} \in \bar{b}$ и, следовательно, $\delta_D(x_m, y_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Отсюда $\delta_D(F_1, F_2) = 0$ и область D δ -гладка в точке b . Утверждение теоремы тогда следует из следующего результата.

2.6. Предложение. Предположим, что область D δ -гладка и конечно связна в точке $b \in \partial D$. Тогда она локально связна в точке b .

Доказательство. Допустим, что D не является локально связной в точке b . Так как D конечно связна в точке b , то в силу 1.11 (3) из [12] существует окрестность

U точки b такая, что $U \cap D = \bigcup_{m=1}^{\kappa} F_m$, $\kappa \geq 2$, $b \in \partial E_m$ и E_m

локально связно в точке b , $m = 1, \dots, \kappa$. Пусть $d = d(b$,

∂U). Выберем компоненты E_1, E_2 из совокупности множеств $\{E_m, m=1, \dots, \kappa\}$. Существуют связные множества $F_1 \subset E_1 \cap B^n\left(b, \frac{d}{2}\right), F_2 \subset E_2 \cap B^n\left(b, \frac{d}{2}\right)$ такие, что $b \in \bar{F}_1 \cap \bar{F}_2$ (за F_i можно взять одну из компонент $E_i \cap B^n\left(b, \frac{d}{2}\right), i=1, 2$, содержащую в своем замыкании точку b). Тогда

$$\delta_D(F_1, F_2) \geq 2d\left(B^n\left(b, \frac{d}{2}\right), \partial U\right) = d > 0,$$

вопреки тому, что область D δ -гладка в точке b . Утверждение 2.6, а с ним и часть 2 теоремы 2.5 доказаны.

2.7. Замечание. Можно показать, что условие локальной связности области D в точке $b \in \partial D$ эквивалентно каждому из следующих условий:

а) $\forall \{x_m\}, \{y_m\} \subset D, x_m, y_m \rightarrow b$ при $m \rightarrow \infty, \delta_D(x_m, y_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$;

б) $\forall \{x_m\}, \{y_m\} \subset D, x_m, y_m \rightarrow b$ при $m \rightarrow \infty, \exists$ путь L в D , содержащий подпоследовательности из $\{x_m\}, \{y_m\}$ и оканчивающийся в точке b .

2.8. Теорема. D компактно тогда и только тогда, когда область D конечно связна на границе.

Доказательство. 1) Предположим, что $\tilde{D}$ компактно. Пусть точка $b \in \partial D, \{x_m\} \subset D$ и $x_m \rightarrow b$ при $m \rightarrow \infty$. В силу компактности, $\{x_m\}$ имеет подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$, фундаментальную по δ_D . Тогда (см. 2.1) $\{x_{m_k}\}$ лежит на некотором пути L в D , оканчивающемся в точке b . Следовательно, область D сильно достижима в точке b и является конечно связной в этой точке в силу 2.4.

2) Пусть D конечно связна на границе. В силу 2.4 D сильно достижима на границе. Предположим, что последовательность $\{\tilde{x}_m\} \subset \tilde{D}$ составлена из точек $D, \tilde{x}_m = x_m, m=1, 2, \dots$. Тогда либо существует подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$ из $\{x_m\}$, сходящаяся к точке из D (в этом случае все доказано), либо существует точка $b \in \partial D$, предельная для $\{x_m\}, x_{m_k} \rightarrow b$ при $k \rightarrow \infty$. По условию существует путь L в D , содержащий подпоследовательность $\{x_{m_{k_s}}\}$ из $\{x_{m_k}\}$ и оканчивающийся в точке b . Следовательно, $\{x_{m_{k_s}}\}$ фундаментальна по метрике δ_D и является представителем неко-

торого элемента $\tilde{b} \in \tilde{D}$. Ясно, что $\{\tilde{x}_{m_k}\} \rightarrow \tilde{b}$ при $s \rightarrow \infty$ в пространстве $\tilde{D}$, и утверждение теоремы в этом случае доказано.

Обозначим $\Gamma = \tilde{D} \setminus D$, и пусть $\{\tilde{x}_m\} \subset \Gamma$, b_m — точки ∂D , индуцированные элементами $\tilde{x}_m$ (если $\{x_m^s\}$ — представитель $\tilde{x}_m$, то $x_m^s \rightarrow b_m$ при $s \rightarrow \infty$). Можно предполагать, не ограничивая общности, что $b_m \rightarrow b \in \partial D$ при $m \rightarrow \infty$ (множество ∂D у нас ограничено). Пусть $\{x_m^s\}$ — представитель $\tilde{x}_m$. Выберем по точке $y_m \in \{x_m^s\}$, $m = 1, 2, \dots$, такой, что

$$\delta_{\tilde{D}}(y_m, \tilde{x}_m) = \lim_{s \rightarrow \infty} \delta_D(y_m, x_m^s) \leq \frac{1}{m}.$$

Отсюда, $y_m \rightarrow b$ при $m \rightarrow \infty$. По условию найдется путь L в D , содержащий подпоследовательность $\{y_{m_k}\} \subset \{y_m\}$ и оканчивающийся в точке b . В силу 2.1 $\{y_{m_k}\}$ фундаментальна по δ_D и образует некоторый элемент $\tilde{b} \in \Gamma$. При этом $\delta_{\tilde{D}}(\tilde{b}, \tilde{x}_{m_k}) \leq \delta_{\tilde{D}}(\tilde{b}, y_{m_k}) + \delta_{\tilde{D}}(y_{m_k}, \tilde{x}_{m_k}) \leq \varepsilon_k + \frac{1}{m_k} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Следовательно, $\tilde{D}$ компактно и теорема доказана.

2.9. Предложение. Область D , локально связная в точке $b \in \partial D$, δ -гладка в этой точке. В частности, жорданова область всегда δ -гладка на границе.

Доказательство. Предположим, что множества E , $F \subset D$ связны и точка $b \in E \cap \bar{F}$. В силу 17.6 из [11] $\forall$ шар $B^n(b, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, $\exists$ окрестность U_m точки b такая, что $U_m \subset B^n(b, \varepsilon_m)$, и любую пару точек из $U_m \cap D$ можно соединить связным множеством из $B^n(b, \varepsilon_m) \cap D$. Очевидно, что $F_m = F \cap U_m$, $E_m = E \cap U_m$ непусты при любом $m = 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$\delta_D(F_m, E_m) \leq d(B^n(b, \varepsilon_m)) = 2\varepsilon_m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty,$$

и $\delta_D(E, F) = 0$. Предложение доказано.

Очевидно, при δ -квазиизометрии $f: D \rightarrow D'$ последовательность точек $\{x_m\} \subset D$, фундаментальная по метрике δ_D , переходит в последовательность точек $\{x'_m = f(x_m)\} \subset D'$,

фундаментальную по метрике $\delta_{D'}$. Этот факт мы запишем в следующем виде.

2.10. Лемма. При δ -квазиизометрии $f: D \rightarrow D'$ непрерывный (жорданов) путь $L: [0, 1] \rightarrow D$, оканчивающийся в граничной точке области D , переходит в такой же путь $L' = f \circ L: [0, 1] \rightarrow D'$, оканчивающийся в точке $\partial D'$.

Применяя лемму 2.10, легко доказать следующий результат.

2.11. Теорема. Класс областей, сильно достижимых на границе, замкнут относительно δ -квазиизометрий. Это же утверждение справедливо для областей, конечно связанных на границе (см. 2.4).

Пусть $f: D \rightarrow D'$ — отображение и точка $b \in \partial D$. Предельным множеством $C(f, b)$ отображения f в точке b называется множество всех точек $b' \in \bar{D}'$ таких, что $\exists$ последовательность точек $\{x_m\} \subset D$ такая, что $x_m \rightarrow b$ и $f(x_m) \rightarrow b'$ при $m \rightarrow \infty$. Говорят, что f имеет предел в точке b , если $C(f, b) = \{b'\}$ состоит из единственной точки. Если $A \subset \partial D$, то

$$C(f, A) = \bigcup_{b \in A} C(f, b).$$

2.12. Предложение. Пусть область D локально связна в точке $b \in \partial D$. Тогда δ -квазиизометрия $f: D \rightarrow D'$ имеет предел в точке b .

Утверждение легко устанавливается от противного.

Следствием 2.12 является следующий результат.

2.13. Теорема. Пусть область D локально связна на границе и $f: D \rightarrow D'$ есть δ -квазиизометрия. Для того, чтобы f можно было продолжить до гомеоморфизма $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$, необходимо и достаточно, чтобы область D' также была локально связной на границе. В частности, если области D, D' жордановы, f всегда продолжается до гомеоморфизма $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$.

Для случая q -квазиизометрий последнее утверждение из 2.13 неверно (см. [4]).

Отображение $f: A \rightarrow B$ замкнутых множеств A, B из R^n назовем липшицевым в A , если $\forall$ точка $x \in A$, $\exists$ окрестность U точки x и число $K \in [1, \infty)$ такие, что для любых точек $u, v \in U \cap A$

$$d(f(u), f(v)) \leq Kd(u, v).$$

2.14. Теорема. Пусть D δ -связна на границе и $f: D \rightarrow D'$ есть δ -квазиизометрия. Отображение f продолжится

до билиншицева (липшицева в обе стороны) гомеоморфизма $f: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$ тогда и только тогда, когда область D' также δ -связна на границе.

Схема доказательства точно такая же, как и в теореме 3 работы [3].

В случае, когда одна из областей есть шар либо конечно связна в граничной точке, результаты о граничном поведении δ -квазиизометрий и ϱ -квазиизометрий совпадают (см. теоремы 1, 2, 3, 5 из [4]).

3. Простые концы: определения, предварительные результаты

Дадим определение простого конца пространственной области, следуя в основном работе И. С. Овчинникова [9] и используя некоторые положения работы Р. Някки [15].

3.1. Сечения, цепи, простые концы. Сечением q области D назовем всякое связное замкнутое относительно D подмножество D такое, что $D \setminus q$ состоит из двух компонент, причем если $\bar{q} \cap \partial D \neq \emptyset$, то граница каждой компоненты $D \setminus q$ пересекается с ∂D . Последовательность $\{q_m\}$ сечений D назовем цепью, если для $\forall m$ q_m отделяет q_{m-1} и q_{m+1} в D , $\delta_D(q_m, q_{m+1}) > 0$ и $(\bar{q}_m \setminus q_m) \cap \partial D$ либо не пуст, либо пуст сразу для всех m . Пусть d_m есть компонента $D \setminus q_m$, содержащая q_{m+1} . Последовательность $d_1 \supset \supset \dots \supset d_m \supset \dots$ подобластей из D называется цепью подобластей из D , соответствующей цепи $\{q_m\}$. Множество $I(q_m) \equiv \equiv I(d_m) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bar{d}_m$ образует носитель цепи $\{q_m\}$. Носитель есть всегда точка либо континуум.

Цепь $\{q_m\}$ входит в подобласть $H \subset D$, если $\exists m_0$ такое, что при всех $m \geq m_0$ $d_m \subset H$. Цепь $\{q_m\}$ входит в цепь $\{p_k\}$, если $\{q_m\}$ входит в каждую подобласть g_k , соответствующую p_k . Две цепи эквивалентны, если каждая входит в другую. Всякий класс эквивалентных цепей назовем концом области D .

Конец P входит в подобласть $H \subset D$, если найдётся цепь из P , входящая в H . Конец P_1 делит конец P_2 , если P_1 входит в каждую подобласть некоторой цепи подобластей из P_2 . Конец P области D , не имеющий отличных от себя делителей, назовём простым концом области D . Цепь, принадлежащую простому концу, назовем простой цепью в D . По-

ситель $I(P)$ простого конца P , есть общий носитель любой цепи $\{q_m\} \in P$.

Понятие простого конца дано так, что внутренние точки области можно отождествить с простыми концами. Ниже простой конец всюду предполагается отличным от внутренней точки области D , и его носитель лежит на ∂D .

Данное выше определение дословно совпадает с определением простого конца из [6], с заменой здесь метрики q_D на метрику δ_D . Соответственно мы будем говорить о простых q -концах и δ -концах. Простые δ -концы отличаются от простых q -концов из [6]. Существует пример жордановой области $D \subset R^3$, имеющей «пик», «острие» $b \in \partial D$ которого является носителем единственного простого δ -конца и одновременно континуума простых q -концов области D .

3.2. Сходимость к простому концу, главные точки, главные пути. Говорим, что последовательность точек $\{x_m\} \subset D$ сходится к простому концу P области D , если $\forall$ цепь $\{q_\kappa\} \in P$ и номер κ , $\exists N(\kappa)$ такое, что $x_m \in d_\kappa$ при всех $m \geq N(\kappa)$. Пусть точка $b \in I(P)$. Будем писать

$x_m \xrightarrow{P} b$, если $\{x_m\}$ сходится к b и P одновременно. Точку b назовем главной точкой P , если существует цепь $\{q_\kappa\} \in P$, $d(q_\kappa) \rightarrow 0$ при $\kappa \rightarrow \infty$, сходящаяся к точке b . Множество главных точек P обозначим через $\Pi(P)$. Точки из $I(P) \setminus \Pi(P)$ называем дополнительными (или смежными) точками P .

Пусть $L: [0,1) \rightarrow D$ сходится к P , если $\forall$ цепь $\{q_\kappa\} \in P$ и номер κ , $\exists t_\kappa \in [0,1)$ такое, что $L(t) \in d_\kappa$ при всех $t \geq t_\kappa$. Тогда предельное множество $C(L, 1) \subset I(P)$. Если $C(L, 1) = \Pi(P)$, то пусть L называется главным путем P ; при этом $\Pi(P)$ связно. Простой конец P назовем достижимым (R -достижимым), если существует непрерывный (спрямляемый) путь L в D , сходящийся к P и оканчивающийся в точке $b \in I(P)$; точка b соответственно называется достижимой (R -достижимой) относительно P .

В отличие от плоского случая (см. [16, гл. 9]) простой конец пространственной области может не иметь главных точек или иметь главные точки, но не иметь главных путей.

Многие результаты о простых q -концах из [6] справедливы и для простых δ -концов, схемы доказательств этих результатов почти полностью переносятся на случай простых δ -концов, нужны только необходимые изменения. Мы всюду в этих случаях будем делать ссылку на соответствующий результат из [6].

Дадим один достаточный признак того, что цепь является простой. Цепь $\{q_\kappa\}$ области D назовем регулярной, если $\delta_D(q_\kappa) \rightarrow 0$ при $\kappa \rightarrow \infty$.

3.3. Лемма. Любая регулярная цепь области D является простой цепью в D .

См. лемму 2.6 из [6], ср. также с леммой 1 из [9].

Введем в рассмотрение некоторые типы простых концов, используя понятия, сохраняющиеся при δ -квазиизометриях.

3.4. Определение. Пусть P есть простой конец области D и $\Pi(P) \neq \emptyset$. Точку $b \in \Pi(P)$ назовем регулярной

точкой P , если $\bigvee \{x_m\} \subset D$, $x_m \xrightarrow{P} b$, $\exists$ регулярная цепь $\{q_m\} \in P$ такая, что $x_m \in q_m$, $m=1, 2, \dots$. Простой конец P назовем:

- 1) регулярным, если все его главные точки регулярны;
- 2) нормальным, если существует хотя бы одна регулярная цепь, принадлежащая P .

3.5. Теорема. Нормальный простой конец P области D , носитель которого содержит хотя бы одну точку, достижимую относительно P , имеет только одну главную точку. Более того, носитель нормального простого конца P области D обладает не более одной точкой, достижимой относительно P , и если такая точка существует, то она является единственной главной точкой P .

См.: теорему 3.2. из [6]. Теорема 3.5 является аналогом теоремы 9.7 из [16].

3.6. Теорема. Предположим, что P есть нормальный простой конец области D . Носитель P состоит из единственной точки тогда и только тогда, когда для любой регулярной цепи $\{q_\kappa\} \in P$ $\delta_D(d_\kappa) \rightarrow 0$ при $\kappa \rightarrow \infty$, где $\{d_\kappa\}$ — цепь подобластей из D , соответствующая $\{q_\kappa\}$. Кроме того, нормальный простой конец P области D , носитель которого состоит из единственной точки, всегда достижим из D и регулярен.

Доказательство. 1) Предположим, что $I(P) = \{b\}$ состоит из единственной точки. Пусть цепь $\{q_\kappa\} \in P$ регулярна, $\{d_\kappa\}$ — соответствующая ей цепь подобластей из D .

По условию $I(P) = \bigcap_{\kappa=1}^{\infty} \bar{d}_\kappa = \{b\}$, $b \notin \partial D$ и, следовательно, $q_\kappa, d_\kappa \rightarrow b$ при $\kappa \rightarrow \infty$. Отсюда $\delta_D(d_\kappa) = d(d_\kappa) > 0$ при $\kappa \rightarrow \infty$.

Покажем, что если $\{p_m\}$ — любая другая цепь, принадлежащая P , то она регулярна. Действительно, $\{p_m\}$ входит в d_κ , $\forall \kappa = 1, 2, \dots$. Отсюда $\forall \kappa, \exists m(\kappa)$ такое, что $p_m \subset d_\kappa$, $m > m(\kappa)$. Следовательно,

$$\delta_D(p_m) = d(p_m) \leq d(d_\kappa) = \delta_D(d_\kappa) = \varepsilon_\kappa, \quad m \geq m(\kappa),$$

где $\varepsilon_\kappa \rightarrow 0$ при $\kappa \rightarrow \infty$.

2) Предположим, что цепь $\{q_\kappa\} \in P$ регулярна и $\delta_D(d_\kappa) = d(d_\kappa) \rightarrow 0$ при $\kappa \rightarrow \infty$. В силу компактности множества $\bar{D}$ в R^n (область D у нас ограничена) последовательность мно-

жеств $\{q_\kappa\}$ сходится к некоторой точке $b \in \partial D$, и $I(P) = \bigcap_{\kappa=1}^{\infty} \bar{d}_\kappa = \{b\}$ состоит из единственной точки.

Покажем, что простой конец P достижим. Выберем по точке $x_\kappa \in d_\kappa$, $\kappa = 1, 2, \dots$. Так как $\delta_D(d_\kappa) \rightarrow 0$ при $\kappa \rightarrow \infty$, и все $x_m \in d_\kappa$ при $m \geq \kappa$, то отсюда следует, что последовательность $\{x_m\}$ фундаментальна по метрике δ_D . При этом

$x_m \xrightarrow{P} b \in \partial D$, где $\{b\} = I(P)$. В силу леммы 2.1 найдется путь $L: [0, 1] \rightarrow D$, содержащий $\{x_m\}$ и оканчивающийся в точке b . Ясно, что путь L сходится к P и простой конец P достижим.

Покажем теперь, что P регулярен. Пусть $\{x_m\}$ сходится к P при $m \rightarrow \infty$. Тогда $x_m \xrightarrow{P} b$, $m \rightarrow \infty$. Пусть $\{q_\kappa\} \in P$ — некоторая простая цепь. Как было показано выше, цепь $\{q_\kappa\}$ регулярна, $q_\kappa \rightarrow b$ и $d(d_\kappa) \rightarrow 0$, $\kappa \rightarrow \infty$. Кроме того, последовательность $\{x_m\}$ фундаментальна по δ_D и существует путь $L: [0, 1] \rightarrow D$, сходящийся к P , оканчивающийся в точке b и содержащий $\{x_m\}$. Точно так же, как при доказательстве теоремы 3.4 из [6], строится регулярная цепь $\{p_s\} \in P$ такая, что $p_s \in x_{m_s}$, $s = 1, 2, \dots$. Следовательно, P регулярен и теорема доказана.

Следующий результат является следствием леммы 2.1.

3.7. Лемма. Простой конец P области D достижим из D тогда и только тогда, когда найдется последовательность $\{x_m\} \subset D$, сходящаяся к P и фундаментальная по метрике δ_D .

Следующая лемма доказывается при помощи рассуждений, приведенных при доказательстве предложения 2.4 из [5].

3.8. Лемма. Предположим, что носитель простого конца P области D содержит точку b , для которой выполнено

условие $(*) \quad \forall \{x_m\}, \{y_m\} \subset D, x_m, y_m \xrightarrow{P} b, \delta_D(x_m, y_m) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$. Тогда P достижим из D и точка b достижима относительно P .

3.9. Теорема. Регулярный простой конец P области D достижим тогда и только тогда, когда $\Pi(P)$ состоит из единственной точки, $\Pi(P) = \{b\}$, и в точке b выполнено условие (*) из 3.8.

См. 3.4 из [6]. При доказательстве используются теорема 3.5 и лемма 3.8.

Пусть P есть простой конец области D , $F \subset D$ — связное множество. Говорим, что F сходится к P , если $\forall$ цепь $\{q_m\} \in P$, $\exists N$ такое, что $F \cap q_m \neq \emptyset$ при всех $m \geq N$.

Следующее свойство нормальных простых концов тривиально.

3.10. Предложение. Пусть P есть нормальный простой конец области D и E, F — связные множества из D , сходящиеся к P . Тогда $\delta_D(E, F) = 0$.

Легко видеть, что простой конец P области D , носитель которого содержит не менее двух точек, достижимых относительно P из D , не является нормальным. Однако имеет место следующий результат.

Введем предварительно следующее обозначение: пусть $V_D(x, \alpha) = \{y \in D, \delta_D(x, y) < \alpha\}$ есть δ_D -шар в D с центром в точке x радиуса α . Легко видеть, что $V_D(x, \alpha)$ есть связное множество в D , и $V_D(x, \alpha) = B^n(x, \alpha)$, если $B^n(x, \alpha) \subset D$. Для множества $A \subset D$ $V_D(A, \alpha) = \bigcup_{x \in A} V_D(x, \alpha)$ и множество $V_D(A, \alpha)$ связно, если связно A .

3.11. Теорема. Если область D гомеоморфна шару, то любой путь $L: D[0,1) \rightarrow D$, оканчивающийся в точке $b \in \partial D$, определяет нормальный простой конец P области D , для которого $\Pi(P) = \{b\}$ и L есть главный путь P . В частности, любой достижимый простой конец области D нормален.

Доказательство. Отметим, что при доказательстве соответствующего результата 3.6 из [6] нами допущены некоторые неточности, которые мы здесь исправим.

Пусть нам задан путь $L: [0,1) \rightarrow D$, оканчивающийся в точке $b \in \partial D$. Обозначим $V_t = V_D(L[t, 1), 1-t)$. Множество V_t связно в D и $V_{t'} \supset V_{t''}$, если $t' < t''$. Зафиксируем континуум $A \subset D \setminus L[0,1)$ такой, что $d(A) > 0$, $d(A, \partial D) > 0$, и пусть точка $a \in A$. Так как $d(L[t, 1)) \rightarrow 0$, $L(t) \rightarrow b$, $t \rightarrow 1$, то найдется $\tau_0 \in [0,1)$ такое, что при любом $t \in [\tau_0, 1)$ V_t не содержит множества A . Тогда множество $\partial_D V_t = \partial V_t \cap D$, $t \geq \tau_0$ отделяет точку a и множество $L[t, 1)$ в D . По теореме 1 из [2, т. 2, с. 436] всякое $\partial_D V_t$, $t \geq \tau_0$ содержит замкнутое в D связное множество q_t , которое разделяет точку a и $L[t, 1)$.

Пусть $\tau_1 = \tau_0 + \frac{1 - \tau_0}{2}$, и выберем $t_1, t'_1, \tau_0 < t_1 < t'_1 < \tau_1$.

Из совокупности множеств $\{q_t, t_1 \leq t \leq t'_1\}$ в силу теоремы 4 из [2, т. 2, с. 168] всегда можно выбрать множество $\sigma_1 = q_{\lambda_1}, \lambda_1 \in [t_1, t'_1]$, разделяющее D точно на две подобласти. Через G_1 обозначим компоненту $D \setminus \sigma_1$, содержащую $L[\lambda_1, 1)$. Другая компонента $D \setminus \sigma_1$ содержит точку a .

Для $\tau_2 = \tau_1 + \frac{1 - \tau_1}{2}$, $\tau_1 < t_2 < t'_2 < \tau_2$ найдется $\sigma_2 = q_{\lambda_2}$,

$\lambda_2 \in [t_2, t'_2]$, разделяющая D на две подобласти, одна из которых, G_2 , содержит $L[\lambda_2, 1)$, а другая — точку a .

Продолжая построение, мы получим последовательность областей $\{G_\kappa\}$ из D таких, что либо $G_\kappa \subset G_{\kappa+1}$, либо $G_{\kappa+1} \subset G_\kappa, \kappa = 1, 2, \dots$. При этом $\sigma_\kappa = \partial_D G_\kappa$, и все G_κ не содержат множество A . Так как

$$d(\sigma_\kappa) = \partial_D(\sigma_\kappa) \leq \partial_D(\partial_D V_{\lambda_\kappa}) \leq d(L[\lambda_\kappa, 1)) + 3(1 - \lambda_\kappa),$$

и $\lambda_\kappa \rightarrow 1$ при $\kappa \rightarrow \infty$, то $d(\sigma_\kappa) \rightarrow 0$ при $\kappa \rightarrow \infty$. Мы находимся в условиях леммы 3.12 (см. ниже). Тогда из $\{G_\kappa\}$ можно выделить подпоследовательность вложенных областей $\{G_{\kappa_m}\}, m = 1, 2, \dots, G_{\kappa_1} \supset G_{\kappa_2} \supset \dots G_{\kappa_m} \supset \dots$. Так как

$$\partial_D(\sigma_{\kappa_m}, \sigma_{\kappa_{m+1}}) \geq \lambda_{\kappa_{m+1}} - \lambda_{\kappa_m} \geq t_{\kappa_{m+1}} - t'_{\kappa_m} > 0, m = 1, 2, \dots,$$

то $\{\sigma_{\kappa_m}\}$ образует регулярную цепь сечений области D и в силу 3.3 определяет некоторый нормальный простой конец P области D . При этом ясно, что L сходится к P и, следовательно, P достижим. Кроме того, $\Pi(P) = \{b\}$ в силу теоремы 3.5. Теорема доказана.

Доказательство следующей леммы, использованной выше, почти дословно повторяет доказательство леммы 3 из [10] (с необходимыми изменениями), 3.12 уточняет эту лемму.

3.12. Л е м м а. Пусть в ограниченной области $D \subset R^n$ задана последовательность подобластей $\{G_\kappa\}, \kappa = 1, 2, \dots$, причем либо $G_\kappa \subset G_{\kappa+1}$, либо $G_{\kappa+1} \subset G_\kappa, \kappa = 1, 2, \dots$. Если для областей $G_\kappa d(\partial_D G_\kappa) \rightarrow 0, \kappa \rightarrow \infty$, и найдется континуум $A \subset D$ такой, что $d(A) > 0, d(A, \partial D) > 0$ и $A \cap G_\kappa = \emptyset, \kappa = 1, 2, \dots$, то из $\{G_\kappa\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{G_{\kappa_m}\}, m = 1, 2, \dots$, вложенных подобластей $G_{\kappa_1} \supset G_{\kappa_2} \supset \dots \supset G_{\kappa_m} \supset \dots$

4. Классификация простых концов

По К. Каратеодори [17] множество простых концов плоской односвязной области разбивается на четыре типа. В основе этой классификации лежит вопрос о том, каковы носитель простого конца и множество его главных точек. В случае пространственной области вопрос о классификации простых концов оказывается более сложным. Во-первых (и это основное), нужно учитывать, какой класс отображений изучается (простые концы определяются при помощи инвариантов этого класса). Далее, во многих случаях знание строения носителя простого конца и множества его главных точек недостаточно, нужно еще учитывать, как ведет себя область в окрестности носителя простого конца.

4.1. Обозначения. Пусть D — область в R^n . Через $E(D)$ обозначим множество нормальных простых концов области D , $A(D)$ — множество достижимых, $R(D)$ — множество R -достижимых простых концов D , $R(D) \subset A(D)$; $AE(D) = A(D) \cap E(D)$, $RE(D) = R(D) \cap E(D)$. Вообще говоря, множества $A(D) \setminus AE(D)$, $R(D) \setminus RE(D)$ не пусты, однако если область D гомеоморфна шару, то $A(D) = AE(D)$ и $R(D) = RE(D)$ в силу 3.11.

4.2. Классификация по Каратеодори нормальных простых концов. Пусть $P \in E(D)$. Тогда $\Pi(P) \neq \emptyset$ и замкнуто в R^n . Отсюда множество главных точек всякого нормального простого конца есть либо точка, либо невырожденный континуум, либо несвязное замкнутое множество. Множество дополнительных точек для P либо пусто, либо не пусто, и тогда оно содержит бесконечное множество точек. Таким образом, $E(D)$ можно разбить на четыре типа простых концов в точности по К. Каратеодори (см. [17], либо [16, гл. 9]) плюс простые концы пятого типа с несвязным множеством главных точек (см. [10]).

Таким образом, $E(D) = \bigcup_{i=1}^5 E_i(D)$. В силу теоремы 3.5

$$AE(D) = AE_1(D) \cup AE_2(D), \quad RE(D) = RE_1(D) \cup RE_2(D).$$

Далее каждое из множеств $E_i(D)$, $i=1, 2, 3, 4, 5$ разобьем на непересекающиеся подмножества следующим образом:

1) $E_{i1}(D)$ есть множество всех регулярных простых концов i -го типа, $i=1, 2, 3, 4, 5$;

2) $E_{i2}(D)$, $i=1, 2, 3, 4, 5$ — оставшиеся простые концы i -го типа. Заметим, что в силу 3.6 $E_1(D) = E_{11}(D)$ и, следо-

вательно, $E_{12}(D) = \emptyset$. Множества $E_{i2}(D)$, $E_{i1}(D)$, $i = 2, 3, 4, 5$ не пусты в общем случае. Отметим еще, что простые концы пятого типа не обладают главными путями, так как по определению $C(L, 1) = \Pi(P)$, если путь $L: [0, 1) \rightarrow D$ главный и множество $\Pi(P)$ обязано быть связным (см. 3.2).

4.3. Функция $\delta(x, P)$. Пусть P — простой конец области D , $\{q_k\} \in P$ — простая цепь и $\{d_k\}$ — соответствующая ей цепь подобластей D . Говорим, что сечение σ области D принадлежит P , $\sigma \in P$, если σ разделяет некоторые q_k и q_m , $k \neq m$ в D . Определим

$$\delta(x, P) = \begin{cases} d(D \setminus \bar{d}_1), & x \in D \setminus \bar{d}_1; \\ \inf \{d(\sigma), & x \in \sigma, \sigma \in P\}. \end{cases}$$

Последовательность точек $\{x_k\} \subset D$ назовем регулярной для P , если $x_k \rightarrow P$ при $k \rightarrow \infty$ и $\delta(x_k, P) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Из предыдущего точка $b \in \Pi(P) \Leftrightarrow \exists$ регулярная последовательность точек $\{x_k\} \subset D$, $x_k \rightarrow b$. Простой конец P нормален $\Leftrightarrow \exists$ регулярная последовательность точек $x_k \rightarrow P$. Точка

$b \in I(P) \setminus \Pi(P) \Leftrightarrow \exists \alpha > 0$ такое, что $\delta(x_k, P) \geq \alpha$, $\forall x_k \xrightarrow{P} b$. Пусть множество $A \subset D$ связно. Определим

$$\delta(A, P) = \sup \{\delta(x, P), x \in A\}.$$

Говорим, что последовательность множеств $\{A_k\}$ из D регулярна для P , если множества A_k связны, $\{A_k\}$ сходится к P при $k \rightarrow \infty$ и $\delta(A_k, P) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Разобьем множество $E(D)$ нормальных простых концов области D на следующие два непересекающиеся подмножества. Говорим, что простой конец $P \in SE(D)$, если $\exists$ регулярная для P последовательность $\{x_k\} \subset D$ такая, что $\delta_D(x_k, x_{k+1}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Иначе говоря, $P \in SE(D)$, если $\exists$ регулярная цепь $\{q_k\} \in P$ такая, что $\delta_D(q_k, q_{k+1}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В противном случае $P \in WE(D)$.

4.4. Предложение. Пусть $P \in SE(D)$. Тогда множество $\Pi(P)$ связно и простой конец P обладает главным путем.

Доказательство. Пусть цепь $\{q_k\} \in P$ регулярна и $\delta_D(q_k, q_{k+1}) = \varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Покажем, что любая точка $b \in \Pi(P)$ является предельной для последовательности $\{q_k\}$.

Пусть $\{p_m\} \in P$ — регулярная цепь, сходящаяся к точке b , $\{g_m\}$, $\{d_k\}$ — цепи подобластей из D , соответствующие

$\{p_m\}$ и $\{q_k\}$. Так как цепи $\{p_m\}$, $\{q_k\}$ эквивалентны, то для каждого m найдется $k(m)$ такое, что $q_k \subset g_m$ при всех $k \geq k(m)$. При этом p_m либо входит в $d_{k(m)-1}$, либо $p_m \cap q_{k(m)-1} \neq \emptyset$. Следовательно,

$$\delta_D(p_m, q_{k(m)}) \leq \delta_D(q_{k(m)-1}, q_{k(m)}) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

и регулярная цепь $\{q_{k(m)}\}$ сходится к точке b .

Выберем точки $x_k \in q_k$, $y_k \in q_{k+1}$ такие, что $\delta_D(x_k, y_k) < 2\varepsilon_k$. Найдется ломаная $\gamma_k \subset D$, соединяющая x_k и y_k такая, что $\delta_D(\gamma_k) = d(\gamma_k) < 2\varepsilon_k$. Имеем

$$\delta_D(y_{k-1}, x_k) \leq \delta_D(q_k) = \alpha_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Тогда найдется ломаная $\gamma'_k \subset D$, соединяющая y_{k-1} и x_k ,

для которой $\delta_D(\gamma'_k) < 2\varepsilon_k$. Рассмотрим кривую $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \times$

$\times (\gamma_k \cup \gamma'_k)$. Очевидным образом (см., например, 2.1) кривую Γ можно параметризовать так, что $L: [0, 1) \rightarrow \Gamma$, $L(0) = x_1$, $L(t_1) = y_1$, $L(t'_1) = x_2, \dots$, $L(t_k) = y_k$, $L(t'_k) = x_{k+1}, \dots$, $L[t_k, t'_k] = \gamma'_k$, $L[t'_{k-1}, t_k] = \gamma_k$, $0 < t_k < t'_k < t_{k+1} < 1$, $k=1, 2, \dots$.

Легко видеть, что $C(L, 1) = \Pi(P)$, множество $\Pi(P)$, следовательно, связно, L является главным путем P . Действительно, так как $d(\gamma_k), d(\gamma'_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, $\gamma_k \cap q_k \neq \emptyset$, $\gamma'_k \cap q_k \neq \emptyset, k=1, 2, \dots$, то предельное множество последовательности точек $L(t_k), \forall t_k \rightarrow 1, k \rightarrow \infty$ принадлежит $\Pi(P)$, как и предельное множество последовательности $\{q_k\}$. Следовательно, $C(L, 1) \subset \Pi(P)$. Обратное включение также выполнено. Предложение доказано.

4.5. Следствие. $SE_5(D) = \emptyset$, следовательно, $E_5(D) \subset \subset WE(D)$.

4.6. Предложение. Если простой конец P области D регулярен и обладает главным путем, то $P \in SE(D)$.

Доказательство. Пусть $L: [0, 1) \rightarrow D$ есть главный путь простого конца P . Выберем последовательность точек $\{t_k\} \subset [0, 1)$, $t_k \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$ таким образом, что

$$\delta_D(L(t_k), L(t_{k+1})) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Тогда существует регулярная цепь $\{q_k\} \in P$ такая, что $L(t_k) \in q_k, k=1, 2, \dots$. В противном случае найдется подпо-

следовательность $L(t_{k_i}) \xrightarrow{P} b$ такая, что $\delta(L(t_{k_i}), P) \geq \lambda > 0$, вопреки условию, что точка $b \in \Pi(P)$ регулярна. Утверждение доказано.

4.7. Следствия. 1) $E_1(D) \subset SE(D)$, следовательно, $WE_i(D) = \emptyset$. Утверждение следует из 3.6 и 4.6;

2) $AE_{21}(D) \subset SE(D)$;

3) $E_{31}(D) \subset SE(D)$, следовательно, $WE_{31}(D) = \emptyset$.

4.8. $AE(D) \subset SE(D)$.

Доказательство. В силу 3.5 если $P \in AE(D)$, то $\Pi(P) = \{b\}$ состоит из единственной точки, достижимой из D относительно P некоторым путем $L: [0,1] \rightarrow D$, $C(L, 1) = \{b\}$, являющимся главным путем P . Пусть $\{q_\kappa\} \in P$ — некоторая регулярная цепь, $q_\kappa \rightarrow b$ при $\kappa \rightarrow \infty$. Обозначим через L_κ компоненту $L[0,1] \cap (d_\kappa \setminus \bar{d}_{\kappa+1})$, соединяющую q_κ и $q_{\kappa+1}$ ($L[0,1] \cap q_\kappa \neq \emptyset$, $\kappa \geq \kappa_0$), $L_\kappa = L[t_\kappa, t_{\kappa+1}]$, $t_\kappa \rightarrow 1$, $\kappa \rightarrow \infty$. Так как $C(L, 1) = \{b\}$, то $L_\kappa \rightarrow b$ при $\kappa \rightarrow \infty$ и $d(L_\kappa) = \delta_D(L_\kappa) \rightarrow 0$, $\kappa \rightarrow \infty$. Следовательно, $\delta_D(q_\kappa, q_{\kappa+1}) \leq \delta_D(L_\kappa) \rightarrow 0$, $\kappa \rightarrow \infty$ и (по определению) $P \in SE(D)$. Доказательство закончено.

Таким образом, из предыдущего имеем

$$SE(D) = AE(D) \cup E_{31}(D) \cup SE_{32}(D) \cup SE_4(D),$$

$$AE(D) = E_1(D) \cup AE_2(D).$$

4.9. Замечание. В случае плоской односвязной области простые δ -концы и простые концы по К. Каратеодори совпадают. В силу теоремы 9.3 из [16] любой простой конец по К. Каратеодори плоской односвязной области нормален. Используя результаты из [18, с. 137, теорема 1'], нетрудно показать, что для любой односвязной плоской области D $E(D) = SE(D)$. Таким образом, для пространственной области D простые концы из $SE(D)$ представляют собой полную аналогию с простыми концами по К. Каратеодори плоских односвязных областей.

Приступим к изучению множества $WE(D)$. Имеем следующие следствия предыдущих результатов.

4.10. 1) $AE(D) \cap WE(D) = \emptyset$;

2) $E_5(D) \subset WE(D)$;

3) простой конец $P \in E_5(D)$ не обладает главным путем;

4) если простой конец P регулярен и принадлежит $WE(D)$, то он не обладает главным путем.

Таким образом,

$$WE(D) = WE_2(D) \cup WE_{32}(D) \cup WE_4(D) \cup E_5(D).$$

Всюду через lA_κ , $\bar{l}A_\kappa$, lA_κ обозначаем соответственно нижний топологический, верхний топологический и топологи-

ческий предел последовательности множеств $\{A_k\}$ из D [2, т. 1, § 29].

4.11. Определение. Говорим, что подмножество $B \subset \Pi(P)$ простого конца P удовлетворяет S -условию относительно P , если существует регулярная для P последовательность множеств $\{A_k\}$ из D , сходящаяся к $B: B = \overline{\bigcap A_k}$.

Так как по определению множества A_k связны, то в силу теоремы Зоретти [2, т. 2, с. 179] множество B , удовлетворяющее S -условию для P , связно либо есть точка.

4.12. Замечания. 1) Пусть множества $A_k, k = 1, 2, \dots$ из D связны, попарно не пересекаются, $\{A_k\}$ сходятся к простому концу P области D и $B = \overline{\bigcap A_k}$. Как следует из результатов § 29 [2, т. 1], тогда $B \neq \emptyset$ и $B = \bigcup \overline{A_{k_m}}$, где $\bigcup$ распространяется на все топологически сходящиеся подпоследовательности $\{A_{k_m}\}$ из $\{A_k\}$ [2, т. 1, с. 349]. При этом пределом каждой сходящейся подпоследовательности $\{A_{k_m}\}$ является связное подмножество из $I(P)$ с евклидовым диаметром $\geq \alpha$, если $d(A_{k_m}) \geq \alpha$, либо есть точка, если $d(A_{k_m}) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$, и это подмножество удовлетворяет S -условию для P , если дополнительно последовательность $\{A_{k_m}\}$ регулярна для P . Мощность всех таких различных сходящихся подпоследовательностей $\{A_{k_m}\}$ из $\{A_k\}$ может быть равна мощности континуума.

2) Пусть D_0 есть куб (единичный) в R^3 , T — одна из его граней и B — произвольное замкнутое подмножество T (B может совпадать с T). Применяя методику И. С. Овчинникова при построении примера простого конца пятого типа [10, с. 198], можно построить такую область $D \subset D_0, \bar{D} = \bar{D}_0$, гомеоморфную шару, что T совпадает с носителем простого конца P области $D, I(P) = T$, а множество B совпадает с множеством главных точек $P, \Pi(P) = B$. За B можно взять, например, канторово множество на T .

3) Легко построить пример гомеоморфной шару области D , имеющей регулярный простой конец P , у которого множество $\Pi(P)$ связно, но ни одно связное невырожденное подмножество $\Pi(P)$ не обладает S -условием для P . Ясно, что P может принадлежать только $WE_{41}(D)$. С другой стороны, для $P \in WE_{41}(D)$ множество $\Pi(P)$ может удовлетворять S -условию для P .

Таким образом, из предыдущих замечаний возникают некоторые идеи о дальнейшей классификации простых концов из $WE(D)$.

4.13. Определение. Множество $B \subset \Pi(P)$, удовлетворяющее S -условию относительно простого конца P области D , назовем максимальным для регулярной относительно P последовательности связных множеств $\{A_\kappa\}$ из D , если $B = \text{lt} A_\kappa$ и не существует регулярной для P последовательности связных множеств $\{F_\kappa\}$ из D такой, что $A_\kappa \subset F_\kappa$, $\kappa = 1, 2, \dots$, $\text{lt} F_\kappa = B_0 \supsetneq B$ и

$$\sup_{x \in F_\kappa} \delta_D(x, A_\kappa) = \alpha_\kappa \geq \alpha > 0, \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

Максимальное для $\{A_\kappa\}$ множество $B \subset \Pi(P)$ будем называть строго максимальным для $\{A_\kappa\}$, если оно максимально для любой подпоследовательности из $\{A_\kappa\}$.

Точку $b \in \Pi(P)$ назовем дробной для регулярной относительно P последовательности $\{A_\kappa\}$ связных множеств из D , если $\{b\}$ является строго максимальным множеством для $\{A_\kappa\}$ относительно P . Говорим, что точка $b \in \Pi(P)$ дробна для P , если $\{b\}$ строго максимально для любой регулярной для P последовательности из D , сходящейся к точке b . Простой конец $P \in WE(D)$ будем называть дробным, если любая точка $b \in \Pi(P)$ дробна для P .

Связное множество $B \subset \Pi(P)$ назовем бруском для P , если оно строго максимально для любой регулярной для P последовательности связных множеств из D , сходящейся к B топологически, и ни одно собственное подмножество B не является строго максимальным ни для какой регулярной для P последовательности связных множеств из D .

4.14. З а м е ч а н и я. 1) Пусть P — простой конец области D . Если на множестве регулярных для P последовательностей множеств из D ввести подходящее отношение порядка, то, применяя лемму Цорна, можно показать, что если множество $B = \Pi(P)$ удовлетворяет S -условию для P , $B = \text{lt} A_\kappa$, где $\{A_\kappa\}$ регулярна для P , то всегда найдется регулярная для P последовательность $\{F_\kappa\}$ из D такая, что $A_\kappa \subset F_\kappa$, $\kappa = 1, 2, \dots$, и множество $B_0 = \text{lt} F_\kappa$ максимально для $\{F_\kappa\}$ относительно P .

Точно так же можно показать, что любое множество $B \subset \Pi(P)$, максимальное для некоторой регулярной относительно P последовательности множеств из D , лежит в некотором множестве $B_0 \supsetneq B$, строго максимальном для регулярной относительно P последовательности множеств из D .

2) Следующие два условия эквивалентны:

- а) простой конец $P \in WE(D)$ дробный;
- б) если последовательность связных множеств $\{A_k\}$ из D регулярна для P , то $d(A_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство этого утверждения легко устанавливается от противного.

3) Отметим, что множество $\Pi(P)$ простого конца $P \in WE(D)$ может быть связным, но состоять только из дробных для P точек.

4) Два различных бруска B', B'' простого конца $P \in WE(D)$ могут иметь непустое пересечение. Более того, множество $B = \Pi(P)$ может быть связным, но состоять из бесконечного числа брусков для P . С другой стороны, ни одно связное подмножество $\Pi(P)$ может не быть бруском для P .

4.15. Таким образом, для $P \in WE(D)$ имеем, что любая точка $b \in \Pi(P)$ либо дробна для P , либо принадлежит некоторому связному подмножеству $B \subset \Pi(P)$, удовлетворяющему S -условию для P . Справедливы следующие утверждения.

1) Если $P \in WE_2(D)$, то точка $b \in \Pi(P)$ всегда дробна для P .

2) Если $P \in WE_3(D)$, $\Pi(P)$ связно, то возможны различные варианты: а) $\Pi(P)$ является бруском для P ; б) любая точка $b \in \Pi(P)$ дробна для P , то есть P является дробным; в) любой промежуточный вариант.

3) Случай $P \in WE_4(D)$ аналогичен 2.

4) Пусть $P \in E_5(D)$. Если точка $b \in \Pi(P)$ обладает окрестностью U такой, что множество $U \cap \Pi(P)$ не более чем счетно, то точка b является дробной для P . Если множество $B \subset \Pi(P)$ связно и невырожденно, то либо B является бруском для P , либо каждая точка B дробна для P , либо имеет место некоторый промежуточный вариант.

5. Соответствие по простым концам при δ -квазизометриях.

Как мы заметили ранее, точки области D можно отождествить с «внутренними» простыми концами D . Множество D^* , полученное присоединением к области D множества всех ее простых концов, превращается в топологическое пространство, если под окрестностью простого конца понимать всякое открытое подмножество D , в которое входит этот простой конец, плюс все простые концы из D^* , входящие в это подмножество.

5.1. Теорема. При δ -квазиизометрии $f: D \rightarrow D'$ областей D, D' простая цепь $\{q_k\}$ области D переходит в простую цепь $\{q'_k = f(q_k)\}$ области D' и f продолжается до гомеоморфизма $f^*: D^* \rightarrow D'^*$, $f^*|D = f$.

См. теорему 4.1 из [6].

Изучим, как ведут при δ -квазиизометрии простые концы различных типов, введенные нами в пункте 4.

Обозначим через $C_P(f, b)$ предельное множество отображения f в точке b относительно простого конца P области D :

$b' \in C_P(f, b)$, если $\exists \{x_m\} \subset D$, $x_m \rightarrow b$ такая, что $y_m = f(x_m) \rightarrow b'$ при $m \rightarrow \infty$. Для множества $A \subset I(P)$ $C_P(f, A) = \bigcup_{b \in A} C_P(f, b)$. В силу теоремы 5.1 $y_m \rightarrow P' = f^*(P)$, если $b \in A$

$f: D \rightarrow D'$ — δ -квазиизометрическое отображение, и точка $b' \in I(P')$. Следовательно, $C_P(f, I(P)) = I(P')$ и $C_{P'}(f^{-1}, I(P')) = I(P)$.

5.2. Предложение. Пусть задана δ -квазиизометрия $f: D \rightarrow D'$ областей D, D', P — простой конец области D , $P' = f^*(P)$, точка $b \in I(P) \setminus \Pi(P)$ и точка $b' \in C_P(f, b)$. Тогда либо точка $b' \in I(P') \setminus \Pi(P')$, либо точка $b' \in \Pi(P')$ не является регулярной для P' . Если точка $b \in \Pi(P)$ регулярна для P , то $C_P(f, b) \subset \Pi(P')$. В частности, если P и P' регулярны, то $C_P(f, \Pi(P)) = \Pi(P')$ и $C_{P'}(f^{-1}, \Pi(P')) = \Pi(P)$.

Доказательство. Пусть точка $b \in I(P) \setminus \Pi(P)$. Предположим, что точка $b' \in C_P(f, b)$ регулярна для P' . Выберем

последовательность точек $\{x_m\} \subset D$, $x_m \rightarrow b$, $m \rightarrow \infty$ такую, что $y_m = f(x_m) \rightarrow b'$, $m \rightarrow \infty$, причем $y_m \rightarrow P'$, $m \rightarrow \infty$ в силу 5.1. По условию существует регулярная цепь $\{q'_m\} \in P'$ такая, что $y_m \in q'_m$, $m = 1, 2, \dots$. В силу 5.1 цепь $\{q_m = f^{-1} \times \times (q'_m)\} \in P$, регулярна и $x_m \in q_m$, $m = 1, 2, \dots$. Следовательно, $q_m \rightarrow b$, $m \rightarrow \infty$, и точка $b \in \Pi(P)$, противоречие. Таким образом, либо точка $b' \in I(P') \setminus \Pi(P')$, либо $b' \in \Pi(P')$ и не является регулярной для P' .

Предположим, что точка $b \in \Pi(P)$ регулярна для P , $b' \in C_P(f, b)$ и $x_m \rightarrow b$ такова, что $y_m = f(x_m) \rightarrow b'$, $m \rightarrow \infty$. По условию существует регулярная цепь $\{q_m\} \in P$ такая, что $x_m \in q_m$, $m = 1, 2, \dots$. Цепь $\{q'_m = f(q_m)\} \in P'$ в силу 5.1 регулярна, $y_m \in q'_m$, $m = 1, 2, \dots$, и, следовательно, $q'_m \rightarrow b'$, $m \rightarrow \infty$. Отсюда $b' \in \Pi(P')$, предложение доказано.

5.3. Теорема. Пусть $f:D \rightarrow D'$ есть δ -квазиизометрия областей D, D' . Тогда каждое из следующих подмножеств D^* переходит при отображении f^* в такое же подмножество из D'^* : 1) $A(D)$, 2) $R(D)$; 3) $E(D)$; 4) $AE(D)$; 5) $RE(D)$; 6) регулярные простые концы, не имеющие дополнительных точек; 7) $SE(D)$; 8) $WE(D)$.

Доказательство. Утверждение 1 следует из 2.10 и 5.1. Так как при δ -квазиизометрии спрямляемые пути переходят снова в спрямляемые пути, то отсюда и из 5.1 получаем 2. Квазиинвариантность метрики δ_D при δ -квазиизометрии и 5.1 дают 3. Из 1 и 3 условий следует 4; 2 и 3 условия дают 5.

Предположим, что простой конец P регулярен и $I(P) = \Pi(P)$, $P' = f^*(P)$. Выберем точку $b' \in I(P')$, и пусть $y_m \rightarrow b'$, $m \rightarrow \infty$. В силу 5.1 $\{x_m = f^{-1}(y_m)\}$ сходится к P при $m \rightarrow \infty$. Пусть точка b является предельной для $\{x_m\}$, $b = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$. В силу 5.2 тогда $C_P(f, b) \subset \Pi(P')$, а точка $b' \in \Pi(P')$. Следовательно, $I(P') = \Pi(P')$ и простой конец P' не имеет дополнительных точек. По условию существует регулярная цепь $\{q_k\} \in P$ такая, что $x_{m_k} \in q_k$, $k = 1, 2, \dots$. Цепь $\{q'_k = f(q_k)\} \in P'$, регулярна и $y_{m_k} \in q'_k$, $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, точка b' регулярна для P' . Утверждение 6 доказано.

Пусть $P \in SE(D)$ и регулярная цепь $\{q_k\} \in P$ такова, что $\delta_D(q_k, q_{k+1}) = \varepsilon_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Цепь $\{q_k = f(q_k)\} \in P'$, регулярна и $\delta_{D'}(q'_k, q'_{k+1}) \leq K\varepsilon_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ (здесь K — коэффициент квазиизометричности отображения f). Следовательно, $P' \in SE(D')$.

Так как $WE(D) = E(D) \setminus SE(D)$, то условия 3 и 7 дают 8. Теорема доказана.

Следствием 5.3 является следующий результат.

5.4. Теорема. Пусть $f:D \rightarrow D'$ — δ -квазиизометрия областей D, D' . Множество $SE(D)$ разбивается на следующие непересекающиеся подмножества, сохраняющиеся при отображении f^* : 1) $RE_1(D)$, 2) $E_1(D) \setminus RE_1(D)$, 3) $RE_2(D)$; 4) $AE_2(D) \setminus RE_2(D)$; 5) $E_{31}(D)$; 6) $SE_{32}(D) \cup SE_4(D)$.

5.5. Замечание. Нетрудно привести примеры областей $D, D' \subset R^2$ и δ -квазиизометрии $f:D \rightarrow D'$ таких, что $P \in SE_{32}(D)$ перейдет при отображении f^* либо в $P' \in SE_{41}(D')$, либо в $P' \in SE_{42}(D')$, $P \in SE_{41}(D)$ перейдет в $P' \in SE_{42}(D')$, $P \in$

$\in RE_{21}(D) -$ в $P' \in RE_{22}(D')$, и $P \in AE_{21}(D) \setminus RE_2(D) -$ в $P' \in AE_{22}(D') \setminus RE_2(D')$

Приступим к изучению поведения δ -квазинизометрии на множестве $WE(D)$.

5.6. Предложение. Пусть $f: D \rightarrow D'$ есть δ -квазинизометрия областей D, D' , $P \in WE(D)$, $P' = f^*(P)$, последовательность связных множеств $\{A_\kappa\}$ из D регулярна для P и сходится топологически к множеству B , $B = \text{lt } A_\kappa$, $A'_\kappa = f(A_\kappa)$ и $B' = \overline{\text{lt } A'_\kappa}$. Тогда B есть связное подмножество $\Pi(P)$, последовательность $\{A'_\kappa\}$ регулярна для P' и $B' = \bigcup \text{lt } A'_{\kappa_m}$, где объединение берется по всевозможным подпоследовательностям из $\{A'_\kappa\}$, имеющим топологический предел. Если множество B строго максимально для $\{A_\kappa\}$ относительно P и $B'_0 = \text{lt } A'_{\kappa_m}$ для некоторой подпоследовательности $\{A'_{\kappa_m}\}$ из $\{A'_\kappa\}$, то B'_0 строго максимально для $\{A'_{\kappa_m}\}$ относительно P' .

Доказательство. Пусть точка $b \in B$. Тогда существует последовательность точек $\{x_\kappa\} \subset D$, $x_\kappa \in A_\kappa$, $\kappa = 1, 2, \dots$, такая, что $b = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} x_\kappa$ и $\delta(x_\kappa, P) \leq \delta(A_\kappa, P) \rightarrow 0$, $\kappa \rightarrow \infty$.

Следовательно, точка $b \in \Pi(P)$ и $B \subset \Pi(P)$. В силу теоремы Зоретти [2, т. 2, с. 179] множество B связно. Квазинвариантность метрики δ_D при отображении f дает регулярность последовательности $\{A'_\kappa\}$ относительно P' (из 5.1 следует, что $A'_\kappa \rightarrow P'$ при $\kappa \rightarrow \infty$). По теореме 1 из [2, т. 1, с. 349] $B' = \overline{\text{lt } A'_\kappa}$ представляет собой объединение множеств, каждое из которых является топологическим пределом некоторой подпоследовательности из $\{A'_\kappa\}$. В силу теоремы Зоретти каждое из этих множеств связно и, кроме того, лежит в $\Pi(P')$ вследствие регулярности последовательности $\{A'_\kappa\}$ для P' .

Выберем некоторую подпоследовательность $\{A'_{\kappa_m}\}$ из $\{A'_\kappa\}$, сходящуюся топологически к множеству B'_0 , $B'_0 \subset \Pi(P')$ и связно, в силу предыдущего. Покажем, что если множество B строго максимально для $\{A_\kappa\}$ относительно P , то B'_0 строго максимально для $\{A'_{\kappa_m}\}$ относительно P' .

Предположим, что существует регулярная для P' последовательность $\{F'_m\}$ связных множеств из D' такая, что $F'_m \supset A'_{\kappa_m}$, $m = 1, 2, \dots$, $\text{lt } F'_m = F' \supseteq B'_0$ и

$$\sup_{x \in F_m} \delta_{D'}(x, A'_{\kappa_m}) \geq \alpha > 0, m = 1, 2, \dots$$

Последовательность $\{F_m = f^{-1}(F'_m)\}$ регулярна для P и $F_m \supset \supset A_{\kappa_m}$, $m = 1, 2, \dots$. В силу обобщенной теоремы Больцано — Вейерштрасса [2, т. 1, с. 348] существует подпоследовательность $\{F_{m_s}\}$ из $\{F_m\}$, сходящаяся топологически к некоторому связному множеству $F \subset \Pi(P)$, при этом $F \supseteq B$ и

$$\sup_{x \in F_{m_s}} \delta_D(x, A_{\kappa_{m_s}}) \geq \frac{\alpha}{K}, s = 1, 2, \dots$$

(здесь K — коэффициент квазиизометричности f). Следовательно, B не является максимальным множеством для $\{A_{\kappa}\}$ относительно P . Но это противоречит условию строгой максимальности B для $\{A_{\kappa}\}$ относительно P .

Таким образом, множество B'_0 максимально для $\{A'_{\kappa_m}\}$. Точно так же B'_0 максимально для любой подпоследовательности из $\{A'_{\kappa_m}\}$ и множество B'_0 строго максимально для $\{A'_{\kappa_m}\}$ относительно P' . Предложение доказано.

Отметим, что в обозначениях из 5.6 множество $B'_0 = \text{lt } A'_{\kappa_m}$ не обязательно будет максимальным для $\{A'_{\kappa_m}\}$ относительно P' , если множество $B = \text{lt } A_{\kappa}$ максимально для $\{A_{\kappa}\}$ относительно P .

Пусть $B \subset \Pi(P)$ является бруском для простого конца $P \in WE(D)$, $\{A_{\kappa}\}$ регулярна для P и $B = \text{lt } A_{\kappa}$, $f: D \rightarrow D' - \delta$ -квазиизометрия, $B' = \overline{\text{lt}} A'_{\kappa}$ и $B'_0 = \text{lt } A'_{\kappa_m}$. Вообще говоря, множество $B'_0 \subset \Pi(P')$, строго максимальное для $\{A'_{\kappa_m}\}$ в силу 5.6, не является бруском для P' . Мы можем привести только следующий результат.

5.7. Предложение. Предположим, что множество $B = \Pi(P)$ простого конца $P \in WE(D)$ состоит только из брусков для P , $B = \bigcup B_i$, B_i — брусок для P . Пусть последовательность связных множеств $\{A_{\kappa}\}$ из D регулярна для P и сходится топологически к некоторому бруску B_0 для P , $f: D \rightarrow D' - \delta$ -квазиизометрия и $B'_0 = \overline{\text{lt}} A'_{\kappa}$. $A'_{\kappa} = f(A_{\kappa})$. Допустим, что множество $F' \subset B'_0$ является топологическим пределом для некоторой подпоследовательности $\{A'_{\kappa_m}\}$ из $\{A'_{\kappa}\}$. Тогда если F'_0 есть собственное подмножество F' , последовательность множеств $\{K_s\}$ регулярна для P' и $F'_0 =$

$= \text{It } K'_s$ строго максимально для $\{K'_s\}$ относительно P' , то любое множество $F_0 \subset F = \text{It } K_s$, $K_s = f^{-1}(K'_s)$, являющееся топологическим пределом некоторой подпоследовательности из $\{K_s\}$, является одним из брусков для P .

Доказательство. В силу 5.6 F_0 строго максимально для подпоследовательности $\{K_{s_p}\}$ из $\{K_s\}$ относительно P и лежит в некотором бруске B_j для P . Следовательно, $F_0 = B_j$. Предложение доказано.

5.8. Теорема. Пусть $f: D \rightarrow D' - \delta$ -квазиизометрия областей $D, D', P \in WE(D), P' = f^*(P)$ и точка $b \in \Pi(P)$ является дробной для регулярной относительно P последовательности $\{A_k\}$ связных множеств из D . Тогда $B' = \text{It } A'_k, A'_k = f(A_k)$, есть объединение точек $b'_i \in \Pi(P'), B' = \bigcup \{b'_i\}$, каждая из которых — пред-л некоторой подпоследовательности из $\{A'_k\}$ и является дробной для этой подпоследовательности относительно P' . Если простой конец P дробный, то дробным будет и простой конец P' .

Доказательство. По условию $\delta_D(A_k) = d(A_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Квазиинвариантность метрики δ_D при отображении f дает, что $\delta_{D'}(A'_k) = d(A'_k) \leq K \delta_D(A_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ (K — коэффициент квазиизометричности f), и первое утверждение из 5.8 есть следствие предложения 5.6. Используя замечание 4.14, 2, легко показать, что простой конец $P' = f^*(P)$ дробный, если дробным является простой конец P . Теорема доказана.

Отметим, что, вообще говоря, свойство точки быть дробной для простого конца не является инвариантным при δ -квазиизометрии.

5.9. Подведем некоторые итоги предыдущих рассуждений о поведении простых концов из $WE(D)$ при δ -квазиизометрии $f: D \rightarrow D'$.

Пусть $P \in WE(D)$. Тогда либо простой конец P дробный, либо найдется связное подмножество $B \subset \Pi(P)$, удовлетворяющее S -условию для P . Соответственно $P' = f^*(P)$ либо является дробным, либо $\Pi(P')$ обладает подмножеством B' , удовлетворяющим S -условию для P' .

Рассмотрим общую ситуацию. Пусть точка $b \in \Pi(P)$. Возможны следующие случаи.

- 1) Точка b дробна для P .
- 2) Точка b одновременно является дробной для некоторой регулярной относительно P последовательности $\{A_k\}$ связных

множеств из D и лежит в невырожденном связном подмножестве $B \subset \Pi(P)$, строго максимальном для регулярной относительно P последовательности $\{F_m\}$ связных множеств из D , сходящейся к B . При этом $\delta_D(F_m, A_\kappa) \geq \alpha > 0$, $\forall m, \kappa$, $d(A_\kappa) \rightarrow 0$, $\kappa \rightarrow \infty$, $d(F_m) \rightarrow d(B)$, $m \rightarrow \infty$.

3) Точка b не является дробной ни для какой регулярной относительно P последовательности связных множеств из D и лежит в невырожденном связном подмножестве $B \subset \Pi(P)$ (B может совпадать с $\Pi(P)$), строго максимальном для некоторой регулярной относительно P последовательности $\{A_\kappa\}$ связных множеств из D , сходящейся к B топологически.

Используя 5.6, 5.7, 5.8, мы в каждом из случаев 1—3 будем иметь при δ -квазиизометрии $f: D \rightarrow D'$, $P' = f^*(P)$ следующее.

1) Выберем регулярную для P последовательность связных множеств $\{A_\kappa\}$ из D , сходящуюся к точке b . Точка b является дробной для $\{A_\kappa\}$ относительно P . Пусть $A'_\kappa = f(A_\kappa)$, $B' = \bar{\text{lt}} A'_\kappa$. Тогда B' есть объединение точек $b'_i \in \Pi(P')$, $B' = \bigcup \{b'_i\}$, каждая из которых есть предел некоторой подпоследовательности из $\{A'_\kappa\}$ и является дробной для этой подпоследовательности относительно P' . При этом множество B' может быть связным невырожденным подмножеством $\Pi(P')$. Точка $b'_i \in B'$ может быть, а может и не быть дробной для P' . Если найдется окрестность U точки b'_i такая, что $U \cap \Pi(P')$ не более чем счетно, то точка b'_i дробна для P' . В противном случае точка b'_i может лежать в связном подмножестве $B''_i \subset \Pi(P')$, удовлетворяющем S -условию для P' .

2) Пусть $A'_\kappa = f(A_\kappa)$. Тогда любая точка $b' \in B' = \bar{\text{lt}} A'_\kappa$ является дробной для подпоследовательности из $\{A'_\kappa\}$, сходящейся к этой точке. Множество $G' = \bar{\text{lt}} F'_m$, $F'_m = f(F_m)$ является объединением связных подмножеств $G'_i \subset \Pi(P')$, $G' = \bigcup G'_i$, каждое из которых является топологическим пределом подпоследовательности из $\{F'_m\}$, и строго максимальным для этой подпоследовательности. Возможно, что $B' \cap \bigcap G'_i \neq \emptyset$.

3) Снова пусть $A'_\kappa = f(A_\kappa)$. Тогда $B' = \bar{\text{lt}} A'_\kappa$ есть объединение связных невырожденных подмножеств $B'_i \subset \Pi(P')$, $B' = \bigcup B'_i$, каждое из которых является топологическим

пределом подпоследовательности из $\{A'_k\}$ и строго максимально для этой подпоследовательности относительно P' . Пусть точка $b' \in B'_i$ для некоторого i . Возможно, точка b' является дробной для некоторой регулярной относительно P' последовательности $\{F'_m\}$ связных множеств из D' . Ясно, что $\delta_{D'}(F'_m, A'_k) \geq \alpha > 0 \quad \forall m, k$.

Пусть $P \in WE(D)$ и B есть связная компонента множества $\Pi(P)$. Из 1—3 следует, что B есть объединение следующих четырех множеств: F_1 — множество всех точек из B , дробных для P ; F_2 — множество всех точек из B , дробных для некоторой регулярной относительно P последовательности связных множеств из D , но не являющихся дробными для P ; F_3 — множество всех брусков для P из B ; F_4 — множество всех связных невырожденных множеств из B , каждое из которых строго максимально для некоторой регулярной относительно P последовательности связных множеств из D , но не является бруском для P .

Множества F_i , $i = 1, 2, 3, 4$, относятся друг к другу следующим образом: $F_1 \cap F_i = \emptyset$, $i = 2, 3, 4$; $F_2 \cap F_3 = \emptyset$; каждая точка из F_2 входит в некоторое множество из F_4 ; $F_3 \cap F_4 \neq \emptyset$, если не пусто множество F_4 , при этом если $B_0 \in F_3$, $B_1 \in F_4$ и $B_0 \cap B_1 \neq \emptyset$, то множество $B_0 \cap B_1$ не содержит связных подмножеств.

Используя результаты 5.6, 5.7, 5.8, легко теперь изучить поведение δ -квазинизометрии на множествах F_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nakai M. Radon-NicoJim densities and Jacobians. — Pacific J. of Math., 1972, v. 40, № 2, p. 375—396.
2. Куратовский К. Топология. Т. 1. — М.: Мир, 1966. — 596 с. Т. 2. — М.: Мир, 1969. — 624 с.
3. Кармазин А. П. О граничном поведении квазинизометрических отображений. — СМЖ, 1980, т. 21, № 1, с. 82—85.
4. Кармазин А. П. О непрерывном продолжении квазинизометрических отображений на границу — В кн. Экстремальные задачи теории функций. Томск: Изд-во Том ун-та, 1980, с. 52—61.
5. Кармазин А. П. Плоские квазинизометрии и простые концы. — В кн. Экстремальные задачи теории функций. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983, с. 15—35.
6. Кармазин А. П. Простые концы и пространственные квазинизометрии. — Томск, 1982. — 47 с. — Рукопись представлена Томским ун-том. Деп. в ВИНТИ, № 1803-82.
7. Латфуллин Т. Г. О существовании квазинизометрических отображений — Тюмень, 1982. — 4 с. — Рукопись представлена Тюменским ун-том. Деп. в ВИНТИ, № 3684-82.

8. Латфуллин Т. Г. О продолжении квазиизометрических отображений. — СМЖ, 1983, т. 24, № 4, с. 212—216.

9. Овчинников И. С. Простые концы одного класса пространственных отображений. — Вопросы геометрической теории функций: Тр./Том. ун-т, 1966, т. 189, вып. 4, с. 96—103.

10. Овчинников И. С. Об одном аналоге теоремы Линдслёфа для пространственных областей. — Метрические вопросы теории функций и отображений Киев: Наукова думка, 1968, вып. 1, с. 184—201.

11. Väisälä J. Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings — Lecture Notes in Mathematic, v. 229, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.

12. Näkki R. Boundary behavior of quasiconformal mappings in n -space. — Ann. Acad. Sci. Fenn., AI, 484, 1970, p. 1—50.

13. Näkki R. Continuous boundary extension of quasiconformal mappings — Ann. Acad. Sci. Fenn., AI, 511, 1972, p. 511—520.

14. Vuorinen M. Exceptional sets and boundary behavior of quasiconformal mappings in n -space. — Ann. Acad. Sci. Fenn., AI, Math., Dissertations, 1976, p. 1—44.

15. Näkki R. Prime ends and quasiconformal mappings — J. d-analyse Math., v. 35, 1979, p. 13—40.

16. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств — М.: Мир, 1971. — 312 с.

17. Caratheodory C. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. — Math. Ann., 73, 1913, S. 323—370.

18. Суворов Г. Д. Метрическая теория простых концов и граничные свойства плоских отображений с ограниченными интегралами Дирихле. — Киев: Наукова думка, 1981 — 168 с.

О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ТОЧЕЧНО-СЧЕТНЫХ СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ

А. Г. Лейдерман

Важное место в изучении топологии функциональных пространств занимает исследование компактов X , для которых пространство всех непрерывных вещественных функций с топологией поточечной сходимости $C_p(X)$ является линделёфовым Σ -пространством. Как показывают результаты работы [3], структура этих компактов полностью описывается некоторыми слабо σ -точечно-конечными семействами множеств, поэтому рассмотрение свойств таких семейств представляет и самостоятельный интерес.

Наша терминология стандартна [2]: ω обозначает первый бесконечный ординал, R — вещественная прямая, все пространства предполагаются вполне регулярными.

Напомним, что пространство Y называется линделёфовым Σ -пространством, если в нем существует счетное семейство замкнутых подмножеств $\{F_n: n \in \omega\}$ такое, что при любом $y \in Y$ множество $B_y = \bigcap \{F_n\}_{\beta y: y \in F_n}$ непусто и лежит в Y , где βY — стоун-цевское расширение Y .

Определение 1 [3]. Семейство γ множеств из X называется слабо σ -точечно-конечным, если $\gamma = \bigcup \{\gamma_n: n \in \omega\}$, причем для любого $x \in X$ выполняется $\bigcup \{\gamma_n: n \in N_x\} = \gamma$, где $N_x = \{n \in \omega: \text{Кр}_x \gamma_n = |\{U \in \gamma_n: x \in U\}| < \omega\}$.

Ясно, что всякое точечно-конечное семейство является слабо σ -точечно-конечным, которое, в свою очередь, точечно-счетно.

По аналогии с тем, как В. В. Ткачук в [1] определил точечно-конечную клеточность $p(X)$ пространства X , дадим

Определение 2. $\omega \leq p(X) = \min \{\tau \geq \omega: \text{всякое слабо } \sigma\text{-точечно-конечное семейство непустых открытых подмножеств } X \text{ имеет мощность не больше } \tau\}$.

Лемма 3. Пусть $\gamma = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$ — слабо σ -точечно-конечное семейство множеств из X , $|A| = \tau = \text{cf}(\tau) > \omega$. Тогда

существует подсемейство $\gamma' = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ из γ и множество точек $\{x_\alpha : \alpha \in B\}$ такие, что $x_\alpha \in U_\alpha$, $|B| = \tau$ и $\text{Кр}_{x_\alpha} \gamma' < \omega$ для любого $\alpha \in B$.

Доказательство. Зафиксируем разбиение $\gamma = \bigcup \{\gamma_n : n \in \omega\}$, как в определении 1. Выберем для всякого $U_\alpha \in \gamma$ произвольное $x_\alpha \in U_\alpha$. Поставим α в соответствие некоторое $n(\alpha) \in N_{x_\alpha}$, для которого $U_\alpha \in \gamma_{n(\alpha)}$, тогда $\text{Кр}_{x_\alpha} \gamma_{n(\alpha)} < \omega$. Найдётся $n_0 \in \omega$ такое, что $n(\alpha) = n_0$ для любого $\alpha \in B \subset A$, причем $|B| = \tau$. Пусть $\gamma' = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$. Из выбора B видно, что $\text{Кр}_{x_\alpha} \gamma' < \omega$.

В. В. Ткачуком доказано, что $p(X) \leq s(X)$. Здесь $s(X) = \sup \{|Y| : Y \text{ — дискретное подпространство } X\}$ — спред пространства X . Отметим, что этот результат неявно содержится в ряде более ранних работ А. В. Архангельского, Н. В. Величко, Б. Э. Шапировского.

Докажем для $\text{шпр}(X)$ аналогичное неравенство.

Предложение 4. Для произвольного пространства X выполняется $\text{шпр}(X) \leq s(X)$.

Доказательство. Если $\text{шпр}(X) = \omega$, то доказывать нечего. Пусть γ — слабо σ -точечно-конечное семейство открытых множеств X , $|\gamma| = \tau = \text{cf}(\tau) > \omega$. Выберем в γ подсемейство γ' и множество $Y = \{x_\alpha : \alpha \in B\}$, как в лемме 3. Рассмотрим семейство непустых открытых в Y множеств $\mu = \{V_\alpha : \alpha \in B\}$, где $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$. Пусть $\alpha \in B$ произвольно. Если $U_\alpha \cap Y = U_\beta \cap Y$, то $x_\alpha \in U_\beta$. Так как $\text{Кр}_{x_\alpha} \gamma' < \omega$, то мощность попарно различных элементов μ равна τ ; μ — точечно-конечно в силу того, что $p(Y) < s(Y)$, получаем $|\mu| \leq p(Y) < s(Y)$. Ясно, что $s(Y) \leq s(X)$, значит, $|\gamma| \leq s(X)$.

Следующая теорема — аналог теоремы о том, что $p(X) = \sup \{\tau : A_\tau \subset C_p(X)\}$, где A_τ — компакт с единственной неизолированной точкой, $|A_\tau| = \tau$ [1].

Теорема 5. $\text{шпр}(X) = \sup \{\tau : L_\tau \subset C_p(X)\}$, где L_τ — неколороз линделёфово Σ -пространство с единственной неизолированной точкой, $|L_\tau| = \tau$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\text{шпр}(X) \geq \sup \{\tau : L_\tau \subset C_p(X)\}$. Предположим противное, пусть $\text{шпр}(X) = \tau$ и $Y \simeq L_{\tau+} \subset C_p(X)$. Ввиду однородности $C_p(X)$ можно предполагать, что нулевая функция θ есть единственная неизолированная точка Y . Для каждой функции $f \in Y \setminus \{\theta\}$ найдется число $m = m(f) \in \omega$ такое, что $f^{-1}\left(R \setminus \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right]\right) \neq \emptyset$.

$\frac{1}{m} \Big] \Big) \neq \emptyset$. Так как $|Y \setminus \{\Theta\}| = \tau^+ = \text{cf}(\tau^+)$, то найдется $m \in \omega$, для которого $|\{f \in Y \setminus \{\Theta\} : m(f) = m\}| = \tau^+$. Положим $T = \{f \in Y \setminus \{\Theta\} : m(f) = m\}$. Так как $T \cup \{\Theta\}$ — линделёфово Σ -пространство, а T дискретно, существует разбиение $T = \bigcup \{T_n : n \in \omega\}$ такое, что $T = \bigcup \{T_n : n \in N_U\}$, где $N_U = \{n \in \omega : |T_n \setminus U| < \omega\}$ для любой окрестности U точки Θ .

Положим $\gamma_n^m = \left\{ f^{-1} \left(R \setminus \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m} \right] \right) : f \in T_n \right\}$, $\gamma^m = \bigcup \{\gamma_n^m : n \in \omega\}$. Докажем, что γ^m — слабо σ -точечно-конечное семейство. Пусть $x \in X$. Зададим окрестность Θ в $C_p(X)$: $U = \left\{ f \in C_p(X) : |f(x)| < \frac{1}{m} \right\}$. Для любого $n \in N_U$ выполняется

$|\{W \in \gamma_n^m : x \in W\}| = \left| \left\{ f \in T_n : x \in f^{-1} \left(R \setminus \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m} \right] \right) \right\} \right| = |T \setminus U| < \omega$. Отсюда вытекает, что $\text{Krx} \gamma_n^m < \omega$ для любого $n \in N_U$, а также $|\gamma^m| = \tau^+$. Так как $\gamma^m = \bigcup \{\gamma_n^m : n \in N_U\}$, то получили противоречие с нашим предположением.

Обратное неравенство будем доказывать также от противного. Пусть γ — слабо σ -точечно-конечное семейство открытых множеств X и $|\gamma| = \tau^+$. Пусть $\gamma' = \{U_\alpha : \alpha \in B\} \subset \gamma$ и $\{x_\alpha : \alpha \in B\} \subset X$, как в лемме 3. Семейство γ' слабо σ -точечно-конечно, пусть $\gamma' = \bigcup \{\gamma'_n : n \in \omega\}$ — его разбиение, замкнутое относительно конечных объединений. Зафиксируем для каждого $\alpha \in B$ функцию $f_\alpha \in C_p(X)$, для которой $f_\alpha(x_\alpha) = 1$ и $f_\alpha(X \setminus U_\alpha) = \{0\}$. Пусть $T = \{f_\alpha : U_\alpha \in \gamma'\}$, $T_n = \{f_\alpha : U_\alpha \in \gamma'_n\}$. Положим $Y = T \cup \{\Theta\}$ — подпространство $C_p(X)$. Докажем, что:

- а) $|Y| = \tau^+$;
- б) любая точка f_α изолирована в Y ;
- в) Y — линделёфово Σ -пространство.

Проверим а и б одновременно. Возьмем произвольную точку $f_\alpha \in T$. Выберем ее окрестность $V_\alpha = \{f \in Y : f(x) > 0\}$. Если $f_\beta \in V_\alpha$, то $x_\alpha \in f_\beta^{-1}(0)$, т. е. $x_\alpha \in U_\beta$. Так как $\text{Krx}_{x_\alpha} \gamma' < \omega$, то отсюда сразу же следует, что множество всех f_β , тождественно равных f_α , конечно, более того, V_α состоит из конечного числа точек, поэтому $|Y| = \tau^+$, а f_α изолирована в Y .

Чтобы доказать в, достаточно установить $T = \bigcup \{T_n : n \in N_V\}$, где $N_V = \{n \in \omega : |T_n \setminus V| < \omega\}$ для любой окрестно-

сти V точки Θ в Y . Можно считать, что окрестность V имеет вид $V = \{f \in Y : |f(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, \kappa; \varepsilon > 0\}$. Нам нужно показать, что для любого $U \in \gamma'$ существует $n \in \omega$ такое, что $U \in \gamma'_n$; $|T_n \setminus V| < \omega$. Для каждого $i = 1, \dots, \kappa$ существует $n_i \in \omega$ такое, что $U \in \gamma'_{n_i}$, а $\text{Kp}_{x_i} \gamma'_{n_i} < \omega$. Найдется $n \in \omega$, для которого $U \in \gamma'_n$, $\text{Kp}_{x_i} \gamma'_n < \omega$ для любого $i = 1, \dots, \kappa$. Тогда

$$T_n \setminus V \subset \bigcup_{i=1}^{\kappa} \{f_a \in T_n : f_a(x_i) \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^{\kappa} \{f_a \in T_n : x_i \in U_a\}.$$

Последнее множество конечно в силу того, что $\text{Kp}_{x_i} \gamma'_n < \omega$ для любого $i = 1, \dots, \kappa$. Теорема доказана.

Очевидно, $p(X) \leq \text{шзр}(X)$. Возникает

Задача. Существует ли X , для которого $p(X) / \text{шзр}(X)$?

В частных случаях нами получен ряд результатов. Доказательство следующей теоремы выходит за рамки этой работы

Теорема 6. Если X полно по Бэру, то $c(X) = p(X) = \text{шзр}(X)$.

Предложение 7. Если γ — слабо σ -точечно-конечное семейство множеств X и $|\gamma|$ — регулярный кардинал, больший 2^ω , то γ содержит точечно-конечное подсемейство γ' , $|\gamma'| = |\gamma|$, т. е. если $\text{шзр}(X) > 2^\omega$, то $p(X) = \text{шзр}(X)$.

Доказательство. Пусть $\gamma = \bigcup \{\gamma_n : n \in \omega\}$, как в определении 1. Обозначим через $N_U = \{n \in \omega : U \in \gamma_n\}$ для $U \in \gamma$. Найдется $N_0 \subset \omega$, для которого $|\gamma'| = |\gamma|$, где $\gamma' = \{U \in \gamma : N_U = N_0\}$.

Предложение 8. Существует пространство X и слабо σ -точечно-конечное семейство γ открытых множеств X , $|\gamma| = 2^\omega$, из которого нельзя извлечь несчетное точечно-конечное подсемейство.

Доказательство. Выберем из отрезка $[0, 1]$ множество T мощности 2^ω , которое не содержит ни одного несчетного компакта [2, гл. 3, задача 285 б]. Зафиксируем на T счетную базу $\{T_n : n \in \omega\}$. Для каждого $A \subset T$ положим $N_A = \{n \in \omega : |A \cap T_n| < \omega\}$. Пусть $E = \{A \subset T : \bigcup \{T_n : n \in N_A\} = T\}$. Положим $X = \{\chi_A : A \in E\} \subset D^T$, где χ_A — характеристическая функция множества A . Зададим семейство $\gamma = \{U_t : t \in T\}$, где $U_t = \{x \in X : x(t) = 1\}$. Нетрудно видеть, $\gamma = \bigcup \{\gamma_n : n \in \omega\}$ — слабо σ -точечно-конечное семейство, где $\gamma_n = \{U_t : t \in T_n\}$.

Предположим теперь, что существует несчетное $T' \subset T$ такое, что $\gamma' = \{U_t : t \in T'\}$ точечно-конечно. Так как $T' \subset T$, $|T'| > \omega$, а $|T'|$ — компакт, то $|T'| \not\subset T$, причем замыкание T' берется в $[0, 1]$. Пусть $s \in |T'| \setminus T$. Выберем последовательность $\{t_n : n \in \omega\} \subset T'$, сходящуюся к точке s . Множество $A = \{t_n : n \in \omega\}$ принадлежит E .

В самом деле, A замкнуто и дискретно в T . Для любой точки $t \in T$ существует базисное открытое множество $T_{n(t)}$, для которого $|U_{n(t)} \cap A| \leq 1$. Значит, $\bigcup \{T_n : n \in N_A\} = T$. Итак, $x = \chi_A \in X$, $x \in \bigcap \{U_{t_n} : n \in \omega\}$, т. е. γ' не точечно-конечно, предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ткачук В. В. Об одном супертопологическом кардинальном инварианте. — Вестник МГУ, сер. мат.-мех., 1984, № 4, с. 26—29.
2. Архангельский А. В., Пономарёв В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1974. — 424 с.
3. Sokolov G. A. On some classes of compact spaces lying in Σ -products. — Comment. Math. Univ. Carol., 1984, v. 25, № 2, p. 219—231.

К ЗАДАЧЕ О ПРОИЗВЕДЕНИИ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ

В. П. Мандик

Предлагаемая статья является продолжением работы [1], посвященной обобщению задачи о произведении конформных радиусов на системы совместно p -листных функций. Вопрос о точности полученных оценок ввиду громоздкости выкладок не приводится, хотя, как известно, в некоторых весьма частных случаях экстремальные функции существуют (см., например, [2], [3]).

Пусть $n(w, f, \Delta)$ — число корней уравнения $f(z) = w$, лежащих в Δ , с учетом их кратности и p -натуральное число. Систему $\{f_\kappa\}_1^N$ ($N = 2, 3, \dots$) мероморфных в $E = \{z: |z| < 1\}$ функций $f_\kappa(z)$ ($\kappa = 1, \dots, N$) назовем совместно p -листной, если $\forall w \in \bar{C}_w, \sum_{\kappa=1}^N n(w, f_\kappa, E) \leq p$, где $\bar{C}_w$ — расширенная

комплексная плоскость переменной w . Будем рассматривать только такие системы $\{f_\kappa\}_1^N$ совместно p -листных функций, в которых все функции $f_\kappa(z)$ ($\kappa = 1, \dots, N$) p -лисны. Для определенности положим $n(f_\kappa(0), f_\kappa, E) = p$ ($\kappa = 1, \dots, N$). Пусть $a_\kappa = f_\kappa(0)$. Очевидно, $f_l(z) \neq a_\kappa$ при $l \neq \kappa, z \in E$. Предполагая $z = 0$ корнем кратности q_κ ($1 \leq q_\kappa \leq p$) уравнения $f_\kappa(z) = a_\kappa$, обозначим через $z_q^{(\kappa)}$ ($z_q^{(\kappa)} \in E, q = 1, \dots, p - q_\kappa$) остальные корни этого уравнения. Фиксируя a_κ и $z_q^{(\kappa)}$, получим класс систем совместно p -листных функций, который обозначим символом $M_p(a_1, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)})$.

Определим функции $\varphi_\kappa(z)$ ($\kappa = 1, \dots, N$):

$$\varphi_\kappa(z) = \begin{cases} z^{q_\kappa} f_\kappa(z), & \text{если } a_\kappa = \infty; \\ z^{-q_\kappa} (f_\kappa(z) - a_\kappa), & \text{если } a_\kappa \neq \infty. \end{cases} \quad (1)$$

Тогда, очевидно, $\forall \kappa = 1, \dots, N \quad \varphi_\kappa(0) \neq 0; \infty$.

Пусть теперь $\{f_\kappa\}_1^N \in M_p(\infty, a_2, \dots, a_N; z_j^{(\kappa)})$ и γ_κ ($\kappa=1, \dots, N$) — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условиям:

$$\sum_{\kappa=1}^N \gamma_\kappa = 0; \quad \sum_{\kappa=1}^N |\gamma_\kappa| \neq 0.$$

Положим

$$\begin{aligned} \Phi(f_1(z)) &= \sum_{j=2}^N \gamma_j \ln \left[\frac{f_1(z) - a_j}{\varphi_1(0)} A_1(z) \right] = \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q^{(1)} z^q; \\ \Phi(f_\kappa(z)) &= \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq \kappa}}^N \gamma_j \ln \frac{f_\kappa(z) - a_j}{a_\kappa - a_j} + \gamma_\kappa \ln \frac{f_\kappa(z) - a_\kappa}{\varphi_\kappa(0) A_\kappa(z)} = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q^{(\kappa)} z^q \quad (\kappa = 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (2)$$

где $A_\kappa(z) = z^{q_\kappa} \prod_{q=1}^{p-q_\kappa} \left(1 - \frac{z}{z_q^{(\kappa)}}\right)$, причем при $q_\kappa = p$ полагаем $A_\kappa(z) = z^p$.

Тогда, как показано в [1, формула (5)], имеет место неравенство

$$\sum_{\kappa=1}^N \sum_{q=1}^{\infty} q |\beta_q^{(\kappa)}|^2 \leq B(p). \quad (3)$$

Здесь

$$B(p) = 2p \ln \left\{ |\varphi_1(0)|^{\gamma_1^2} \cdot \prod_{n=2}^N |\varphi_n(0)|^{-\gamma_n^2} \cdot \prod_{2 \leq j < \kappa \leq N} |a_\kappa - a_j|^{-2\gamma_\kappa \gamma_j} \cdot C \right\},$$

где

$$C = \prod_{\kappa=1}^N \left(\prod_{q=1}^{p-q_\kappa} |z_q^{(\kappa)}| \gamma_\kappa^2 \cdot \prod_{q,m=1}^{p-q_\kappa} |1 - \bar{z}_q^{(\kappa)} z_m^{(\kappa)}|^{-\gamma_\kappa^2/2p} \right),$$

величины $|a_\kappa - a_j|$ при $N=2$ и величину $|1 - \bar{z}_q^{(\kappa)} z_m^{(\kappa)}|$ при $q_\kappa = p$ ($\kappa=1, \dots, N$) следует заменить единицами.

Теорема 1. Пусть $\{f_\kappa\}_1^N \in M_p(\infty, a_2, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)})$ и z_κ ($\kappa=1, \dots, N$) — любые точки из E . Тогда

$$\sum_{\kappa=1}^N \left[|\Phi(f_{\kappa}(z_{\kappa}))|^2 \left(\ln \frac{1}{1-|z_{\kappa}|^2} \right)^{-1} \right] \leq B(p).$$

Доказательство. Применяя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$|\Phi(f_{\kappa}(z))|^2 = \left| \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q^{(\kappa)} z^q \right|^2 \leq \sum_{q=1}^{\infty} q |\beta_q^{(\kappa)}|^2 \times \\ \times \sum_{q=1}^{\infty} \frac{|z|^{2q}}{q} \quad (\kappa = 1, \dots, N),$$

откуда $\forall z_{\kappa}, z_{\kappa} \in E$, следует оценка

$$|\Phi(f_{\kappa}(z_{\kappa}))|^2 \left(\ln \frac{1}{1-|z_{\kappa}|^2} \right)^{-1} \leq \sum_{q=1}^{\infty} q |\beta_q^{(\kappa)}|^2.$$

Суммируя эти неравенства по всем $\kappa (\kappa = 1, \dots, N)$ и применяя (3), получим утверждение теоремы.

При $N = 2, p = 1, \gamma_1 = -\gamma_2 = 1$ из теоремы 1 следует результат Н. А. Лебедева [2, с. 230].

Пусть теперь $\{f_{\kappa}\}_1^N \in M_p(a_1, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)})$, причем $a_{\kappa} \neq \infty (\kappa = 1, \dots, N)$. Тогда

$$\left\{ \frac{1}{f_{\kappa} - a_1} \right\}_1^N \in M_p \left(\infty, \frac{1}{a_2 - a_1}, \dots, \frac{1}{a_N - a_1}; z_q^{(\kappa)} \right)$$

и из теоремы 1 вытекает неравенство

$$\sum_{\kappa=1}^N \left[|\tilde{\Phi}(f_{\kappa}(z_{\kappa}))|^2 \left(\ln \frac{1}{1-|z_{\kappa}|^2} \right)^{-1} \right] \leq \tilde{B}(p), \quad (4)$$

где $z_{\kappa} \in E$;

$$\tilde{\Phi}(f_{\kappa}(z)) = \Phi \left(\frac{1}{f_{\kappa}(z) - a_1} \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \kappa}}^N \gamma_j \ln \frac{f_{\kappa}(z) - a_j}{a_{\kappa} - a_j} + \\ + \gamma_{\kappa} \ln \frac{f_{\kappa}(z) - a_{\kappa}}{\varphi_{\kappa}(0) A_{\kappa}(z)}$$

$$\tilde{B}(p) = 2p \ln \left\{ \prod_{\kappa=1}^N |\tilde{\varphi}_{\kappa}(0)|^{-\gamma_{\kappa}^2} \cdot \prod_{1 \leq j < \kappa \leq N} |a_{\kappa} - a_j|^{-2\gamma_{\kappa}\gamma_j} \cdot C \right\}$$

$$\text{и } \tilde{\varphi}_{\kappa}(z) = z^{-\gamma_{\kappa}} (f_{\kappa}(z) - a_{\kappa}), \quad \kappa = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Следствие 1. Пусть $\{f_\kappa\}_1^N \in M_p(a_1, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)})$ и $x_\kappa = \text{sign}(q_\kappa - 1)$. Тогда:

1) если $a_1 = \infty$, то

$$\sum_{\kappa=1}^N x_\kappa \left| \gamma_\kappa \frac{\varphi'_\kappa(0)}{\varphi_\kappa(0)} \right|^2 + (1 - x_1) \left| \sum_{j=2}^N \gamma_j \frac{\varphi'_1(0) - a_j}{\varphi_1(0)} \right|^2 + \\ + \sum_{\kappa=2}^N \left\{ (1 - x_\kappa) \left| \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq \kappa}}^N \gamma_j \frac{\varphi_\kappa(0)}{a_\kappa - a_j} + \gamma_\kappa \frac{\varphi'_\kappa(0)}{\varphi_\kappa(0)} \right|^2 \right\} \leq B(p),$$

где φ_κ определяются формулами (1);

2) если $a_\kappa \neq \infty$ ($\kappa = 1, \dots, N$), то

$$\sum_{\kappa=1}^N x_\kappa \left| \gamma_\kappa \frac{\tilde{\varphi}'_\kappa(0)}{\tilde{\varphi}_\kappa(0)} \right|^2 + \sum_{\kappa=1}^N \left\{ (1 - x_\kappa) \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \kappa}}^N \gamma_j \frac{\tilde{\varphi}_\kappa(0)}{a_\kappa - a_j} + \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_\kappa \frac{\tilde{\varphi}'_\kappa(0)}{\tilde{\varphi}_\kappa(0)} \right|^2 \right\} \leq \tilde{B}(p),$$

где $\tilde{\varphi}_\kappa$ определяются формулами (5).

Доказательство. Пусть $\{f_\kappa\}_1^N \in M_p(\infty, a_2, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)})$. Рассмотрим величину

$$D_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \left| \Phi(f_1(z)) \right|^2 \cdot \left(\ln \frac{1}{1 - |z|^2} \right)^{-1} \right\} = \\ = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \left| \sum_{j=2}^N \gamma_j \ln \left(\frac{f_1(z) - a_j}{\varphi_1(0)} A_1(z) \right) \right|^2 \cdot \left(\ln \frac{1}{1 - |z|^2} \right)^{-1} \right\} = \\ = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \left| \sum_{j=2}^N \gamma_j \ln \left(\frac{\varphi_1(z) - a_j z^{q_1}}{\varphi_1(0)} \right) \right|^2 \cdot \left(\ln \frac{1}{1 - |z|^2} \right)^{-1} \right\}.$$

Пусть $q_1 > 1$. Тогда

$$D_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \left| \sum_{j=2}^N \gamma_j \left(\frac{\varphi'_1(0)}{\varphi_1(0)} z + d_2 z^2 + \dots \right) \right|^2 \times \right. \\ \left. \times \left(|z|^2 + \frac{|z|^4}{2} + \dots \right)^{-1} \right\} = \left| \gamma_1 \frac{\varphi'_1(0)}{\varphi_1(0)} \right|^2.$$

Если $q_1 = 1$, то получим

$$D_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \left| \sum_{j=2}^N \gamma_j \left(\frac{\varphi'_1(0) - a_j}{\varphi_1(0)} z + d_2 z^2 + \dots \right) \right|^2 \times \right. \\ \left. \times \left(|z|^2 + \frac{|z|^4}{2} + \dots \right)^{-1} \right\} = \left| \sum_{j=2}^N \gamma_j \frac{\varphi'_1(0) - a_j}{\varphi_1(0)} \right|^2.$$

Аналогично при рассмотрении величины

$$D_\kappa = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ |\Phi(f_\kappa(z))|^2 \left(\ln \frac{1}{1 - |z|^2} \right)^{-1} \right\} \quad (\kappa = 2, \dots, N)$$

будем иметь

$$D_\kappa = \left| \gamma_\kappa \frac{\varphi'_\kappa(0)}{\varphi_\kappa(0)} \right|^2, \text{ если } q_\kappa > 1; \\ D_\kappa = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq \kappa}}^N \gamma_j \frac{\varphi_\kappa(0)}{a_\kappa - a_j} + \gamma_\kappa \frac{\varphi'_\kappa(0)}{\varphi_\kappa(0)}, \text{ если } q_\kappa = 1.$$

Суммируя по всем κ ($\kappa = 1, \dots, N$) и применяя теорему 1, получим

$$\sum_{\kappa=1}^N D_\kappa = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{\kappa=1}^N \left[|\Phi(f_\kappa(z))| \left(\ln \frac{1}{1 - |z|^2} \right)^{-1} \right] \leq B(p),$$

что и дает первую оценку следствия.

Вторая оценка вытекает из (4) при аналогичном рассмотрении величины

$$\tilde{D}_\kappa = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \left| \tilde{\Phi}(f_\kappa(z)) \left(\ln \frac{1}{1 - |z|^2} \right)^{-1} \right| \right\} \quad (\kappa = 1, \dots, N).$$

Используя простейшие неравенства, из следствия 1 легко получим

Следствие 2. Пусть $\{f_\kappa\}_1^N \in M_p(a_1, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)})$, $a_\kappa \neq \infty$ ($\kappa = 1, \dots, N$) и α_κ , $|\alpha_\kappa| = 1$, — произвольные комплексные числа. Тогда

$$\sum_{1 \leq j < \kappa \leq N} \prod_{l=j, \kappa} \left| x_l \gamma_l \frac{\tilde{\varphi}'_l(0)}{\tilde{\varphi}_l(0)} + (1 - x_l) \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \gamma_l \frac{\tilde{\varphi}_l(0)}{a_l - a_l} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left| \gamma_l \frac{\tilde{\varphi}'_l(0)}{\tilde{\varphi}_l(0)} \right| \leq \frac{\tilde{B}(p)}{2}; \\
& \left| \sum_{\kappa=1}^N \alpha_{\kappa} \left[x_{\kappa} \gamma_{\kappa} \frac{\tilde{\varphi}'_{\kappa}(0)}{\tilde{\varphi}_{\kappa}(0)} + (1 - x_{\kappa}) \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \kappa}}^N \gamma_j \frac{\tilde{\varphi}_{\kappa}(0)}{a_{\kappa} - a_j} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \gamma_{\kappa} \frac{\tilde{\varphi}'_{\kappa}(0)}{\tilde{\varphi}_{\kappa}(0)} \right) \right] \right|^2 \leq 2\tilde{B}(p).
\end{aligned}$$

Отметим частные случаи последних оценок. Пусть $q_{\kappa} = p$ ($\kappa = 1, \dots, N$), тогда

$$\begin{aligned}
f_{\kappa}(z) &= a_{\kappa} + a_{p+1}^{(\kappa)} z^p + a_{p+1}^{(\kappa)} z^{p+1} + \dots; \\
\tilde{\varphi}_{\kappa}(0) &= a_p^{(\kappa)}, \quad \tilde{\varphi}'_{\kappa}(0) = a_{p+1}^{(\kappa)}; \\
\tilde{B}(p) &= 2p \ln \left\{ \prod_{\kappa=1}^N |a_p^{(\kappa)}|^{-\gamma_{\kappa}^2} \prod_{1 \leq j < \kappa \leq N} |a_{\kappa} - a_j|^{-2\gamma_{\kappa}\gamma_j} \right\},
\end{aligned}$$

а из следствия 2 получим:

а) при $p = 1$

$$\begin{aligned}
& \sum_{1 \leq j < \kappa \leq N} \prod_{l=j, \kappa} \left| \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \gamma_l \frac{a_1^{(l)}}{a_l - a_l} + \gamma_l \frac{a_2^{(l)}}{a_1^{(l)}} \right| \leq \frac{\tilde{B}(1)}{2}; \\
& \left| \sum_{\kappa=1}^N \alpha_{\kappa} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \kappa}}^N \gamma_j \frac{a_1^{(\kappa)}}{a_{\kappa} - a_j} + \gamma_{\kappa} \frac{a_2^{(\kappa)}}{a_1^{(\kappa)}} \right) \right|^2 \leq 2\tilde{B}(1);
\end{aligned}$$

б) при $p > 1$

$$\begin{aligned}
& \sum_{1 \leq j < \kappa \leq N} \prod_{l=j, \kappa} \left| \gamma_l \frac{a_{p+1}^{(l)}}{a_p^{(l)}} \right| \leq \frac{\tilde{B}(p)}{2}; \\
& \left| \sum_{\kappa=1}^N \alpha_{\kappa} \gamma_{\kappa} \frac{a_{p+1}^{(\kappa)}}{a_p^{(\kappa)}} \right|^2 \leq 2\tilde{B}(p).
\end{aligned}$$

Пусть теперь $\{f_{\kappa}\}_1^N \in M_p(\infty, a_2, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)})$ и $\alpha_{\kappa}, |\alpha_{\kappa}| = 1$ ($\kappa = 1, \dots, N$), — произвольные комплексные числа. Положим $\forall \kappa$ ($\kappa = 1, \dots, N$):

$$\psi_{\kappa}(z) = \prod_{j=2}^N (f_{\kappa}(z) - a_j)^{\alpha_{\kappa} \tau_j} = (A_{\kappa}(z))^{\alpha_{\kappa} \tau_{\kappa}} \sum_{q=0}^{\infty} b_q^{(\kappa)} z^q, \quad (6)$$

где под $\psi_{\kappa}(z)$ понимаются произвольные однозначные ветви функции $\prod_{j=2}^N (f_{\kappa}(z) - a_j)^{\alpha_{\kappa} \tau_j}$ в односвязной области $\bar{C}_w \setminus \Gamma$ (Γ — разрез, соединяющий точки 0 и ∞).

Запишем следующие тождества:

$$\begin{aligned} \exp \{ \alpha_1 \Phi(f_1(z)) \} &= \psi_1(z) \left(\frac{A_1(z)}{\varphi_1(0)} \right)^{-\alpha_1 \tau_1}; \\ \exp \{ \alpha_{\kappa} \Phi(f_{\kappa}(z)) \} &= \psi_{\kappa}(z) \cdot \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq \kappa}}^N (a_{\kappa} - a_j)^{-\alpha_{\kappa} \tau_j} \times \\ &\times (\varphi_{\kappa}(0) \cdot A_{\kappa}(z))^{-\alpha_{\kappa} \tau_{\kappa}} \quad (\kappa = 2, \dots, N). \end{aligned}$$

Через коэффициенты (2) и (6) эти тождества переписуются в виде

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \alpha_1 \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q^{(1)} z^q \right\} &= (\varphi_1(0))^{\alpha_1 \tau_1} \sum_{q=0}^{\infty} b_q^{(1)} z^q; \\ \exp \left\{ \alpha_{\kappa} \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q^{(\kappa)} z^q \right\} &= (\varphi_{\kappa}(0))^{-\alpha_{\kappa} \tau_{\kappa}} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq \kappa}}^N (a_{\kappa} - a_j)^{-\alpha_{\kappa} \tau_j} \times \\ &\times \sum_{q=0}^{\infty} b_q^{(\kappa)} z^q \quad (\kappa = 2, \dots, N). \end{aligned}$$

Применяя неравенство Лебедева — Милина [4, с. 49] к каждому из этих соотношений, получим

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv \sum_{q=0}^{\infty} |(\varphi_1(0))^{\alpha_1 \tau_1} b_q^{(1)}|^2 \cdot \frac{1}{d_q(\lambda)} \leq \exp \left\{ \frac{1}{\lambda} \sum_{q=1}^{\infty} q |\alpha_1 \beta_q^{(1)}|^2 \right\}; \\ R_{\kappa} &\equiv \sum_{q=0}^{\infty} \left| (\varphi_{\kappa}(0))^{-\alpha_{\kappa} \tau_{\kappa}} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq \kappa}}^N (a_{\kappa} - a_j)^{-\alpha_{\kappa} \tau_j} b_q^{(\kappa)} \right|^2 \cdot \frac{1}{d_q(\lambda)} \leq \\ &\leq \exp \left\{ \frac{1}{\lambda} \sum_{q=1}^{\infty} |\alpha_{\kappa} \beta_q^{(\kappa)}|^2 \right\} \quad (\kappa = 2, \dots, N), \end{aligned}$$

где коэффициенты $d_q(\lambda)$ определяются разложением

$$(1-z)^{-\lambda} = \sum_{q=0}^{\infty} d_q(\lambda) z^q, \quad z \in E.$$

Перемножая полученные неравенства почленно и применяя (3), находим

$$\prod_{\kappa=1}^N R_{\kappa} \leq \exp \left\{ \frac{1}{\lambda} B(p) \right\},$$

откуда непосредственно вытекает

Теорема 2. Пусть $\{f_{\kappa}\}_1^N \in M_p(\infty, a_2, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)})$ и функции $\psi_{\kappa}(z)$ ($\kappa = 1, \dots, N$) определяются с помощью (6). Тогда $\forall \lambda > 0$ справедливо неравенство

$$\prod_{\kappa=1}^N \sum_{q=0}^{\infty} \frac{|b_q^{(\kappa)}|^2}{d_q(\lambda)} \leq \left| (\varphi_1(0))^{\beta_1(\lambda)} \prod_{\kappa=2}^N (\varphi_{\kappa}(0))^{-\beta_{\kappa}(\lambda)} \times \right. \\ \left. \times \prod_{2 \leq j < \kappa \leq N} (a_{\kappa} - a_j)^{\beta_{\kappa j}(\lambda)} \cdot S_{\lambda} \right| \equiv T_{\lambda},$$

где $\beta_{\kappa}(\lambda) = 2\gamma_{\kappa}(\gamma_{\kappa}p/\lambda - \alpha)$; $\beta_{\kappa j}(\lambda) = 2\left(\alpha_{\kappa}\gamma_j + \alpha_j\gamma_{\kappa} - \frac{2p}{\lambda}\gamma_{\kappa}\gamma_j\right)$;

$$S_{\lambda} = \prod_{\kappa=1}^N \left(\prod_{q=1}^{p-q_{\kappa}} (z_q^{(\kappa)})^{-2p} \prod_{q,m=1}^{p-q_{\kappa}} (1 - \bar{z}_q^{(\kappa)} z_m^{(\kappa)}) \right)^{-\gamma_{\kappa}^2/\lambda}.$$

Следствие. Пусть $\{f_{\kappa}\}_1^N \in M_p(a_1, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)})$. Тогда:

а) если $a_1 = \infty$, то

$$\prod_{\kappa=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| (A_{\kappa}(\rho_{\kappa} e^{i\theta}))^{-\alpha_{\kappa}\gamma_{\kappa}} \prod_{j=2}^N (f_{\kappa}(\rho_{\kappa} e^{i\theta}) - a_j)^{\alpha_{\kappa}\gamma_j} \right|^2 d\theta \leq T_1;$$

б) если $a_{\kappa} \neq \infty$ ($\kappa = 1, \dots, N$), то

$$\prod_{\kappa=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| (A_{\kappa}(\rho_{\kappa} e^{i\theta}))^{-\alpha_{\kappa}\gamma_{\kappa}} \prod_{j=2}^N \left(\frac{f_{\kappa}(\rho_{\kappa} e^{i\theta}) - a_j}{f_{\kappa}(\rho_{\kappa} e^{i\theta}) - a_1} \right)^{\alpha_{\kappa}\gamma_j} \right|^2 d\theta \leq \\ \leq \left| \prod_{\kappa=1}^N (\varphi_{\kappa}(0))^{\beta_{\kappa}(1)} \times \prod_{1 \leq j < \kappa \leq N} (a_{\kappa} - a_j)^{\beta_{\kappa j}(1)} \cdot S_1 \right|.$$

Первое утверждение следствия непосредственно вытекает из теоремы 2 при $\lambda = 1$; второе — из первого, если учесть, что из $\{f_\kappa\}_1^N \in M_p(a_1, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)})$ следует

$$\left\{ \frac{1}{f_\kappa - a_1} \right\}_1^N \in M_p \left(\infty, \frac{1}{a_2 - a_1}, \dots, \frac{1}{a_N - a_1}; z_q^{(\kappa)} \right).$$

Теорема 3. Пусть $\{f_\kappa\}_1^N \in M_p(\infty, a_2, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)})$ и $\alpha_\kappa, |\alpha_\kappa| = 1$ ($\kappa = 1, \dots, N$), — произвольные комплексные числа. Тогда

$$\begin{aligned} T_1^{-1/2} \prod_{\kappa=1}^N | |(A_\kappa(z_\kappa))^{\alpha_\kappa \gamma_\kappa}| \cdot (1 - |z_\kappa|^2)^{1/2} | &\leq \\ &\leq \prod_{\kappa=1}^N \left| \prod_{j=2}^N (f_\kappa(z_\kappa) - a_j)^{\alpha_\kappa \gamma_j} \right| \leq T_1^{1/2} \prod_{\kappa=1}^N | |(A_\kappa(z_\kappa))^{\alpha_\kappa \gamma_\kappa}| \times \\ &\times (1 - |z_\kappa|^2)^{-1/2} |. \end{aligned}$$

Доказательство. Из (6) $\forall \kappa = 1, \dots, N$ и $z_\kappa \in E$ имеем

$$\begin{aligned} L_\kappa &= \prod_{j=2}^N | (f_\kappa(z_\kappa) - a_j)^{\alpha_\kappa \gamma_j} | \leq | (A_\kappa(z_\kappa))^{\alpha_\kappa \gamma_\kappa} | \times \\ &\times \sum_{q=0}^{\infty} | b_q^{(\kappa)} | \cdot | z_\kappa |^q \leq | (A_\kappa(z_\kappa))^{\alpha_\kappa \gamma_\kappa} | \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} | b_q^{(\kappa)} |^2 \right)^{1/2} \cdot (1 - |z_\kappa|^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Перемножая эти неравенства по всем κ и применяя теорему 2 при $\lambda = 1$, получим верхнюю оценку

$$\prod_{\kappa=1}^N L_\kappa \leq \prod_{\kappa=1}^N | |(A_\kappa(z_\kappa))^{\alpha_\kappa \gamma_\kappa}| \cdot (1 - |z_\kappa|^2)^{-1/2} | \cdot T_1^{1/2}.$$

Перепишывая последнее неравенство в виде

$$\prod_{\kappa=1}^N L_\kappa^{-1} \geq \prod_{\kappa=1}^N | |(A_\kappa(z_\kappa))^{-\alpha_\kappa \gamma_\kappa}| \cdot (1 - |z_\kappa|^2)^{1/2} | \cdot T_1^{-1/2}$$

и переобозначая $-\alpha_\kappa$ через α_κ (используя произвольность последней), получим нижнюю оценку.

В заключение отметим, что если класс $M_p^A(a_1, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)}) \subset M_p(a_1, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)})$ состоит из систем функций $\{f_\kappa\}_1^N$, для которых $|f_\kappa(z)| < A$ ($\forall \kappa = 1, \dots, N; \forall z \in E$), то, присоединяя к каждой такой системе, например, функцию $f_0(z) = Az^{-p}$, получим, что $\{f_\kappa\}_0^N \in M_p(\infty, a_1, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)})$.

Используя это свойство, полученные результаты легко распространить на класс систем ограниченных совместно p -листных функций $M_p^A(a_1, \dots, a_N; z_q^{(\kappa)})$. Частный случай $q_\kappa = p$ ($\kappa = 1, \dots, N$) был рассмотрен в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандик В. П. Обобщение задачи о произведении конформных радиусов на системы многолистных областей. — В кн. Экстремальные задачи теории функций. 5. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986, с. 32—37.
2. Лебедев Н. А. Принцип площадей в теории однолистных функций. — М.: Наука, 1975. — 336 с.
3. Алсницын Ю. Е. О функциях без общих значений и внешней границе области значений функции. — Мат. сб., 1958, т. 46, № 4, с. 373—388.
4. Милин И. М. Однолистные функции и ортонормированные системы. — М.: Наука, 1971. — 128 с.
5. Мандик В. П., Никульшина М. Н. О функциях, совместно p -листных в круге. — В кн.: Экстремальные задачи теории функций. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983, с. 36—46.

ТОРЫ ВРАЩЕНИЯ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. А. Пешкичев

Развивается понятие тора в многомерном пространстве, введённое В. В. Кривовым [1] и использованное им для решения вопроса о коэффициентах квазиконформности (см. также более позднюю работу К. Хаг [2]). При этом используется методика, предложенная автором [3] для исследования торов в трехмерном пространстве.

Пусть E^n — n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, H_m — m -мерная мера Хаусдорфа в E^n ($1 \leq m \leq n$), совпадающая на m -мерных плоскостях в E^n с мерой Лебега L_m , σ_n — объем шара единичного радиуса в E^n . Для дифференцируемого отображения $f: E^n \rightarrow \gamma$, где γ — гладкая кривая в E^n , обозначим $\nabla f(x)$ градиент касательного отображения $df_x: E^n \rightarrow E^1$. Пусть также $\nabla_{n-1}\Phi(x)$ — n -мерный градиент [4] дифференцируемого отображения $\Phi: E^n \rightarrow E^{n-1}$. Наше обозначение кратных интегралов соответствует случаю $n=3$, однако результаты статьи остаются в силе при $n \geq 2$.

§ 1. Поворот в E^n и соответствующие результаты

Пусть $A_\varphi: E^n \rightarrow E^n$ — поворот вокруг $_{1(n-2)}$ -плоскости $\{x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 0\}$ на угол φ , $0 \leq \varphi < 2\pi$. Рассмотрим полугиперплоскость $P_0 = \{x_1 > 0, x_n = 0\}$ и окружность

$$C = \left\{ x_1^2 + x_n^2 = \frac{1}{4\pi^2}, x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 0 \right\}$$

единичной длины. Нам понадобятся также полугиперплоскости $A_\varphi(P_0)$ и окружности $C_y = \bigcup_{0 \leq \varphi < 2\pi} A_\varphi(y)$, $y \in P_0$. Для точки $x = C \cap A_\varphi(P_0)$ пусть $P_x = A_\varphi(P_0)$.

Л е м м а 1. Если $g(x)$ — измеримая функция, то

$$\int_{E^n} \int \int \frac{g(x) dx}{2\pi \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \oint_C H_1(dy) \int_{P_y} g(x) H_{n-1}(dx);$$

$$\int_{E^n} \int \int g(x) dx = \int_{P_0} \int L_{n-1}(dy) \oint_C g(x) H_1(dx).$$

Доказательство. Достаточно применить обобщенную теорему Фубини [5, с. 258] к следующим отображениям:

$$f = \frac{(x_1, 0, \dots, 0, x_n)}{2\pi \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} : E^n \setminus \{x_1 = x_n = 0\} \rightarrow C;$$

$$\Phi = (\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) : E^n \rightarrow P_0.$$

Определение 1. Пусть Φ -отображение из доказательства леммы 1. Вращением отображения $\Psi : P_0 \rightarrow E^{n-1}$ назовем отображение $F(x) = \Psi[\Phi(x)]$.

Л е м м а 2. Пусть в условиях определения 1 непрерывное отображение Ψ принадлежит одному из классов $W_p^1(P_0)$, $Lip(P_0)$, $C^k(P_0)$. Тогда отображение F принадлежит такому же классу в области $E^n \setminus \{x_1 = x_n = 0\}$, причем почти всюду в E^n

$$|\nabla_{n-1} F(x)| = \left(\left| \frac{\partial(\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})}{\partial(y_1, \dots, y_{n-1})} \right| \right)_{y=\Phi(x)}.$$

Доказательство. Принадлежность отображения F какому-нибудь из названных классов вытекает из бесконечной дифференцируемости отображения Φ в области $E^n \setminus \{x_1 = x_n = 0\}$. Заключительное тождество следует из свойств многомерного градиента [4].

§ 2. Торы вращения и обобщенные теоремы Гюльдина

Определение 2. Пусть G -область в полугиперплоскости P_0 , гомеоморфная гипершару $Q_R^r = \{(x_1 - R)^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 < r^2, x_n = 0\}$. Соответствующим ей заполненным тором вращения назовем множество $T_G = \bigcup_{0 \leq \varphi < 2\pi} A_\varphi(G)$. В частности, множество $T_R^r = T_{Q_R^r}$ назовем заполненным круговым тором вращения, $0 < r < R$.

Т е о р е м а 1 (первая обобщенная теорема Гюльдина). Если функция $g(t)$ непрерывна при $t \geq 0$, то

$$\iint\limits_{T_0} g(x_1^2 + \dots + x_n^2) dx = 2\pi \int_0^1 x_1 g(x_1^2) dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Доказательство. Пусть $G_y = T_0 \cap P_y$. Согласно лемме 1.

$$\iint\limits_{T_0} g(x_1^2 + \dots + x_n^2) dx = 2\pi \int_0^1 H_1(dy) \int\limits_{G_y} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} g(x_1^2 + \dots + x_n^2) H_{n-1}(dx).$$

Допустим, что точка $M_1(\tilde{x}_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ при повороте A_φ переходит в точку $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Так как расстояния при повороте сохраняются, то

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \tilde{x}_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2,$$

откуда $x_1^2 + x_n^2 = \tilde{x}_1^2$. Так как обобщенный якобиан отображения $A_\varphi/G: G \rightarrow G_y$ равен единице, то для всех $y \in C$

$$\int\limits_{G_y} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} g(x_1^2 + \dots + x_n^2) H_{n-1}(dx) = \int_0^1 \tilde{x}_1^2 g(\tilde{x}_1^2) d\tilde{x}_1 dx_2 \dots dx_{n-1}.$$

Остальное очевидно.

Следствие 1 (первая теорема Гюльдина). Для заполненного тора вращения

$$L_n(T_0) = 2\pi x_1^0 L_{n-1}(G),$$

где x_1^0 — среднее интегральное координаты x_1 по области G . В частности, для заполненного кругового тора вращения

$$L_n(T_R^r) = 2\pi \sigma_{n-1} R r^{n-1}.$$

Следствие 2. В условиях леммы 2

$$\begin{aligned} \iint\limits_{T_0} g(|\nabla_{n-1} F(x)|) dx &= 2\pi \int_0^1 y_1 g\left(\left|\frac{\partial(\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})}{\partial(y_1, \dots, y_{n-1})}\right|\right) \times \\ &\times H_{n-1}(dy). \end{aligned}$$

Пусть граница ∂G области $G \subset P_0$ является $(n-2)$ -поверхностью. Тогда граница

$$\partial T_0 = \bigcup_{0 < \varphi < 2\pi} A_\varphi(\partial G)$$

заполненного тора вращения является гиперповерхностью в E^n .

Теорема 2 (вторая обобщенная теорема Гюльдина). Если функция $g(t)$ непрерывна при $t \geq 0$, то для тора T_G с гладкой границей ∂T_G

$$\iint_{\partial T_G} g(x_1^2 + x_n^2) H_{n-1}(dx) = 2\pi \int_{\partial G} x_1 g(x_1^2) H_{n-2}(dx).$$

Доказательство. Согласно обобщенной теореме Фубини для интеграла по гиперповерхности [5, с. 258] имеем

$$\iint_{\partial T_G} \frac{g(x_1^2 + x_n^2) H_{n-1}(dx)}{2\pi \sqrt{x_1^2 + x_n^2}} = \oint_{\partial G} H_1(dy) \int_{\partial G_y} g(x_1^2 + x_n^2) H_{n-2}(dx).$$

Остается заметить, что в нашем случае

$$\int_{\partial G_y} g(x_1^2 + x_n^2) H_{n-2}(dx) = \int_{\partial G} g(x_1^2) H_{n-2}(dx).$$

Следствие (вторая теорема Гюльдина). Для рассмотренного в теореме 2 тора вращения

$$H_{n-1}(\partial T_G) = 2\pi x_1^0 H_{n-2}(\partial G),$$

где x_1^0 — интегральное среднее координаты x_1 по границе ∂G . В частности, для кругового тора вращения

$$H_{n-1}(\partial T_R^r) = 2\pi \sigma_{n-1} (n-1) R r^{n-2}.$$

§ 3. Модули семейств кривых и гиперповерхностей

С топологической точки зрения заполненный тор вращения T_G представляет собой гомеоморф прямого произведения гипершара и окружности, поэтому его фундаментальная группа $\pi_1(T_G)$ изоморфна аддитивной группе целых чисел. Пусть Γ — семейство всех кривых $\gamma \subset T_G$, представляющее собой образующую фундаментальной группы $\pi_1(T_G)$. Назовем гиперповерхностью в E^n гомеоморф гипершара и рассмотрим совокупность Σ всех H_{n-1} -спрямляемых (см. [5, с. 252]) гиперповерхностей $\sigma \subset T_G$, разрезающих тор T_G , т. е. пересекающих всякую кривую $\gamma \in \Gamma$.

Следуя Б. В. Шабату [6], рассмотрим модули семейств Γ и Σ :

$$\text{Mod } \Gamma = \inf_{\rho} \iiint_{T_G} \rho(x)^n dx, \quad \text{Mod } \Sigma = \inf_{\mu} \iiint_{T_G} \mu(x)^n dx,$$

где $\rho(x)$, $\mu(x)$ — такие неотрицательные борелевские функции, что для всех $\gamma \in \Gamma$, $\sigma \in \Sigma$

$$\oint_1 \rho(x) H_1(dx) \geq 1, \quad \iint_0 \mu(x)^{n-1} H_{n-1}(dx) \geq 1.$$

Теорема 3. Пусть T_G — заполненный тор вращения. Тогда

$$\text{Mod } \Gamma' = \frac{V(G)}{(2\pi)^{n-1}} = (\text{Mod } \Sigma)^{1-n},$$

где

$$V(G) = \int_0 \int_0 \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}}{x_1^{n-1}}.$$

Доказательство. Остановимся на вычислении $\text{Mod } \Sigma$, считая известной формулу для $\text{Mod } \Gamma'$. Согласно неравенству Гельдера

$$\begin{aligned} 2\pi \iint_0 \mu(x)^n \sqrt{x_1^2 + x_n^2} H_{n-1}(dx) &\geq \\ &\geq \left[\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \iint_0 \frac{H_{n-1}(dx)}{\sqrt{(x_1^2 + x_n^2)^{n-1}}} \right]^{\frac{1}{1-n}}. \end{aligned}$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что

$$\iint_0 \frac{H_{n-1}(dx)}{\sqrt{(x_1^2 + x_n^2)^{n-1}}} = \int_0 \int_0 \frac{L_{n-1}(dx)}{x_1^{n-1}} = V(G).$$

Значит, согласно лемме 1,

$$\text{Mod } \Sigma = \inf_{\mu} \int_0 \int_0 \int_0 \mu(x)^n dx \geq \frac{2\pi}{V(G)^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Для вывода противоположного неравенства рассмотрим отображение

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{n-1}): G \rightarrow E^{n-1},$$

заданное формулами:

$$\Psi_1 = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)x_1^{n-2}V(G)}, & n \neq 2; \\ \frac{\ln x_1}{V(G)}, & n = 2, \end{cases}$$

$$\Psi_2 = x_2, \dots, \Psi_{n-1} = x_{n-1}.$$

Оно принадлежит классу C^∞ в G и имеет якобиан

$$\frac{\partial(\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})}{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})} = \frac{1}{x_1^{n-1} V(G)},$$

в результате чего $L_{n-1}[\Psi(G)] = 1$. Пусть Φ — отображение из доказательства леммы 1 и F -отображение из определения 1.

Рассмотрим функцию $\tilde{\mu}(x) = |\nabla_{n-1} F(x)|^{\frac{1}{n-1}}$. Так как $F(\sigma) = \Psi(G)$ для всякой $\sigma \in \Sigma$, то согласно свойствам многомерного градиента [4] имеем

$$\int \int_G \tilde{\mu}(x)^{n-1} H_{n-1}(dx) \geq L_{n-1}[F(\sigma)] = 1,$$

т. е. $\tilde{\mu}(x)$ — допустимая функция в определении $\text{Mod } \Sigma$. При этом согласно лемме 1 и следствию 2 теоремы 1

$$\begin{aligned} \text{Mod } \Sigma &\leq \int \int_G \tilde{\mu}(x)^n dx = \\ &= \int \int_G \left| \frac{\partial(\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})}{\partial(y_1, \dots, y_{n-1})} \right|^{\frac{n}{n-1}} 2\pi y_1 H_{n-1}(dy) = \frac{2\pi}{V(G)^{\frac{1}{n-1}}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Диаграмма числовых характеристик

Для заполненного тора вращения $T = T_G$ пусть $U(T)$ — совокупность всех непрерывных отображений $\varphi: T \rightarrow C$ класса W_n^1 таких, что $\varphi(T) = C$ и для всех $r \in C$ $\varphi^{-1}(r) \in \Sigma$; $V(T)$ — совокупность всех непрерывных отображений $\Phi: T \rightarrow E^{n-1}$ класса W_n^1 таких, что $L_{n-1}[\Phi(T)] = 1$ и для всех $t \in \Phi(T)$ $\Phi^{-1}(t) \in \Gamma$. Рассмотрим следующие числовые характеристики торov:

$$\begin{aligned} p(T) &= \inf_{\varphi \in U(T)} \int \int \int_G |\nabla \varphi(x)|^n dx; \\ P(T) &= \left\{ \sup_{\varphi \in U(T)} \oint_C \left(\int \int_G |\nabla \varphi(x)|^{n-1} H_{n-1}(dx) \right)^{\frac{1}{1-n}} H_1(dr) \right\}^{1-n}; \\ q(T) &= \inf_{\Phi \in V(T)} \int \int \int_G |\nabla_{n-1} \Phi(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx; \end{aligned}$$

$$Q(T) = \left\{ \sup_{\Phi \in V(T)} \int_{\Phi(T)} \left(\int_{\Phi^{-1}(t)} |\nabla_{n-1} \Phi(x)|^{\frac{1}{n-1}} H_1(dx) \right)^{1-n} H_{n-1}(dt) \right\}^{\frac{1}{1-n}}.$$

Теорема 4. Для заполненного тора вращения $T = T_G \subset \subset E^n$ выполняется диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod } \Gamma = p(T) = P(T) & & \\ \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow \\ \text{Mod } \Sigma = q(T) = Q(T) & & \downarrow \downarrow \end{array}$$

где $\downarrow \downarrow^a$ означает

$$a = \frac{1}{b^{n-1}}.$$

Доказательство. Эта теорема является естественным итогом проведенного распространения результатов статьи автора [4] на многомерный случай. При этом экстремальным отображением в определении числовых характеристик $p(T)$ и $P(T)$ служит отображение f из доказательства леммы 1, а в определении $q(T)$ и $Q(T)$ — отображение F из доказательства теоремы 3. Соответствующие функции $\tilde{p}(x) =$

$|\nabla f(x)|$ и $\tilde{\mu}(x) = |\Delta_{n-1} F(x)|^{\frac{1}{n-1}}$ являются экстремальными в определении числовых характеристик $\text{Mod } \Gamma$ и $\text{Mod } \Sigma$.

Следствие. Для заполненного тора вращения T_G модуль семейства кривых Γ равен модулю семейства окружностей $\{C_y\}$, $y \in G$, а модуль семейства поверхностей Σ равен модулю семейства $(n-1)$ -мерных сечений $\{G_y\}$, $y \in C$.

Доказательство. Согласно определению модуля

$$\text{Mod } \{G_y, y \in C\} = \inf_{\rho} \int \int \int_{T_G} \rho(x)^n dx,$$

где $\inf$ берется по всем неотрицательным борелевским функциям $\rho: T_G \rightarrow E^1$ таким, что для всех $y \in C$

$$\int \int_{G_y} \rho(x)^{n-1} H_{n-1}(dx) \geq 1.$$

Интегрируя это неравенство при $y \in C$, согласно лемме 1, получаем

$$\int \int \int_{T_G} \frac{\rho(x)^{n-1} dx}{2\pi \sqrt{(x_1^2 + \dots + x_n^2)}} \geq 1,$$

откуда в силу неравенства Гельдера

$$\text{Mod } \{G_y, y \in C\} = \inf_p \int_G \int_G \rho(x)^n dx \geq \text{Mod } \Sigma.$$

Противоположное неравенство вытекает из определения понятия модуля. Для модуля семейства окружностей рассуждения аналогичны.

§ 5. Топологические цилиндры вращения и разрезанные торы вращения

Рассмотрим топологический цилиндр вращения

$$Z_\alpha^a = \bigcup_{0 < \varphi < \alpha} A_\varphi(G), \quad 0 < \alpha < 2\pi,$$

с основаниями G и $G_\alpha = A_\alpha(G)$ и боковой поверхностью $\partial Z_\alpha^a \setminus (G \cup G_\alpha)$,

Все наши рассуждения относительно заполненных тором вращения можно перенести на случай топологических цилиндров вращения с заменой множителя 2π на множитель α . Пусть Γ — семейство всевозможных кривых $\gamma \subset Z_\alpha^a$, соединяющих основания G и G_α , Σ — семейство всевозможных гиперповерхностей $\sigma \subset Z_\alpha^a$, разделяющих основания G и G_α . На основе этих семейств можно ввести числовые характеристики $\text{Mod } \Gamma$, $\text{Mod } \Sigma$, $p(Z_\alpha^a)$, $P(Z_\alpha^a)$, $q(Z_\alpha^a)$, $Q(Z_\alpha^a)$, связанные между собою посредством диаграммы из теоремы 4.

Если числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa$ таковы, что $0 < \alpha_i < 2\pi$ и $\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i = \alpha < 2\pi$, то

$$q(Z_\alpha^a) = \sum_{i=1}^{\kappa} q(Z_{\alpha_i}^a),$$

что согласуется с основными положениями метода модулей [6].

Если

$$G = \left(\bigcup_{i=1}^{\kappa} \bar{G}_i \right)^0, \quad \text{где } G_i \cap G_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad \text{то}$$

$$p(Z_\alpha^a) = \sum_{i=1}^{\kappa} p(Z_{\alpha_i}^a),$$

что также согласуется со свойствами модулей.

Рассмотрим разрезанный тор вращения $Z = T_G \setminus G$. Его фундаментальная группа, как и в случае топологического цилиндра, равна нулю, поэтому семейства Γ_Z и Σ_Z должны определяться с использованием разреза G . Разрезу G можно сопоставить две его ориентации относительно Z : положительную, определяемую цепью сечений $\{G_\alpha\}$, $\alpha \rightarrow 0$, и отрицательную, определяемую цепью сечений $\{G_\alpha\}$, $\alpha \rightarrow 2\pi$. В результате получаем два ориентированных разреза G^+ и G^- с общим телом G . С использованием указанных цепей сечений можно придать смысл следующим выражениям: кривая $\gamma \subset Z$ соединяет G^+ и G^- , гиперповерхность $\sigma \subset Z$ разделяет G^+ и G^- . При этом приобретают смысл обозначения Γ_Z и Σ_Z и вся дальнейшая теория, аналогичная теории торов вращения и топологических цилиндров вращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кривов В. В. Об одном обобщении понятия конформной емкости — ДАН, 1974, т 215, № 4, с. 784—787.
2. Hag K. The coefficients of quasiconformality of tori in n -space. — Comment. math. helv., 1980, v. 55, № 4, p. 559—575.
3. Пешкичев Ю. А. Числовые характеристики торов. — В кн. Метрические вопросы теории функций. Киев: Наукова думка, 1980, с. 106—112.
4. Пешкичев Ю. А. Многомерный градиент и квазиконформные отображения. — В кн.: Вопросы метрической теории отображений и её применение. Киев: Наукова думка, 1978, с. 99—109.
5. Federer H. Geometric measure theory. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1969. — 676 p.
6. Шабат Б. В. Метод модулей в пространстве. — ДАН, 1960, т. 130, № 6, с. 1210—1213.

ОБ α - γ -СПИРАЛЕОБРАЗНЫХ ФУНКЦИЯХ ПОРЯДКА β

Г. И. Сижук, П. И. Сижук

1. Пусть α, β, γ — произвольно заданные числа $-\infty < \alpha < \infty, 0 \leq \beta < 1, |\gamma| < \pi/2$. Следуя Сильвиа [1], регулярную в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функцию $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ назовем α - γ -спиралеобразной порядка β , если $f(z)$ удовлетворяет в E условиям $f(z)f'(z)/z \neq 0$;

$$\operatorname{Re} \left[(e^{i\gamma} - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right) \right] > \beta \cos \gamma. \quad (1)$$

Множество всех таких функций обозначим через $S(\alpha, \beta, \gamma)$.

В работе [1] доказано, что при $\alpha \geq 0$ функции $f(z) \in S(\alpha, \beta, \gamma)$ удовлетворяют в E условию (1) с $\alpha = 0$, т. е. по терминологии, введенной В. А. Зморовичем [2], являются γ -спиралеобразными, порядка β в E , а следовательно [3], однолиственны в E .

В данной заметке это свойство функций класса $S(\alpha, \beta, \gamma)$ исследуется при $\alpha < 0$. Доказывается, что при $\alpha \leq -2 \cos \gamma$ функции класса $S(\alpha, \beta, \gamma)$ γ -спиралеобразны (порядка 0) в E и что порядок γ -спиралеобразности класса $S(\alpha, \beta, \gamma)$ равен нулю. При $\gamma = 0$ аналогичный результат получен в работах [4] ($\alpha \leq -2$) и [5] ($\alpha < 0$), причем разными методами. Мы используем метод из работы [4]. Получена также оценка $|c_3 - \mu c_2^2|$, μ — любое комплексное число в классе $S(\alpha, \beta, \gamma)$.

2. Пусть $P(\beta, \gamma), 0 \leq \beta < 1, |\gamma| < \pi/2$, — класс функций $q(z), q(0) = 1$, регулярных в E и таких, что $\operatorname{Re}(e^{i\gamma} q(z)) > \beta \cos \gamma$ в E . Нам потребуется следующая

Л е м м а. Функция $f(z) \in S(\alpha, \beta, \gamma), \alpha \leq -2 \cos \gamma, 0 \leq \beta < 1, |\gamma| < \pi/2$, тогда и только тогда, когда существует функция $q(z) \in P(\beta, \gamma)$ такая, что

$$(e^{i\gamma} - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right) = e^{i\gamma} q(z), \quad z \in E. \quad (2)$$

Доказательство. Легко видеть, что если $f(z) \in S(\alpha, \beta, \gamma)$ ($\alpha < 0, 0 \leq \beta < 1, |\gamma| < \pi/2$), то определяемая по формуле (2) функция $q(z) \in P(\beta, \gamma)$.

Докажем, что при указанных в лемме значениях параметров α, β, γ дифференциальное уравнение (2) при любой заданной функции $q(z) \in P(\beta, \gamma)$ определяет функцию $f(z) \in S(\alpha, \beta, \gamma)$. Используем метод, употребленный в работе [4] (см. также [5, 6]) при доказательстве аналогичного утверждения для случая $\gamma = 0$.

Положив $p(z) = e^{i\gamma} z f'(z) / f(z)$ и заменив α на $(-\alpha)$, уравнение (2) запишем в виде

$$p(z) - \alpha \frac{zp'(z)}{p(z)} = e^{i\gamma} q(z), \quad \alpha > 0, \quad (3)$$

При $\alpha > \cos \gamma$ из (3) получаем

$$p(z) = e^{i\gamma} \frac{H(z)}{1 - \lambda \int_0^1 \frac{H(zt) - 1}{t^{1+\lambda}} dt}, \quad (4)$$

где

$$H(z) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^1 \frac{q(zt) - 1}{t} dt \right\}, \quad \lambda = e^{i\gamma} / \alpha, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Из (4) видим, что $p(z)$ не может иметь в E других особенностей, кроме полюсов. Из (3) заключаем, что полюсы $p(z)$ могут быть только простыми. Рассуждая далее, как в [4, с. 64—65], убеждаемся, что при $\alpha \geq 2 \cos \gamma, 0 \leq \beta < 1, |\gamma| < \pi/2$, $p(z)$ не имеет в E простых полюсов и $\operatorname{Re} p(z) > 0$ в E .

Таким образом, при указанных в лемме значениях α, β, γ дифференциальное уравнение (3) при любой функции $q(z) \in P(\beta, \gamma)$ имеет регулярное в E решение $p(z)$, $p(0) = e^{i\gamma}$, и в таком случае дифференциальное уравнение (2) определяет функцию $f(z) \in S(\alpha, \beta, \gamma)$. Лемма доказана.

Из доказательства леммы вытекает

Теорема 1. Если $f(z) \in S(\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha \leq -2 \cos \gamma, 0 \leq \beta < 1, |\gamma| < \pi/2$, то $f(z)$ есть γ -спиралесобразная в E функция.

Замечание. Вопрос о смысле условия (1) при $-2 \cos \gamma < \alpha < 0, 0 \leq \beta < 1, |\gamma| < \pi/2$, остается открытым.

Обозначим через $S(\beta, \gamma)$, $S(0, \gamma) \equiv S(\gamma)$, класс всех γ -спиралеобразных порядка β в E функций. Назовем порядком γ -спиралеобразности некоторого класса $S \subseteq S(\gamma)$ наибольшее из чисел $\beta = \beta(\gamma)$ таких, что $S \subseteq S(\beta(\gamma), \gamma)$.

Теорема 2. Порядок γ -спиралеобразности класса $S(\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha \leq -2\cos\gamma$, $0 \leq \beta < 1$, $|\gamma| < \pi/2$, равен нулю.

Доказательство. При указанных в теореме значениях α, β, γ согласно лемме дифференциальное уравнение (2) при любой функции $q(z) \in P(\beta, \gamma)$ определяет функцию $f(z) \in S(\alpha, \beta, \gamma)$. Возьмем в (2) $q(z) = 1 + 2(1-\beta)\cos\gamma \cdot e^{-i\gamma}z/(1-z) \in P(\beta, \gamma)$. Тогда по (3) и (4) найдем функцию $p(z) = e^{i\gamma}z'f'(z)/f(z)$, для которой $\lim_{r \rightarrow 1} p(r) = 0$, что и доказывает теорему.

Приведем оценки начальных коэффициентов функций класса $S(\alpha, \beta, \gamma)$.

Теорема 3. Если $f(z) = z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots \in S(\alpha, \beta, \gamma)$, $e^{i\gamma} + \alpha \neq 0$, μ — любое заданное комплексное число, тогда

$$|e^{i\gamma} + 2\alpha c_3 - \mu c_2^2| \leq (1 - \beta) \cos \gamma \cdot \max(1, |\nu|), \quad (5)$$

где

$$\nu = 2(1 - \beta) \cos \gamma (e^{i\gamma} + \alpha)^{-2} [(2e^{i\gamma} + 4\alpha)\mu - e^{i\gamma} - 3\alpha] - 1. \quad (6)$$

Доказательство. Для $f(z) \in S(\alpha, \beta, \gamma)$ существует регулярная в E функция $\omega(z) = b_1z + b_2z^2 + \dots$ такая, что в E $|\omega(z)| < 1$ и

$$(e^{i\gamma} + \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right) = e^{i\gamma} + 2(1 - \beta) \cos \gamma \frac{\omega(z)}{1 - \omega(z)}. \quad (7)$$

Простыми вычислениями из (7) находим

$$(e^{i\gamma} + \alpha) c_2 = 2(1 - \beta) \cos \gamma \cdot b_1; \quad (8)$$

$$(2e^{i\gamma} + 4\alpha) c_3 - (e^{i\gamma} + 3\alpha) c_2^2 = 2(1 - \beta) \cos \gamma \cdot (b_2 + b_1^2). \quad (9)$$

Считая $e^{i\gamma} + \alpha \neq 0$ и определив ν по формуле (6), ввиду (8) и (9) имеем

$$|e^{i\gamma} + 2\alpha c_3 - \mu c_2^2| = (1 - \beta) \cos \gamma \cdot |b_2 - \nu b_1^2|.$$

Отсюда в силу неравенства $|b_2 - \nu b_1^2| \leq \max(1, |\nu|)$ [7], справедливого при любом комплексном ν , получаем оценку (5). Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 3 легко видеть, что в классе $S(-1, \beta, 0)$, т. е. в случае $e^{i\gamma} + \alpha = 0$, справедлива оценка

$|c_3 - c_2^2| \leq 1 - \beta$. При $\beta = \gamma = 0$ $0 \leq \alpha \leq 1$ теорема 3 дает соответствующий результат из [8]. Непосредственно из теоремы 3 имеем

Следствие. Если $f(z) \in S(\alpha, \beta, \gamma)$, $e^{i\gamma} + \alpha \neq 0$, то

$$|c_2| \leq 2(1 - \beta) \cos \gamma \cdot |e^{i\gamma} + \alpha|;$$

$$|e^{i\gamma} + 2\alpha| |c_3| \leq (1 - \beta) \cos \gamma \cdot \max(1, |v_0|),$$

где

$$v_0 = 2(1 - \beta) \cos \gamma \cdot (e^{i\gamma} + 3\alpha) (e^{i\gamma} + \alpha)^{-2} + 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Silvia E. M. On a subclass of spiral-like functions. — Proc. Amer. Math. Soc., 1974, v. 44, № 2, p. 411—420.

2. Зморевич В. А. Про радіус γ -спіральності θ -спіральних функцій в колі $|z| < 1$. — Доповіді АН УРСР, 1965, № 10, с. 1262—1265.

3. Spascek L. Prispevek k teorii funkei prostych. — Casopis Pest. Mat., 1933, v. 26, p. 12—19.

4. Зморевич В. А., Коробкова И. К. О порядке звездности класса α -выпуклых функций при $\alpha \leq -2$. — Матем. анализ и теория вероятностей. Киев: Наукова думка, 1978, с. 63—66.

5. Зморевич В. А., Похилевич В. А. Об α -выпуклых функциях при $\alpha < 0$. — УМЖ, 1979, т. 31, № 4, с. 431—433.

6. Зморевич В. А., Якубенко А. А. Об одном обобщении класса α -выпуклых функций Мокану. — Мат. сборник. Киев: Наукова думка, 1976, с. 254—257.

7. Keogh F. R., Merkes E. P. A coefficient inequality for certain classes of analytic functions. — Proc. Amer. Math. Soc., 1969, v. 20, № 1, p. 8—12.

8. Szynal J. Some remarks on coefficients inequality for α -convex functions. — Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. math. astronom. phys., 1972, v. 20, № 11, p. 917—919.

БУЛЕВЫ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ И РЕГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ УСРЕДНЕНИЯ

И. К. Слепухин

Введение. Операторы усреднения и операторы продолжения включаются в общий класс операторов, которые называются линейными опусами. Общая теория линейных опусов, действующих между банаховыми пространствами непрерывных функций на бикомпактах, впервые была изложена в монографии А. Пелчинского [1]. Интерес к этому классу операторов объясняется их тесной связью с операторами проецирования в банаховых пространствах: существование оператора усреднения (оператора продолжения) связано с существованием ограниченной линейной проекции из $C(X)$ на подпространство, изометричное $C(Y)$ (соответственно из $C(Y)$ — на подпространство, изометричное $C(X)$). Последние, как известно, являются основным инструментом при изучении банаховых пространств.

Цель настоящей работы — дать необходимые и достаточные условия существования регулярного оператора усреднения для отображения с нульмерного бикомпакта X на произвольный бикомпакт Y . Эти условия затем используются для получения тополого-алгебраической характеристики бикомпактов Милюттина и состоят в том, что на Y существует некоторая алгебраическая совокупность положительных функций, называемая нами булевой системой.

Излагаемый ниже предварительный материал по булевым системам множеств взят из работы автора [4].

Определение. Булевой системой множеств хаусдорфова пространства X называется семейство его замкнутых подмножеств $\Sigma = \{\Gamma_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$, занулированное элементами булевой алгебры Λ и удовлетворяющее следующим условиям: 1) для произвольной точки $x \in X$ и любой ее окрестности $V \subset X$ существует такое $\alpha \in \Lambda$, что $x \in \Gamma_\alpha \subset V$ и $x \notin \Gamma_{\alpha'}$; 2) $\Gamma_1 = X$ и $\Gamma_\alpha = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$;

3) $\Gamma_{\alpha\vee\beta} = \Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta$ для любых $\alpha, \beta \in \Lambda$. Булева система $\Sigma = \{\Gamma_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ в X с взаимно однозначным соответствием $\alpha \rightarrow \Gamma_\alpha$ называется также булевой алгеброй подмножеств пространства X .

Простейшим примером булевой системы множеств является булева алгебра открыто замкнутых подмножеств нульмерного регулярного пространства.

Поскольку далее все рассматриваемые в этой заметке топологические пространства (без алгебраической структуры) — бикомпакты, то и результаты работы [4] будут формулироваться для этого случая.

Теорема 1. Семейство подмножеств $\Sigma = \{\Gamma_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ пространства X , где Λ — булева алгебра, является булевой системой (соответственно алгеброй) пространства X в том и только в том случае, когда существует непрерывное (соответственно неприводимое) отображение φ бикомпакта Стоуна $Z(\Lambda)$ булевой алгебры Λ на X , удовлетворяющее условию $\Gamma_\alpha = \varphi(Z_\alpha)$ для всех $\alpha \in \Lambda$, где $\alpha \rightarrow Z_\alpha$ — стоуновский изоморфизм.

Здесь под неприводимым отображением $g: X \rightarrow Y$ понимается непрерывное отображение на Y , переводящее собственные замкнутые подмножества из X в собственные подмножества Y .

Булева система множеств $\Sigma = \{\Gamma_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ пространства X называется свободной, если Λ — свободная булева алгебра [2]. Из основной теоремы 1 вытекают (см. [4]) следующие алгебраические характеристики диадических бикомпактов.

Теорема 2. Бикомпакт X является диадическим (соответственно неприводимо диадическим) тогда и только тогда, когда X имеет свободную булеву систему (соответственно алгебру) множеств.

Теорема 3. Бикомпакт X является диадическим тогда и только тогда, когда X имеет такую систему $\{\vartheta_\nu | \nu \in \sigma\}$ двухэлементных замкнутых покрытий $\vartheta_\nu = \{\Gamma_\nu^0, \Gamma_\nu^1\}$:

$$4) \bigcap_{i=1}^n \Gamma_{j_i}^i \neq \emptyset \text{ для любого конечного набора } \{v_1, \dots, v_n\}$$

из σ и любых $j_i = 0$ или 1 ;

5) множества вида 4 образуют сеть Архангельского в X .

Основная теорема (теорема 5) нашей работы является аналогом теоремы 1 для операторов усреднения. В ней сформулированы необходимые и достаточные условия существования эпиморфизма $\varphi: Z(\Lambda) \rightarrow X$, допускающего регу-

лярный оператор усреднения. Теорема 7 об алгебраической характеристизации бикомпактов Милютина — это аналог теоремы 2, сформулированный на языке булевых систем функций. Тополого-алгебраическая характеристика бикомпактов Милютина заключена в теореме 8 и представляет собой следующее усиление теоремы 3: каждая пара $\Phi_v = \{\Gamma_v^0, \Gamma_v^1\}$ состоит из замыканий открытых F_σ -множеств, покрывающих X . В работе приводятся и другие характеристики бикомпактов Милютина, следующие из этих основных.

Напомним основные определения. Пусть $\psi: X \rightarrow Y$ — эпиморфизм из бикомпакта X на бикомпакт Y . Линейный оператор $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ с нормой 1 называется регулярным оператором усреднения для ψ или ψ допускает регулярный оператор усреднения T , если $T(f \circ \psi) = T \circ \psi^0(f) = f$ для всех $f \in C(Y)$, т. е. $T \circ \psi^0 = \text{id}_{C(Y)}$.

Бикомпакт X , являющийся непрерывным образом некоторого канторовского куба D^r , называется диадическим. Если существует эпиморфизм $\psi: D^r \rightarrow X$ с некоторого D^r , допускающий регулярный оператор усреднения, то X называют бикомпактом Милютина. Сетью Архангельского в X называют систему N произвольных подмножеств пространства X , удовлетворяющую условию: для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности $V \subset X$ найдется $M \in N$ такое, что $x \in M \subset V$.

Основы конструкции. Ниже нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть Z — бикомпакт. Если отображение $\psi: Z \rightarrow X$ допускает регулярный оператор усреднения U и $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ — разбиение единицы на Z , образованное характеристическими функциями открыто замкнутых множеств $Z_i \subset Z$, то существует такое разбиение единицы $\{t_1, \dots, t_n\}$ на X , что

$$6) \sup t_i \subset \psi(Z_i), \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$7) U\left(\sum_{i=1}^n \chi_i \cdot \psi^0(f_i)\right) = \sum_{i=1}^n t_i \cdot f_i, \quad f_1, \dots, f_n \in C(X).$$

Доказательство. Пусть U — регулярный оператор усреднения для ψ и $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ — разбиение единицы на Z , образованное характеристическими функциями открыто замкнутых множеств $Z_i \subset Z$. И пусть $t_i = U(\chi_i)$ для $i = 1, 2, \dots, n$. По предложению 1.2 из [1] функции t_i образуют разбиение единицы на X . Покажем 6. Пусть $x \in G_i = \{x' \in X \mid t_i(x') > 0\}$. По предложению об интегральном представлении

регулярного оператора, усреднения [1, предложение 4.1]:

$$\int_{\psi^{-1}(x)} \chi_i d\mu_x = U(\chi_i)(x) = t_i(x) > 0,$$

где $\mu_x = U^*(\delta_x)$ — мера, сосредоточенная на множестве $\psi^{-1}(x)$ (U^* — оператор, сопряженный к U , а δ_x — мера Дирака в точке x). Отсюда получаем, что $Z_i \cap \psi^{-1}(x) \neq \emptyset$, т. е. $x \in \psi(Z_i)$. Таким образом, $G_i \subset \psi(Z_i)$ и, следовательно, $\text{supp } t_i \subset \psi(Z_i)$. Равенство 7 вытекает непосредственно из интегрального представления U :

$$\begin{aligned} U\left(\sum_{i=1}^n \chi_i \cdot \psi^0(f_i)\right)(x) &= \int_{\psi^{-1}(x)} \sum_{i=1}^n \chi_i \cdot \psi^0(f_i) d\mu_x = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\psi^{-1}(x)} \chi_i \cdot (f_i^0 \psi) d\mu_x = \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot \int_{\psi^{-1}(x)} \chi_i d\mu_x = \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot t_i(x), \quad x \in X. \end{aligned}$$

Пусть X — бикомпакт, Γ_0 и Γ_1 — его замкнутые подпространства и $e: P \rightarrow X$ — естественное отображение топологической суммы $P = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1$ в X . Обозначим через χ_i характеристическую функцию множества $\Gamma_i \subset P$, $i = 0, 1$.

Разберем на этом простом примере, как действуют регулярный оператор усреднения для e . Найдём необходимые и достаточные условия его существования.

Теорема 4. Если отображение e допускает регулярный оператор усреднения U , то существуют такие неотрицательные непрерывные функции t_0 и t_1 на X , что

- 8) $t_0(x) + t_1(x) = 1$ для любого $x \in X$;
- 9) $\text{supp } t_0 \subset \Gamma_0$, $\text{supp } t_1 \subset \Gamma_1$;
- 10) $U(\chi_0 \cdot e^0(f_1) + \chi_1 \cdot e^0(f_2)) = t_0 \cdot f_1 + t_1 \cdot f_2$, $f_1, f_2 \in C(X)$.

Обратно, если даны неотрицательные непрерывные функции t_0 и t_1 на X , удовлетворяющие условиям 8 и 9, то условие 10 определяет регулярный оператор усреднения для e .

Доказательство. Первая часть теоремы следует непосредственно из леммы 1. Докажем обратное утверждение.

Пусть неотрицательные непрерывные функции t_0 и t_1 на X удовлетворяют условиям 8 и 9. Определим оператор $U: C(P) \rightarrow C(X)$ равенством 10.

Заметим, что любая функция из $C(P)$ имеет вид $\chi_0 \cdot e^0(f_1) + \chi_1 \cdot e^0(f_2)$, где $f_1, f_2 \in C(X)$.

Действительно, если $f \in C(P)$, то функции $f|_{\Gamma_i}$ по теореме Титце-Урысона имеют непрерывные продолжения f_i на X . Тогда $f = e^0(f_i)$ на $\Gamma_i \subset P$ и, следовательно,

$$f = \chi_0 \cdot e^0(f_1) + \chi_1 \cdot e^0(f_2).$$

Далее, если

$$\begin{aligned} \chi_0 \cdot e^0(f_1) + \chi_1 \cdot e^0(f_2) &= \chi_0 \cdot e^0(g_1) + \chi_1 \cdot e^0(g_2), \\ f_1, f_2, g_1, g_2 &\in C(X), \end{aligned}$$

то очевидно, что $f_i = g_i$ на $\text{supp } t_{i-1} \subset \Gamma_{i-1}$, $i = 1, 2$, и, следовательно, $t_0 \cdot f_1 + t_1 \cdot f_2 = t_0 \cdot g_1 + t_1 \cdot g_2$.

Таким образом, оператор U определен корректно. Линейность очевидна.

Пусть $f \in C(X)$. Тогда $e^0(f) = \chi_0 \cdot e^0(f) + \chi_1 \cdot e^0(f)$, и по условию 1 получаем

$$U \circ e^0(f)(x) = t_0(x) \cdot f(x) + t_1(x) \cdot f(x) = f(x), \quad x \in X,$$

т. е. U есть линейный оператор усреднения для e . Докажем его регулярность. Имеем $U(1) = U \circ e^0(1) = 1$. Далее, пусть $f \in C(P)$ и

$$f = \chi_0 \cdot e^0(f_1) + \chi_1 \cdot e^0(f_2) \geq 0.$$

Тогда $e^0(f_i) \geq 0$ на Γ_{i-1} и, следовательно, $f_i \geq 0$ на $\text{supp } t_{i-1} \subset \Gamma_{i-1}$, откуда получаем, что

$$U(f) = t_0 \cdot f_1 + t_1 \cdot f_2 \geq 0.$$

Следовательно, по предложению 1.2 из [1] оператор U регулярен. Теорема доказана.

Следствие 1. Отображение e допускает регулярный оператор усреднения в том и только в том случае, когда Γ_0 и Γ_1 содержат открытые F_σ -множества G_0 и G_1 , покрывающие X .

Доказательство. По условию 9 множества Γ_i содержат замыкания множеств

$$G_i = \{x \in X \mid t_i(x) > 0\}, \quad i = 0, 1.$$

Очевидно, G_i — открытые F_σ -множества, по условию 8 покрывающие X .

Пусть обратно Γ_0 и Γ_1 содержат замыкания открытых F_σ -множеств G_0 и G_1 , покрывающих X . Существуют такие непрерывные неотрицательные функции f_0 и f_1 на X , что

$$G_i = \{x \in X \mid f_i(x) > 0\}, \quad i = 0, 1.$$

Тогда функции

$$t_0 = \frac{f_0}{f_0 + f_1} \text{ и } t_1 = \frac{f_1}{f_0 + f_1},$$

очевидно, непрерывны, неотрицательны и удовлетворяют условию 8 и 9.

Следствие 2. Если отображение e допускает регулярный оператор усреднения U и $t_i = U(\chi_i)$, то сужение этого отображения на $E = F_0 \oplus F_1$, где $F_i = \text{supp } t_i$, также допускает регулярный оператор усреднения V , причем $t_i = V(\chi_i)$ и $e(F_i) = \text{supp } t_i$ (здесь χ_i — характеристическая функция множества $F_i \subseteq E$, $i=0,1$).

Следствие 3. Неприводимое $e: P \rightarrow X$, допускающее регулярный оператор усреднения, является гомеоморфизмом.

Булевы системы функций. Семейство $\{t_\alpha | \alpha \in A\}$ неотрицательных непрерывных функций на бикompакте X , занумерованное элементами булевой алгебры Λ , называется булевой системой на X , если:

11) для произвольной точки $x \in X$ и любой ее окрестности $V \subset X$ существует такое $\alpha \in A$, что $x \in \text{supp } t_\alpha \subset V$ и $x \notin \text{supp } t_{c\alpha}$;

12) $t_1 = 1$ и $t_\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$;

13) $t_{\alpha \vee \beta} = t_\alpha + t_\beta$, если $\alpha \wedge \beta = 0$.

Приведем некоторые свойства булевой системы функций $\{t_\alpha | \alpha \in A\}$, заданной на бикompакте X :

а) $t_\alpha = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 1$.

Действительно, по условию 12 $t_1 = 1$. Обратно, пусть $t_\alpha = 1$. Тогда $t_{c\alpha} = 1 - t_\alpha = 0$ по 12 и 13, следовательно, $c\alpha = 0$, т. е. $\alpha = 1$;

б) если $\alpha \leq \beta$, то $t_\alpha \leq t_\beta$.

Действительно, так как элементы α и $c\alpha \wedge \beta$ дизъюнкты, то по условию 13 имеем $t_\alpha \leq t_\alpha + t_{c\alpha \wedge \beta} = t_{\alpha \vee c\alpha \wedge \beta} = t_\beta$;

в) семейство $\{\Gamma_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ носителей $\Gamma_\alpha = \text{supp } t_\alpha$ является булевой системой множеств в X .

Действительно, если $x \in X$ и V — произвольная окрестность x , то по условию 11 существует $\alpha \in \Lambda$ такое, что $x \in \Gamma_\alpha \subset V$ и $x \notin \Gamma_{c\alpha}$, т. е. условие 1 выполнено. Условие 2 вытекает из 12. Далее, если $\alpha, \beta \in \Lambda$, то $\alpha \vee \beta = (\alpha \wedge c\beta) \vee \vee (\alpha \wedge \beta) \vee (c\alpha \wedge \beta)$, где слагаемые в правой части попарно дизъюнкты. Тогда $t_{\alpha \vee \beta} = t_{\alpha \wedge c\beta} + t_{\alpha \wedge \beta} + t_{c\alpha \wedge \beta}$ по условию 13 и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha \vee \beta} &= \Gamma_{\alpha \wedge c\beta} \cup \Gamma_{\alpha \wedge \beta} \cup \Gamma_{c\alpha \wedge \beta} = (\Gamma_{\alpha \wedge c\beta} \cup \Gamma_{\alpha \wedge \beta}) \cup (\Gamma_{\alpha \wedge \beta} \cup \Gamma_{c\alpha \wedge \beta}) = \\ &= \Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta; \end{aligned}$$

г) каждое Γ_α является замыканием открытого F_α -множества $G_\alpha = \{x \in X \mid t_\alpha(x) > 0\}$ и

$$X = G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$$

для любого разбиения $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ единичного элемента в Λ . Более того, множества G_α , $\alpha \in \Lambda$, образуют базу пространства X .

Первая часть утверждения следует из условий 12 и 13. Докажем вторую. Пусть $x \in X$ и V — произвольная окрестность x . По в найдется такое $\alpha \in \Lambda$, что $x \in \Gamma_\alpha \subset V$ и $x \in \Gamma_{c\alpha}$. Элементы α и $c\alpha$ образуют разбиение единицы в Λ , поэтому $X = G_\alpha \cup G_{c\alpha}$. Тогда очевидно, что $x \in G_\alpha \subset V$;

д) для любого замкнутого подмножества $F \subset X$, не содержащего точку $x \in X$, существует такое $\beta \in \Lambda$, что $t_\beta(x) = 0$ и $t_\beta = 1$ на F . Таким образом, любая булева система функций на X отделяет точки от замкнутых множеств в этом пространстве.

Действительно, по свойству б найдется такое $\alpha \in \Lambda$, что $x \in X \setminus \Gamma_{c\alpha}$ и $F \subset X \setminus \Gamma_\alpha$. Тогда $\beta = c\alpha$ — требуемое, так как $t_\alpha = 0$ на $X \setminus \Gamma_\alpha$, $t_{c\alpha} = 0$ на $X \setminus \Gamma_{c\alpha}$ и $t_{c\alpha} = 1 - t_\alpha$.

Основная теорема и ее следствия. Докажем основную теорему и ее следствия.

Теорема 5. Пусть $Z(\Lambda)$ — бикомпакт Стоуна булевой алгебры Λ , $\varphi: Z(\Lambda) \rightarrow X$ — эпиморфизм. Если φ допускает регулярный оператор усреднения U , то образы $t_\alpha = U(\chi_\alpha)$ характеристических функций, где $\alpha \rightarrow \chi_\alpha$ — стоуновский изоморфизм, образуют булеву систему функций на X такую, что:

14) $\text{supp } t_\alpha \subset \varphi(Z_\alpha)$ для каждого $\alpha \in \Lambda$;

15) $U\left(\sum_{i=1}^n \chi_{\alpha_i} \cdot \varphi^0(f_i)\right) = \sum_{i=1}^n t_{\alpha_i} \cdot f_i$, где $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — произволь-

ное разбиение единичного элемента в Λ и $f_1, \dots, f_n \in C(X)$.

Обратно, если $\{t_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ — булева система функций на X такая, что справедливо условие 14, то равенство 15 определяет регулярный оператор усреднения для φ .

Доказательство. Утверждения первой части теоремы, кроме условий 14 и $t_\alpha \neq 0$, если $\alpha \neq 0$, следуют из определения регулярного оператора или леммы 1. Докажем эти условия. По теореме 1 семейство $\{\varphi(Z_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ является булевой системой множеств в X . Так что 11 следует из 1 в силу включений 14. Пусть теперь $\alpha \neq 0$, т. е. $Z_\alpha \neq \emptyset$. Тогда найдется $x \in X$ такое, что $Z_\alpha \cap \varphi^{-1}(x) \neq \emptyset$.

По замечанию из [1, с. 34] носитель меры μ_x содержит $\varphi^{-1}(x)$, поэтому

$$t_\alpha(x) = \int_{\varphi^{-1}(x)} \chi_\alpha d\mu_x = \mu_x(Z_\alpha \cap \varphi^{-1}(x)) > 0.$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Обратно, пусть L — семейство всех непрерывных функций на $Z(\Lambda)$ вида

$$\sum_{i=1}^n \chi_{\alpha_i} \cdot \varphi^0(f_i),$$

где $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — произвольное разбиение единичного элемента в Λ и $f_1, \dots, f_n \in C(X)$.

Заметим, что если $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ — два разбиения единичного элемента в Λ и $f = \sum_{i=1}^n \chi_{\alpha_i} \cdot \varphi^0(f_i)$, то элементы $\alpha_i \wedge \beta_j$ образуют новое разбиение единицы в Λ такое, что $\alpha_i = \bigvee_{j=1}^m (\alpha_i \wedge \beta_j)$ и

$$f = \sum_{i=1}^n \chi_{\alpha_i} \cdot \varphi^0(f_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \chi_{\alpha_i \wedge \beta_j} \cdot \varphi^0(f_i).$$

Отсюда, если

$$f = \sum_{i=1}^n \chi_{\alpha_i} \cdot \varphi^0(f_i), \quad g = \sum_{j=1}^m \chi_{\beta_j} \cdot \varphi^0(g_j) \in L,$$

то $f+g$ и $f \cdot g$ принадлежат L , так как

$$f + g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \chi_{\alpha_i \wedge \beta_j} \cdot \varphi^0(f_i + g_j);$$

$$f \cdot g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \chi_{\alpha_i \wedge \beta_j} \cdot \varphi^0(f_i \cdot g_j).$$

Следовательно, L — подалгебра алгебры $C(Z(\Lambda))$. Очевидно, L разделяет точки бикompакта $Z(\Lambda)$, содержит единицу и вместе с каждой функцией комплексно сопряженную. По теореме Стоуна—Вейерштрасса L плотно в $C(Z(\Lambda))$.

Таким образом, регулярный оператор усреднения U для φ достаточно задать на L . Определим его равенством 15.

Тогда, если

$$f = \sum_{i=1}^n \chi_{\alpha_i} \cdot \varphi^0(f_i) = \sum_{j=1}^m \chi_{\beta_j} \cdot \varphi^0(g_j) \in L,$$

то по сделанному выше замечанию

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \chi_{\alpha_i \wedge \beta_j} \cdot \varphi^0(f_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \chi_{\beta_j \wedge \alpha_i} \cdot \varphi^0(g_j).$$

Отсюда, поскольку множества $Z_{\alpha_i \wedge \beta_j}$ попарно не пересекаются, получаем $\varphi^0(f_i) = \varphi^0(g_j)$ на $Z_{\alpha_i \wedge \beta_j}$. По условию 14 тогда $f_i = g_j$ на $\text{supp } t_{\alpha_i \wedge \beta_j}$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^n t_{\alpha_i} \cdot f_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m t_{\alpha_i \wedge \beta_j} \cdot f_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n t_{\beta_j \wedge \alpha_i} \cdot g_j = \sum_{j=1}^m t_{\beta_j} \cdot g_j,$$

т. е. оператор U определен корректно. Его линейность очевидна. U — регулярный оператор усреднения для φ . Действительно, пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — разбиение единичного эле-

мента в A . Тогда $\sum_{i=1}^n \chi_{\alpha_i} = 1$ и

$$\varphi^0(f) = \sum_{i=1}^n \chi_{\alpha_i} \cdot \varphi^0(f) \in L, f \in C(X).$$

Кроме того, $\sum_{i=1}^n t_{\alpha_i} = t_1 = 1$ по условиям 12 и 13, следовательно,

$$U \circ \varphi^0(f) = U \left(\sum_{i=1}^n \chi_{\alpha_i} \cdot \varphi^0(f) \right) = \sum_{i=1}^n t_{\alpha_i} \cdot f = f, f \in C(X).$$

В частности, $U(1) = U \circ \varphi^0(1) = 1$. Далее, пусть $\|\sum \chi_{\alpha_i} \times \varphi^0(f_i)\| \leq 1$.

Так как множества Z_{α_i} не пересекаются, то

$$\left| \sum_{i=1}^n \chi_{\alpha_i}(\gamma) \cdot \varphi^0(f_i)(\gamma) \right| = \sum_{i=1}^n \chi_{\alpha_i}(\gamma) \cdot |\varphi^0(f_i)(\gamma)| \leq 1, \gamma \in x(\Lambda).$$

Отсюда $|f_i| \leq 1$ на $\text{supp } t_{\alpha_i}$ и

$$\left| \sum_{i=1}^n t_{\alpha_i}(x) \cdot f_i(x) \right| \leq \sum_{i=1}^n t_{\alpha_i}(x) \cdot |f_i(x)| \leq \sum_{i=1}^n t_{\alpha_i}(x) = 1, x \in X.$$

Так что $|U| < 1$. Теорема доказана.

Следствие 4. Пусть X — бикомпакт и $\{t_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ — булева система функций на X . Тогда существующее по теореме 1 непрерывное отображение $\varphi: Z(\Lambda) \rightarrow X$, где $\Sigma = \{\Gamma_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ — булева система носителей $\Gamma_\alpha = \text{supp } t_\alpha$, допускает такой регулярный оператор усреднения U , что $t_\alpha = U(\chi_\alpha)$ для всех $\alpha \in \Lambda$.

Доказательство. Действительно, поскольку $\text{supp } t_\alpha = \Gamma_\alpha = \varphi(Z_\alpha)$ для каждого $\alpha \in \Lambda$, то по теореме 5 равенство 15 определяет требуемый оператор U .

Следствие 5. Линейная оболочка булевой системы функций $\{t_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ на X плотна в $C(X)$.

Доказательство. Действительно, по следствию 4 непрерывное отображение $\varphi: Z(\Lambda) \rightarrow X$, где $\Sigma = \{\Gamma_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ — булева система носителей t_α , допускает такой регулярный оператор усреднения U , что $t_\alpha = U(\chi_\alpha)$ для всех $\alpha \in \Lambda$. Так как $\text{sp}\{\chi_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ — подалгебра $C(Z(\Lambda))$, разделяющая точки, содержащая единицу и вместе с каждой функцией комплексно сопряженную, то как непрерывный образ плотного множества

$$\text{sp}\{t_\alpha | \alpha \in \Lambda\} = U(\text{sp}\{\chi_\alpha | \alpha \in \Lambda\})$$

плотно в $C(X)$.

Следствие 6. Любое неприводимое отображение $\varphi: Z(\Lambda) \rightarrow X$ с нульмерного бикомпакта $Z(\Lambda)$, допускающее регулярный оператор усреднения, является гомеоморфизмом.

Доказательство. Пусть неприводимое отображение $\varphi: Z(\Lambda) \rightarrow X$ допускает регулярный оператор усреднения U . Для доказательства следствия очевидно, достаточно показать, что для любого $\alpha \in \Lambda$ множества $\Gamma_\alpha = \varphi(Z_\alpha)$ и $\Gamma_{c\alpha} = \varphi(Z_{c\alpha})$ не пересекаются. Пусть $\beta \in \Lambda$ произвольно. Так как φ — неприводимое отображение, то множества Γ_β и $\Gamma_{c\beta}$ образуют каноническое разбиение X , т. е. $\text{Int } \Gamma_\beta \cap \text{Int } \Gamma_{c\beta} = \emptyset$. Пусть $t_\nu = U(\chi_\nu)$, где $\nu = \beta$ или $c\beta$. По теореме 5 имеем $\text{supp } t_\nu \subset \Gamma_\nu$. Следовательно, $\{x \in X | t_\nu(x) > 0\} = G_\nu \subset \text{Int } \Gamma_\nu$. Тогда $\text{Int } \Gamma_\beta \cup \text{Int } \Gamma_{c\beta} = X$ по свойству г. Следовательно, $\Gamma_\beta = \text{Int } \Gamma_\beta$, $\Gamma_{c\beta} = \text{Int } \Gamma_{c\beta}$ и $\Gamma_\beta \cap \Gamma_{c\beta} = \emptyset$.

Общий случай. Пусть $\Psi: X \rightarrow Y$ — эпиморфизм произвольного бикомпакта X на бикомпакт Y . Естественно, возникает вопрос: «Каковы необходимые и достаточные условия существования регулярного оператора усреднения для Ψ ? На этот вопрос, используя понятие булевой системы функций, можно ответить следующим образом.

Теорема 6. Если непрерывное отображение $\psi: X \rightarrow Y$ допускает регулярный оператор усреднения V , то для всякой булевой системы функций $\{t_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ на X существует такая булева система функций $\{l_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ на Y , что:

16) $\text{supp } l_\alpha \subset \psi(\text{supp } t_\alpha)$ для каждого $\alpha \in \Lambda$;

17) $v\left(\sum_{i=1}^n t_{\alpha_i} \cdot \psi^0(f_i)\right) = \sum_{i=1}^n l_{\alpha_i} \cdot f_i$, где $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — произ-

вольное разбиение единичного элемента в Λ и $f_1, \dots, f_n \in C(Y)$.

Обратно, если для булевой системы функций $\{t_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ на X существует такая булева система функций $\{l_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$, что справедливо условие 16, то ψ допускает регулярный оператор усреднения.

Доказательство. Пусть отображение $\psi: X \rightarrow Y$ допускает регулярный оператор усреднения V и $\{t_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ — булева система функций на X . По следствию 4 непрерывное отображение $\varphi: Z(\Lambda) \rightarrow X$, где $\Sigma = \{\Gamma_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ — булева система носителей $\Gamma_\alpha = \text{supp } t_\alpha$, допускает регулярный оператор усреднения U , который определен равенством 15 теоремы 5. Очевидно, что $V^0 U$ — регулярный оператор усреднения для $\psi \circ \varphi: Z(\Lambda) \rightarrow Y$. По теореме 5 тогда $l_\alpha = (V^0 U)(\chi_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$, образуют требуемую булеву систему функций на Y , так как

$$\text{supp } l_\alpha \subset (\psi \circ \varphi)(\chi_\alpha) = \psi(\text{supp } t_\alpha)$$

и

$$V\left(\sum_{i=1}^n t_{\alpha_i} \cdot \psi^0(f_i)\right) = (V^0 U)\left(\sum_{i=1}^n \chi_{\alpha_i} \cdot (\psi^0 \varphi)^0(f_i)\right) = \sum_{i=1}^n l_{\alpha_i} \cdot f_i.$$

Обратно, пусть для булевой системы функций $\{t_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ на X существует такая булева система функций $\{l_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ на Y , что справедливо условие 16. Пусть $\varphi: Z(\Lambda) \rightarrow X$ — непрерывное отображение, построенное по булевой системе $\Sigma = \{\Gamma_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ носителей $\Gamma_\alpha = \text{supp } t_\alpha$. Тогда $\psi^0 \varphi: Z(\Lambda) \rightarrow Y$ и по предположению

$$\text{supp } l_\alpha \subset \psi(\Gamma_\alpha) = (\psi^0 \varphi)(Z_\alpha), \alpha \in \Lambda.$$

Так что по теореме 5 существует регулярный оператор усреднения U для $\psi^0 \varphi$. Тогда очевидно, что $\varphi^0 \circ U$ есть регулярный оператор усреднения для ψ . Теорема доказана.

Алгебраическая характеристика бикомпактов Милютина. Согласно теореме 5 и результату из [3] (бикомпакт X бесконечной мощности является непрерывным образом нульмер-

ного бикомпакта веса WX при отображении, допускающем регулярный оператор усреднения) любое бесконечное бикомпактное пространство Y имеет булеву систему функций $\{t_\alpha | \alpha \in A\}$ мощности WY . Естественно ожидать, что бикомпакты Милютина имеют какие-то особые (с точки зрения алгебры) булевы системы функций, которые их характеризуют.

В этом пункте приводится одна из таких характеристик бикомпактов Милютина.

Замечание. Хорошо известно (см., например, [2, с. 100—102]), что каждая свободная булева алгебра Λ (с независимой системой образующих) мощности τ имеет своим пространством Стоуна канторовский куб D^τ веса τ . Обратно, алгебра открыто замкнутых подмножеств канторовского куба D^τ является свободной булевой алгеброй мощности τ .

Определение. Булева система функций $\{t_\alpha | \alpha \in A\}$ на X называется свободной, если Λ — свободная булева алгебра.

Теорема 7. Бикомпакт X является милютинским тогда и только тогда, когда на X существует свободная булева алгебра функций.

Доказательство. Пусть X — бикомпакт Милютина, т. е. X есть непрерывный образ некоторого D^τ при отображении φ , допускающем регулярный оператор усреднения U . И пусть Λ — булева алгебра всех открыто замкнутых подмножеств D^τ . Тогда согласно теореме 5 и сделанному выше замечанию функции $t_\alpha = U(\chi_\alpha)$, где χ_α — характеристическая функция подмножества $\alpha \subset D^\tau$, $\alpha \in \Lambda$, образуют свободную булеву систему на X . Обратно, если $\{t_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ — свободная булева система функций на X , то по замечанию имеем $Z(\Lambda) = D^\tau$, где τ — мощность Λ . Кроме того, по следствию 4 существует эпиморфизм $\varphi: Z(\Lambda) \rightarrow X$, допускающий регулярный оператор усреднения. Следовательно, X — бикомпакт Милютина. Теорема доказана.

Следствие 7. Бикомпакт Милютина X имеет такую свободную булеву систему множеств $\Sigma = \{\Gamma_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$, состоящую из замыканий открытых F_α -множеств $G_\alpha \subset X$, что

$$X = G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$$

для любого разбиения $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ единичного элемента в Λ .

Доказательство. Действительно, по теореме 7 бикомпакт X имеет свободную булеву систему функций

$\{t_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$. Тогда по γ носители $\text{supp } t_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$, образуют требуемую булеву систему множеств.

Тополого-алгебраическая характеристика бикомпактов Милютина. Следующая теорема решает задачу А. Пелчинского [1, задача 8] о топологической характеристизации бикомпактов Милютина.

Теорема 8. Бикомпакт X является милютинским в том и только в том случае, если существует такое семейство $\{\vartheta_\nu | \nu \in \sigma\}$ двухэлементных систем $\vartheta_\nu = \{\Gamma_\nu^0, \Gamma_\nu^1\}$ из замыканий открытых F_σ -множеств G_ν^0 и G_ν^1 , покрывающих X , что справедливы условия 4 и 5 теоремы 3.

Доказательство. Пусть X — бикомпакт Милютина. По теореме 7 и следствию 4 тогда существуют свободная булева система функций $\{t_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ на X и непрерывное отображение $\varphi: Z(\Lambda) \rightarrow X$, где $\Sigma = \{\Gamma_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ — булева система носителей $\Gamma_\alpha = \text{supp } t_\alpha$. Тогда $\vartheta_\nu = \{\Gamma_\nu, \Gamma_{c\nu}\}$, $\nu \in \sigma$, где σ — независимая система образующих булевой алгебры A , образуют требуемое семейство. Действительно, пусть $\nu \in \sigma$. Элементы ν и $c\nu$ составляют разбиение единичного элемента в A и, следовательно, по γ множества Γ_ν и $\Gamma_{c\nu}$ являются замыканиями открытых F_σ -множеств G_ν и $G_{c\nu}$, покрывающих X . Далее, поскольку G_α по 2 пусто в том и только в том случае, когда $\alpha = 0$, то по б отсюда получаем

$$G_{\nu_1} \cap \dots \cap G_{\nu_k} \cap G_{c\nu_{k+1}} \cap \dots \cap G_{c\nu_n} \supset G_\beta \neq \emptyset,$$

где $\beta = \nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_k \wedge c\nu_{k+1} \wedge \dots \wedge c\nu_n$ для любых $\nu_1, \dots, \nu_n \in \sigma$ и любого $k = 0, 1, \dots, n$. Таким образом, справедливо условие

$$18) \bigcap_{i=1}^n G_{j_i}^1 \neq \emptyset \text{ для любого конечного набора } \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$$

из σ и любых $j_i = 0$ или 1, из которого 4 следует. Доказательство 5 аналогично доказательству этого условия в теореме 3 (см. [4]).

Обратно, пусть $\{\vartheta_\nu | \nu \in \sigma\}$ — семейство бинарных систем $\vartheta_\nu = \{\Gamma_\nu^0, \Gamma_\nu^1\}$ из замыканий открытых F_σ -множеств G_ν^0 и G_ν^1 , покрывающих X , удовлетворяющее условиям 4 и 5 теоремы 3. Тогда, как показано при доказательстве теоремы 3, существует непрерывное отображение ψ канторовского куба $D = \prod_{\nu \in \sigma} \vartheta_\nu$, где $\vartheta_\nu = \{\Gamma_\nu^0, \Gamma_\nu^1\}$ — двухточечное простран-

во с дискретной топологией, на X , удовлетворяющее равенству

$$19) \phi\left(\bigcap_{l=1}^n A_{j_l}^{\alpha_l}\right) = \bigcap_{l=1}^n \Gamma_{j_l}^{\alpha_l}, \text{ где } A_j^{\alpha} = \{\Gamma_j^{\alpha}\} \times \prod_{\gamma \in \sigma \setminus \{\alpha\}} \{0, 1\},$$

для любого набора $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ из σ и любых $j_l = 0$ или 1 . Кроме того, для каждого $\gamma \in \sigma$ существуют (см. доказательство следствия 1) такие неотрицательные непрерывные функции t_0^{γ} и t_1^{γ} на X , что

$$\Gamma_0^{\gamma} = \sup t_0^{\gamma}, \Gamma_1^{\gamma} = \sup t_1^{\gamma}, t_0^{\gamma} + t_1^{\gamma} = 1.$$

Теперь заметим, что для любой конечной совокупности $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \sigma$ множества

$$20) \quad A_{j_1}^{\alpha_1} \cap \dots \cap A_{j_n}^{\alpha_n}$$

образуют разбиение D^{σ} (из 2^n попарно различных элементов). Аналогично для $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \sigma$ функции

$$t_{j_1}^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot t_{j_n}^{\alpha_n}$$

образуют разбиение единицы на X . Например, для совокупности из одного элемента $\gamma \in \sigma$ разбиением D^{σ} является $\{A_0^{\gamma}, A_1^{\gamma}\}$, а $\{t_0^{\gamma}, t_1^{\gamma}\}$ — разбиение единицы на X ; для совокупности из двух элементов $\gamma, \gamma' \in \sigma$ разбиением D^{σ} служит $\{A^{\gamma} \cap A_0^{\gamma'}, A_0^{\gamma} \cap A_1^{\gamma'}, A_1^{\gamma} \cap A_0^{\gamma'}, A_1^{\gamma} \cap A_1^{\gamma'}\}$, а разбиением единицы — $\{t_0^{\gamma} \cdot t_0^{\gamma'}, t_0^{\gamma} \cdot t_1^{\gamma'}, t_1^{\gamma} \cdot t_0^{\gamma'}, t_1^{\gamma} \cdot t_1^{\gamma'}\}$ и т. д.

Далее, пусть $\lambda = \{\Lambda_{\lambda_k} | k=1, 2, \dots, 2^n\}$ и $\mu = \{\Lambda_{\mu_s} | s=1, 2, \dots, 2^m\}$ — два разбиения D^{σ} , построенные соответственно на совокупностях $\{v_1, \dots, v_n\}$ и $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \subset \sigma$, т. е.

$$A_{\lambda_k} = \bigcap_{l=1}^n A_{j_l}^{\alpha_l} \text{ и } A_{\mu_s} = \bigcap_{l=1}^m A_{j_l}^{\alpha_l}.$$

Тогда множества $\Lambda_{\lambda_k} \cap \Lambda_{\mu_s}$, $k=1, 2, \dots, 2^n$, $s=1, 2, \dots, 2^m$, образуют новое разбиение D^{σ} , состоящее из 2^{n+m} (не обязательно различных) элементов, которое обозначим через

$$\lambda \wedge \mu = \{\Lambda_{\lambda_k \wedge \mu_s} | k=1, 2, \dots, 2^n; s=1, 2, \dots, 2^m\}.$$

$$\text{Ясно, что } A_{\lambda_k} = \bigcup_{s=1}^{2^m} \Lambda_{\lambda_k \wedge \mu_s} \text{ и } A_{\mu_s} = \bigcup_{k=1}^{2^n} \Lambda_{\lambda_k \wedge \mu_s}.$$

Пусть $\lambda = \{\Lambda_{\lambda_k} | k=1, 2, \dots, 2^n\}$ — произвольное разбиение D^{σ} , построенное на совокупности $\{v_1, \dots, v_n\}$. Обозначим через χ_{λ_k} характеристическую функцию подмножества $\Lambda_{\lambda_k} \subset$

$\subset D^\sigma$. Очевидно, $\chi_{\lambda_\kappa} = \chi_{j_1}^{y_1} \cdot \dots \cdot \chi_{j_n}^{y_n}$, если $A_{\lambda_\kappa} = \bigcap_{l=1}^n A_{j_l}^{y_l}$. Теперь положим

$$f_\lambda = \sum_{\kappa=1}^{2^n} \chi_{\lambda_\kappa} \cdot \psi^0(f_\kappa), \text{ где } f_1, f_2, \dots, f_{2^n} \in C(X).$$

Множество функций f_λ , когда λ пробегает множество разбиений, построенных на всевозможных конечных совокупностях из σ , обозначим через L . Поскольку множества 2^0 образуют базу пространства D^σ , то L состоит из непрерывных функций и разделяет точки D^σ . Очевидно, L содержит единицу и вместе с каждой функцией комплексно сопряженную. Кроме того, если

$$f = \sum_{\kappa=1}^{2^n} \chi_{\lambda_\kappa} \cdot \psi^0(f_\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{2^n} \sum_{s=1}^{2^m} \chi_{\lambda_\kappa \wedge \mu_s} \cdot \psi^0(f_\kappa) \in L$$

и

$$g = \sum_{s=1}^{2^m} \chi_{\mu_s} \cdot \psi^0(g_s) = \sum_{s=1}^{2^m} \sum_{\kappa=1}^{2^n} \chi_{\mu_s \wedge \lambda_\kappa} \cdot \psi^0(g_s) \in L,$$

то

$$f + g = \sum_{\kappa=1}^{2^n} \sum_{s=1}^{2^m} \chi_{\lambda_\kappa \wedge \mu_s} \cdot \psi^0(f_\kappa + g_s) \in L$$

и

$$f \cdot g = \sum_{\kappa=1}^{2^n} \sum_{s=1}^{2^m} \chi_{\lambda_\kappa \wedge \mu_s} \cdot \psi^0(f_\kappa \cdot g_s) \in L.$$

Таким образом, L есть подалгебра банаховой алгебры $C(D^\sigma)$, по теореме Стоуна—Вейерштрасса она плотна в $C(D^\sigma)$.

Оператор усреднения U для ψ определим на L равенством

$$U \left(\sum_{i=1}^{2^n} \chi_{\lambda_i} \cdot \psi^0(f_i) \right) = \sum_{i=1}^{2^n} t_{\lambda_i} \cdot f_i, \text{ где } t_{\lambda_i} = t_{j_1}^{y_1} \cdot \dots \cdot t_{j_n}^{y_n}.$$

Теперь если функции

$$f = \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \chi_{\lambda_i \wedge \mu_j} \cdot \psi^0(f_i) \text{ и } g = \sum_{j=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} \chi_{\mu_j \wedge \lambda_l} \cdot \psi^0(g_j) \in L$$

равны, то $\phi^0(f_i) = \phi^0(g_j)$ на $A_{\lambda_i} \cap A_{\mu_j}$ для любых i и j . Отсюда по 19 $f_i = g_j$ на $\Gamma_{\lambda_i} \cap \Gamma_{\mu_j} = \psi(A_{\lambda_i} \cap A_{\mu_j})$. И так как $\text{supp}(t_{\lambda_i} \cdot t_{\mu_j}) \subset \Gamma_{\lambda_i} \cap \Gamma_{\mu_j}$, то получаем, что

$$U(f) = \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} t_{\lambda_i} \cdot t_{\mu_j} \cdot f_i = \sum_{j=1}^{2^m} \sum_{i=1}^{2^n} t_{\mu_j} \cdot t_{\lambda_i} \cdot g_j = U(g),$$

т. е. оператор U определен корректно.

Линейность U очевидна. Докажем регулярность. Пусть $\nu \in \sigma$ и $f' \in C(X)$. Тогда $\phi^0(f') = \chi_0^\nu \cdot \phi^0(f') + \chi_1^\nu \cdot \psi^0(f') \in L$ и

$$(U^0 \phi^0)(f') = t_0^\nu \cdot f' + t_1^\nu \cdot f' = f',$$

поскольку $t_0^\nu + t_1^\nu = 1$. В частности, $U(1) = (U^0 \phi^0)(1) = 1$.

Далее, если $\left\| \sum_{i=1}^{2^n} \chi_{\lambda_i} \cdot \phi^0(f_i) \right\| \leq 1$, то $|f_i| \leq 1$ на $\text{supp } t_{\lambda_i} \subset \Gamma_{\lambda_i} = \psi(A_{\lambda_i})$ для каждого $i = 1, 2, \dots, 2^n$. Следовательно,

$$\left| \sum_{i=1}^{2^n} t_{\lambda_i}(x) \cdot f_i(x) \right| \leq \sum_{i=1}^{2^n} t_{\lambda_i}(x) \cdot |f_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{2^n} t_{\lambda_i}(x) = 1$$

для любого $x \in X$. Так что $\|U\| \leq 1$ и теорема доказана.

В ходе доказательства теоремы 8 доказано

Следствие 8. Бикомпакт X является милютинским в том и только в том случае, когда существует такое семейство $\{\vartheta_\nu \mid \nu \in \sigma\}$ двухэлементных систем $\vartheta_\nu = \{\Gamma_\nu^0, \Gamma_\nu^1\}$ из замыканий открытых F_σ -множеств G_ν^0 и G_ν^1 , покрывающих X что справедливы условия:

21) $\bigcap_{i=1}^N G_{j_i}^\nu \neq \emptyset$ для любого конечного набора $\{\nu_1, \dots, \nu_n\} \subset \sigma$ и любых $j_i = 0$ или 1 ;

22) множества $\bigcap_{i=1}^N \Gamma_{j_i}^{\nu_i}$, где $\nu_1, \dots, \nu_n \in \sigma$ и $j_i = 0$ или 1 , образуют сеть Архангельского в X .

Ниже приводятся еще некоторые характеристики бикомпактов Милютин.

Теорема 9. Бикомпакт X является милютинским в том и только в том случае, когда имеет свободную булеву систему $\Sigma = \{\Gamma_\alpha \mid \alpha \in A\}$, состоящую из замыканий открытых F_σ -

множеств G_α таких, что $G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n} = X$ для любого разбиения $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ единичного элемента в Λ .

Доказательство. Часть этого утверждения составляет следствие 7. Обратно, пусть $\Sigma = \{\Gamma_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ — свободная булева система в X , удовлетворяющая условиям теоремы, и пусть σ — независимая система образующих булевой алгебры Λ . Тогда, как легко видеть, пары $\Phi_\nu = \{\Gamma_\nu, \Gamma_{c\nu}\}$ образуют семейство, удовлетворяющее всем условиям теоремы 8. Таким образом, X есть бикомпакт Милютина.

Теорема 10. Для того, чтобы бикомпакт X был милютинским, необходимо и достаточно, чтобы X имел такую свободную булеву систему $\Sigma = \{\Gamma_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ из замыканий открытых F_σ -множеств G_α , что $X = G_\alpha \cup G_{c\alpha}$ для любого $\alpha \in \Lambda$ и

23) $G_\alpha \subset G_\beta$, если $\alpha \leq \beta$.

Доказательство. Пусть X — бикомпакт Милютина и пусть $\{t_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ — свободная булева система функций на X . Тогда по 6 и следствию 7 носители $\Gamma_\alpha = \text{supp } t_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$, образуют необходимую булеву систему множеств.

Докажем достаточность. Пусть $\Sigma = \{\Gamma_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ — свободная булева система множеств в X такая, как в условии теоремы, и пусть σ — независимая система образующих булевой алгебры Λ . Для доказательства теоремы достаточно показать, что пары $\Phi_\nu = \{\Gamma_\nu, \Gamma_{c\nu}\}$ образуют семейство, удовлетворяющее условиям 21 и 22 следствия 8.

В силу 23 и 2 имеем

$$G_{v_1} \cap \dots \cap G_{v_k} \cap G_{c v_{k+1}} \cap \dots \cup G_{c v_n} \supset G_\rho \neq \emptyset,$$

где $\rho = v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge c v_{k+1} \wedge \dots \wedge c v_n$, для любых $v_1, \dots, v_n \in \sigma$ и любого $k = 0, 1, \dots, n$. Так что условие 21 выполнено. Условие 22 также выполнено — вытекает из существования непрерывного отображения $\varphi: Z(\Lambda) \rightarrow X$ (см. доказательство этого условия в теореме 3).

Определение. Системы $\{t_\nu | \nu \in \sigma\}$ непрерывных функций $t_\nu: X \rightarrow [0, 1]$ называется независимой, если для любого конечного числа $v_1, \dots, v_n \in \sigma$ и любого $k = 0, 1, \dots, n$:

$$t_{v_1} \cdot \dots \cdot t_{v_k} \cdot (1 - t_{v_{k+1}}) \cdot \dots \cdot (1 - t_{v_n}) > 0.$$

Теорема 11. Бикомпакт X является милютинским тогда и только тогда, когда существует независимая система функций $\{t_\nu | \nu \in \sigma\}$ на X такая, что множества

24) $\text{supp } t_{v_1} \cap \dots \cap \text{supp } t_{v_k} \cap \text{supp } (1 - t_{v_{k+1}}) \cap \dots \cap \text{supp } (1 - t_{v_n})$, где $\{v_1, \dots, v_n\}$, произвольный конечный набор из σ и $k = 0, 1, \dots, n$, образуют сеть Архангельского в X .

Доказательство. Пусть X — бикомпакт Милютина. По следствию 4 существуют такая свободная булева система функций $\{t_\alpha | \alpha \in A\}$ на X и такое непрерывное отображение $\varphi: Z(A) \rightarrow X$, что $\varphi(Z_\alpha) = \text{supp } t_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Пусть σ — независимая система образующих булевой алгебры A . Тогда $\{t_\nu | \nu \in \sigma\}$ — требуемая независимая система функций на X . Действительно, если $\nu_1, \dots, \nu_k \in \sigma$ и $k=0, 1, \dots, n$, то

$$\nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_k \wedge c\nu_{k+1} \wedge \dots \wedge c\nu_n \neq 0.$$

Отсюда по 12 и свойству б получаем

$$0 < t_{\nu_1} \wedge \dots \wedge t_{\nu_k} \wedge c t_{\nu_{k+1}} \wedge \dots \wedge c t_{\nu_n} \leq t_\gamma$$

для любого $\gamma = \nu_1, \dots, \nu_k, c\nu_{k+1}, \dots, c\nu_n$. Тогда по 12 и 13

$$t_{\nu_1} \cdot \dots \cdot t_{\nu_k} \cdot (1 - t_{\nu_{k+1}}) \cdot \dots \cdot (1 - t_{\nu_n}) > 0.$$

Из существования непрерывного отображения $\varphi: Z(A) \rightarrow X$, удовлетворяющего равенствам $\varphi(Z_\nu) = \text{supp } t_\nu$, $\nu \in \sigma$, следует, что всевозможные конечные пересечения вида 24 образуют сеть Архангельского в X (доказательство этого эквивалентно доказательству условия 5 в теореме 3).

Обратно, если существует независимая система функций $\{t_\nu | \nu \in \sigma\}$ на X такая, как в условии теоремы, то пары $\mathfrak{U}_\nu = \{t_\nu, 1 - t_\nu\}$, где $\Gamma_\nu^0 = \text{supp } t_\nu$ и $\Gamma_\nu^1 = \text{supp } (1 - t_\nu)$, очевидно, образуют семейство, удовлетворяющее всем условиям теоремы 8. Таким образом, X есть милютинский бикомпакт. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пелчинский А. Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения. — М.: Мир, 1970. — 144 с.
2. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. — М.: Наука, 1969 — 320 с.
3. Ditor S. Z. On a lemma of Milutin concerning averaging operators in continuous function spaces. — Trans. Amer. Math. Soc., v. 149 (1970), p. 443—452.
4. Слепухин И. К. Булевы системы и булевы алгебры подмножеств топологических пространств. — Томск, 1979. — 41 с. — Рукопись представлена Томским ун-том. Деп. в ВИНТИ 5 июня 1979, № 1984-79.

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, КОНФОРМНО ОТОБРАЖАЮЩИХ ПОЛОСУ В СЕБЯ

Б. Г. Цветков

Пусть

$$\Pi_z = \{z: 2|\operatorname{Im} z| < \pi\}, \partial\Pi_z = \{z: 2|\operatorname{Im} z| = \pi\}.$$

Определение 1. Класс P — совокупность всех функций $W=f(z)$, регулярных в полосе Π_z и принимающих значения из полосы Π_w .

Пусть точки $z_{\pm}$ принадлежат границе полосы Π_z . Тогда каждая функция семейства

$$w = \ln \alpha \frac{e^z - e^{z_-}}{e^z - e^{z_+}}, \quad z \in \Pi_z, \quad z_{\pm} \in \partial\Pi_z, \quad (1)$$

где α , $\operatorname{Re} \alpha = 0$, — произвольная постоянная, $\ln 1 = 0$, принадлежит классу P и отображает Π_z на Π_w .

Положим

$$R = \{z: \operatorname{Im} z = 0\}, \quad L(z_-, z_+) = \left\{z: e^{\xi} = \alpha \frac{e^z - e^{z_-}}{e^z - e^{z_+}}, \quad \xi \in R\right\}.$$

В данной статье для функций класса P приводятся ряд следствий из результатов, полученных в работах [1, 2, 3].

Теорема 1. Пусть $f(z) \in P$, конечны пределы

$$\lim_{z \rightarrow z_{\pm}} f(z) = f(z_{\pm}), \quad \lim_{z \rightarrow z_{\pm}} f'(z) = f'(z_{\pm}), \quad z \in L(z_-, z_+), \quad (2)$$

и выполняются условия

$$|\operatorname{Im} f(z_{\pm})| = \frac{\pi}{2}, \quad f'(z_{\pm}) \neq 0. \quad (3)$$

Тогда имеет место неравенство

$$f'(z_-) f'(z_+) \frac{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{z_- - z_+}{2} \right)}{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{f(z_-) - f(z_+)}{2} \right)} \geq 1, \quad f(z) \in P. \quad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим функции $\eta = \varphi(\zeta)$, $\zeta \in \Pi_\zeta$, $\eta \in \Pi_\eta$, определяемую из системы уравнений

$$e^\zeta = \alpha \frac{e^z - e^{z_-}}{e^z - e^{z_+}}, \quad e^\eta = \beta \frac{e^{f(z)} - e^{f(z_-)}}{e^{f(z)} - e^{f(z_+)}} \quad , \quad f(z) \in P, \quad (5)$$

где α и β , $\operatorname{Re} \alpha = \operatorname{Re} \beta = 0$, — произвольные постоянные.

Так как конечны величины $f(z_\pm)$, $f'(z_\pm)$, то конечны пределы

$$\varphi_\pm = \lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} (\varphi(\zeta) - \zeta), \quad \zeta \in R,$$

которые с использованием системы (5) представимы в виде

$$\begin{aligned} \varphi_+ = \lim_{z \rightarrow z_+} \ln \frac{\beta}{\alpha} \frac{e^{f(z)} - e^{f(z_-)}}{e^{f(z)} - e^{f(z_+)}} \frac{e^z - e^{z_+}}{e^z - e^{z_-}} = \ln \frac{\beta}{\alpha} \times \\ \times \frac{(e^{f(z_+)} - e^{f(z_-)})}{(e^{z_+} - e^{z_-})} \frac{e^{z_+}}{e^{f(z_+)} f'(z_+)}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\varphi_- = \ln \frac{\beta}{\alpha} \frac{e^{z_-} - e^{z_+}}{e^{f(z_-)} - e^{f(z_+)}} \frac{e^{f(z_-)} f'(z_-)}{e^{z_-}}, \quad z \in L(z_-, z_+). \quad (7)$$

Из теоремы 3 работы [1] следует, что если $f(z) \in P$ и конечны пределы

$$f_\pm = \lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{Re} (f(z) - z), \quad z \in R,$$

то имеет место неравенство

$$f_- - f_+ \geq 0.$$

Согласно (1), (3) функция $\eta = \varphi(\zeta)$ регулярна в Π_ζ и принимает значения из Π_η , поэтому должно выполняться неравенство

$$\varphi_- - \varphi_+ \geq 0. \quad (8)$$

Из формул (6), (7) получаем равенство

$$\varphi_- - \varphi_+ = \ln \left(\frac{e^{z_-} - e^{z_+}}{e^{f(z_-)} - e^{f(z_+)}} \right)^2 \frac{e^{f(z_-) + f(z_+)}}{e^{z_- + z_+}} f'(z_-) f'(z_+). \quad (9)$$

Из условий (8), (9) с использованием формулы

$$\frac{e^{2\alpha} - e^{2\beta}}{2e^{\alpha + \beta}} = \operatorname{sh}(\alpha - \beta)$$

получаем неравенство (4). Теорема доказана.

Определение 2. Класс $P_+(z_+)$ — совокупность всех функций $f(z) \in P$, для каждой из которых конечны пределы (2) и выполняются условия (3) в точке z_+ .

Определение 3. Класс P_+ — совокупность всех функций $f(z) \in P$, для каждой из которых конечен предел

$$f_+ = \lim_{z \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} (f(z) - z), \quad z \in R.$$

Теорема 2. Пусть $f(z) \in P_+(z_+)$. Тогда имеет место неравенство

$$\frac{|e^z - e^{z_+}|^2}{|e^{f(z)} - e^{f(z_+)}|^2} \frac{e^{f(z_+)} f'(z_+)}{e^{z_+}} \frac{\operatorname{Re} e^{f(z)}}{\operatorname{Re} e^z} \geq 1, \quad z \in \Pi_z. \quad (10)$$

Доказательство. Из теоремы 3 работы [1] следует, что если $f(z) \in P_+$, то имеет место неравенство

$$\frac{\operatorname{Re} e^{f(z)}}{\operatorname{Re} e^z} e^{-f_+} \geq 1, \quad z \in \Pi_z, \quad f(z) \in P_+. \quad (11)$$

Заменяя в (11) величины z , $f(z)$, f_+ соответственно на ξ , $\varphi(\xi)$, φ_+ и учитывая формулы (5), (6), получаем неравенство (10). Теорема доказана.

Замечание. Из (10) и условия $\operatorname{Im}(f(z_+) - z_+) = 0$ следует неравенство $f'(z_+) > 0$, а если выполняется условие $\operatorname{Im}(f(z_+) + z_+) = 0$, то справедливо неравенство $f'(z_+) < 0$.

Определение 4. Класс $T_+(z_+)$ — совокупность всех функций $f(z) \in P_+(z_+)$, каждая из которых однолистка в Π_z .

Определение 5. Класс T_+ — совокупность всех функций $f(z) \in P_+$, каждая из которых однолистка в Π_z .

Теорема 3. Пусть $f(z) \in T_+(z_+)$. Тогда имеет место неравенство

$$\left| \ln \frac{e^{f(z_+)} f'(z_+)}{e^{z_+}} \frac{\operatorname{Re} e^{f(z)}}{\operatorname{Re} e^z} \frac{|e^z - e^{z_+}|^2}{|e^{f(z)} - e^{f(z_+)}|^2} \right| \geq \quad (12)$$

$$\geq \left| \ln \frac{e^{f(z_+)} f'(z_+)}{e^{z_+}} \frac{e^{f(z)} f'(z)}{e^z} \left(\frac{e^z - e^{z_+}}{e^{f(z)} - e^{f(z_+)}} \right)^2 \right|, \quad z \in \Pi_z.$$

Доказательство. Из следствия теоремы 15 работы [1] следует, что если $f(z) \in T_+$, то имеет место неравенство

$$\left| -f_+ - \ln \frac{\operatorname{Re} e^{f(z)}}{\operatorname{Re} e^z} \right| \geq |f(z) - z - f_+ + \ln f'(z)|, \quad z \in \Pi_z. \quad (13)$$

Заменяя в (13) величины z , $f(z)$, f_+ соответственно на ξ , $\varphi(\xi)$, φ_+ , с учетом формул (5), (6) и

$$\varphi'(\xi) = \frac{e^z - e^{z_+}}{e^{f(z)} - e^{f(z_+)}} \frac{e^z - e^{z_-}}{e^{f(z)} - e^{f(z_-)}} \frac{e^{f(z_-)} - e^{f(z_+)}}{e^z - e^{z_+}} \frac{e^{f(z)} f'(z)}{e^z}.$$

получаем неравенство (12). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И. А., Цветков Б. Г. Функции, конформно отображающие полосу в себя. — Сиб. матем. ж., 1980, т. 21, № 1, с. 4—25.
2. Цветков Б. Г. Оценки модуля производной на классе функций, однолистных в полосе. — В кн: Экстремальные задачи теории функций. Томск. Изд-во Том. ун-та, 1980, с. 99—109.
3. Цветков Б. Г. Множество значений одной системы функционалов на классе функций, однолистных в полосе. — В кн: Экстремальные задачи теории функций. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1979, с. 59—68.

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

В. В. Черников

1. Определения некоторых классов функций. Пусть $M[a, b]$, a, b — заданные конечные числа, $a < b$, — класс функций $\mu(t)$, $a \leq t \leq b$, не убывающих на $[a, b]$ и таких, что

$$\mu(b) - \mu(a) = 1; g(z, t), z \in E = \{z: |z| < 1\},$$

$a \leq t \leq b$ — заданная функция, непрерывная по двум переменным z и t при $z \in E$, $a \leq t \leq b$ и регулярная по z в E при всяком t , $a \leq t \leq b$.

Обозначим через $L(g, a, b)$ класс функций $f(z)$, представимых интегралом Стильеса:

$$f(z) = \int_a^b g(z, t) d\mu_f(t); \mu_f(t) \in M[a, b], \quad (1)$$

где $g(z, t)$ — заданная функция с указанными выше свойствами. Функция $g(z, t)$ называется ядром класса $L(g, a, b)$.

Справедливы следующие утверждения (см. [1, с. 78—80]):

1) при всяком t , $a \leq t \leq b$, функция $g(z, t)$ принадлежит классу $L(g, a, b)$;

2) если

$$f_1(z) \in L(g, a, b), f_2(z) \in L(g, a, b), h,$$

$0 \leq h \leq 1$, — постоянная, то функция

$$f_h(z) = (1-h)f_1(z) + hf_2(z) \in L(g, a, b);$$

3) класс $L(g, a, b)$ равномерно ограничен внутри E ;

4) функции класса $L(g, a, b)$ регулярны в E ;

5) всякая сходящаяся внутри E последовательность $\{f_n(z)\}$ функций $f_n(z) \in L(g, a, b)$ равномерно сходится внутри E к некоторой функции $f_0(z) \in L(g, a, b)$;

6) класс $L(g, a, b)$ компактен и замкнут (т. е. компактен в себе);

7) если функция $\varphi(t)$ непрерывна на $[a, b]$ и $a \leq \varphi(t) \leq b$ при $a \leq t \leq b$, то функция

$$f_*(z) = \int_a^b g(z, \varphi(t)) d\mu(t) \in L(g, a, b) \left\{ \begin{array}{l} \text{при } \mu(t) \in M[a, b]. \end{array} \right. \quad (2)$$

Если функция $g(z, t)$ имеет по t период $b - a$ и $g(z, a) = g(z, b)$ при $z \in E$, то утверждение (2) остается в силе для всякой функции $\varphi(t)$, непрерывной на $[a, b]$.

Рассмотрим класс T_R типично вещественных в круге $|z| < 1$ функций [2, с. 516]. Функция

$$f(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \dots, \quad (3)$$

регулярная в круге $|z| < 1$, называется типично вещественной в $|z| < 1$, если она вещественна на диаметре $-1 < z < 1$, а в остальных точках круга $|z| < 1$ такова, что мнимая часть $\operatorname{Im} f(z)$ и мнимая часть $\operatorname{Im} z$ всегда одного знака, т. е.

$$\operatorname{Im} f(z) > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0;$$

$$\operatorname{Im} f(z) < 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

Из этого определения следует, что в (3) все b_n , $n = 2, 3, \dots$, вещественны.

Класс T_R был впервые введен и изучен В. Рогозинским [4] (см. еще [5]). М. Робертсон [6] и Г. М. Голузин [7] дали представление функций $f(z)$ класса T_R в виде интеграла Стильеса (1) по формуле

$$f(z) = \int_0^\pi \frac{z}{1 - 2z \cos t + z^2} d\mu_f(t), \quad \mu_f(t) \in M[0, \pi], \quad (4)$$

которая является интегральным представлением для класса T_R в том смысле, что любая функция $f(z)$ класса T_R в $|z| < 1$ представима по формуле (4) и обратно, всякая функция $f(z)$, определяемая этой формулой, будет типично вещественной в $|z| < 1$. Так как в (4) подынтегральная функция четна относительно t , то формулу (4) можно заменить эквивалентной формулой

$$f(z) = \int_{-\pi}^\pi \frac{z}{1 - 2z \cos t + z^2} d\mu_f(t), \quad \mu_f(t) \in M[-\pi, \pi], \quad (5)$$

которая является интегральным представлением класса T_R [1, с. 86; 2, с. 543].

Рассмотрим класс C регулярных в круге E функций $p(z)$, удовлетворяющих условиям $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $z \in E$. Класс C называется классом K . Каратеодори [9] (см. также [3, с. 7; 10, с. 28]).

Ф. Рисс [11] и Г. Херглотц [12] (см. [13, с. 116; 3, с. 8, 301; 14, с. 519, 542, 545; 1, с. 84; 2, с. 542]) доказали, что для класса C справедливо интегральное представление в виде интеграла Стильтьеса (1) по формуле

$$p(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + ze^{it}}{1 - ze^{it}} d\mu_p(t), \quad \mu_p(t) \in M[-\pi, \pi]. \quad (6)$$

Обозначим через C_R класс функций $p_R(z)$, регулярных в круге E , имеющих разложение вида

$$p_R(z) = 1 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots, \quad z \in E, \quad (7)$$

с вещественными коэффициентами $d_1, d_2, \dots$ и таких, что $\operatorname{Re} p_R(z) > 0$ при $|z| < 1$.

Ясно, что C_R есть подкласс класса C .

Известно (см. [1, с. 86; 14, с. 520]), что функция $p_R(z) \in C_R$ тогда и только тогда, когда она допускает представление интегралом Стильтьеса (1) с ядром

$$g(z, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + z\xi}{1 - z\xi} + \frac{1 + z\bar{\xi}}{1 - z\bar{\xi}} \right) = \frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos t + z^2}, \quad (8)$$

$-\pi \leq t \leq \pi$, $\xi = e^{it}$, так что формула

$$p_R(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos t + z^2} d\mu_p(t), \quad \mu_p(t) \in M[-\pi, \pi], \quad (9)$$

есть интегральное представление класса C_R .

2. Связь между классами T_R и C_R . Между функциями $f(z) \in T_R$ и $p_R(z) \in C_R$ существует взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое формулой

$$f(z) = \frac{z}{1 - z^2} p_R(z). \quad (10)$$

Эта формула впервые выведена В. Рогозинским [4] (см. [5; 2, с. 518]). Формула (10) легко следует из интегральных представлений (5) и (9) классов T_R и C_R .

3. Некоторые автоморфизмы в классах $S_{\mathbf{R}}$.

Теорема 1. Если функция $p(z)$ пробегает весь класс S , то при каждом фиксированном ξ , $|\xi| < 1$, функция

$$p_*(z) = \frac{1 + z\bar{\xi}}{1 - z\bar{\xi}} + \frac{z(1 - |\xi|^2)}{(z - \xi)(1 - z\bar{\xi})} \left[p\left(\frac{z - \xi}{1 - z\bar{\xi}}\right) - 1 \right] \quad (11)$$

также пробегает весь класс S и обратно.

Доказательство. Дадим доказательство этой теоремы, следуя работе [15].

Рассмотрим произвольную функцию $p(z) \in S$. Она представима формулой (6) с некоторой функцией $\mu_p(t) \in M[-\pi, \pi]$. Заменим в формуле (6) e^{it} через

$$(e^{it} + \bar{\xi}) / (1 + \xi e^{it}).$$

Получим функцию

$$p_*(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + z(e^{it} + \bar{\xi}) / (1 + \xi e^{it})}{1 - z(e^{it} + \bar{\xi}) / (1 + \xi e^{it})} d\mu_p(t). \quad (12)$$

Чтобы увидеть, что эта функция принадлежит классу S , достаточно заметить, что мы применили преобразование (2) (см. утверждение 7 пункта 1) к (6) (в (6) ядро $g(z, t) = (1 + ze^{it}) / (1 - ze^{it})$ имеет по t период $\pi - (-\pi) = 2\pi$ и $g(z, -\pi) = g(z, \pi)$, $z \in E$) с помощью функции $\varphi = \varphi(t)$, определяемой уравнением

$$e^{t\varphi} = \frac{e^{it} + \bar{\xi}}{1 + \xi e^{it}},$$

которое разрешимо в $-\pi \leq t \leq \pi$, дает монотонно возрастающую дифференцируемую функцию, $\mu(t) = \mu_p(t)$.

Факт принадлежности функции (12) классу S можно проверить и непосредственно. В самом деле, функция

$$g_*(z, t) = \frac{1 + z(e^{it} + \bar{\xi}) / (1 + \xi e^{it})}{1 - z(e^{it} + \bar{\xi}) / (1 + \xi e^{it})}, \quad (13)$$

где при любом $t \in [-\pi, \pi]$ модуль выражения $(e^{it} + \bar{\xi}) / (1 + \xi e^{it})$ равен единице, регулярна по z в E при любом $t \in [-\pi, \pi]$, $g_*(0, t) = 1$, $\text{Re} g_*(z, t) > 0$ при $z \in E$, $t \in [-\pi, \pi]$. Поэтому функция (12)

$$p_*(z) = \int_{-\pi}^{\pi} g_*(z, t) d\mu_p(t). \quad (14)$$

где $g_*(z, t)$ определяется по (13), регулярна в E (см. утверждение 4 пункта 1; непрерывность функции (13) по переменным z, t очевидна), $p_*(0) = 1$, $\operatorname{Re} p_*(z) > 0$ при $z \in E$, т. е. $p_*(z) \in C$.

Можно доказать, что $p_*(z) \in C$ еще таким способом. Отметим сначала следующее (см. [2, с. 506—507]): если в (1) функция $g(z, t)$ удовлетворяет условию $g(z, a) = g(z, b)$, то ее можно продолжить как функцию от t на всю числовую прямую периодически с периодом $b-a$; продолжив и $\mu_f(t)$ по формуле $\mu_f(t+b-a) = \mu_f(t) + 1$, в интеграле (1), не меняя его значения, можно промежуток интегрирования $[a, b]$ заменить любым другим той же длины.

Перейдем в формулу (14) от переменной t к переменной τ по формуле

$$e^{t\tau} = \frac{e^{t\tau} + \bar{\xi}}{1 + \xi e^{t\tau}}. \quad (15)$$

Так как дробно линейная функция $w = (\zeta + \bar{\xi})/(1 + \xi\bar{\zeta})$ отображает круг $|\zeta| < 1$ на круг $|w| < 1$, причем окружность $\zeta = e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$, переходит в окружность $w = e^{i\tau}$, $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + 2\pi$, $e^{i\tau_0} = (e^{-\tau_0} + \bar{\xi})/(1 + \xi e^{-\tau_0}) = (\bar{\xi} - 1)/(1 - \xi)$ (см., например, [16, с. 80—81]), то из уравнения (15) найдем $t = t(\tau)$ как монотонно возрастающую функцию в промежутке $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + 2\pi$ и, следовательно, функция $\mu_p(t) = \mu_p(t(\tau)) = \tilde{\mu}_p(\tau)$ будет принадлежать классу $M[\tau_0, \tau_0 + 2\pi]$. Поэтому с учетом формул (15) и (13) формула (14) примет вид

$$p_*(z) = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + 2\pi} \frac{1 + ze^{t\tau}}{1 - ze^{t\tau}} d\tilde{\mu}_p(\tau).$$

В силу отмеченного выше эту формулу можно переписать так:

$$p_*(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + ze^{t\tau}}{1 - ze^{t\tau}} d\mu(\tau), \quad \mu(\tau) \in M[-\pi, \pi].$$

Отсюда и из интегрального представления (6) класса C заключаем, что $p_*(z) \in C$.

Убедимся теперь, что в подлежащей доказательству формуле (11) выражение

$$\frac{1 + z\bar{\xi}}{1 - z\bar{\xi}} + \frac{z(1 - |\xi|^2)}{(z - \xi)(1 - z\bar{\xi})} \left[p\left(\frac{z - \xi}{1 - z\bar{\xi}}\right) - 1 \right] \quad (16)$$

является функцией класса C . Мы увидим сейчас, что функция (16) имеет вид (12).

С помощью (6) находим

$$p\left(\frac{z - \xi}{1 - z\bar{\xi}}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \xi e^{it}}{1 + \xi e^{it} - z(e^{it} + \bar{\xi})} z(e^{it} - \bar{\xi}) d\mu_p(t). \quad (17)$$

Очевидно, имеем

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} d\mu_p(t). \quad (18)$$

Из (17) и (18) следует, что

$$p\left(\frac{z - \xi}{1 - z\bar{\xi}}\right) - 1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2e^{it}(z - \xi)}{1 + \xi e^{it} - z(e^{it} + \bar{\xi})} d\mu_p(t).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & \frac{z(1 - |\xi|^2)}{(z - \xi)(1 - z\bar{\xi})} \left[p\left(\frac{z - \xi}{1 - z\bar{\xi}}\right) - 1 \right] = \\ & = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2ze^{it}(1 - \xi\bar{\xi})}{(1 - z\bar{\xi})[1 + \xi e^{it} - z(e^{it} + \bar{\xi})]} d\mu_p(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Из тождества (18) находим

$$\frac{1 + z\bar{\xi}}{1 - z\bar{\xi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + z\bar{\xi})[1 + \xi e^{it} - z(e^{it} + \bar{\xi})]}{(1 - z\bar{\xi})[1 + \xi e^{it} - z(e^{it} + \bar{\xi})]} d\mu_p(t). \quad (20)$$

Сложение формул (19) и (20) даст

$$\begin{aligned} & \frac{1 + z\bar{\xi}}{1 - z\bar{\xi}} + \frac{z(1 - |\xi|^2)}{(z - \xi)(1 - z\bar{\xi})} \left[p\left(\frac{z - \xi}{1 - z\bar{\xi}}\right) - 1 \right] = \\ & = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + z(e^{it} + \bar{\xi})/(1 + \xi e^{it})}{1 - z(e^{it} + \bar{\xi})/(1 + \xi e^{it})} d\mu_p(t). \end{aligned}$$

Отсюда и из (12) видим, что выражение (16) действительно есть функция $p_*(z)$ класса C . Таким образом, если

$p(z)$ — произвольно взятая в классе C функция, ξ , $|\xi| < 1$, — произвольно фиксированное число, то получающаяся по формуле (11) функция $p_*(z)$ будет также принадлежать классу C .

Пусть обратно $p_*(z)$ — произвольно заданная функция класса C . Тогда непосредственной проверкой убедимся, что ее можно представить по формуле (11) с функцией

$$p(z) = \frac{1 - z\bar{\xi}}{1 + z\bar{\xi}} + \frac{z(1 - |\xi|^2)}{(z + \xi)(1 + z\bar{\xi})} \left[p_* \left(\frac{z + \xi}{1 + z\bar{\xi}} \right) - 1 \right], \quad (21)$$

принадлежащей, по доказанному, классу C . Итак, теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если функция $p_R(z)$ пробегает весь класс C_R , то при каждом фиксированном r , $-1 < r < 1$, функция

$$p_R^*(z) = \frac{1 + rz}{1 - rz} + \frac{z(1 - r^2)}{(z - r)(1 - rz)} \left[p_R \left(\frac{z - r}{1 - rz} \right) - 1 \right] \quad (22)$$

также пробегает весь класс C_R и обратно.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1, только теперь следует привлечь интегральное представление (9) с ядром (8) класса C_R .

В справедливости теоремы 2 можно также убедиться, опираясь на теорему 1. Возьмем в формуле (11) $\xi = r$. В силу теоремы 1 мы увидим, что тогда

$$p_*(z) = \frac{1 + rz}{1 - rz} + \frac{z(1 - r^2)}{(z - r)(1 - rz)} \left[p \left(\frac{z - r}{1 - rz} \right) - 1 \right] \quad (23)$$

пробежит весь класс C , если $p(z)$ пробежит весь класс C , а обращением формулы (23) будет формула (см. (21)):

$$p(z) = \frac{1 - rz}{1 + rz} + \frac{z(1 - r^2)}{(z + r)(1 + rz)} \left[p_* \left(\frac{z + r}{1 + rz} \right) - 1 \right], \quad (24)$$

Если в формуле (23) вместо $p(z)$ мы будем подставлять функции $p_R(z) \in C_R$, то, очевидно, по (23) будем получать также функции $p_R^*(z) \in C_R$. В этом случае формула (23) принимает вид (22). При этом, если $p_R(z)$ пробежит весь класс C_R , $p_R^*(z)$ также пробежит весь класс C_R , так как любую функцию $p_R^*(z) \in C_R$ мы можем подобрать в формуле (22) с помощью функции (см. (24)):

$$p_R(z) = \frac{1 - rz}{1 + rz} + \frac{z(1 - r^2)}{(z + r)(1 + rz)} \left[p_*^* \left(\frac{z + r}{1 + rz} \right) - 1 \right]$$

класса C_R . Таким образом, формула (22) действительно есть автоморфизм класса C_R . Теорема 2 доказана.

Формула (22) без доказательства указана в работе [17].

4. Об экстремальных свойствах класса T_R . В нашей работе мы рассмотрим некоторые экстремальные свойства класса T_R типично вещественных в круге E функций. Этому вопросу посвящены многие работы [1, 4, 5, 6, 7, 8, 17, 18, 19, 20].

Сейчас мы сформулируем две теоремы, доказательства которых содержатся в работе [21]. Основные факты, относящиеся к системам функционалов и граничным функциям, мы будем считать известными и специально их формулировать не будем (см. об этом, например [10, гл. II]).

Теорема 3. Пусть $z_1, \dots, z_p$ ($p = 1, 2, \dots$ — фиксированное число) — данные в E точки;

$$u_{mj} = f^{(m)}(z_j); v_{mj} = \bar{u}_{mj}, j = 1, \dots, p; m = 0, 1, \dots, s_j.$$

Пусть на классе T_R задана конечная система функционалов

$$I(f) = \{I_1(f), \dots, I_n(f)\}$$

при

$$I_\kappa(f) = J_\kappa(u_{01}, v_{01}, \dots, u_{s_1 1}, v_{s_1 1}, \dots; u_{0p}, v_{0p}, \dots, u_{s_p p}, v_{s_p p}),$$

J_κ , $\kappa = 1, \dots, n$, — данные аналитические функции. Тогда все граничные функции для $I(f)$ содержатся в семействе

$$f(z) = \sum_{\kappa=1}^N \lambda_\kappa \frac{z}{1 - 2\tau_\kappa z - |z|^2}, \quad (25)$$

где вещественные параметры λ_κ , τ_κ ($\kappa = 1, \dots, N$) подчинены условиям $\lambda_\kappa \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$, $\tau_1 = \pm 1$, $-1 \leq \tau_2 < \dots < \tau_N \leq 1$, причем $N \leq s_1 + \dots + s_p + 2p$.

Теорема 4. Пусть функция $f(z) = z + b_2 z^2 + \dots$ пробегает весь класс T_R . Рассмотрим на классе T_R конечную систему функционалов

$$\{b_{\kappa_1}, \dots, b_{\kappa_q}\}. \quad (26)$$

Тогда все граничные функции относительно этой системы содержатся в семействе (25), описанном в теореме 3, а

$$N \leq [(\kappa_q + 1)/2], \quad (27)$$

где $[(\kappa_q + 1)/2]$ — целая часть числа $(\kappa_q + 1)/2$, κ_q — наибольший номер коэффициента b_{κ_q} , входящего в систему (26).

5. Неинтегральное представление функций класса T_R .

Теорема 5. Для того, чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу T_R , необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$f(z) = \frac{z(1+rz)}{(1-z^2)(1-rz)} + \frac{z^2(1-r^2)}{(1-z^2)(z-r)(1-rz)} \left[p_R\left(\frac{z-r}{1-rz}\right) - 1 \right], \quad (28)$$

где $p_R(z) \in C_R$, $r \in (-1, 1)$ — произвольно фиксированное число.

Доказательство. Из пункта 2 вытекает (см. формулу (10)), что $f(z) \in T_R$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) = \frac{z}{1-z^2} p_R^*(z), \quad (29)$$

где $p_R^*(z) \in C_R$. По теореме 2 заключаем, что $p_R^*(z) \in C_R$ тогда и только тогда, когда (см. формулу (22))

$$p_R^*(z) = \frac{1+rz}{1-rz} + \frac{z(1-r^2)}{(z-r)(1-rz)} \left[p_R\left(\frac{z-r}{1-rz}\right) - 1 \right], \quad (30)$$

где $p_R(z) \in C_R$, $r \in (-1, 1)$ — произвольно фиксированное число. Из (30), (29) следует формула (28). Теорема 5 доказана.

Формула (28) впервые выведена в работе [17] (при $0 < r < 1$).

Из теоремы 5 и пункта 2 (см. формулы (10), (28)) получаем следующий результат.

Теорема 5'. Если функция $F(z)$ пробегает весь класс T_R , то при каждом фиксированном r , $-1 < r < 1$, функция

$$f(z) = \frac{z(1-rz)}{(1-z^2)(1-rz)} + \frac{z^2(1-r^2)}{(1-z^2)(z-r)(1-rz)} \times \\ \times \left[\frac{1-\zeta^2}{\zeta} F(\zeta) - 1 \right], \quad \zeta = \frac{z-r}{1-rz};$$

также пробегает весь класс T_R и обратно.

2. Теорема о системе функционалов $\{f(r), f'(r), \dots, f^{(n)}(r)\}$ на классе T_R .

Теорема 6. Пусть $r \in (0, 1)$, $n \geq 0$ — заданные числа, n — целое. Тогда все граничные функции для определенной на классе T_R системы функционалов

$$J = \{f(r), f'(r), \dots, f^{(n)}(r)\} \quad (31)$$

со значениями в R^{n+1} содержатся в семействе

$$f(z) = \sum_{\kappa=1}^N \lambda_{\kappa} \frac{z}{1 - 2t_{\kappa}z + z^2}, \quad (32)$$

где

$$t_{\kappa} = \frac{2r + (1 + r^2)\tau_{\kappa}}{1 + r^2 + 2r\tau_{\kappa}}, \quad \kappa = 1, \dots, N,$$

а вещественные параметры λ_{κ} , τ_{κ} ($\kappa = 1, \dots, N$) подчинены условиям $\lambda_{\kappa} \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$, $\tau_1 = \pm 1$, $-1 \leq \tau_2 < \dots < \tau_N \leq 1$, причем $N \leq [(n+3)/2]$.

Доказательство. При заданном $r \in (0, 1)$ представим $f(z) \in T_R$ по формуле (28), где $p_R(z) \in C_R$. Пользуясь этой формулой, найдем $f(r)$, $f'(r)$, ..., $f^{(n)}(r)$.

Вместо переменной z введем переменную w , изменяющуюся в малой окрестности точки $w = 0$, по формуле

$$z = r + \frac{1 - r^2}{r} w. \quad (33)$$

Формулу (28) можно написать в виде

$$(1 - z^2)(1 - rz)f(z) = z(1 + rz) + \frac{z^2(1 - r^2)}{z - r} \left[p_R\left(\frac{z - r}{1 - rz}\right) - 1 \right]. \quad (34)$$

Так как по (33)

$$\frac{z - r}{1 - rz} = \frac{w}{r(1 - w)},$$

то квадратная скобка в (34) будет в малой окрестности точки $w = 0$ регулярной функцией от w , которую обозначим $P(w)$:

$$P(w) = p_R\left(\frac{z - r}{1 - rz}\right) - 1 = p_R\left(\frac{w}{r(1 - w)}\right) - 1. \quad (35)$$

Найдем разложение в ряд функции $P(w)$ по степеням w . Из (7) и (35) имеем

$$P(w) = d_1 \frac{1}{r} \left(\frac{w}{1 - w} \right) + d_2 \frac{1}{r^2} \left(\frac{w}{1 - w} \right)^2 + \dots +$$

$$d_{\kappa} \frac{1}{r^{\kappa}} \left(\frac{w}{1-w} \right)^2 + \dots \quad (36)$$

Замечая, что (см. [16, с. 209])

$$\left(\frac{w}{1-w}\right)^{\kappa} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\kappa+n-1)!}{n! (\kappa-1)!} w^{n+\kappa},$$

по (36) находим

$$P(w) = \frac{d_1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} w^{n+1} + \frac{d^2}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) w^{n+2} +$$

$$+ \frac{d_3}{r^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2!} w^{n+3} + \dots + \frac{d_\kappa}{r^\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\kappa+n-1)!}{n! (\kappa-1)!} w^{n+\kappa} +$$

$$+ \dots$$

поэтому если мы разложенис $P(w)$ в ряд напием в виде

$$P(w) = P_1 w + P_2 w^2 + \dots + P_k w^k + \dots, \quad (37)$$

то окажется, что

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{d_1}{r}; \\ P_2 &= \frac{d_1}{r} + \frac{d_2}{r^2}; \\ P_3 &= \frac{d_1}{r} + 2 \frac{d_2}{r^2} + \frac{d_3}{r^3}; \\ P_4 &= \frac{d_1}{r} + 3 \frac{d_2}{r^2} + 3 \frac{d_3}{r^3} + \frac{d_4}{r^4}; \\ &\dots\dots\dots \\ P_\kappa &= \frac{d_1}{r} + (\kappa-1) \frac{d_2}{r^2} + \frac{(\kappa-1)(\kappa-2)}{2!} \frac{d_3}{r^3} + \\ &+ \frac{(\kappa-1)(\kappa-2)(\kappa-3)}{3!} \frac{d_4}{r^4} + \dots + \frac{d_\kappa}{r^\kappa}; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (38)$$

Из (33) следует, что

$$\frac{z^2(1-r^2)}{z-r} = \frac{1}{w} \left(r^3 + 2r(1-r^2)w + \frac{(1-r^2)^2}{r^2}w^2 \right).$$

Используя это, по (35), (37) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{z^2(1-r^2)}{z-r} \left[p_R \left(\frac{z-r}{1-rz} \right) - 1 \right] = \\ & = \left(r^3 + 2r(1-r^2)w + \frac{(1-r^2)^2}{r} w^2 \right) \sum_{\kappa=1}^{\infty} P_{\kappa} w^{\kappa-1} = \\ & = r^3 P_1 + (2r(1-r^2)P_1 + r^3 P_2) w + \\ & + \left(\frac{(1-r^2)^2}{r} P_1 + 2r(1-r^2)P_2 + r^3 P_3 \right) w^2 + \\ & + \sum_{m=3}^{\infty} \left[\frac{(1-r^2)^2}{r} P_{m-1} + 2r(1-r^2)P_m + r^3 P_{m+1} \right] w^m. \end{aligned}$$

Прибавив к этому выражение

$$\begin{aligned} z(1+rz) &= r(1+r^2) + \frac{(1-r^2)(1+2r^2)}{r} w + \\ &+ \frac{(1-r^2)^2}{r} w^2, \end{aligned}$$

найденное по (33), можем правой части равенства (34) придать вид

$$\begin{aligned} & z(1+rz) + \frac{z^2(1-r^2)}{z-r} \left[p_R \left(\frac{z-r}{1-rz} \right) - 1 \right] = \\ & = r(1+r^2) + r^3 P_1 + \\ & + \left[\frac{(1-r^2)(1+2r^2)}{r} + 2r(1-r^2)P_1 + r^3 P_2 \right] w + \\ & + \left[\frac{(1-r^2)^2}{r} + \frac{(1-r^2)^2}{r} P_1 + 2r(1-r^2)P_2 + r^3 P_3 \right] w^2 + \\ & + \sum_{m=3}^{\infty} \left[\frac{(1-r^2)^2}{r} P_{m-1} + 2r(1-r^2)P_m + r^3 P_{m+1} \right] w^m. \quad (39) \end{aligned}$$

Далее с учетом (33) имеем

$$\begin{aligned} f(z) &= f\left(\frac{1-r^2}{r} w + r\right) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(1-r^2)^{\kappa}}{r^{\kappa} \kappa!} f^{(\kappa)}(r) w^{\kappa}, \\ & (1-z^2)(1-rz) = \\ & = (1-r^2)^2 - 3(1-r^2)^2 w - \frac{(1-r^2)^2(1-3r^2)}{r^2} w^2 + \\ & + \frac{(1-r^2)^3}{r^3} w^3. \end{aligned}$$

Отсюда находим разложение в ряд по степени ω левой части равенства (34):

$$\begin{aligned}
 (1-z^2)(1-rz)f(z) &= (1-r^2)^2 f(z) + \\
 &+ \left[\frac{(1-r^2)^3}{r} f'(r) - 3(1-r^2)^2 f(r) \right] \omega + \\
 &+ \left[-\frac{(1-r^2)^2(1-3r^2)}{r^2} f(r) - \frac{3(1-r^2)^3}{r} f'(r) + \right. \\
 &+ \left. \frac{(1-r^2)^4}{2r^2} f''(r) \right] \omega^2 + \sum_{m=3}^{\infty} \left[\frac{(1-r^2)^{m+2}}{r^m m!} f^{(m)}(r) - \right. \\
 &- \frac{3(1-r^2)^{m+1}}{r^{m-1}(m-1)!} f^{(m-1)}(r) - \frac{(1-r^2)^m(1-3r^2)}{r^m(m-2)!} f^{(m-2)}(r) + \\
 &\left. + \frac{(1-r^2)^m}{r^{m-1}(m-3)!} f^{(m-3)}(r) \right] \omega^m. \quad (40)
 \end{aligned}$$

Приравнявая в (39), (40) коэффициенты при одинаковых степенях ω^m , $m=0, 1, \dots$, на основании (34), приходим к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned}
 (1-r^2)^2 f(r) &= r(1+r^2) + r^3 P_1; \\
 \frac{(1-r^2)^3}{r} f'(r) - 3(1-r^2)^2 f(r) &= \frac{(1-r^2)(1+2r^2)}{r} + \\
 &+ 2r(1-r^2)P_1 + r^3 P_2; \\
 -\frac{(1-r^2)^2(1-3r^2)}{r^2} f(r) - \frac{3(1-r^2)^3}{r} f'(r) + \\
 + \frac{(1-r^2)^4}{2r^2} f''(r) &= \frac{(1-r^2)^2}{r} + \frac{(1-r^2)^2}{r} P_1 + \\
 &+ 2r(1-r^2)P_2 + r^3 P_3; \\
 \frac{(1-r^2)^{m+2}}{r^m m!} f^{(m)}(r) - \frac{3(1-r^2)^{m+1}}{r^{m-1}(m-1)!} f^{(m-1)}(r) - \\
 - \frac{(1-r^2)^m(1-3r^2)}{r^m(m-2)!} f^{(m-2)}(r) + \frac{(1-r^2)^m}{r^{m-1}(m-3)!} \times \\
 \times f^{(m-3)}(r) &= \frac{(1-r^2)^2}{r} P_{m-1} + 2r(1-r^2)P_m + \\
 &+ r^3 P_{m+1}, \quad m=3, 4, \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Из полученных уравнений найдем $f(r)$, $f'(r)$, ..., $f^{(n)}(r)$ однозначно и непрерывно через $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$. Обратно этими же уравнениями однозначно и непрерывно определяют $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ через $f(r)$, $f'(r)$, ..., $f^{(n)}(r)$. Переходя далее к уравнениям (38), при помощи которых $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ взаимно однозначно и непрерывно выражаются через $d_1, d_2, \dots, d_{n+1}$, мы можем взаимно однозначно и непрерывно выразить $f(r)$, $f'(r)$, ..., $f^{(n)}(r)$ через коэффициенты $d_1, d_2, \dots, d_{n+1}$ функции $p_R(z) \in C_R$, стоящей в правой части формулы (28). По формуле (10) этой функции $p_R(z)$ соответствует единственная функция класса T_R , которую также будем обозначать через $f(z)$. Подставим в формулу (10) разложения (3) для этой функции $f(z) \in T_R$ и (7) — для $p_R(z) \in C_R$. Приравнявая в полученном равенстве

$$z + b_1 z^2 + (-1 + b_3) z^3 + \sum_{m=4}^{\infty} (b_m - b_{m-2}) z^m = z + \\ + d_1 z^2 + d_2 z^3 + \sum_{m=4}^{\infty} d_{m-1} z^m$$

коэффициенты при одинаковых z^m , $m = 2, 3, \dots$, будем иметь уравнения:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= b_2; \\ d_2 &= b_3 - 1; \\ d_{m-1} &= b_m - b_{m-2}, \quad m = 4, 5, \dots \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Отсюда видим, что $d_1, d_2, \dots, d_{n+1}$ взаимно однозначно и непрерывно выражаются через $b_1, b_2, \dots, b_{n+2}$. Таким образом, формулы (41), (38), (42) устанавливают взаимно однозначное и непрерывное соответствие между $f(r)$, $f'(r)$, ..., $f^{(n)}(r)$ и $b_2, b_3, \dots, b_{n+2}$.

Рассмотрим теперь в пространстве R^{n+1} область значений системы функционалов $\{b_2, b_3, \dots, b_{n+2}\}$ на классе T_R . Согласно сказанному, эта область взаимно однозначно и непрерывно преобразуется по (42), (38), (41) в область значений системы функционалов (31) на классе T_R ; при этом внутренние точки этих областей соответствуют друг другу ([2, с. 247]). Граничные точки области значений системы функционалов $\{b_2, b_3, \dots, b_{n+2}\}$ вносят по теореме 4 функции семейства (25), где (см. (26), (27)) $N \leq [(n+3)/2]$, а вещественные параметры $\lambda_\kappa, \tau_\kappa$ ($\kappa = 1, \dots, N$) подчинены услови-

ям: $\lambda_k \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$, $\tau_1 = \pm 1$, $-1 \leq \tau_2 < \dots < \tau_N \leq 1$.

Семейство функций (25) по (10) переходит в семейство функций

$$p_R(z) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \frac{1 - z^2}{1 - 2\tau_k z + z^2}. \quad (43)$$

Из (43) и (28) находим семейство функций

$$f(z) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \frac{z}{1 - 2\tau_k z + z^2}, \quad t_k = \frac{2r + (1 + r^2)\tau_k}{1 + r^2 + 2\tau_k r}, \quad (44)$$

вносящих в область значений системы функционалов $\{f(r), f'(r), \dots, f^{(n)}(r)\}$ граничные точки. Это—семейство (32). Таким образом, теорема 6 доказана.

Замечание. Применение к системе (31) непосредственно теоремы 3 даст для семейства (25) только оценку $N \leq n + 2$.

3. Теорема о системе функционалов $\{f(r), \dots, f^{(p)}(r), b_2, \dots, b_q\}$ на классе T_R .

Теорема 7. Пусть $r \in (0, 1)$, $p \geq 0$, $q \geq 2$ — заданные числа, p, q — целые. Тогда все граничные функции для определенной на классе T_R системы функционалов

$$\{f(r), \dots, f^{(p)}(r), b_2, \dots, b_q\}, \quad (45)$$

$b_n = f^{(n)}(0)/n!$, $n = 2, \dots, q$, со значениями в R^{p+q} содержатся в семействе (25), описанном в теореме 3, причем $N \leq p + q + 2$.

Доказательство. При заданном $r \in (0, 1)$ выберем в формуле (28) число r равным ρ , $0 < \rho < r$. Мы получим для $f(z) \in T_R$ представление

$$f(z) = \frac{z(1 + \rho z)}{(1 - z^2)(1 - \rho z)} + \frac{z^2(1 - \rho^2)}{(1 - z^2)(z - \rho)(1 - \rho z)} \left[p_R\left(\frac{z - \rho}{1 - \rho z}\right) - 1 \right], \quad (46)$$

где $p_R(z) \in C_R$.

При помощи формулы (46) можно написать взаимно однозначные и непрерывные выражения величин

$$f(r), f'(r), \dots, f^{(p)}(r), b_2, b_3, \dots, b_q \quad (47)$$

через

$$p_R\left(\frac{r - \rho}{1 - r\rho}\right), p_R'\left(\frac{r - \rho}{1 - r\rho}\right), \dots, p_R^{(p)}\left(\frac{r - \rho}{1 - r\rho}\right). \quad (48)$$

$$p_R(-\rho), p_R'(-\rho), \dots, p_R^{(q-2)}(-\rho). \quad (49)$$

По формуле (10) функции $p_R(z)$ соответствует функция класса T_R , которую также будем обозначать через $f(z)$. Используя формулу (10), величины (48), (49) взаимно однозначно и непрерывно выразим через величины

$$f\left(\frac{r-\rho}{1-r\rho}\right), \dots, f^{(p)}\left(\frac{r-\rho}{1-r\rho}\right), f(-\rho), \dots, f^{(q-2)}(-\rho). \quad (50)$$

Рассмотрим теперь в пространстве R^{p+q} область значений системы, составленной из функционалов (50) на классе T_R . Эта область (по сказанному выше) может быть взаимно однозначно и непрерывно преобразована в область значений системы, составленной из функционалов (47), т. е. в область значений системы (45) на классе T_R ; при этом внутренние точки этих областей соответствуют друг другу [2, с. 247]. Граничные точки области значений системы, образованной функционалами (50), вносят по теореме 3 функции семейства (25), где $N \leq p + q + 2$.

Семейство функций (25) по (10) переходит в семейство функций (43), а из (43) и (48) приходим к семейству функций, вносящих в область значений системы (45) граничные точки:

$$f(z) = \sum_{\kappa=1}^N \lambda_{\kappa} \frac{z}{1 - 2t_{\kappa}z + z^2}, \quad t_{\kappa} = \frac{2\rho + (1 + \rho^2)\tau_{\kappa}}{1 + \rho^2 + 2\rho\tau_{\kappa}}. \quad (51)$$

Так как здесь $0 < \rho < r$, то при $-1 \leq \tau_{\kappa} \leq 1$ будет $-1 \leq t_{\kappa} \leq 1$, причем если $\tau_1 = \pm 1$, то и $t_1 = \pm 1$, поэтому полученное семейство будет иметь такой же вид, что и семейство (25), если вместо t_{κ} писать по-прежнему τ_{κ} . Теорема 7, таким образом, доказана.

Замечание. Применение к системе (45) непосредственно теоремы 3 даст для семейства (25) оценку $N \leq p + q + 4$.

4. Об оценке кривизны линий уровня в классе T_R . 1) Формула для кривизны линий уровня при однолистных конформных отображениях.

Пусть $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ — заданная регулярная однолистная в круге $|z| < 1$ функция. При отображении $w = f(z)$ круга $|z| < 1$ образом окружности $|z| = r$ фиксированного радиуса r , $0 < r < 1$, будет некоторая аналитиче-

ская кривая — линия уровня функции $f(z)$. Зафиксируем на окружности $|z| = r$ точку $z_0 = re^{i\alpha}$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, и обозначим через K_r кривизну линии уровня в точке $w_0 = f(z_0)$. Для K_r нетрудно вывести формулу (см., например, [22, с. 568—573]).

$$K_r = \frac{1}{|z_0 f'(z_0)|} \operatorname{Re} \left[1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} \right]. \quad (52)$$

Предположим, что функция $f(z)$ пробегает некоторый класс регулярных однолистных в круге E функций. Тогда формула (52) определит функционал на этом классе и можно рассматривать задачи об оценке снизу и сверху этого функционала в определенном классе. Задачи об оценках кривизны линий уровня в различных классах функций, определенных в круге E и во внешности этого круга, рассматривались многими учеными (см. об этом в обзоре [20]). В некоторых классах эти задачи решены полностью. Так, в работе [23] элементарными методами найдены точные верхние оценки кривизны линий уровня для однолистных мероморфных во внешности единичного круга E функций; в работе [24] сравнительно просто найдены точная оценка снизу и неточная оценка сверху (лучшая в настоящее время) кривизны линий уровня в классе всех однолистных регулярных в круге E функций $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

В классе T_R задача об оценках кривизны линий уровня не решена. Это объясняется, по-видимому, сложностью множества экстремальных функций, которые согласно теореме 3 образуют для функционала (52) семейство (25) с $N \leq 4$.

В классе T_R не все функции однолиственны в круге $|z| < 1$ (см., например, [7, 25]). Известно, однако, что все функции $f(z) \in T_R$ являются однолистными в круговом двуугольнике, содержащем $z=0$ и ограниченном дугами двух окружностей $|z \pm i| = \sqrt{2}$, проходящих через точки $z = \pm 1$ (см., например, [7, § 5, теорема 7, следствие 5]). Поэтому задача об оценках величины (52) в классе T_R имеет смысл лишь тогда, когда z_0 принадлежит упомянутому двуугольнику. Мы рассмотрим эту задачу при $z_0 = r \in (0, 1)$.

2) Теорема о кривизне линий уровня в классе T_R .

Теорема 8. В классе T_R для кривизны K_r , $r \in (0, 1)$, линий уровня

$$K_r = \frac{1}{r f'(r)} \left[1 + \frac{r f''(r)}{f'(r)} \right] \quad (53)$$

имеют место точные оценки

$$\frac{1-4r+r^2}{r} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2 \leq K_r \leq \frac{1}{r(1+r^2)} \left(\frac{1+4r^2+r^4}{1-r^2} \right)^2, \quad (54)$$

где знаки равенства доставляют только функции

$$f(z) = (1-\lambda) \frac{z}{(1+z)^2} + \lambda \frac{z}{(1+z)^2}, \quad 0 \leq \lambda < 1, \quad (55)$$

соответственно при $\lambda = 0$ и при

$$\lambda = \frac{(1-r)^4(2+r+2r^2)}{4(1+r^2)(1+4r^2+r^4)}. \quad (56)$$

Доказательство. Заметим сначала, что из интегрального представления (4) класса T_R и известного свойства интеграла Стильтесса (см., например, [26, с. 112, формула (24)] следует $f'(r) > 0$. Поэтому при $z_0 = r \in (0, 1)$ формула (52) принимает вид (53).

Сделаем преобразования по формулам (41), (38), (42), по которым можно представить (53) в виде функционала от коэффициентов b_2, b_3, b_4 разложения (3) функции $f(z)$ класса T_R (вида 10)). Из первых трех равенств (41) видим, что

$$\begin{aligned} \frac{(1-r^2)^3}{r} f'(r) &= r^3 P_2 + (2r + r^3) P_1 + \frac{1+4r^2+r^4}{r}; \\ \frac{(1-r^2)^4}{2r^2} f''(r) &= r^3 P_3 + (2r + r^3) P_2 + \frac{1+5r^2+r^4}{r} P_1 + \\ &\quad + \frac{5+8r^2+r^4}{r}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда P_1, P_2, P_3 из (38), имеем

$$\begin{aligned} (1-r^2)^3 f'(r) &= r^2 d_2 + (2r + 2r^3) d_1 + 1 + 4r^2 + r^4; \\ (1-r^2)^4 f''(r) &= 2r^2 d_3 + (4r + 6r^3) d_2 + (2 + 14r^2 + 6r^4) d_1 + \\ &\quad + 10r + 16r^3 + 2r^5. \end{aligned}$$

Подставляя в эти равенства из (42) $d_1 = b_2, d_2 = b_3 - 1, d_3 = b_4 - b_2$, получим

$$\begin{aligned} (1-r^2)^3 f'(r) &= r^2 b_3 + (2r + 2r^3) b_2 + 1 + 3r^2 + r^4; \\ (1-r^2)^4 f''(r) &= 2r^2 b_4 + (4r + 6r^3) b_3 + (2 + 12r^2 + 6r^4) b_2 + \\ &\quad + 6r + 10r^3 + 2r^5. \end{aligned}$$

Отсюда и из (53) заключаем, что выражение K_r записывается в виде

$$K_r = \frac{(1-r^2)^2}{r} \frac{D + Eb_2 + Fb_3 + 2r^3b_4}{(A + Bb_2 + r^2b_3)^2}, \quad (57)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 + 3r^2 + r^4; & B &= 2r + 2r^3; \\ D &= 1 + 8r^2 + 8r^4 + r^6; & E &= 4r + 12r^3 + 4r^5; \\ & & F &= 5r^2 + 5r^4. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Рассмотрим в пространстве R^3 область значений системы функционалов $\{f(r), f'(r), f''(r)\}$, определенной на классе T_R . Ясно, что функция (53) в этой области достигает экстремальных значений только в граничных точках. Следовательно, в силу теоремы 6 экстремальные значения функционалу (53) доставляют только функции семейства (32) с $N \leq 2$. Из доказательства теоремы 6 вытекает, что этим функциям соответствуют функции семейства (25) с $N \leq 2$, доставляющие экстремальные значения функции (57) в области значений системы функционалов $\{b_2, b_3, b_4\}$, определенной на классе T_R . Понятно, что к такому же выводу мы пришли бы, непосредственно рассматривая функцию (57) в области значений системы $\{b_2, b_3, b_4\}$, $z + b_2z^2 + b_3z^3 + b_4z^4 + \dots \in T_R$ и используя теорему 4.

Для нахождения экстремальных значений кривизны K_r мы используем формулу (57). Выпишем сначала все возможные экстремальные функции, которыми являются только функции семейства (25) с $N \leq 2$.

Случай $N = 1$. В этом случае $\tau_1 = \pm 1$, поэтому будем иметь только функции

$$f_1(z) = \frac{z}{(1+z)^2}; \quad (59)$$

$$f_2(z) = \frac{z}{(1-z)^2}. \quad (60)$$

Случай $N = 2$. В этом случае $\tau_1 = \pm 1$, $-1 \leq \tau_2 \leq 1$, $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$, $0 \leq \lambda_2 \leq 1$, т. е.

$$f(z) = (1 - \lambda_2) \frac{z}{1 - 2\tau_1 z + z^2} + \lambda_2 \frac{z}{1 - 2\tau_2 z + z^2}. \quad (61)$$

Если $\lambda_2 = 0$, то поскольку $\tau_1 = \pm 1$, из (61) получим функции (59), (60). Если $\lambda_2 = 1$, то из (61) при $\tau_2 = \pm 1$ получим функции (59), (60), а при $-1 < \tau_2 < 1$ получим функцию

$$f_3(z) = \frac{z}{1 - 2\tau_2 z + z^2}, \quad -1 < \tau_2 < 1. \quad (62)$$

Если $0 < \lambda_2 < 1$, $\tau_1 = \mp 1$, $-1 \leq \tau_2 \leq 1$, то из (61) имеем

$$f(z) = (1 - \lambda_2) \frac{z}{(1 + z)^2} + \lambda_2 \frac{z}{1 - 2\tau_2 z + z^2}; \quad (63)$$

$$f(z) = (1 - \lambda_2) \frac{z}{(1 - z)^2} + \lambda_2 \frac{z}{1 - 2\tau_2 z + z^2}. \quad (64)$$

Если $\tau_2 = -1$, то из (63) получим функцию (59), а при $-1 < \tau_2 < 1$ получим функцию

$$f_4(z) = (1 - \lambda_2) \frac{z}{(1 + z)^2} + \lambda_2 \frac{z}{1 - 2\tau_2 z + z^2}, \quad 0 < \lambda_2 < 1, \quad -1 < \tau_2 < 1. \quad (65)$$

Если $\tau_2 = 1$, то из (64) получим функцию (60), а при $-1 < \tau_2 < 1$ получим функцию

$$f_5(z) = (1 - \lambda_2) \frac{z}{(1 - z)^2} + \lambda_2 \frac{z}{1 - 2\tau_2 z + z^2}, \quad 0 < \lambda_2 < 1, \quad -1 < \tau_2 < 1. \quad (66)$$

При $\tau_2 = 1$ в (63) и при $\tau_2 = -1$ в (64) получим функции, каждую из которых можно записать в виде

$$f_6(z) = (1 - \lambda) \frac{z}{(1 + z)^2} + \lambda \frac{z}{(1 - z)^2}, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (67)$$

Итак, экстремальными функциями для (57) являются только выражающиеся формулами (59), (60), (62), (65), (66), (67) функции $f_\kappa(z)$, $\kappa = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, семейства (25), преобразующиеся в соответствующие функции семейства (32), доставляющие экстремальные значения величине (53).

Переходим к нахождению экстремальных значений $K_\kappa = K_\kappa(f_\kappa)$, $\kappa = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, которые доставляют кривизне K_κ по формуле (57) функции $f_\kappa(z)$, $\kappa = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Функция $f_1(z)$ разлагается в ряд

$$\frac{z}{(1 + z)^2} = z - 2z^2 + 3z^3 - 4z^4 + \dots \quad (68)$$

Подставляя полученные отсюда равенства $b_2 = -2$, $b_3 = 3$, $b_4 = -4$ в формулу (57) и учитывая выражения (58), находим

$$K_r(f_1) = \frac{1 - 4r + r^2}{r} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2. \quad (69)$$

Мы убедимся далее, что это значение является наименьшим для K_r . Тем самым будет доказано левое неравенство (54) для величины (53) со знаком равенства для функции (55) с $\lambda = 0$, которая получается по (32) соответственно функции (59) с $N = 1$, $\tau_1 = -1$.

Функция $f_2(z)$ разлагается в ряд

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \dots \quad (70)$$

Отсюда $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, $b_4 = 4$ и по формулам (57), (58) получаем

$$K_r(f_2) = \frac{1 + 4r + r^2}{r} \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2. \quad (71)$$

Сравнивая выражения (69), (71), будем иметь $K_r(f_1) < K_r(f_2)$. Поэтому значение (71) не является наименьшим для K_r . Мы увидим, что это значение не будет для K_r и наибольшим.

Учитывая формулы (68), (70), (67), имеем разложение в ряд

$$f_6(z) = z + (4\lambda - 2)z^2 + 3z^3 + (8\lambda - 4)z^4 + \dots$$

Внося найденные отсюда значения $b_2 = 4\lambda - 2$, $b_3 = 3$, $b_4 = 8\lambda - 4$ в формулу (57) и учитывая равенства (58), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{r}{(1-r^2)^2} K_r(f_6) = \\ & = \frac{(1-r)^4(1-4r+r^2) + (16r+64r^3+16r^4)\lambda}{[(1-r)^4 + (8r+8r^3)\lambda]^2}, \end{aligned} \quad (72)$$

где $0 < \lambda < 1$. Естественно, что из (72) при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ приходим соответственно к значениям (69) и (71) кривизны K_r . Нетрудными вычислениями покажем, что в интервале $0 < \lambda < 1$ функция (72) принимает максимальное значение при единственном значении λ , определяемом по равенству (56). Подсчитывая при этом λ значение $K_r(f_6)$ по формуле (72), будем иметь

$$\max K_r(f_6) = \frac{1}{r(1+r^2)} \left(\frac{1+4r^2+r^4}{1-r^2} \right)^2. \quad (73)$$

Мы убедимся, что это значение является наибольшим для K_r . Тем самым будет доказано правое неравенство (54) для величины (53) со знаком равенства для функции (55) с λ , определяемом по соотношению (56); эта функция получается по (32) соответственно функции (67) с $N = 2$, $\lambda_1 = 1 - \lambda$, $\lambda_2 = \lambda$, $\tau_1 = -1$, $\tau_2 = 1$.

Мы доказали, что $K_r(f_1) = \min K_r(f_6) < K_r(f) < \max K_r(f_6)$. Остается для завершения доказательства теоремы рассмотреть функции $f_\kappa(z)$, $\kappa = 3, 4, 5$.

Для функции $f_3(z)$ имеем (см. (62))

$$\frac{z}{1 - 2\tau_2 z + z^2} = z + 2\tau_2 z^2 + (4\tau_2^2 - 1)z^3 + (8\tau_2^3 - 4\tau_2)z^4 + \dots, \quad (74)$$

где $-1 < \tau_2 < 1$. При помощи формул (74), (58), (57) придем к выражению

$$\begin{aligned} & \frac{r}{(1-r^2)^2} K_r(f_3) = \\ &= \frac{16r^4\tau_2^3 + 20r^2(1+r^2)\tau_2^2 + 8r(1+r^2)^2\tau_2 + (1+r^2)^3}{[4r^2\tau_2^2 + 4r(1+r^2)\tau_2 + (1+r^2)^2]^2}. \end{aligned}$$

После сокращения этой дроби на $(2r\tau_2 + 1 + r^2)^2$ будем иметь

$$K_r(f_3) = \frac{(1-r^2)^2}{r} \frac{4r\tau_2 + 1 + r^2}{(2r\tau_2 + 1 + r^2)^2}, \quad (75)$$

где $-1 < \tau_2 < 1$. Ясно, что если в (75) взять $\tau_2 = -1$ и $\tau_2 = 1$, то получатся соответственно значения (69) и (71) кривизны K_r . Простыми вычислениями найдем, что в интервале $-1 < \tau_2 < 1$ функция (75) принимает максимальное значение в единственной точке $\tau_2 = 0$ и это значение по (75) равно

$$\max K_r(f_3) = \frac{(1-r^2)^2}{r(1+r^2)}. \quad (76)$$

Так как

$$\begin{aligned} K_r(f_1) &= \min K_r(f_6) = \min K_r(f_3) < \\ &< K_r(f_2) < \max K_r(f_3), \end{aligned} \quad (77)$$

а по (76) и (73)

$$\max K_r(f_3) < \max K_r(f_6), \quad (78)$$

то приходим к заключению, что функция $f_3(z)$ не экстремальна.

Рассмотрим функцию $f_4(z)$ (см. (65)) и покажем, что она не экстремальна. Допустим противное. Обозначим через (δ) открытую область изменения параметров в формуле (65): $(\delta) = \{0 < \lambda_2 < 1, -1 < \tau_2 < 1\}$. Из выражений (59), (60), (62), (65) вытекает, что на сторонах $\tau_2 = -1$ и $\lambda_2 = 0$ прямоугольника (δ) $f_4(z) = f_1(z)$, на стороне $\lambda_2 = 1$ этого прямоугольника $f_4(z) = f_3(z)$, на стороне $\tau_2 = 1$, $f_4(z) = f_6(z)$, а в точке $\lambda_2 = 1, \tau_2 = 1$, $f_4(z) = f_2(z)$. Для функций $f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_6(z)$ мы нашли экстремальные значения кривизны K_r и доказали соотношения (77), (78). Другими словами, мы нашли уже экстремальные значения функции $K_r(f_4)$ на границе прямоугольника (δ) , так что возможные по допущению неравенства $\min K_r(f_4) < K_r(f_1), \max K_r(f_4) > \max K_r(f_6)$ (или одно из них) могут иметь место лишь во внутренних точках области (δ) . Однако мы увидим, что внутри области (δ) функция $K_r(f_4)$ не имеет экстремумов. Это и будет означать, что функция $f_4(z)$ не экстремальна. В самом деле, подставив в (65) ряды (68), (74), получим разложение $f_4(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \dots$, в котором

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= 2\lambda_2(1 + \tau_2) - 2; \\ b_3 &= -4\lambda_2(1 + \tau_2)(1 - \tau_2) + 3; \\ b_4 &= 4\lambda_2(1 + \tau_2)(2\tau_2^2 - 2\tau_2 + 1) - 4; (\lambda_2, \tau_2) \in (\delta). \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Введем вместо λ_2, τ_2 новые переменные u, v , положив

$$\left. \begin{aligned} u &= 2(1 - \tau_2) - 1; \\ v &= 2\lambda_2(1 + \tau_2). \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Обозначим через (Δ) открытый треугольник, ограниченный в плоскости (u, v) отрезками $v = 0, -1 \leq u \leq 3; u + v = 3, -1 \leq u \leq 3; u = -1; 0 \leq v \leq 4$. Легко видеть, что с помощью формул (80) устанавливается взаимно однозначное соответствие между прямоугольником (δ) и треугольником (Δ) , так что внутренним точкам области (δ) соответствуют внутренние точки области (Δ) . Взаимно однозначного соответствия между границами областей (δ) и (Δ) нет в полной мере, так как отрезок $\tau_2 = -1, 0 \leq \lambda_2 \leq 1$ переходит в точку $u = 3, v = 0$.

Из (79) и (80) имеем

$$b_2 = v - 2, b_3 = -uv - v + 3, b_4 = u^2 v + v - 4.$$

Отсюда и из (57), (58) получим для функции $K_r(f_4)$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{r}{(1-r^2)^2} K_r(f_4) [-r^2 uv + (2r - r^2 + 2r^3) v + (1-r)^4]^2 = \\ & = 2r^3 u^2 v - (5r^2 + 5r^4) uv + (4r - 5r^2 + 14r^4 - 5r^4 + 4r^5) v + \\ & \quad + (1-r)^4 (1-4r+r^2). \end{aligned} \quad (81)$$

Если теперь $\mu(\lambda_2, \tau_2)$ — внутренняя точка области (δ) , в которой функция $K_r(f_4)$ имеет экстремум, то частные производные этой функции по λ_2 и τ_2 в точке $\mu(\lambda_2, \tau_2)$ должны равняться нулю

$$\frac{\partial K_r(f_4)}{\partial \lambda_2} = 0; \quad \frac{\partial K_r(f_4)}{\partial \tau_2} = 0. \quad (82)$$

Переходя к переменным u, v по формулам (80) — пусть при этом точке $\mu(\lambda_2, \tau_2)$ соответствует точка $M(u, v) \in (\Delta)$, — перепишем равенства (82) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial K_r(f_4)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial K_r(f_4)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \lambda_2} = 0; \\ & \frac{\partial K_r(f_4)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau_2} + \frac{\partial K_r(f_4)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tau_2} = 0, \end{aligned}$$

или, с учетом (80), в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial K_r(f_4)}{\partial v} 2(1 + \tau_2) = 0; \\ & -2 \frac{\partial K_r(f_4)}{\partial u} + \frac{\partial K_r(f_4)}{\partial v} 2\tau_2 = 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\mu(\lambda_2, \tau_2)$ — внутренняя точка области (δ) , приходим отсюда к равенству

$$\frac{\partial K_r(f_4)}{\partial u} = 0, \quad (83)$$

которое должно выполняться во внутренней точке $M(u, v)$ области (Δ) . На основании формулы (81) имеем

$$\begin{aligned} & [-r^2 uv + (2r - r^2 + 2r^3) v + (1-r)^4]^3 \frac{1}{(1-r^2)^2 r v} \times \\ & \times \frac{\partial K_r(f_4)}{\partial u} = (3r^2 - 4r^3 + 3r^4) uv - (2r + 5r^2 - 8r^3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 5r^4 + 2r^5)v + 4r(1-r)^4u - (1-r)^4(3+8r+3r^2), \\
 \text{так что по (83) в точке } M(u, v) \in (\Delta) & \text{ получим } (3r^2-4r^3+ \\
 & + 3r^4)uv - (2r+5r^2-8r^3+5r^4+2r^5)v + 4r(1-r)^4u - \\
 & - (1-r)^4(3+8r+3r^2) = 0. \quad (84)
 \end{aligned}$$

Заметим теперь, что при $r \in (0, 1)$

$$3 - 4r + 3r^2 = 3 \left(r - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{5}{3} > 0; \quad (85)$$

$$0 < (1-r)^2 + r^2(1-r)^2; \quad 0 < 1 - 2r + 2r^2 - 2r^3 + r^4,$$

$$0 < 2 - 4r + 4r^2 - 4r^3 + 2r^4.$$

Прибавим к правой и левой части этого неравенства $9r - 12r^2 + 9r^3$ и полученное неравенство

$$9r - 12r^2 + 9r^3 < 2 + 5r - 8r^2 + 5r^3 + 2r^4,$$

воспользовавшись соотношением (85), перепишем так:

$$3 < \frac{2 + 5r - 8r^2 + 5r^3 + 2r^4}{r(3 - 4r + 3r^2)}. \quad (86)$$

Так как точка $M(u, v)$ лежит в треугольнике (Δ) , то $0 < v < 4$, $u < 3$, следовательно, с учетом (86);

$$u < \frac{2 + 5r - 8r^2 + 5r^3 + 2r^4}{r(3 - 4r + 3r^2)}.$$

Отсюда после умножения на $r^2(3 - 4r + 3r^2)v > 0$ (см. (85)) приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
 & (3r^2 - 4r^3 + 3r^4)uv < \\
 & < (2r + 5r^2 - 8r^3 + 5r^4 + 2r^5)v,
 \end{aligned}$$

которому легко придать вид

$$(3r^2 - 4r^3 + 3r^4)uv - (2r + 5r^2 - 8r^3 + 5r^4 + 2r^5)v < 0. \quad (87)$$

Из (85) следует неравенство $3 + 8r + 3r^2 > 12r$. Отсюда имеем

$$3 < \frac{3 + 8r + 3r^2}{4r},$$

а поскольку $u < 3$, то будет справедливо неравенство

$$u < \frac{3 + 8r + 3r^2}{4r},$$

а потому и неравенство

$$4r(1-r)^4 u < (1-r)^4 (3 + 8r + 3r^2),$$

которое равносильно неравенству

$$4r(1-r)^4 u - (1-r)^4 (3 + 8r + 3r^2) < 0. \quad (88)$$

Из (87), (88) найдем, что

$$(3r^2 - 4r^3 + 3r^4) wv - (2r + 5r^2 - 8r^3 + 5r^4 + 2r^5) v + \\ + 4r(1-r)^4 u - (1-r)^4 (3 + 8r + 3r^2) < 0.$$

Но это противоречит равенству (84). Полученное противоречие означает, что функция $f_4(z)$ не экстремальна.

Переходим к рассмотрению функции $f_5(z)$ (см. (66)). Покажем, что она не экстремальна. Допустим противное. Обозначим через (e) открытую область изменения параметров в формуле (66): $(e) = \{-1 < \tau_2 < 1, 0 < \lambda_2 < 1\}$. Выражения (59), (60), (62), (67), (66) показывают, что на сторонах $\tau_2 = 1$ и $\lambda_2 = 0$ прямоугольника (e) $f_5(z) = f_2(z)$, на стороне $\tau_2 = -1$ этого прямоугольника $f_5(z) = f_6(z)$ (при $\lambda_2 = 1 - \lambda$), на стороне $\lambda_2 = 1$ $f_5(z) = f_3(z)$, а в точке $\tau_2 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $f_5(z) = f_1(z)$. Для функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, $f_6(z)$ мы нашли экстремальные значения кривизны K_r и доказали соотношения (77), (78).

Иначе говоря, мы нашли экстремальные значения функции $K_r(f_5)$ на границе прямоугольника (e) , так что возможные по допущению неравенства

$$\min K_r(f_5) < K_r(f_1), \max K_r(f_5) > \max K_r(f_6)$$

(или одно из них) могут иметь место только во внутренних точках области (e) . Мы увидим, однако, что внутри области (e) функция $K_r(f_5)$ не имеет экстремумов. Это и будет означать, что функция $f_5(z)$ не экстремальна. Действительно, внеся в (66) ряды (70), (74), придем к разложению $f_5(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \dots$, в котором

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= -2\lambda_2(1 - \tau_2) + 2; \\ b_3 &= -4\lambda_2(1 - \tau_2)(1 + \tau_2) + 3; \\ b_4 &= -4\lambda_2(1 - \tau_2)(2\tau_2^2 + 2\tau_2 + 1) + 4; \end{aligned} \right\} (\tau_2, \lambda_2) \in (e). \quad (89)$$

Вместо τ_2 , λ_2 введем новые переменные u , v по формулам

$$\left. \begin{aligned} u &= 2(1 + \tau_2) - 1; \\ v &= 2\lambda_2(1 - \tau_2). \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Обозначим через (Δ) открытый треугольник, ограниченный в плоскости (u, v) отрезками $v = 0, -1 \leq u \leq 3; u + v = 3, -1 \leq u \leq 3; u = -1, 0 \leq v \leq 4$.

Легко видеть, что при помощи формул (90) устанавливается взаимно однозначное соответствие между прямоугольником (ε) и треугольником (Δ) , так что внутренним точкам области (ε) соответствуют внутренние точки области (Δ) . Взаимно однозначного соответствия между границами областей (ε) и (Δ) нет в полной мере, так как отрезок $\tau_2 = 1, 0 \leq \lambda_2 \leq 1$ переходит в точку $u = 3, v = 0$.

Из (89) и (90) имеем

$$b_2 = -v + 2, \quad b_3 = -uv - v + 3, \quad b_4 = -u^2v - v + 4.$$

Используя эти равенства и формулы (57), (58), найдем для $K_r(f_5)$ следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & - \frac{r}{(1-r^2)^2} K_r(f_5) [r^2uv + (2r + r^2 + 2r^3)v - (1 + r^4)]^2 = \\ & = 2r^3u^2v + (5r^2 + 5r^4)uv + (4r + 5r^2 + 14r^3 + 5r^4 + 4r^3)v - \\ & \quad - (1+r)^4(1+4r+r^2). \end{aligned}$$

Если обозначить для краткости $r + r^{-1}$ через 2ρ :

$$r + \frac{1}{r} = 2\rho, \quad (91)$$

то последнюю формулу можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8-8\rho^2} K_r(f_5) |uv + (4\rho + 1)v - 4(\rho + 1)^2|^2 = u^2v + 5\rho uv + \\ & \quad + (8\rho^2 + 5\rho + 3)v - (4\rho + 8)(\rho + 1)^2. \end{aligned} \quad (92)$$

Пусть теперь $v(\tau_2, \lambda_2)$ внутренняя точка области (ε) в которой функция $K_r(f_5)$ имеет экстремум. Тогда частные производные этой функции по τ_2 и λ_2 в точке $v(\tau_2, \lambda_2)$ должны равняться нулю

$$\frac{\partial K_r(f_5)}{\partial \tau_2} = 0, \quad \frac{\partial K_r(f_5)}{\partial \lambda_2} = 0. \quad (93)$$

Переходя к переменным u, v по формулам (90) — пусть при этом точке $v(\tau_2, \lambda_2)$ соответствует точка $M(u, v) \in (\Delta)$ — перепишем равенства (93) в виде

$$\frac{\partial K_r(f_5)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau_2} + \frac{\partial K_r(f_5)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tau_2} = 0;$$

$$\frac{\partial K_r(f_5)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial K_r(f_5)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \lambda_2} = 0,$$

или, с учетом (90), в виде

$$2 \frac{\partial K_r(f_5)}{\partial u} - \frac{\partial K_r(f_5)}{\partial v} 2\lambda_2 = 0, \quad \frac{\partial K_r(f_5)}{\partial v} 2(1 - \tau_2) = 0.$$

Принимая во внимание, что $v(\tau_2, \lambda_2)$ — внутренняя точка области (e) , придем отсюда к равенствам

$$\frac{\partial K_r(f_5)}{\partial u} = 0; \quad \frac{\partial K_r(f_5)}{\partial v} = 0, \quad (94)$$

которые должны выполняться во внутренней точке $M(u, v)$ области (Δ) .

Из соотношения (92) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{8 - 8\rho^2} [uv + (4\rho + 1)v - 4(\rho + 1)^2]^3 \frac{\partial K_r(f_5)}{\partial u} &= v[(3\rho + 2)uv + \\ &+ (4\rho^2 - 5\rho - 6)v - 8(\rho + 1)^2 u + (16 - 12\rho)(\rho + 1)^2], \\ \frac{1}{8\rho^2 - 8} [uv + (4\rho + 1)v - 4(\rho + 1)^2]^3 \frac{\partial K_r(f_5)}{\partial v} &= \\ &= u^3 v + (9\rho + 1)u^2 v + 4(\rho + 1)^2 u^2 + (28\rho^2 + 10\rho + 3)uv + \\ &+ (12\rho - 16)(\rho + 1)^2 u + (8\rho^2 + 5\rho + 3)(4\rho + 1)v - \\ &- (52\rho + 4)(\rho + 1)^2, \end{aligned}$$

так что по (94) в точке $M(u, v) \in (\Delta)$ получим

$$\begin{aligned} (3\rho + 2)uv + (4\rho^2 - 5\rho - 6)v - 8(\rho + 1)^2 u + (16 - 12\rho) \times \\ \times (\rho + 1)^2 = 0, \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} u^3 v + (9\rho + 1)u^2 v + 4(\rho + 1)^2 u^2 + (28\rho^2 + 10\rho + 3)uv + \\ + (12\rho - 16)(\rho + 1)^2 u + (8\rho^2 + 5\rho + 3)(4\rho + 1)v - (52\rho + 4) \times \\ \times (\rho + 1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (96)$$

Положим

$$\begin{aligned} u &= t - \rho; \\ v &= 4(\rho + 1)^2 s. \end{aligned} \quad (97)$$

Нетрудно видеть, что при помощи формул (97) устанавливается взаимно однозначное соответствие между замкнутым треугольником (Δ) и замкнутым треугольником (Σ) в плоскости (t, s) , ограниченным отрезками $s = 0$, $\rho - 1 \leq t \leq \rho + 3$; $4(\rho + 1)^2 s + t = \rho + 3$, $\rho - 1 \leq t \leq \rho + 3$; $t =$

$= \rho - 1$, $0 \leq s \leq (\rho + 1)^{-2}$, так что внутренние точки области (Δ) переходят во внутренние точки области (Σ) . Пусть точке $M(u, v) \in (\Delta)$ соответствует по (97) точка $\sigma(t, s) \in (\Sigma)$. Если теперь подставить в уравнения (95), (96) равенства (97), то для определения координат точки $\sigma(t, s)$ получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} T_1(t)s - U_1(t) = 0; \\ T_2(t)s + U_2(t) = 0, \end{cases} \quad (98)$$

где

$$T_1(t) = (3\rho + 2)t + \rho^2 - 7\rho - 6; \quad (99)$$

$$U_1(t) = 2t + \rho - 4; \quad (100)$$

$$\begin{aligned} T_2(t) = t^3 + (6\rho + 1)t^2 + (13\rho^2 + 8\rho + 3)t + \\ + 12\rho^3 + 19\rho^2 + 14\rho + 3; \end{aligned} \quad (101)$$

$$U_2(t) = t^2 + (\rho - 4)t - 2\rho^2 - 9\rho - 1. \quad (102)$$

Если допустить, что $U_1(t) = 0$ и $U_2(t) = 0$, то тогда с помощью формулы (100) из уравнения $U_1(t) = 0$ будем иметь $2t = 4 - \rho$, а подставляя полученное значение t в уравнение $U_2(t) = 0$, с использованием формулы (102) придем к равенству $(4 - \rho)^2 + 8\rho^2 + 36\rho + 4 = 0$, которое невозможно, так как $\rho > 1$ (см. (91)). Следовательно, в уравнениях (98) обе функции $T_1(t)$ и $T_2(t)$ не равны нулю. Тогда, исключая s из системы (98), придем к следующему уравнению для абсциссы t точки $\sigma(t, s) \in (\Sigma)$ (см., например, [27, с. 334—341]):

$$\begin{vmatrix} T_1(t) & -U_1(t) \\ T_2(t) & U_2(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель с применением формул (99) — (102), получим уравнение (после сокращения на 2)

$$\begin{aligned} t^4 + 8\rho t^3 + (18\rho^2 - 12\rho - 6)t^2 + (16\rho^3 - 24\rho^2 + 8)t + \\ + 5\rho^4 - 12\rho^3 + 6\rho^2 + 4\rho - 3 = 0. \end{aligned}$$

Замечая, что $18\rho^2 - 12\rho - 6 = (\rho - 1)(18\rho + 6)$, $16\rho^3 - 24\rho^2 + 8\rho + 3 = (\rho - 1)^2(16\rho + 8)$, $5\rho^4 - 12\rho^3 + 6\rho^2 + 4\rho - 3 = (\rho - 1)^3(5\rho + 3)$,

придадим последнему уравнению вид

$$\begin{aligned} t^4 + 8\rho t^3 + (\rho - 1)(18\rho + 6)t^2 + (\rho - 1)^2(16\rho + 8)t + \\ + (\rho - 1)^3(5\rho + 3) = 0. \end{aligned}$$

Однако этому уравнению не может удовлетворять абсцисса t точки $\sigma(t, s) \in (\Sigma)$, так как $\rho > 1$ (см. (91)), а для любой точки $(t, s) \in (\Sigma)$ $\rho - 1 < t < \rho + 3$. Полученное противоречие означает, что функция $f_s(z)$ не экстремальна. Теорема 8 доказана. Без доказательства эта теорема приведена в работе [17].

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Лебедев Н. А., Александров И. А. К методу вариаций в классах функций, представимых с помощью интегралов Стильеса. — Тр./Матем. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР Л.: Наука, 1968, т. 94, с. 79—89.
- 2 Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966 — 628 с.
3. Гренандер У., Сеге Г. Теплицевы формы и их приложения — М. ИЛ, 1961. — 308 с.
- 4 Rogosinski W. Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen — Math. Z., 1932, Bd. 35, Hft. 1, S. 93—121.
- 5 Гельфер С. А. Типично вещественные функции. — Матем. сб., 1964, т. 64 (106), № 2, с. 171—184.
- 6 Robertson M. S. On the coefficients of a typic-real function. — Bull. Amer. Math. Soc., 1935, v. 41, № 8, p. 565—572.
- 7 Голузин Г. М. О типично вещественных функциях. — Матем. сб., 1950, т. 27 (69), № 2, с. 201—218.
- 8 Голузин Г. М. Об одном методе вариаций в теории аналитических функций. — Уч. зап./Ленингр. ун-т, сер. матем. наук, 1952, № 144, вып. 23, с. 85—101.
- 9 Caratheodory C. Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. — Rend. Circ. Math. Palermo, 1911, v. 32, S. 193—217.
10. Александров И. А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. — М.: Наука, 1976. — 343 с.
11. Riesz F. Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales — Ann. de l'Ec. Norm., 1911, v. 28, p. 33—62.
12. Herglotz, G. Über Potenzreihen mit positiven reellen Teil im Einheitskreise. — Berichte Verh. d. Kgl.-sächs. Gesellsch. Wiss. Leipzig., Math. — Phys. Klasse, 1911, B. 63, S. 501—511.
13. Ахизер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. — М. Физматгиз, 1961. — 310 с.
14. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973. — 551 с.
15. Черников В. В. Об одном автоморфизме класса Каратеодори. — В кн.: Экстремальные задачи теории функций. Томск: Изд-во ТГУ, 1983, с. 83—85.
16. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Наука, 1978. — 415 с.
17. Черников В. В. О некоторых экстремальных свойствах типично вещественных функций. — Сиб. матем. ж., 1980, т. 21, № 6, с. 208—209.
18. Аленицын Ю. Е. Об областях изменения систем коэффициентов функций, представленных суммой интегралов Стильеса. — Вестн./Ленингр. ун-т, сер. матем., механ. и астр., 1962, № 7, вып. 2, с. 25—41.

19. Голузина Е. Г. Об областях значений систем коэффициентов одного класса функций, мероморфных в круге. — Тр./Матем. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР. — Л.: Наука, 1968, т. 94, с. 33—46.

20. Лебедев Н. А., Кузьмина Г. В., Аленницын Ю. Е. Методы и результаты геометрической теории функций. — Добавление к книге. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966, с. 532—626.

21. Александров И. А., Гутлянский В. Я. Экстремальные задачи на классах аналитических функций, имеющих структурную формулу. — В кн.: Вопросы геометрической теории функций. Томск: Изд-во ТГУ, 1966, вып. 4, с. 111—122.

22. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. — М.: Физматгиз, 1962. — 607 с.

23. Черников В. В. Оценка кривизны линий уровня в классах Σ , Σ^* . — В кн.: Экстремальные задачи теории функций. Томск: Изд-во ТГУ, 1980, с. 126—129.

24. Черников В. В., Арендарчук М. А. Об оценке кривизны линий уровня при однолистных конформных отображениях. — В кн.: Вопросы геометрической теории функции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1974, вып. 7, с. 118—123.

25. Черников В. В., Сижук П. И. О некоторых оценках коэффициентов однолистных функций. — В кн.: Вопросы геометрической теории функций. Томск. Изд-во Том. ун-та, 1968, вып. 5, с. 205—216.

26. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. — М.: Физматгиз, 1963 — 656 с.

27. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1968. — 431 с.

СОДЕРЖАНИЕ

О. А. Алехова. О некоторых функциях, регулярных в круге . . .	3
Л. П. Ильина. Оценки коэффициентов функций класса S_n . . .	9
И. В. Кан. Об оценках сферической производной в классе типично вещественных в круге функций . . .	15
А. П. Кармазин. Граничное поведение δ -квазиизометрических отображений . . .	23
А. Г. Лейдерман. О свойствах некоторых точечно-счетных семейств множеств . . .	52
В. П. Мандик. К задаче о произведении конформных радиусов . . .	57
Ю. А. Пешкичев. Торы вращения в многомерном пространстве . . .	67
Г. И. Сижук, П. И. Сижук. Об α - γ -спиралесобразных функциях порядка β . . .	76
И. К. Слепухин. Булевы системы функций и регулярные операторы усреднения . . .	80
Б. Г. Цветков. Некоторые неравенства для функций, конформно отображающих полосу в себя . . .	98
В. В. Черников. Некоторые экстремальные свойства типично вещественных в круге функций . . .	102

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ. 6

ИБ 1485

Редактор К. Г. Шилько

Технический редактор Р. А. Прошенкина

Корректор В. Г. Лихачева

Сдано в набор 02.01.86 г. Подписано к печати 04.03.88 г. КЗ07028.
Формат 60×84¹/₁₆. Бумага типографская № 3. Литературная гарнитура.
Высокая печать. Печ. л. 8,75. Усл. печ. л. 8,1. Уч.-изд. л. 7,6.
Тираж 500 экз. Заказ 6186. Цена 1 р. 10 к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4
Типография издательства «Красное знамя» 634050, Томск, ГСП,
пр. Фрунзе, 103.

РЕФЕРАТЫ НА ОПУБЛИКОВАННЫЕ СТАТЬИ

УДК 517.54

Алехова О. И. О некоторых функциях, регулярных в круге.— В кн.: Экстремальные задачи теории функций. 6. Томск: Изд-во ТГУ, 1988, с. 3—8.

Найдены значения параметров a, α , при которых функции

$$w = \frac{z + az^2}{1 - z} ; w = \frac{z + az^3}{1 - z^2} ; w = \frac{z + az^2}{1 - 2\alpha z + z^2}$$

однолиственны в единичном круге.

УДК 517.54

Ильина Л. П. Оценки коэффициентов функций класса $\tilde{C}_s$.— В кн.: Экстремальные задачи теории функций. 6. Томск. Изд-во ТГУ, 1988, с. 9—14.

Рассматривается класс $\tilde{C}_s$ функций $\varphi(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} h_p z^p$, регулярных и однолистных в $E = \{z : |z| < 1\}$ и таких, что для любых $z_1, z_2 \in E$ $\varphi(z_1) \neq \eta_l \varphi(z_2)$, где $\eta_l = e^{\frac{2\pi i l}{s}}$, $l = 0, \pm 1, \dots, s = 2, 3, \dots$

Для коэффициентов функций этого класса при $s = 2, 3, \dots$ доказывается оценка $|h_m| \leq (6,496)^{1/s^3} \cdot s^{1/s} \cdot e^{(2/s^3 - 1/2)c} \cdot \left(m + \frac{1}{2}\right)^{2/s^3 - 1/2} \cdot e^{1/2sm}$, где c — постоянная Эйлера.

Библ. 9.

УДК 517.54

Кан И. В. Об оценках сферической производной в классе типично вещественных в круге функций.— В кн.: Экстремальные задачи теории функций. 6. Томск: Изд-во ТГУ, 1988, с. 15—22.

В вещественных точках единичного круга получены точные оценки сферической производной в классе типично вещественных в круге функций.

Библ. 6.

УДК 517.51 : 519.5

Кармазин А. П. Граничное поведение δ -квазиизометрических отображений. — В кн.: Экстремальные задачи теории функций. 6. Томск: Изд-во ТГУ, 1988, с. 23—51.

Пусть $\delta_D(x, y)$ есть относительное расстояние Мазуркевича области D . Гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ областей $D, D' \subset R^n$ назовем δ -квазиизометрией, если метрика δ_D квазиинвариантна при отображении f . В работе приводятся условия на области D, D' , при которых δ -квазиизометрия $f: D \rightarrow D'$ продолжается до непрерывного, гомеоморфного либо билипшицева отображения евклидовых замыканий областей D, D' . С помощью свойств, сохраняющихся при δ -квазиизометриях, строится теория простых концов пространственных областей. Выделяются различные типы простых концов и изучаются их свойства. Устанавливается теорема о соответствии по простым концам при δ -квазиизометриях пространственных областей. Множество простых концов области разбивается на непересекающиеся подмножества, сохраняющиеся при δ -квазиизометрических отображениях.

Библ. 18

УДК 513.831

Лейдерман А. Г. О свойствах некоторых точечно-счетных семейств множеств. — В кн.: Экстремальные задачи теории функций. 6. Томск: Изд-во ТГУ, 1988, с. 52—56.

В работе прослеживается аналогия между свойствами точечно-конечных и слабо σ -точечно-конечных семейств множеств

Определение. Семейство γ множеств из X называется слабо σ -точечно-конечным, если $\gamma = U\{\gamma_n : n \in \omega\}$, причем для любого $x \in X$ выполняется $U\{\gamma_n : n \in N_x\} = \gamma$, где $N_x = \{n \in \omega : K_{r_x} \gamma_n < \omega\}$

Аналогично точечно-конечной клеточности $p(X)$ определен кардинальный инвариант $\omega pr(X)$. Доказано, что $\omega pr(X)$ не превосходит спрэда $s(X)$

Теорема. $\omega pr(X) = \sup\{\tau : L_\tau \subset C_p(X)\}$, где L_τ — некоторое линейное Σ -пространство с единственной изолированной точкой, $|L_\tau| = \tau$

Приведен пример несчетного слабо σ -точечно-конечного семейства открытых множеств, из которого нельзя извлечь никакого точечно-конечного подсемейства.

Библ. 3.

УДК 517.54

Мандик В. П. К задаче о произведении конформных радиусов — В кн.: Экстремальные задачи теории функций. 6. Томск: Изд-во ТГУ, 1988, с. 57—66.

В работе рассматривается применение одного неравенства для вывода различных оценок на классе систем совместно p -листных функций, полученного автором в статье «Обобщение задачи о произведении конформных радиусов на системы многолистных областей». Из полученных результатов вытекают известные оценки для систем однолистных функций без общих значений.

Библ. 5.

УДК 517.53:517.947.42

Пешкичев Ю. А. Торы вращения в многомерном пространстве. — В кн.: Экстремальные задачи теории функций. 6. Томск: Изд-во ТГУ, 1988, с. 67—75.

Развивается понятие тора в многомерном пространстве, введенное В. В. Кривовым [РЖМат, 1974, 9Б 171] и К. Хаг [РЖМат, 1981, 7Б 168] с использованием методики, предложенной автором [РЖМат, 1981, 1Б 233] для исследования торов в трехмерном пространстве. При этом для торов вращения доказываются обобщенные теоремы Гюльдина и вычисляются модули семейства кривых и гиперповерхностей, ассоциированных с торами, а также другие числовые характеристики, предусмотренные общей схемой В. В. Кривова обобщения понятия конформной смкости.

Библ. 6.

УДК 517.53

Сижук Г. И., Сижук П. И. Об α - γ -спиралеобразных функциях порядка β . — В кн.: Экстремальные задачи теории функций. 6. Томск: Изд-во ТГУ, 1988, с. 76—79.

Рассматривается класс $S(\alpha, \beta, \gamma)$, $-\infty < \alpha < \infty$, $0 \leq \beta < 1$, $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$, функций $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$, регулярных в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ и удовлетворяющих в нем условиям $f(z)f'(z)/z \neq 0$,

$$\operatorname{Re} \left[(e^{i\gamma} - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right] > \beta \cos \gamma,$$

т. е. α - γ -спиралеобразных порядка β в E Методом, использованным в работе [РЖМат, 1979, 4Б 200], доказано, что при $\alpha \leq -2 \cos \gamma$, $0 \leq \beta < 1$, $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$ функции класса $S(\alpha, \beta, \gamma)$ γ -спиралеобразны в E , а порядок γ -спиралеобразности класса $S(\alpha, \beta, \gamma)$ равен нулю. Получена оценка $|c_\beta - \mu c_\beta'|$, μ — любое комплексное число, в классе $S(\alpha, \beta, \gamma)$.

Библ. 8.

УДК 513.83

Слепухин И. К. Булевы системы функций и регулярные операторы усреднения. — В кн.: Экстремальные задачи теории функций. 6. Томск: Изд-во ТГУ, 1988, с. 80—97.

Даются необходимые и достаточные условия существования регулярного оператора усреднения для эпиморфизма с нульмерного бикомпакта. Эти условия используются для получения тополого-алгебраических характеристик бикомпактов Милютина.

Библ. 4.

УДК 517.54

Цветков Б. Г. Некоторые неравенства для функций, конформно отображающих полосу в себя — В кн.: Экстремальные задачи теории функций. 6. Томск: Изд-во ТГУ, 1988, с. 98—101.

Для функций, конформно отображающих полосу в себя, приводится ряд следствий из работ [РЖМат, 1980, 3Б 103; РЖМат, 1980, 5Б 145, РЖМат, 1981, 6Б 244].

Библ. 3.

УДК 517.54

Черников В. В. Некоторые экстремальные свойства типично вещественных в круге функций. — В кн.: Экстремальные задачи теории функций. 6. Томск: Изд-во ТГУ, 1988, с. 102—132.

В работе с подробными доказательствами изложены результаты заметки автора [РЖМат, 1981, 6Б 242].

Библ. 27.

В 1988 г. в издательстве Томского университета выйдет в свет учебное пособие И. Х. Беккера **«Аutomорфизмы абелевых групп без кручения»**.

В книге изложены результаты исследования абелевых групп без кручения, показывается их применение в получении гомологических характеристик абелевых групп и их групп автоморфизмов, а также при изучении групп автоморфизмов модулей и колец без кручения.

Для научных сотрудников, аспирантов, студентов, интересующихся вопросами алгебры.

В издательстве Томского университета вышло в свет учебное пособие:

Л. И. Магазинников, «ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО».

В работе дан материал по теории функций комплексного переменного и операционному исчислению. Теоретический курс дополнен текстовыми задачами, позволяющими организовать учебную деятельность студентов непосредственно на лекции и автоматизировать подведение итогов этой деятельности. Индивидуальные задания к каждой лекции способствуют более глубокому усвоению материала.

Для студентов вузов и преподавателей математики.