© Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

și mulțimea substituțiilor de bază prin

Fie $s,\ t \in F_\Omega$. O problemă de unif
nota prin $\langle s = t \rangle$.

2. EXPANDARE. ARBO

Definiția 2.1. Fie $s, t \in F_\Omega$. Spun
și notăm $\mathrm{Ar}(s) \equiv \mathrm{Ar}(t)$, dacă au loc u

(i) $\Pi(s) = \Pi(t)$

(ii) Pentru orice $\pi \in \Pi(s)$ are loc s

Dată o problemă de unificare, $\langle s = t \rangle$,
este suficient a realiza $\mathrm{Ar}(s) \equiv \mathrm{Ar}(t)$. S
$\ldots, s_n)$ și $t = f(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_n)$ cu $f \in \Phi$
$2, \ldots, n\}$, s_i și t_i sînt termi. Se poate

STUD. CERC. MAT., TOM 40, NR. 2, P. 161—172,

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ПРИ ТОМСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Под редакцией кандидата физико-математических наук
В. И. Тараканова

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1988

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Механика деформируемого твердого тела: Сборник статей / Под ред. В. И. Тараканова.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988.— 144 с.— 1 р. 20 к. 500 экз. 1703040000.

В сборник включены статьи по некоторым разделам механики деформируемого твердого тела: теории упругости, пластичности и вязкоупругости, теории оболочек, напряженно-деформированного состояния и разрушения тел в условиях высокоскоростного взаимодействия и интенсивного нагружения. Рассматриваются вопросы создания и исследования различных физических и математических моделей применительно к расчету напряженно-деформированного состояния элементов конструкций.

Для научных сотрудников, инженеров и аспирантов, занимающихся вопросами механики деформируемого твердого тела.

Рецензент — кандидат физико-математических наук
В. И. Масловский

М $\frac{1703040000}{177(012)-88}$ 61—87

© Издательство Томского университета, 1988

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ ИСХОДНЫХ АППРОКСИМИРУЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

В. Н. Барашков, О. Г. Дмитриева

Оболочки и тела вращения являются элементами многих машиностроительных конструкций, сосудов давления, используются в авиастроении.

Одним из обязательных этапов проектирования какой-либо конструкции является анализ ее напряженно-деформированного состояния (НДС). Поэтому создание методик расчета НДС тела, возникающего на упругой и упругопластической стадиях его деформирования, является актуальным.

Для реализации пространственных осесимметричных уравнений равновесия теории упругости используется вариационно-разностный метод (ВРМ), основанный на вариационном принципе Лагранжа. Задача о упругопластическом НДС решается с применением соотношений деформационной теории А. А. Ильюшина с привлечением метода упругих решений. Используется цилиндрическая система координат r, θ, Z. Применение ВРМ сводит задачу к системе линейных алгебраических уравнений относительно радиальных u и осевых w компонент вектора перемещений в узлах конечно-разностной сетки. Решение полученной системы уравнений проводится методом Гаусса. Алгоритм получения данной системы, а также методы ее реализации подробно описаны в работах [1, 2].

При реализации ВРМ традиционным является использование для дискретизации континуума четырехугольных ячеек. Тем не менее применение треугольной сетки в некоторых случаях бывает более оправданным, особенно для тел со сложной границей. При этом становится невозможным «выворачивание» ячеек при больших деформациях. Эти положительные стороны использования треугольных ячеек проанализированы в [3]. В работе делается вывод о том, что применение треугольных ячеек дает значительную экономию памяти ЭВМ, что «...при решении системы уравнений методом Гаусса является немаловажным положительным моментом». Для про-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

верки правильности разработанного алгоритма было проведено его тестирование на расчете НДС дюралюминиевой цилиндрической оболочки при действии осевой сжимающей силы P.

Сравнение результатов, полученных с помощью безмоментной теории оболочек [4] и по предложенной методике, показывает, что разница между радиальными перемещениями для $z = L/2$ (L — длина оболочки) и осевыми перемещениями верхнего торца $z=L$ составляет 0,3 и 3% соответственно.

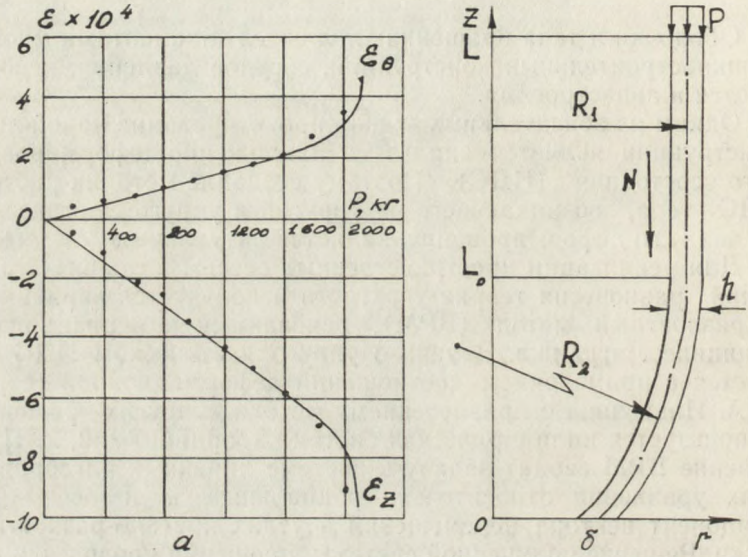

Рис. 1. Сравнение результатов эксперимента и численного анализа для цилиндрической оболочки *(а)* и расчетная схема исследуемого тела вращения *(б)*

Окружная деформация ε_θ, полученная с помощью аналитического решения, равна $1{,}284 \cdot 10^{-4}$, а численное решение дает величину $\varepsilon_\theta = 1{,}25 \cdot 10^{-4}$, т. е. разница составляет коло 2%. Ошибка выполнения статических граничных условий на торце, где приложена сила P, равна 0,1%. На рис. 1, *а* изображены зависимости окружных ε_θ и осевых ε_z деформаций рассматриваемой оболочки для $z = L/2$ от величины силы P. Точками обозначены результаты экспериментальных исследований.

Хорошее качественное и удовлетворительное количественное согласование результатов дает возможность применять

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

полученный алгоритм для расчета упругопластического НДС конструкций, выполненных в форме тела вращения и подвергающихся осесимметричному нагружению.

С помощью разработанного алгоритма решается задача о НДС конструкции, срединная поверхность которой представляет собой цилиндр, переходящий в эллипсоид вращения (рис. 1, *б*). Использование неинерциальной системы координат приводит к необходимости введения дополнительных массовых сил с перегрузкой N. Считается, что торец оболочки $z = 0$ соединен с недеформируемым днищем. К торцу $z = L$ присоединена некоторая конструкция весом $M = 8$ кг, НДС которой не исследуется. Действие этой массы на оболочку учитывается давлением P. При этом задаются следующие граничные условия:

$$z=0 : u(r, 0)=w(r, 0)=0;$$
$$z=L : u(r, L)=0, \sigma_z(r, L)=P.$$

Физико-механические и геометрические характеристики стальной оболочки берутся следующими:

$$E = 2\cdot 10^6 \text{ кГс/см}^2,\ E_1 = 2\cdot 10^5 \text{ кГс/см}^2,\ \mu = 0{,}3,$$
$$e_s = 3{,}10^{-3}, \nu = 7{,}8\cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3,\ L = 17{,}5 \text{ см},$$
$$R_1 = 3{,}45 \text{ см},\ R_2 = 49 \text{ см},\ h = 0{,}2 \text{ см},\ L_0 = 11 \text{ см}.$$

Используется треугольная конечно-разностная сетка размером 7×50.

Исследование поведения оболочки проводится для четырех вариантов величин внешних нагрузок:

1) $N=-1250,\ P=-2307\dfrac{\text{кГс}}{\text{см}^2}$;

2) $N=-2500,\ P=-4613\dfrac{\text{кГс}}{\text{см}^2}$;

3) $N=-2750,\ P=-5075\dfrac{\text{кГс}}{\text{см}^2}$;

4) $N=-3000,\ P=-5536\dfrac{\text{кГс}}{\text{см}^2}$.

Из рис. 2, *а*, на котором представлены зависимости радиальных перемещений u по длине оболочки (кривые *1, 2, 3, 4*

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

соответствуют рассматриваемым вариантам), видно, что перемещения u в цилиндрической и оживальной частях оболочки развиваются по-разному. В нижней части оболочки перемещения u достигают наибольшей величины. Условия заделки влияют на характер изменения радиальных перемещений торцов оболочки. Анализ показывает, что наибольшими среди напряжений являются осевые, которые достигают максимальной величины у торца $z=0$. При этом имеет место достаточно хорошее выполнение статических граничных условий. Для варианта 2-го нагружения величина осевого напряжения у торца $z = L$, $\sigma = -4618$ кГс/см^2, что на 0,12% отличается от величины давления P.

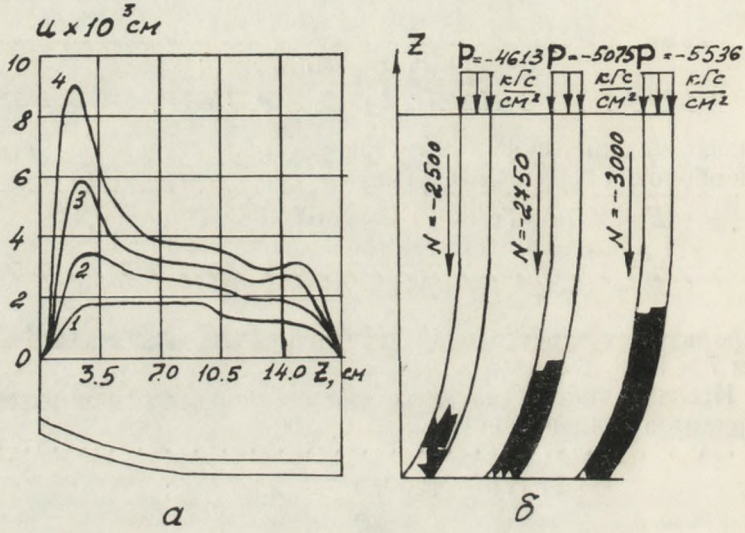

Рис. 2. Распределение (*а*) радиальных перемещений u срединной поверхности оболочки и (*б*) пластических деформаций (заштрихованные области) по ее длине для различных вариантов величин внешних нагрузок

Исследование величин интенсивностей деформаций и интенсивностей напряжений показало, что наиболее напряженная часть оболочки находится вблизи торца $z = 0$. В соответствии с этим происходит и образование зон пластических деформаций (рис. 2, *б*, заштрихованные области на контуре оболочки).

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Анализ влияния внешних нагрузок (M, N, P) на НДС позволяет сделать некоторые выводы. Установлено, что даже небольшая масса M, действующая в сочетании с перегрузкой N, способна вызвать большие перемещения и напряжения, нежели приложенные по отдельности давление P и перегрузка N. Для расчета данной оболочки используются и четырехугольные ячейки.

Сравнение результатов, полученных на треугольной и четырехугольной сетках, показывает достаточно хорошее совпадение величин параметров НДС. На рис. 3 представлено распределение радиальных перемещений u по длине оболочки для $N = -2000$, $P = -3690$ кГс/см^2 для четырехугольной (1) и треугольной (2) аппроксимаций.

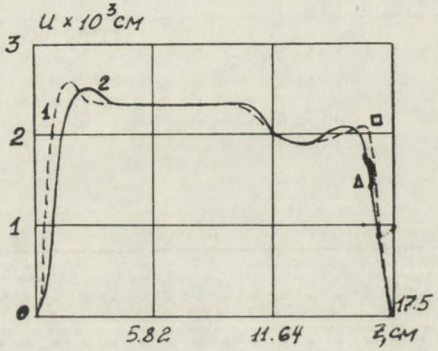

Рис. 3. Распределение радиальных перемещений u срединной поверхности оболочки для случая аппроксимации четырехугольными (кривая *1*) и треугольными (кривая *2*) ячейками

Время реализации задачи на треугольной сетке примерно такое же, что и на четырехугольной. Но использование треугольных ячеек естественным образом уменьшает число степеней свободы, делает конструкцию более жесткой, несколько занижает действительные величины параметров НДС. Тем не менее использование обоих типов ячеек может служить одним из способов проверки правильности алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барашков В. Н. Расчет напряженно-деформированного состояния круглой плиты при действии объемных и поверхностных сил.— В кн.: Механика сплошных сред. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983, с. 68—78.

2. Барашков В. Н., Люкшин Б. А. К реализации вариационно-разностного метода для осесимметричных задач теории упругости и пластичности. Томск, 1983.— 14 с.— Рукопись представлена Том. ун-том. Деп. в ВИНИТИ 14 марта 1983, № 1335—83 Деп.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

3. Барашков В. Н., Дмитриева О. Г., Люкшин Б. А. Решение осесимметричных статических задач упругости и пластичности вариационно-разностным методом на треугольных и четырехугольных ячейках.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 30—34.

4. Прочность, устойчивость, колебания.— М.: Машиностроение, 1968, т. 1.— 831 с.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАЗНОПЛОТНЫХ ТЕЛ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ В УСЛОВИЯХ БОЛЬШИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

А. Н. Богомолов, В. А. Горельский, С. А. Зелепугин, И. Е. Хорев

Исследование динамического взаимодействия тел в условиях больших пластических деформаций представляет собой сложную физическую задачу [1]. Строгий анализ всего процесса взаимодействия требует принять в расчет геометрию контактирующих тел, распространение упругопластических и ударных волн, гидродинамическое течение, большие деформации, зависимость процесса от скорости деформации, упрочнение, тепловые эффекты, трение, возникновение и развитие разрушений. Большинство работ в этой области посвящено экспериментальным исследованиям и получению на их основе эмпирических соотношений, пригодных для инженерных расчетов. Наряду с экспериментальными исследованиями получили широкое распространение приближенные аналитические методы. Они концентрируются на одном из аспектов проблемы в результате введения упрощений в уравнения механики сплошной среды, чтобы свести их к алгебраическим или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Затем эти уравнения решаются, часто с использованием дополнительных упрощений. Почти все такие решения основываются на полученных экспериментально эмпирических соотношениях.

Несмотря на относительную простоту и оперативность приближенных (инженерных) оценок, они уступают численным методам в детальном описании явления взаимодействия твердых тел в широком диапазоне изменения скоростей встречи и физико-механических характеристик соударяющихся тел. Численные методы позволяют описать явления внедрения на различных стадиях в совокупности с сопутствующими явлениями, одним из которых является волна напряжений, или ударная волна. Наличие в телах контактных границ с разрывом плотности или физико-механических характеристик затрудняет получение приближенного аналитического решения. Использование численных методов позволяет решать широкий круг таких

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

задач, связанных с большими пластическими деформациями взаимодействующих тел.

В данной работе проведено экспериментально-теоретическое исследование динамического контакта медных цилиндров со стальными пластинами.

На рис. 1 представлены результаты экспериментов по внедрению медных цилиндров в стальную массивную пластину. Диаметр цилиндра составлял 10,9 мм. Опыты проводились для цилиндров длиной 65,4 и 109 мм. Из экспериментов следует,

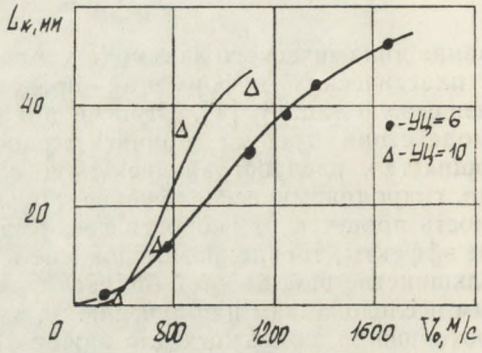

Рис. 1. Зависимости глубин кратеров от скорости контакта.

что зависимости глубин внедрения от скорости встречи для исследуемых начальных условий сохраняют качественно сходный характер. До скорости 600 м/с внедрение незначительно, а в дальнейшем наблюдается резкое возрастание глубины кратера при увеличении скорости цилиндра. С целью исследования особенности пластического деформирования медных цилиндров в более широком диапазоне начальных условий были проведены численные расчеты. Система уравнений, описывающих адиабатные движения твердой сжимаемой упругопластической среды для случая осевой симметрии, имеет вид [2]:

уравнение неразрывности

$$\dot{\rho} = -\rho\left(v_{,z} + u_{,r} + \frac{u}{r}\right);$$

уравнение движения

$$\rho\dot{u} = S_{rr,r} + S_{rz,z} + \frac{S_{rr} - S_{\theta\theta}}{r} - P_{,r},$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\rho\dot{v}=S_{rz,r}+S_{zz,z}+\frac{S_{rz}}{r}-P_{,z};$$

уравнение энергии

$$\rho\dot{E}=\frac{P\dot{\rho}}{\rho}+S_{rr}\cdot u_{,r}+S_{zz}\cdot v_{,z}+S_{\theta\theta}\cdot\frac{u}{r}+S_{rz}(u_{,z}+v_{,r}).$$

Здесь и далее r, θ, z — цилиндрические координаты (z — ось симметрии); S_{rr}, S_{zz}, $S_{\theta\theta}$, S_{rz} — компоненты девиатора напряжений; u, v — радиальная и осевая компоненты вектора скорости; ρ — плотность; E — удельная внутренняя энергия. Точка над параметром означает производную по времени, написанная внизу через запятую координата — производную по этой координате. Шаровая часть тензора напряжений является функцией плотности и внутренней энергии

$$P=\sum_{m=1}^{3}k_m(\rho/\rho_0-1)^m[1-k_0(\rho/\rho_0-1)/2]+k_0\rho_0E,$$

где k_m, ρ_0, k_0 — константы материала.

Компоненты, девиатора упругопластических напряжений находятся из следующих соотношений:

$$2G\left(u_{,r}+\frac{\dot{\rho}}{3\rho}\right)=S^{\nabla}_{rr}+\lambda S_{rr},$$

$$2G\left(v_{,z}+\frac{\dot{\rho}}{3\rho}\right)=S^{\nabla}_{zz}+\lambda S_{zz},$$

$$2G\left(\frac{u}{r}+\frac{\dot{\rho}}{3\rho}\right)=S^{\nabla}_{\theta\theta}+\lambda S_{\theta\theta},$$

$$G(u_{,z}+v_{,r})=S^{\nabla}_{rz}+\lambda Srz.$$

Параметр λ тождественно равен 0 при упругой деформации, а при пластической деформации всегда положителен и определяется с помощью условия текучести Мизеса

$$S_1^2+S_2^2+S_3^2\leqslant\frac{2}{3}\sigma_d^2,$$

где G — модуль сдвига; S_1, S_2, и S_3 — главные компоненты девиатора напряжений; σ_d — динамический предел текучести, верхний индекс ∇ означает производную по Яуману.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Рассматриваются задачи взаимодействия ударника цилиндрической формы, занимающего область D_1, с пластиной D_2. Начальные условия для приведенной ранее системы уравнений имеют вид

$$S_{rr}(r,z,0)=S_{zz}(r,z,0)=S_{\theta\theta}(r,z,0)=S_{rz}(r,z,0)=$$
$$=P(r,z,0)=E(r,z,0)=0 \text{ при } (r,z)\in D_1 \cup D_2,$$
$$u(r,z,0)=0 \text{ при } (r,z)\in D_1 \cup D_2,$$
$$v(r,z,0)=v \text{ при } (r,z)\in D_1,$$
$$v(r,z,0)=0 \text{ при } (r,z)\in D_2,$$
$$\rho(r,z,0)=\rho_1 \text{ при } (r,z)\in D_1,$$
$$\rho(r,z,0)=\rho_2 \text{ при } (r,z)\in D_2.$$

Граничные условия следующие. На свободных поверхностях выполняются соотношения

$$\sigma_n=\sigma_\tau=0.$$

На контактной поверхности реализуется условие скольжения

$$\sigma_n^+=\sigma_n^-,\ \sigma_\tau^+=\sigma_\tau^-=0,\quad v_n^+=v_n^-,$$

где σ_n и σ_τ — нормальная и касательная проекции вектора силы; v_n — нормальная составляющая вектора скорости. Знаки + и — соответствуют расположению материала относительно контактной поверхности соответственно сверху и снизу.

Сформулированная краевая задача решалась с помощью метода конечных элементов [3]. В качестве ударника использовались медные цилиндры различного диаметра и удлинения (отношения длины цилиндра к его диаметру). Материал пластины — сталь. Динамический предел текучести меди брался равным 0,38 ГПа, стали — 1,01 ГПа. Был исследован диапазон скоростей контакта от 800 до 3500 м/с.

Анализ результатов показывает, что процесс внедрения существенно зависит от начальных условий контакта. Так, процесс взаимодействия компактного цилиндра в исследованном диапазоне начальных скоростей завершается примерно к 20 мкс. Глубина внедрения для большей начальной скорости контакта достигается за счет высоких значений скорости контактных поверхностей. Для удлиненных цилиндров процесс внедрения длится дольше. Для начальной скорости контакта 800 м/с внедрение цилиндра удлинением 3 прекращается к 27 мкс, после чего процесс завершается деформированием

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

самого цилиндра и незначительным увеличением входного диаметра кратера в пластине. При увеличении скорости контакта до 1500 м/с характер процесса меняется. Скорость контактной поверхности длительное время остается высокой, что обеспечивает значительную глубину внедрения. Процесс внедрения в этом случае завершается к 37,5 мкс, причем на последнем этапе скорости тыльной и контактной поверхностей цилиндра уравниваются, и процесс внедрения завершается без его деформирования.

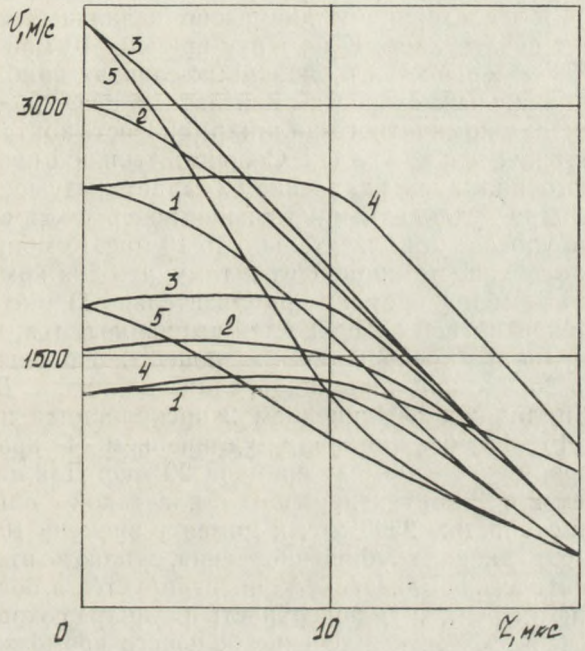

Рис. 2. Временные зависимости изменения скоростей характерных точек цилиндров

Глубина кратера в пластине увеличивается как с ростом начальной скорости, так и с удлинением цилиндра. Эффективность удлиненных цилиндров с увеличением скорости возрастает. При скорости контакта 800 м/с разница в глубине кратеров для компактного цилиндра и цилиндра удлинением 3 составляет 1,7 мм, а при скорости 1500 м/с — 10,5 мм.

С целью изучения влияния геометрической формы цилинд-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ров на процесс внедрения были проведены численные расчеты с цилиндром постоянной начальной массы, равной 10,8 г.

На рис. 2 представлены временные зависимости изменения скоростей осевых точек тыльных и контактных поверхностей цилиндра. Приняты следующие обозначения индексов кривых: 1 — d_0 = 9,2 мм, $\lambda = 2$, v_0 = 2500 м/с; 2 — d_0 = 9,2 мм, λ = 2, v_0 = 3000 м/с, 3 — d_0 = 9,2 мм, $\lambda = 2$, v_0 = 3500 м/с; 4 — d_0 = = 7,3 мм, $\lambda = 4$, v_0 = 2500 м/с; 5 — d_0 = 11,6 мм, $\lambda = 1$, v_0 = = 3500 м/с.

Скорости контактных поверхностей для цилиндров удлинением 2 и 4 в исследованном диапазоне начальных скоростей возрастают после удара. К моменту времени 10 мкс скорости контактных поверхностей в указанных случаях приблизительно равны начальным скоростям контактных поверхностей, в то время как для компактного цилиндра скорость контактной поверхности значительно упала. Скорость тыльной поверхности компактного цилиндра удлинением 2 падает сразу после удара, для цилиндра удлинением 4 тыльная поверхность сохраняет начальный уровень приблизительно до 10 мкс. Комбинация отмеченных особенностей приводит к тому, что для компактного цилиндра к моменту времени приблизительно 11 мкс скорости тыльной и контактной поверхностей выравниваются, деформирование цилиндра прекращается и процесс внедрения продолжается до 26 мкс при постоянной длине цилиндра. Деформирование цилиндров удлинением 2 прекращается приблизительно к 16—17 мкс, цилиндр удлинением 4 продолжает деформироваться и в момент времени 20 мкс. Для цилиндров удлинением 2 и 4, контактирующих с пластиной с одинаковой начальной скоростью 2500 м/с, к моменту времени 10 мкс достигается одинаковая глубина внедрения, однако во втором случае кинематическая энергия концентрируется в более узкой зоне, кроме того, тыльная поверхность цилиндра сохраняет высокий уровень скорости в течение большего промежутка времени. Таким образом, расчеты показывают, что в исследованном диапазоне рост удлинения цилиндра постоянной начальной массы с одновременным уменьшением диаметра ведет к увеличению глубины и уменьшению диаметра кратера в пластине.

Были проведены также численные расчеты взаимодействия медных цилиндров со стальными пластинами ограниченной толщины, позволившие оценить степень и характер деформирования контактирующих тел. На рис. 3 представлена выдача с графопостроителя полученных в расчете конфигураций де-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

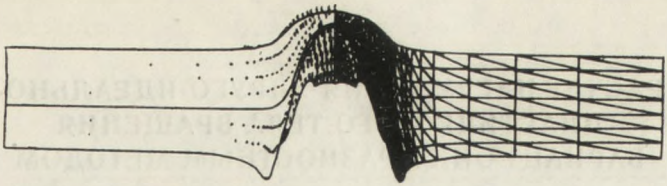

Рис. 3. Хронограмма взаимодействующих тел в момент времени 20 мкс.

формируемых тел и поля скоростей в них в момент времени 20 мкс. В качестве ударника использовался медный цилиндр диаметром 7,3 мм и удлинением 4. Начальная скорость контакта составила 3000 м/с, толщина пластины — 20 мм. Взаимодействующие тела испытывают значительные пластические деформации, причем часть материала пластины отделяется под действием высокой скорости части цилиндра. Анализ результатов расчета показывает, что к моменту времени 20 мкс скорости тыльной поверхности цилиндра, контактной и тыльной поверхностей пластины уравниваются, это значение скорости, а следовательно, и скорости отделяемой части пластины и остатка цилиндра равно 1800 м/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорев И. Е. и др. Исследование деформирования и кинетики разрушения контактирующих тел при несимметричном динамическом взаимодействии.— ФГВ, 1983, № 5, с. 119—123.

2. Физика взрыва/Под ред. К. П. Станюковича.— М.: Наука, 1975.— 704 с.

3. Горельский В. А., Хорев И. Е. О применении метода конечных элементов для расчета больших деформаций и разрушения твердых тел при динамических нагрузках.— Труды I-й Всесоюзной школы-семинара по многомерным задачам механики сплошной среды. Деп. в ВИНИТИ, 1983, № 4623—83, с. 103—114.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

РАСЧЕТ НАГРУЖЕНИЯ УПРУГО-ИДЕАЛЬНО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Ю. В. Бузунов, В. А. Колдунов

Особое положение в постановке и решении задач теории пластичности связано с тем, что приходится рассматривать краевые задачи для уравнений в областях с неизвестными границами. При разработке математических методов исследования таких задач [1] весьма плодотворным оказался вариационный подход, на основании которого, в частности, был предложен и численный алгоритм [2] решения задач об определении осесимметричного напряженно-деформированного состояния (НДС) упруго-идеально-пластических тел вращения методом локальных вариаций [3]. Алгоритм основан на определении минимума конечно-разностного аналога приращения функционала полной энергии упругопластической деформации тела в процессе пошагового квазистатического нагружения. За исходные физические соотношения, описывающие процесс упругопластической деформации, были приняты соотношения Прандтля-Рейса и условие текучести Мизеса. В этом случае приращение функционала при осесимметричной упругопластической деформации изотропного тела вращения в цилиндрической системе координат при силовом нагружении можно записать в виде [4]:

$$d\Theta = d\Theta_1 - d\Theta_2,$$

где

$$d\Theta_1 = \iint_{r\,z} \Big\{ a\left(\varphi_{,r} + \frac{\varphi}{r} + \gamma_{,z}\right)^2 + b\left(\varphi_{,r}^2 + \right. \tag{1}$$

$$\left. + \frac{\varphi^2}{r^2} + \gamma_{,z}^2\right) + c(\varphi_{,z} + \gamma_{,r})^2 -$$

$$-\omega[(\sigma_r - \sigma)\varphi_{,r} + (\sigma_\varphi - \sigma)\frac{\varphi}{r} + (\sigma_z - \sigma)\gamma_{,z} +$$

$$+\sigma_{rz}(\varphi_{,z} + \gamma_{,z})]^2 \Big\} r\,dr\,dz \tag{2}$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

— приращение внутренней энергии деформации;

$$d\Theta_2 = \int_V (dR_V\varphi + dZ_V\gamma)dV + \int_S (dR_S\varphi + dZ_S\gamma)dS \qquad (3)$$

— работа приращений внешних объемных и поверхностных сил на вызванных ими приращениях перемещений;

$$a = \frac{\pi E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \quad b = \frac{\pi E}{1+\mu}; \quad c = \frac{b}{2};$$

$$\omega = \frac{c}{\tau_s^2},$$

где E, μ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

В (2), (3) φ, γ—приращения перемещений du, dw по осям r и z соответственно; $\varphi_{,r}, \gamma_{,r}, \varphi_{,z}, \gamma_{,z}$—соответствующие производные; σ_r, σ_φ, σ_z, σ_{rz}—компоненты напряжений; $\sigma = (\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z)/3$; τ_s—предел текучести при чистом сдвиге.

Методика получения конечно-разностного аналога функционалов типа (1) на основании линейной конечно-разностной аппроксимации функций и их производных по ячейкам соответствующих конечно-разностных сеток подробно изложена в [2, 3, 4].

В процессе численной реализации минимума конечно-разностного аналога функционала (1) следует удовлетворять условию текучести Мизеса на каждом этапе нагружения, характеристики НДС которого (σ_r, σ_φ, σ_z, σ_{rz}) непосредственно входят в выражение функционала. При решении достаточно сложных практических задач, требующих мелкой конечно-разностной сетки с большим количеством узлов, высокая точность при организации вычислений возможна только в сочетании с высокой скоростью реализации решения на каждом этапе нагружения. Последнее требование практически невозможно удовлетворить, если при определении минимума конечно-разностного аналога функционала (1) использовать метод локальных вариаций. Известные методы ускорения непосредственной минимизации функционала, зависящего от большого числа переменных (например, метод градиентного спуска), также не приводят к существенным изменениям [4] в этом направлении. Поэтому в данной работе рассматривается реализация алгоритма [5], основанного на решении системы сеточных уравне-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ний, полученных вариационно-разностным методом (ВРМ) из условия существования минимума приращения конечно-разностного аналога функционала (1), на каждом этапе нагружения. Решение уравнений прямым методом исключения Гаусса на основании программ [6] позволяет с учетом симметрии ленточной диагональной матрицы уравнений экономично использовать как оперативную память, так и машинное время ЭЦВМ типа БЭСМ-6.

В качестве примера рассматривается задача об определении НДС полого кругового изотропного цилиндра, жестко заделанного по торцам, в процессе его нагружения внутренним равномерным давлением. Этот пример рассматривается в связи с возможностью тестирования полученных результатов, хотя в общем случае реализация алгоритма возможна при различных условиях закрепления торцов и различных случаях осесимметричного нагружения тел вращения произвольной формы.

В процессе реализации алгоритма проводится последовательное решение сначала упругой, а затем упругопластических задач.

Решение упругой задачи проводится в предположении $\omega = 0$ в (2). При этом составляющие приращений перемещений $\varphi = du$, $\gamma = dw$ в узлах конечно-разностной сетки соответствующего конечно-разностного аналога функционала (1) могут рассматриваться как обычные узловые перемещения u, w, так как при $\omega = 0$ выражение функционала (1) и его конечно-разностного аналога для φ, γ совпадает с функционалом Лагранжа (и следовательно, с его конечно-разностным аналогом) полной потенциальной энергии деформации упругого тела.

При решении упругой задачи с последовательным изменением (увеличением или уменьшением) нагрузки определяются соответствующие узловые перемещения u, w, компоненты напряжений внутри ячеек конечно-разностной сетки и интенсивность касательных напряжений.

Как только на каком-то шаге в какой-либо (или каких-либо) ячейке (или ячейках) τ_i становится равной τ_s с заданной степенью точности, решение проводится далее с учетом того, что для этой ячейки (или ячеек) при подсчете энергии необходимо полагать $\omega = \frac{c}{\tau_s^2}$ и тем самым учитывать предысторию нагружения через полученные на данном этапе компоненты напряжения σ_r, σ_φ, σ_z, σ_{rz}. Придавая при этом соот-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

вествующее приращение нагрузке, получаем соответствующие приращения узловых перемещений и, следовательно, деформаций и напряжений по ячейкам конечно-разностной сетки. Затем определяются соответствующие ячейкам напряжения и снова проверяется выполнение условия текучести. Дальнейшее решение проводится аналогично (с учетом $\omega = 0$ или $\omega \neq 0$ при подсчете энергии внутри ячеек).

В результате последовательного решения систем соответствующих сеточных уравнений были получены данные о характере распространения зоны течения в процессе нагружения цилиндра внутренним давлением. При определении НДС для тестирования решения был выбран длинный цилиндр, так что в достаточном удалении от торцов реализовывалось плоское деформированное состояние. В процессе решения проверялась и симметрия получаемых решений относительно плоскости $z=\frac{l}{2}$ (где l — длина оболочки) при одинаковом закреплении торцов. После того как давление достигло величины, соответствующей появлению пластической деформации в ячейке, расположенной у закрепленного торца, его последовательное приращение вызвало дальнейшее активное распространение зоны текучести только по достижении им величины, примерно соответствующей аналитически рассчитанной на случай плоского деформированного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Койтер В. Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред.— М.: ИЛ, 1961.— 79 с.

2. Баничук Н. В. Расчет нагружения упруго-пластического тела.— Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 1, с. 128—135.

3. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. Численные методы.— М.: Наука, 1973.— 238 с.

4. Болотов В. М., Колдунов В. А. Расчет напряженно-деформированного состояния оболочки с заполнителем на основе соотношений теории пластического течения.— В кн.: Теория упругости и пластичности.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1978, с. 11—17.

5. Колдунов В. А. и др. Анализ напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций с учетом анизотропии на основании пространственной численной схемы расчета.— В кн.: 13-я Всесоюзная конференция по теории пластин и оболочек. Часть 3. Таллин, 1983, с. 55—60.

6. Сосис П. М. АЛГОЛ-60 и применение его в строительной механике.— Киев: Будівельник, 1965.— 324 с.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ ПО ОБОЛОЧЕЧНЫМ И ПРОСТРАНСТВЕННЫМ РАСЧЕТНЫМ СХЕМАМ

А. П. Варочкин, А. В. Герасимов, Б. А. Люкшин

Проблема оценки эффектов динамичности нагружения различных элементов машиностроительных конструкций интересна в научном плане и имеет важный прикладной аспект. Ее разработка позволяет резко уменьшить объем расчетных работ при оценке параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) по соотношениям механики деформируемого тела, а также обоснованно заменять режимы испытаний при отработке конкретных конструкций на различного рода стендах.

Сложность численного моделирования применительно к этой проблеме заключается в необходимости расчета НДС в широком временном диапазоне нагрузок от статических до ударных. Опыт показывает, что более оправданным является путь построения и реализации целого семейства расчетных схем для определенного класса конструкций, нежели попытки создания некоторой универсальной модели.

В данной работе на основе численного моделирования исследуется задача о НДС достаточно длинной цилиндрической оболочки со ступенчато меняющейся вдоль окружности толщиной при действии внутреннего давления. Нагружение носит динамический характер, что позволяет пренебрегать инерцией элемента оболочки в направлениях вдоль меридиана и окружности и учитывать инерцию лишь в направлении нормали к срединной поверхности.

Считая оболочку достаточно длинной, в средней ее части можно пренебречь влиянием торцов, т. е. в уравнениях движения и равновесия оболочки, записанных согласно [1], можно считать все величины не зависящими от осевой координаты. Тогда из трех уравнений движения одно, в осевом направлении, выполняется тождественно, а два оставшихся принимают вид

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} - \frac{1}{R}\frac{\partial M_2}{\partial y} + q_2 = 0, \qquad (1)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + \frac{N_2}{R} + q_3.$$

При этом выполняются геометрические соотношения в срединной поверхности

$$e_1 = e_{12} \equiv 0, \quad e_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R},$$

а для произвольной точки с координатой z

$$e_2^z = e_2 + z\varkappa_2,$$

$$\text{где } \varkappa_2 = -\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

В этих соотношениях N_2 — окружное усилие; M_2 — момент; y — координата вдоль окружности; R — радиус срединной поверхности оболочки; w, v — прогиб и окружное перемещение; ρ — плотность материала оболочки; h — толщина; q_2, q_3 — составляющие внешней нагрузки вдоль окружности и нормали к срединной поверхности соответственно. Ненулевые усилия и моменты вводятся обычным образом.

Начальные условия принимаются нулевыми:

$$v(y, 0) = w(y, 0) = 0, \quad \dot{v}(y, 0) = \dot{w}(y, 0) = 0.$$

Граничные условия при численном решении могут быть достаточно произвольными. В частности, ниже при рассмотрении конструкции, обладающей плоскостью симметрии, при $y = 0, \pi R$ использовались условия вида

$$v(0, t) = v(\pi R, t) = 0, \frac{\partial w(0, t)}{\partial y} = \frac{\partial w(\pi R, t)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 w(0, t)}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 w(\pi R, t)}{\partial y^3} = 0.$$

Последнее из этих соотношений эквивалентно требованию отсутствия перерезывающих сил в плоскости симметрии.

Таким образом, в оболочечной постановке динамическое

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

деформирование конструкции описывается системой двух дифференциальных уравнений (1), одно из которых является квазистатическим, второе — динамическим. Решение этой системы проводится по схеме, описанной в [2], отличие заключается в том, что пространственная сетка и соответствующие сеточные функции вводятся после разбиения окружной координаты y.

Пространственная плоская задача решается с использованием метода расчета упругопластических течений [3]. На поперечное сечение цилиндрической оболочки наносится пространственная двумерная лагранжева сетка, и далее решение строится в декартовых координатах. На первый взгляд в этой задаче удобнее использовать полярные координаты, однако при отклонении процесса деформирования от осесимметричного все преимущества полярной системы координат исчезают, в то же время в декартовых координатах существуют надежно апробированные вычислительные алгоритмы.

Пример расчетной схемы конструкции приведен на рис. 1$а$, где дана половина симметричного поперечного сечения цилиндрической оболочки с радиусом срединной поверхности R и кусочно-постоянной толщиной

$$h=\begin{cases} h_1, & 0\leqslant y\leqslant R\varphi_1 \\ h_2, & R\varphi_1<y\leqslant \pi R. \end{cases}$$

Внутреннее давление меняется во времени по закону $P = P_{\max} \cdot a(t)$, где

$$a(t)=\begin{cases} 0, & t<0,\ t>t_3, \\ t/t_1 & 0<t\leqslant t_1, \\ 1, & t_1\leqslant t\leqslant t_2, \\ (t_3-t)/(t_3-t_2), & t_2<t\leqslant t_3. \end{cases}$$

Графически закон изменения внутреннего давления показан на рис. 1$б$.

На рис. 1$в$ приведена оценка максимальных прогибов в зависимости от текущего значения внутреннего давления. Сплошная линия отвечает статическому безмоментному решению, штриховая — прогибам в достаточно удаленной от места скачкообразного изменения толщины зоны $y = R\varphi_1$, полученным расчетным путем по оболочечной схеме. Как видно, динамическая составляющая относительно невелика, что объясняется сравнительно медленным нарастанием нагрузки.

Для различных моментов времени распределение величин радиальных перемещений (прогибов) по окружности показано

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

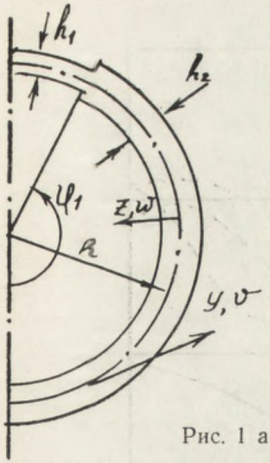

Рис. 1 а. Расчетная схема

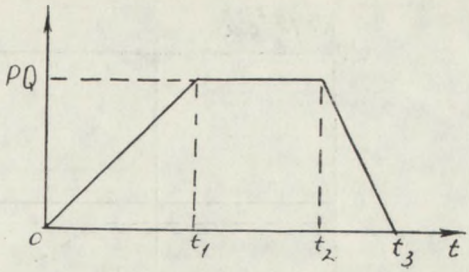

Рис. 1 б. Форма импульса нагружения

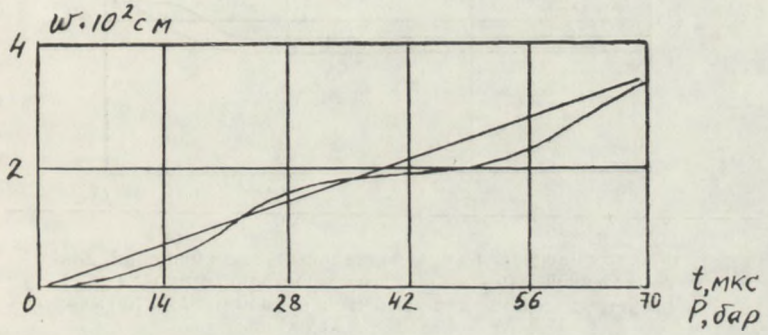

Рис. 1 в. Сравнение динамического, статического расчетов

на рис. 2, где цифры около кривых означают время (в мкс), к которому они относятся. Вертикальная штриховая линия условно обозначает координату $R\varphi_1$, где происходит изменение толщины. Из приведенных результатов следует, что в зоне, незначительно удаленной от этой линии, прогибы практически постоянны, т. е. скачок толщины вносит в картину прогибов возмущения типа краевого эффекта, как и следовало ожидать.

Поскольку оболочечная расчетная схема позволяет получить лишь интегральные оценки НДС, представленные результаты не могут дать достаточной информации для оценки прочности. Эти оценки были получены с помощью упомянутой выше схемы расчета упругопластических течений. Следует отме-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

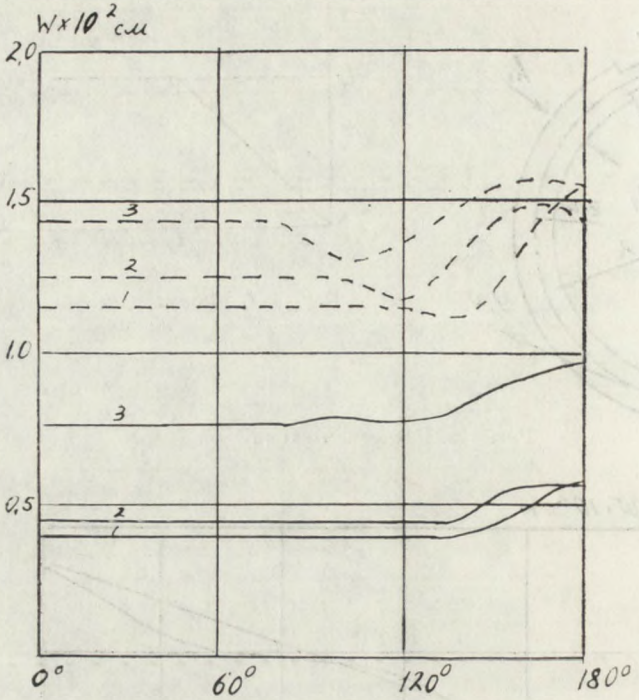

Рис. 2. Распределение радиальных перемещений для оболочечной (— — —) и пространственной (___) расчетных схем для моментов времени: *1* — 100 мкс; *2* — 150 мкс; *3* — 200 мкс

тить, что эта схема приспособлена к решению задач на коротких временных интервалах, поэтому при расчете НДС использовалась процедура, аналогичная методу установления при решении статических задач на основе уравнений движения. С этой целью кривая $a(t)$ «сжималась» во времени таким образом, чтобы, с одной стороны, это не привело к изменению параметров НДС при одинаковых уровнях нагрузок, а с другой — дало возможность проводить расчет с приемлемыми затратами времени на ЭЦВМ.

Полученные по этой схеме результаты приведены на рис. 3 в виде полей напряжений в зоне стыка $y = R\varphi_1$. Опыт показывает, что использование той или иной расчетной схемы определяется конкретными обстоятельствами, среди которых можно

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

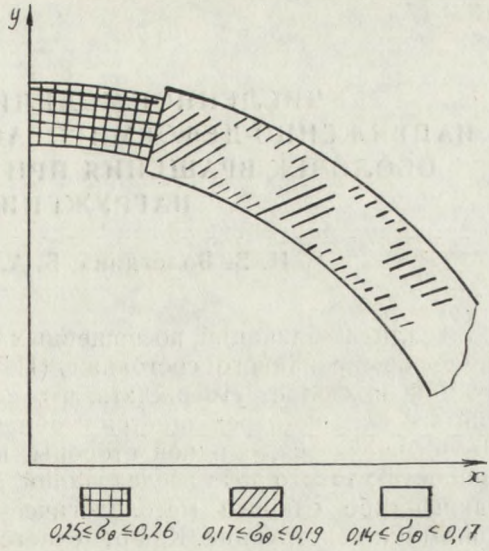

Рис. 3. Окружные напряжения σ_θ (ГПа) в зоне стыка оболочки для $t = 200$ мкс

отметить такие, как: 1) цель исследования — в некоторых ситуациях глобальные или осредненные параметры могут быть более информативными; 2) возможности и состояние ЭЦВМ; 3) квалификация исследователя. В любом случае, по-видимому, имеет смысл строить и исследовать, сопоставлять различные модели, т. е. подходить к проблемам определения НДС конструкций с позиций системного анализа. «Поскольку исходная система моделей обычно бывает достаточно сложна (во всяком случае настолько, что она исключает возможность проведения большого количества экспериментов), то ее заменяют упрощенной моделью, анализ которой... уже не требует больших затрат времени и может быть реализован в разумные сроки» [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек.— М.: Наука, 1976.— 512 с.

2. Вологдина И. В., Люкшин Б. А. Численное моделирование НДС оболочек вращения при динамическом нагружении. Наст. сб. С. 26—33.

3. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений.— В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967, с. 212—263.

4. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа.— М.: Наука, 1981.— 488 с.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

И. В. Вологдина, Б. А. Люкшин

Анализ публикаций, посвященных исследованию напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочечных конструкций, позволяет утверждать, что центр тяжести исследований все больше перемещается в область динамических задач. Это объясняется, с одной стороны, несомненной прикладной ценностью такого рода исследований, а с другой — отсутствием какого-либо единого методологического подхода к изучению динамики конструкций. Как отмечается в [1], обычно дело сводится к нахождению так называемого коэффициента динамичности для конкретного закона нагружения, и разнообразие последних объясняет большое количество работ по динамике оболочек.

В данной работе предложена методика исследования НДС оболочек вращения при действии динамических нагрузок на основе численного анализа. Как известно, численные методы отличаются известной универсальностью и позволяют исследовать обычно целый класс задач в рамках предложенной и реализованной математической модели. Под динамическими нагрузками будут пониматься в соответствии с [2] такие, время приложения которых на порядок и более превосходит период пробега упругой волны по длине оболочки.

В основу исследования положены уравнения движения оболочки вращения, имеющие вид

$$\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial N_1}{\partial s}+\frac{\partial N_{12}}{\partial y}+\frac{\sin\alpha}{R}(N_2-N_1)-$$

$$-\frac{1}{R_1}\left[\frac{\partial M_1}{\partial s}+\frac{\partial M_{12}}{\partial y}+\frac{\sin\alpha}{R}(M_2-M_1)\right]+q_1;$$

$$\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial N_{12}}{\partial s}-2\frac{\sin\alpha}{R}N_{12}-$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$-\frac{1}{R_2}\left[\frac{\partial M_2}{\partial y}+\frac{\partial M_{12}}{\partial s}-2\frac{\sin\alpha}{R}M_{12}\right]+q_2; \qquad (1)$$

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 M_1}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial s\partial y}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\sin\alpha}{R}(M_2-M_1)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[2\frac{\sin\alpha}{R}M_{12}\right]-$$

$$-\frac{\sin\alpha}{R}\left[\frac{\partial M_1}{\partial s}+\frac{\partial M_{12}}{\partial y}+\frac{\sin\alpha}{R}(M_2-M_1)\right]+\frac{N_1}{R_1}+\frac{N_2}{R_2}+q_3,$$

где ρ — плотность материала оболочки; h — толщина; u, v, w — компоненты вектора перемещений в меридиональном, окружном и по нормали к срединной поверхности направлениях соответственно, t — время; N_2, N_1, N_{12} — окружное, осевое и сдвиговое усилия; M_1, M_2, M_{12} — изгибающие и крутящий моменты; R_1, R_2 — радусы главных кривизн; s, y — координаты вдоль меридиана и окружности; α — угол, составленный касательной к меридиану и осью вращения, причем $\alpha > 0$, если при движении вдоль оси вращения радиус срединной поверхности R убывает; q_1, q_2, q_3 — компоненты вектора внешних нагрузок.

Использованы линейные геометрические соотношения

$$e_1=\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{w}{R_1}, \quad e_2=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\sin\alpha}{R}u-\frac{w}{R_2},$$

$$e_{12}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{\sin\alpha}{R}v,$$

справедливые для точек срединной поверхности. Для любой точки оболочки с координатой z вдоль нормали

$$e_1^z=e_1+z\varkappa_1, \quad e_2=e_2+z\varkappa_2, \quad e_{12}^z=e_{12}+2z\chi,$$

где

$$\varkappa_1=-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u}{R_1}+\frac{\partial w}{\partial s}\right);$$

$$\varkappa_2=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{R_2}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\sin\alpha}{R}\left(\frac{u}{R_1}+\frac{\partial w}{\partial s}\right);$$

$$\chi=-\frac{1}{2}\left[R\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v}{R_1R_2}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{R_1}+\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right].$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Усилия и моменты вводятся обычным образом с использованием конкретных физических зависимостей между напряжениями и деформациями.

Следует отметить, что при численном решении использование физически и геометрически нелинейных соотношений практически не сказывается на общем алгоритме реализации задачи. Достаточно произвольными могут быть также граничные и начальные условия. Что касается последних, они записываются обычно в соответствии с гипотезой о ненапряженном и недеформированном состоянии в виде $u(s,y,0)=v(s,y,0)=w(s,y,0)$, $\dot{u}(s,y,0)=\dot{v}(s,y,0)=\dot{w}(s,y,0)=0$. Граничные условия формулируются при постановке конкретных задач.

Прежде чем перейти к описанию схемы решения задачи, математическую модель следует упростить в первую очередь в соответствии с характером нагружения. Так, при динамическом нагружении, определение которого дано выше, можно не учитывать инерцию элемента оболочки в срединной поверхности, т. е. по существу считать мембранные напряжения устанавливающимися и изменяющимися в фазе с нагрузкой. Тогда в двух первых уравнениях (1) пренебрежимо малыми считаются члены $\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$.

В дальнейшем рассматривается случай осесимметричного нагружения и деформирования оболочки, при этом в (1) второе уравнение выполняется тождественно, а оставшиеся принимают вид

$$0=\frac{\partial N_1}{\partial s}+\frac{\sin\alpha}{R}(N_2-N_1)-\frac{1}{R_1}\left[\frac{\partial M_1}{\partial s}+\frac{\sin\alpha}{R}(M_2-M_1)\right]+q_1,$$

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 M_1}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\sin\alpha}{R}(M_2-M_1)\right]-$$

$$-\frac{\sin\alpha}{R}\left[\frac{\partial M_1}{\partial s}+\frac{\sin\alpha}{R}(M_2-M_1)\right]+\frac{N_1}{R_1}+\frac{N_2}{R_2}+q_3. \qquad (2)$$

Таким образом, динамическое деформирование оболочек вращения в случае осевой симметрии описывается системой (2), причем первое уравнение становится квазистатическим, содержащим время как параметр, а второе — динамическим. В соответствии с этой постановкой трансформируются начальные и граничные условия.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Предлагается следующая схема численной реализации задачи. После введения пространственной разностной сетки $s_i = i\Delta s, i = 0, 1,...,I, \Delta s = l/I$ и соответствующих сеточных функций вида $u_i(t) = u(s_i, t)$, $N_i(t) = N(s_i, t)$ и т. д. во втором уравнении все пространственные дифференциальные операторы заменяются разностными; при известной правой части для этого уравнения строится эквивалентная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно сеточных функций

$$\frac{d^2w_i}{dt^2} = F_i(u, w, t),$$

которая после приведения к нормальной форме Коши решается методом типа Рунге-Кутта [3] второго порядка точности. Первое уравнение после перехода к деформациям и далее к перемещениям можно привести к виду

$$a_2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + a_1\frac{\partial u}{\partial s} + a_0 u = f(w, t),$$

после перехода в левой части к разностным соотношениям — к системе трехточечных уравнений, решаемых при известной правой части методом прогонки [4].

В целом алгоритм решения системы (2) строится по так называемой явно-неявной (или полуявной) схеме следующим образом. На первом шаге по времени решается второе уравнение при известной из начальных условий правой части. Получив в конце этого шага значения w_i, можно построить правую часть первого уравнения и получить значения u_i. Второй шаг по времени делается уже с учетом полученных величин всех перемещений и вычисленных по ним деформаций усилий, моментов и т. д. Далее процесс вычислений становится циклическим. Опыт показывает хорошую устойчивость этой схемы и применимость ее для расчета динамических задач со сравнительно небольшими затратами времени на ЭЦВМ. В алгоритме легко реализуются физическая и геометрическая нелинейности, если в первом уравнении нелинейные члены переносятся в правую часть, а физическая нелинейность учитывается при использовании параметров нелинейности, определенных на предыдущем временном слое.

На рис. 1 показаны эпюры прогибов цилиндрической оболочки при действии бегущей со скоростью 1500 м/с вдоль оси волны давления с максимальной амплитудой на переднем

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

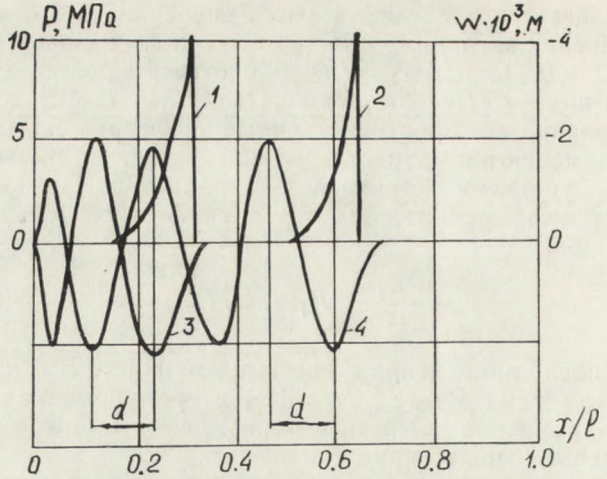

Рис. 1. Эпюры прогибов цилиндрической оболочки при нагружении внешним давлением, кривая прогибов *3* соответствует кривой давления *1*; кривая *4* — *2*

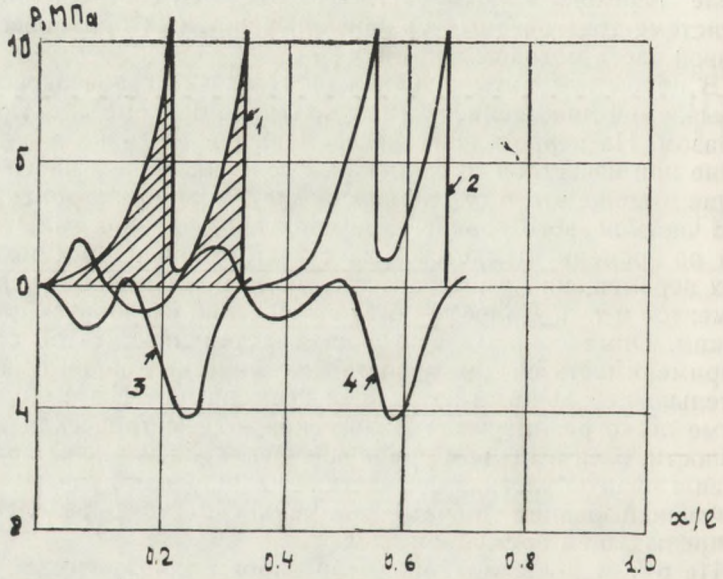

Рис. 2. Эпюры прогибов оболочки при действии двух бегущих вслед волн давления, кривая прогибов *3* соответствует кривой давления *1*, кривая *4* — *2*

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

фронте 12 МПа и убывающей за фронтом по экспоненциальному закону. Цифры *1*, *2* показывают эпюры давления в моменты времени 1,8 и 3,6 мс соответственно, а цифрами *3*, *4* отмечены эпюры прогибов, отвечающие этим нагрузкам в данные моменты. В представленном примере отношение толщины оболочки к радиусу составляет 1/100, материал работает в пределах упругости, на торцах осуществляются условия шарнирного опи-

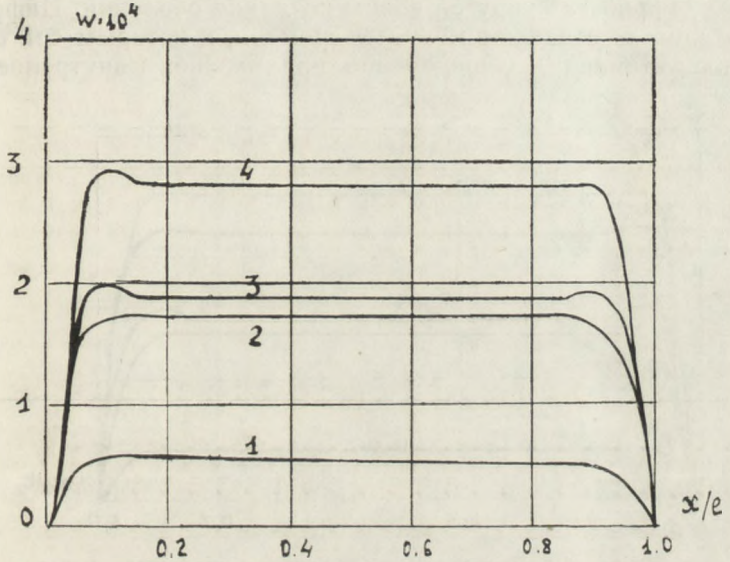

Рис. 3. Прогибы оболочки в последовательные моменты времени при нестационарном осевом нагружении

рания. Непосредственно под нагруженным участком образуется зона максимального прогиба, далее идет почти периодическая система осесимметричных вмятин и выпучин, расстояние между пиковыми значениями которых d примерно постоянно и, как показали расчеты, практически не зависит от формы бегущей волны давления.

На рис. 2 приведены результаты аналогичных расчетов, когда на оболочку действует система двух бегущих следом друг за другом волн давления с одинаковыми параметрами. Рассмотрен случай, когда расстояние между пиками волн при-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

мерно совпадает с величиной d. Оказывается, можно получить эффект частичного гашения воздействия от первой волны давления следом бегущей волной, когда происходит своего рода интерференция прогибов.

На рис. 3 показаны для последовательных моментов времени эпюры прогибов оболочки, подверженной действию осевой переменной во времени сжимающей нагрузки. До $\tau = 1$ нагрузка линейно нарастает, затем до $\tau = 4$ постоянна и далее линейно убывает до $\tau = 6$, безразмерное время $\tau = 1$ отвечает периоду пробега упругой волны по длине оболочки. Цифры около кривых означают моменты времени, к которым они относятся. Влияние одновременно приложенного внутреннего

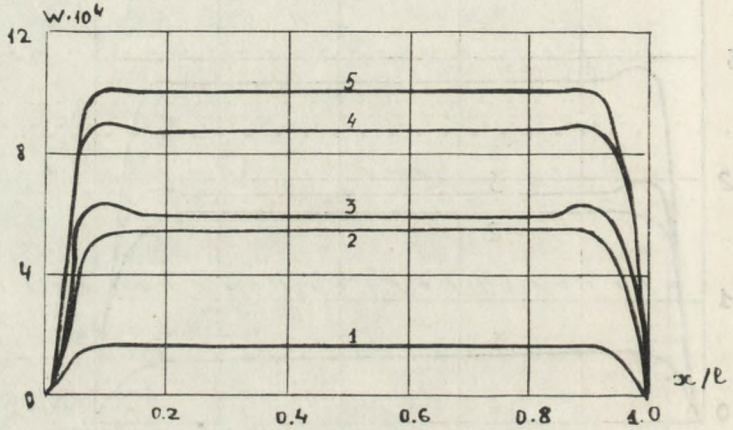

Рис. 4. Прогибы цилиндрической оболочки в последовательные моменты времени при нестационарном нагружении осевой силой и внутренним давлением

давления, меняющегося в фазе с осевой нагрузкой, на прогибы отражено на рис. 4. В этом примере рассмотрена относительно короткая оболочка, что объясняет образование лишь одной полуволны при выпучивании.

Приведенные численные результаты демонстрируют возможности методики, позволяющей получать оценки параметров НДС оболочечных конструкций в осесимметричной постановке в широком диапазоне нагрузок. Методика дает возможность с относительно небольшими затратами времени ЭЦВМ исследовать как некоторые общие закономерности, так и поведение конкретных конструкций.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ЛИТЕРАТУРА

1. Саченков А. В., Клементьев Г. Г. Исследование устойчивости конических оболочек при ударном нагружении теоретико-экспериментальным методом.— Иссл. по теории пластин и оболочек. Казань, 1980, вып. 15, с. 114—125.

2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек.— М.: Наука, 1972.— 432 с.

3. Уорминг, Кутлер, Ломакс. Нецентральные разностные схемы II и III порядка точности для решения нелинейных уравнений гиперболического типа.— Рак. техн. и косм., 1973, т. 11, № 2, с. 76—85.

4. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 592 с.

⅛ 2 Заказ 1775

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ ЭЛАСТИЧНОГО МАТЕРИАЛА МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Ю. А. Галынский, С. В. Пономарев

Рассматривается эффективность трех способов определения упругих постоянных эластичного материала методом локального деформирования. Способы основываются на точных аналитических решениях контактных задач теории упругости вдавливания и кручения штампами упругого слоя и полупространства.

Один из способов [1] заключается в испытании материала вдавливанием двух штампов с плоскими круговыми основаниями, один из которых жестко связан (склеен) с поверхностью материала, другой вдавливается без сцепления с материалом. Вдавливание производится приложением к инденторам одинаковой по величине силы P.

Основанием способа являются решения соответствующих контактных задач [2] о вдавливании штампов в упругое полупространство, которые в случае сцепления штампа с материалом дают следующую зависимость силы P от глубины вдавливания H:

$$P = \frac{4GbH_2}{1-2\nu} \ln(3-4\nu) \qquad (1)$$

и при отсутствии сцепления

$$P = \frac{4GbH_1}{1-\nu}, \qquad (2)$$

где G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона. Решение уравнений (1) и (2) относительно неизвестных ν и G имеет вид

$$\nu = \frac{1}{4}\left(3-e^{\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{H_1}{H_2}}\right); \qquad (3)$$

$$G = \frac{P(1-\nu)}{2H_1 b}. \qquad (4)$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Вычисление коэффициента Пуассона ν в (3) можно производить итерационным или графическим методами.

Способ позволяет определять упругие постоянные материала из двух однотипных испытаний вдавливанием, что обеспечивает получение их с большей точностью, чем при гостированных испытаниях [3, 4], когда значение коэффициента Пуассона определяется для другого вида напряженно-деформированного состояния.

Экспериментальная проверка способа показала, что его недостатком является слабая устойчивость к погрешностям измерений, особенно при коэффициентах Пуассона, близких к 0,5. Для уменьшения этого недостатка разработан способ, заключающийся в испытании двух образцов из исследуемого материала вдавливанием инденторов. Первый образец по размерам относительно радиуса цилиндрического индентора можно рассматривать как слой конечной толщины, лежащей на жестком основании. Решение соответствующей контактной задачи [5] имеет вид

$$P_1 = 4a\Delta_1 H_1 [\ldots]_1, \tag{5}$$

где a — радиус индентора; $\Delta_1 = G/(1-\nu)$; $[\ldots]_1$ — множитель, учитывающий конечность толщины слоя. Второй образец выбирался в виде бруска, в боковую поверхность которого вдавливался индентор с плоским прямоугольным основанием. Соответствующее решение контактной задачи имеет вид [5]:

$$P_2 = \pi b \Delta_2 H_2 [\ldots]_2^{-1}, \tag{6}$$

где $\Delta_2 = G(1+\nu)$, $[\ldots]_2$ — величина, учитывающая высоту образца; b — толщина образца.

Решая (5) и (6) относительно G и ν, получаем

$$\nu = \sqrt{1 - \frac{P_2 4a H_1 [\ldots]_2 [\ldots]_1}{P_1 \pi b H_2}}; \tag{7}$$

$$G = \frac{P_1(1-\nu)}{4aH_1[\ldots]_1} = \frac{P_2[\ldots]_2}{\pi b H_2(1+\nu)}. \tag{8}$$

Этот способ по сравнению с предыдущим имеет следующие преимущества: во-первых, процедура вычисления коэффициента Пуассона упрощается, во-вторых, не требуется обеспечения жесткого сцепления индентора с образцом.

Экспериментальная проверка этого способа проводилась на

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

образцах из эластичного материала. Измерения глубины вдавливания инденторов производились на приборе для измерения твердости резин ТШР по ГОСТ 7761-55, в котором шариковый наконечник заменялся цилиндрическим с плоским основанием (диаметр 3 мм) или прямоугольным индентором (ширина основания $2a = 3$ мм). Нагрузка на индентор варьировалась от 200 до 1400 г. Глубина вдавливания индентора определялась по шкале индикатора перемещений с ценой делений 0,01 мм. Осредненные результаты измерений глубины вдавливания нескольких испытаний при одной нагрузке на индентор подставлялись в (7) для подсчета значения коэффициента Пуассона. В процессе расчетов по формуле (7) возникали ситуации, когда под корнем оказывалась отрицательная величина либо получающееся значение коэффициента Пуассона лежало в интервале от 0,2 до 0,6. Это указывает на то, что способ чувствителен к влиянию случайных погрешностей измерений глубин вдавливания, однако по сравнению со способом вдавливания цилиндрических инденторов более устойчив к погрешностям измерений. Сравнение двух вариантов указывает также, что для получения способа определения упругих постоянных локальным деформированием, устойчивого к погрешностям измерений, следует стремиться к получению качественно различных напряженно-деформированных состояний под индентором. В соответствии с этим разработан способ, заключающийся в деформировании поверхности материала вдавливанием и закручиванием цилиндрического индентора. При закручивании поверхности материала цилиндрическим индентором с плоским основанием закручивающий момент и угол поворота индентора связаны соотношением [6]:

$$M = \frac{16}{3} G a^3 \varphi, \qquad (9)$$

где a — радиус основания индентора.

Испытание материала этим способом можно проводить вдавливанием и последующим закручиванием индентора. Если вдавливание производится при обеспечении жесткого сцепления индентора с поверхностью материала, то к (9) следует добавить соотношение (1) и, решая их, определять коэффициент Пуассона и модуль сдвига материала. В случае, когда вдавливание индентора и закручивание осуществляют как два независимых испытания, вместо (1) лучше использовать соотношение (2). Тогда, решая систему уравнений (2) и (9), получим

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\nu = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{M}{b^2 \varphi} \cdot \frac{H}{P}; \qquad (10)$$

$$G = \frac{P(1-\nu)}{4Hb}. \qquad (11)$$

Как видно из этих формул, здесь не возникает затруднений с вычислением коэффициента Пуассона слабосжимаемых материалов.

Экспериментальная проверка эффективности способа проведена на образце из эластичного материала. Деформирование вдавливанием производилось индентором диаметром 3 мм, закручивание по круговой площадке поверхности материала — «игольчатыми» инденторами диаметром 5,5 и 7 мм, которые получены плотным заполнением иглами полых трубок с соответствующим внутренним диаметром.

Вдавливание цилиндрического индентора в испытуемый материал и измерение глубины вдавливания осуществлялись на приборе ТШР, как и в предыдущем способе. Закручивание круговой площадки поверхности материала производилось на приборе, представляющем собой основание с закрепленным на нем образцом и штатив с вертикально расположенным «игольчатым» индентором, свободно вращающимся и перемещающимся вдоль оси. Угол поворота измерялся индикатором перемещений с точностью порядка 0,02 рад. На основании более 20 испытаний закручиванием получен модуль сдвига $G = 4{,}16$ кг/см^2. При использовании данных испытания на вдавливание получено среднее значение коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}498$. Испытания образцов из этого же материала на одноосное растяжение показали, что материал имеет модуль сдвига $G = 4{,}55$ кг/см^2 и коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}49$.

Сравнение результатов испытаний резины

Способ	Вид испытания	Коэффициент Пуассона	Модуль сдвига кгс/см^2
I	Вдавливание цилиндрического индентора	0,5	4,17
II	Вдавливание инденторов цилиндрического и прямоугольного сечений	0,2—0,6	4,31—6,45
III	Вдавливание и закручивание цилиндрического индентора	0,498	4,16
Стандартный	Одноосное растяжение	0,49	4,55

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Сравнение полученных результатов (таблица) показывает, что способ позволяет получить величину коэффициента Пуассона без сложных вычислений, хорошо согласующуюся с результатом одноосного растяжения.

Результаты проверки рассмотренных способов и сравнение со стандартным испытанием образца из этого же материала на одноосное растяжение показывают, что предложенный способ локального деформирования вдавливанием и закручиванием поверхности материала цилиндрическим индентором обеспечивает наиболее устойчивую методику определения коэффициента Пуассона и модуля упругости. Более того, точность определения коэффициента Пуассона по этому способу выше, чем при одноосном растяжении. Значение коэффициента Пуассона для одноосного растяжения есть отношение величины поперечной деформации к продольной. При этом основную погрешность измерений содержит в себе поперечная деформация, которая имеет величину порядка 2%. В то же время погрешность определения коэффициента Пуассона по (10) в основном определяется погрешностью измерения угла закручивания и глубины вдавливания индентора, которые имеют порядок 0,1%.

Выводы

1. Метод локального деформирования позволяет определять упругие постоянные эластичных материалов с точностью, не меньшей, чем при испытании одноосным растяжением.

2. Возможность определения упругих постоянных эластичного материала с достаточной точностью вдавливанием и закручиванием индентора является основанием для дальнейшей разработки этого способа.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. с. 967054 (СССР). Способ определения модуля упругости/ С. В. Пономарев, В. Д. Федоренко.— Опубл. в Б. И., 1982, № 33.

2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.— Л.: Наука, 1967.— 402 с.

3. ГОСТ 12288—66. Горные породы. Метод определения механических свойств вдавливанием пуансона.— М.: Изд-во стандартов. Декабрь, 1966.

4. ГОСТ 12374—77. Метод полевого испытания статическими нагрузками.— М.: Изд-во стандартов. Март, 1978.

5. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М.: Наука, 1974.— 456 с.

6. Reissner E., Sagoci H. F. Forced Forsional Oscillations of an Elastic Half Space.—Journal of applied Physics, 1944, v. 15, p. 652—662.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

РАСШИРЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЖАТОГО ГАЗА

А. В. Герасимов

Разностенность оболочки может быть вызвана как технологическими погрешностями ее изготовления, так и конструктивными особенностями. Следствием этого является отклонение процесса расширения оболочки от осевой симметрии и изменение полей напряжений, скоростей и перемещений в зависимости от угловой координаты.

На основе численного решения плоской двумерной задачи о расширении толстостенной упругопластической оболочки оценивается влияние переменной толщины на напряженно-деформированное состояние.

На рис. 1 показано поперечное сечение оболочки, образованной двумя круговыми поверхностями радиусов R_0 и R_1 с осями O и O^1, смещенными относительно друг друга на величину h, и заполненной сильно сжатым газом. Движение оболочки происходит в условиях плоской деформации. Исходная система уравнений, описывающая движение упругопластической оболочки и заполняющего ее газа, аналогична уравнениям работы [1]. Материал оболочки подчиняется соотношениям Прандтля-Рейсса, уравнение состояния берется в виде [2]. Газ описывается политропой Ландау-Станюковича [3].

Начальные условия для оболочки соответствуют невозмущенному состоянию с исходной плотностью и нулевыми напряжениями и скоростями

$$\rho_0=\rho_{00}, \quad \sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{xy}=0, \quad u_0=v_0=0.$$

Для газа в качестве начальных условий берутся автомодельные распределения параметров [3] со следующими значениями в точке Чепмена-Жуге:

$p_{C-J}=24{,}2$ ГПа, $\rho_{C-J}=2200$ кг/см^3, $u_{C-J}=1914$ м/с,

где p_{C-J} — давление; ρ_{C-J} — плотность; u_{C-J} — массовая скорость.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Конфигурация расчетной области, симметричной относительно плоскости $x = 0$, приведена на рис. 1. Расчет проводится для области $x \geqslant 0$.

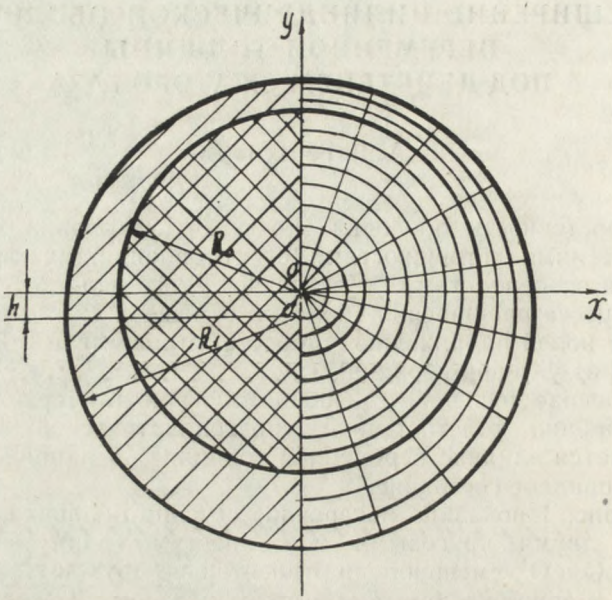

Рис. 1. Исходная конфигурация и разностная сетка

На оси $x = 0$ используется условие симметрии:

$$\text{оболочка} \quad — \quad u_{n0}=0, \quad \sigma_{xy}=0,$$

$$\text{газ} \quad — \quad u_{n\Gamma}=0.$$

На свободной поверхности оболочки отсутствуют нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_n=\tau_n=0.$$

На внутренней поверхности оболочки

$$\sigma_n=-p, \quad \tau_n=0, \quad u_{n\Gamma}=u_{n0},$$

где ρ — плотность; p — давление; σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} — компоненты тензора напряжений; σ_n, τ_n — нормальная и касательная компоненты вектора напряжений; u_n, v_τ — нормальная и касательная компоненты вектора скорости. Индексы Г и 0 относятся к газу и оболочке соответственно.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Для численного решения поставленной задачи использовалась конечно-разностная схема, приведенная в [1]. Расчетная сетка бралась 10×30 ячеек по радиусу и полуокружности для оболочки и 20×30 — для газа (см. рис. 1). В качестве теста рассматривалась статическая задача Джеффри [4] о нагружении разностенного стального цилиндра внутренним давлением P_m. В ходе ее численного решения отмечено, что давление возрастает от 0 до $P_m = 0{,}5$ ГПа за промежуток времени, равный 500 мкс, а затем остается постоянным. Геометрические размеры цилиндра:

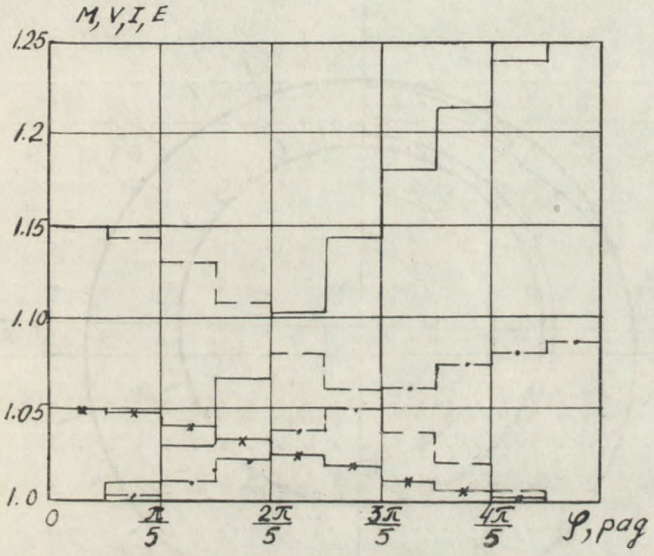

Рис. 2. Распределение параметров по секторам (_____ M, ___ ___ V, ___ · ___ I, ___ × ___ E)

$R_0 = 0{,}04$ м, $R_1 = 0{,}06$ м, $h = 0{,}01$ м.

Максимальное окружное напряжение δ_φ достигается на внутренней поверхности в самом тонком месте и равняется 2,21 ГПа [4], численное решение дает 2,24 ГПа.

В дальнейшем рассматривалась оболочка со следующими параметрами:

$R_0 = 0{,}02$ м, $R_1 = 0{,}03$ м, $\rho_{00} = 7860$ кг/м^3,
$\mu = 81{,}4$ ГПа, $\sigma_д = 1$ ГПа,

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

где μ—модуль сдвига; $\sigma_д$—динамический предел текучести.

Асимметрия процесса расширения приводит к перераспределению массы M, скорости V, импульса I и кинетической энергии E оболочки по фиксированным секторам пространства, на которые разбита расчетная полуплоскость. Гистограммы распределения этих параметров по углу φ для момента времени $t = 16$ мкс, $h = 0{,}001$ *м* и десяти пространственных секторов приведены на рис. 2. Они получены по следующим формулам:

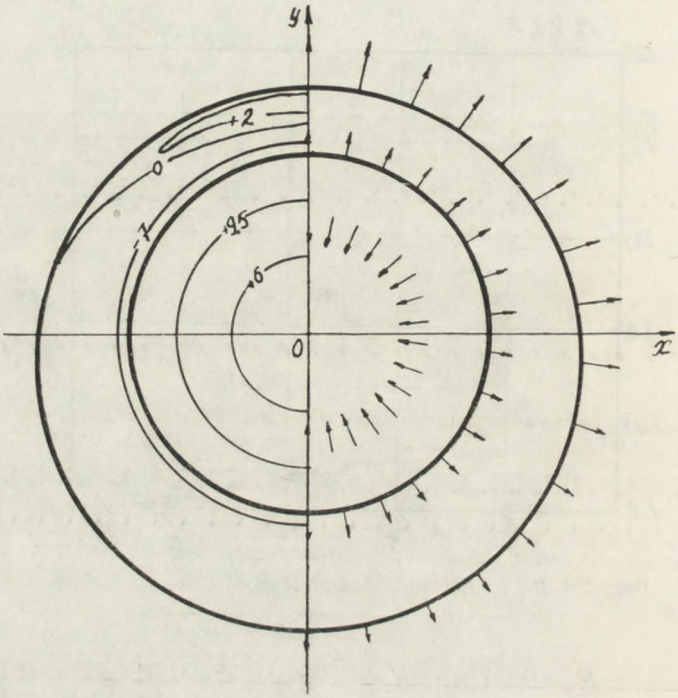

Рис. 3. Поля напряжений (давлений) и скоростей (1 см — 1000 м/с) в оболочке и газе

$$M=\sum_i m_i,\quad I=\sum_i m_i v_i,\quad E=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2,\quad V=\frac{I}{M},$$

где m_i, v_i — масса и величина скорости i-го узла разностной сетки.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Суммирование проводится по всем расчетным ячейкам, попадающим в данный сектор, и делением полученных величин M, V, I, E на минимальные их значения.

В левой части рис. 3 приведены линии равных значений окружного напряжения δ_φ для оболочки с $h = 0{,}003$ м и изобары для газа в момент времени $t = 2$ мкс. После выхода ударной волны на свободную поверхность внутрь оболочки начинает распространяться волна растяжения. В силу асимметрии область растягивающих напряжений δ_φ и радиальных напряжений δ_r появляется сначала в зоне наименьшей толщины оболочки. Растягивающие напряжения при достижении критических значений могут привести к разрушению оболочки в этой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений.— В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967, с. 212—263.

2. Гриднева В. А., Корнеев А. И., Трушков В. Г. Численный расчет напряженного состояния и разрушения плиты при ударе бойками различной формы.— МТТ, 1977, № 1, с. 146—158.

3. Физика взрыва.— М.: Наука, 1975.— 704 с.

4. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости.— М.: Наука, 1979.— 560 с.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ КОНТАКТИРОВАНИЯ ПЛОСКИХ ТЕЛ С ПЛАСТИНОЙ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

В. А. Горельский, С. А. Зелепугин, Т. М. Платова, И. Е. Хорев

Исследование особенностей деформирования и разрушения тел в микросекундном диапазоне при несимметричном контактировании представляет значительный интерес, так как условия несимметричного нагружения реализуются в большинстве практических случаев. В экспериментальном плане исследование этих проблем в широком диапазоне начальных условий отражено в работах [1—3].

Вместе с тем отсутствие достаточно надежных в широком диапазоне скоростей встречи ударника и пластины данных по динамике внедрения, распространения волн сжатия и развития разрушения в различных материалах не позволяет провести в настоящее время сравнительно полное теоретическое исследование этого явления приближенными аналитическими методами. В свою очередь, численное исследование трехмерных задач высокоскоростного удара наталкивается на большие трудности, которые определяются недостаточным быстродействием и объемом памяти имеющихся наиболее мощных ЭВМ, что снижает практическую ценность получаемых результатов из-за их в основном описательного характера.

Особую важность приобретает решение задач высокоскоростного удара для случая плоской геометрии, которая позволяет получить качественную оценку поведения ударника и пластины в случае удара под углом. Возможность рассмотреть особенности развития начальной стадии внедрения ударника под углом, изгиб ударника и развитие повреждений ударника и пластины оправдывают рассмотрение плоских задач и дают информацию о несимметричном контактировании различных тел. Вместе с тем в расчетах плоской задачи игнорируется ряд важных особенностей процесса, среди которых отмечено движение материала в радиальном направлении, которое ведет в осесимметричном случае к большей разгрузке напряжений и волн. Требуется большая осторожность в чисто механическом

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

перенесении результатов, полученных для плоского случая, на пространственный, особенно на поздних стадиях внедрения ударника.

В данной работе численно в плоской постановке исследуются особенности деформирования и разрушения ударника и пластины в широком диапазоне начальных параметров. Взаимодействующие тела описываются твердой сжимаемой упругопластической средой, поведение которой при динамических нагрузках характеризуется модулем сдвига, динамическим пределом текучести, константами уравнения состояния. Расчеты проведены с помощью метода конечных элементов [4].

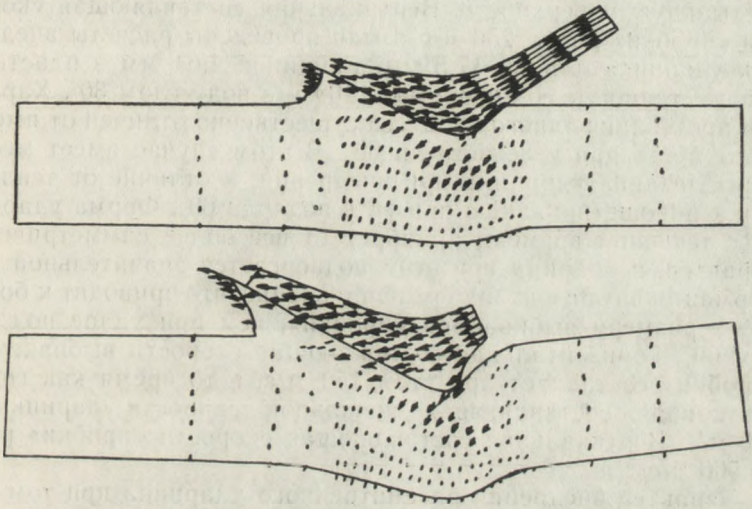

Рис. 1. Хронограммы взаимодействующих тел в моменты времени 10 и 20 мкс

В качестве ударника в расчетах бралась бесконечная полоса, в сечении представляющая собой прямоугольник. Пластина в сечении была также прямоугольной. Материалом для обоих тел служила сталь с динамическим пределом текучести 1,01 ГПа. В расчетах варьировались размеры ударника, его начальная скорость и угол подхода к пластине. На рис. 1 представлены расчетные хронограммы изменения конфигураций взаимодействующих тел и полей скоростей в них, полученные с графопостроителя в момент времени 10 и 20 мкс. Анализ хронограмм процесса показывает, что ударник длиной 30,5 мм и

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

толщиной 2,25 мм (здесь и далее указаны размеры сечения), внедряющийся в пластину толщиной 10,9 мм с начальной скоростью 1500 м/с под углом 60° (угол между нормалью к пластине, направленной вглубь, и вектором скорости), полностью разрушается, однако к 20 мкс 80% материала ударника имеет вертикальную составляющую скорости, направленную вверх, т. е. большая часть материала рикошетирует. Тем не менее на участке шириной порядка 2,3 мм к 15 мкс наблюдается равенство вертикальных составляющих скоростей контактной и тыльной поверхности пластины, что свидетельствует о разрушении типа «пробка», хотя материал ударника не попадает за тыльную поверхность. Вертикальная составляющая скорости «пробки» равна 250 м/с. Были проведены расчеты внедрения ударника длиной 17,5 мм, толщиной 4,64 мм в пластину той же толщины со скоростью 1500 м/с под углом 30°. Характер протекания такого процесса существенно отличен от имеющего место при угле встречи 60°. В этом случае имеет место нормализация ударника при внедрении, в отличие от тенденции к рикошетированию при угле подхода 60°. Форма ударника с течением времени приобретает все более симметричный характер, и ударник при этом подвергается значительной деформации в горизонтальном направлении, что приводит к большему размеру выбиваемой «пробки», чем при ударе под углом 60°. Горизонтальная составляющая скорости выбиваемой «пробки» составляет при этом 150 м/с, в то время как горизонтальная составляющая начальной скорости ударника — 750 м/с. Вертикальная составляющая скорости «пробки» равна 500 м/с.

Характер внедрения рассмотренного ударника при том же угле подхода 30°, но более низкой начальной скорости, составляющей 800 м/с, также иной. Наблюдается отсутствие срабатывания ударника за счет растекания материала по стенкам кратера, как это имеет место при скоростях удара 1500 м/с и выше. В данном случае по мере внедрения сокращение длины ударника происходит за счет утолщения его головной части. Выброса материала с лицевой поверхности пластины в этом случае не наблюдается. Ударник при данной скорости имеет более выраженную тенденцию к нормализации, чем при высоких скоростях. Следует ожидать сохранения ударника как целого компактного тела после проведения эксперимента, что мало вероятно при более высоких скоростях (1500 м/с и выше). Расчет показывает, что в этом случае также происходит разрушение преграды путем отделения «пробки», которая име-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ет вертикальную составляющую скорости 150 м/с (вертикальная составляющая начальной скорости ударника — 700 м/с). На рис. 2 показано изменение максимальных нормальных составляющих скоростей тыльной поверхности ударника, контактной и тыльной поверхностей пластины для упомянутых трех случаев. Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют скорости контакта 1500 м/с и углу подхода 30°, кривые *4*, *5*, *6* — скорости 1500 м/с и углу 60°, кривые *7*, *8*, *9* — скорости 800 м/с и углу 30°.

Изменение максимальных вертикальных составляющих скоростей всех трех характерных поверхностей в случае контакта под углом 60° носит более плавный характер. Вертикальные составляющие скоростей тыльной поверхности пласт-

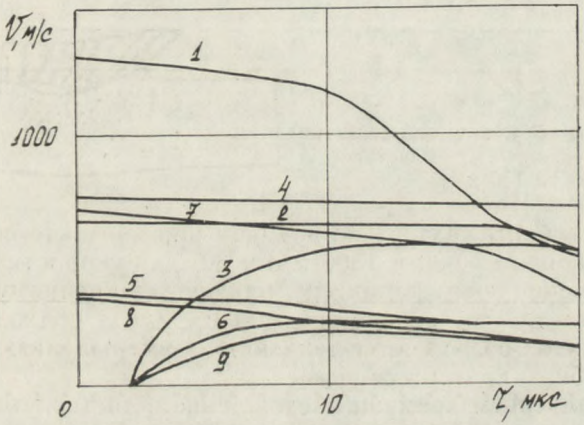

Рис. 2. Изменение во времени максимальных нормальных составляющих скоростей характерных поверхностей взаимодействующих тел

тины и контактной поверхности совпадают к 14 мкс, образовавшаяся «пробка» затем движется с практически постоянной скоростью 250 м/с, в то время как скорость тыльной поверхности ударника составляет 600 м/с. Таким образом, после 14 мкс энергия ударника продолжает расходоваться не на увеличение скорости уже сформировавшейся «пробки», а на дальнейшее деформирование пластины. При угле подхода 30° и скорости контакта 1500 м/с, в отличие от рассмотренного случая, вертикальные составляющие всех трех поверхностей совпадают при 19 мкс, свидетельствуя о пробитии и примерно одинаковой скорости ударника и «пробки» за пластиной.

Характерной особенностью процесса взаимодействия со

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

скоростью 800 м/с является низкая вертикальная составляющая скорости тыльной поверхности пластины, которая достигает 210 м/с, что составляет 30% от вертикальной составляющей начальной скорости ударника (при скорости контакта 1500 м/с эта величина равна 43%). Падение скорости контактной поверхности при начальной скорости контакта 800 м/с непосредственно после начала взаимодействия имеет более выраженный характер, чем при скорости контакта 1500 м/с. Кривая, описывающая изменение вертикальной составляющей скорости тыльной поверхности ударника в случае контакта со скоростью 800 м/с, после относительно слабого изменения характеризуется резким спадом к 15 мкс.

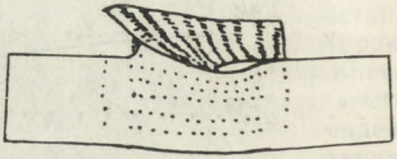

Рис. 3. Хронограмма взаимодействия плоского ударника с пластиной в момент времени 150 мкс

Рост глубины кратера во времени при контакте под углом 30° для скоростей 800 и 1500 м/с и 60° для скорости 1500 м/с соответственно носит характер, близкий к линейному, причем для контакта со скоростью 800 м/с (угол подхода 30°) и 1500 м/с (угол 60°) имеется тенденция к уменьшению скорости роста глубины кратера со временем.

С увеличением времени расхождение в достигнутой глубине кратера при скорости контакта 1500 м/с увеличивается. Если к 5 мкс глубина кратера, достигнутая при угле подхода 60°, составляет 63% от глубины кратера при угле подхода 30°, то к 15 мкс она равна 50% и в дальнейшем продолжает усиливаться.

На рис. 3 представлена полученная с графопостроителя в момент времени 150 мкс расчетная хронограмма рикошетирования стального ударника. Длина ударника в сечении составила 65,4 мм, толщина — 10,9 мм, толщина пластины — 30 мм, угол подхода — 60°, скорость контакта — 785 м/с. Из рис. 3 следует, что хотя рикошетирование и приводит к тому, что основная масса ударника имеет вертикальную составляющую скорости, направленную вверх, но тыльный конец ударника сохраняет первоначальное направление движения к пластине. Это приводит в момент времени 150 мкс к контакту тыльного конца ударника с пластиной и последующему формирова-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

нию второго кратера позади первого, что объясняет факт образования двух кратеров в экспериментах.

Таким образом, проведенные численные исследования несимметричного взаимодействия плоских тел с пластиной позволили получить качественную и количественную информацию об особенностях деформирования и разрушения тел в широком диапазоне изменения начальных параметров. Выявлен механизм образования второго кратера в пластине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордополов Ю. А., Дремин А. Н., Михайлов А. Н. К вопросу о волнообразовании при высокоскоростном соударении металлических тел.— ФГВ, 1977, т. 13, № 2, с. 288—291.

2. Хорев И. Е., Горельский В. А., Зелепугин С. А., Толкачев В. Ф. Исследование деформирования и кинетики разрушения контактирующих тел при несимметричном динамическом взаимодействии.— ФГВ, 1983, № 5, с. 119—123.

3. Никифоровский В. С., Шемякин Е. И. Динамическое разрушение твердых тел.— Новосибирск: Наука, 1979.— 272 с.

4. Горельский В. А., Хорев И. Е. О применении метода конечных элементов для расчета больших деформаций и разрушения твердых тел при динамических нагрузках.— Труды I Всесоюзной школы-семинара по многомерным задачам механики сплошной среды. Деп. в ВИНИТИ, 1983, № 4623—83, с. 103—114.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СХЕМЫ РАСПАДА РАЗРЫВОВ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

В. Н. Демидов

При выборе конкретной разностной схемы для решения той или иной задачи учитываются такие ее свойства, как монотонность, однородность, консервативность [1] или, в более общей форме, инвариантность разностных решений относительно определенной группы преобразований [2] и т. п. Эти свойства являются желательными, однако разностная схема может обладать ими или нет. Минимальными же требованиями, предъявляемыми к любой разностной схеме, являются требования аппроксимации и устойчивости, поскольку, как известно, «из аппроксимации и устойчивости следует сходимость». Точная формулировка этого утверждения, называемого обычно теоремой эквивалентности, приводится, например, в [5].

Проверка аппроксимации достаточно проста и сводится фактически к разложению решения в ряд Тейлора, исследование же устойчивости разностных схем представляет значительные трудности. Необходимые и достаточные критерии устойчивости существуют только в случае линейных уравнений и аналитических начальных данных. Но, несмотря на отсутствие формального доказательства, опыт показывает, что те же самые критерии устойчивости будут пригодны и для нелинейных систем, если они применяются локально для линеаризованных форм уравнений. В силу нелинейного характера системы уравнений не представляется возможным провести исследование устойчивости непосредственно для описанной в [3] схемы, поэтому в данной работе рассматривается ее одномерный, линейный аналог. Сначала кратко описывается разностная схема, затем доказывается, что необходимым и достаточным условием ее устойчивости является условие типа Куранта, согласно которому волны, образующиеся при распаде разрывов на границах ячеек, в течение шага по времени τ должны проходить расстояния, не превышающие размера ячеек h.

Одномерная (одноосное деформированное состояние) система уравнений, описывающая распространение малых воз-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

мущений в рамках модели сжимаемой упругопластической среды, где пластическое течение описывается уравнениями Прандтля-Рейсса, а шаровая часть тензора напряжений (гидростатическое давление), удельная внутренняя энергия и плотность связаны некоторой функциональной зависимостью вида

$$p = p(\rho, \varepsilon), \tag{1}$$

может быть записана в матричной форме

$$E\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

$$A = \begin{Vmatrix} \tilde{v} & \tilde{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{v} & \tilde{\rho}^{-1} & (-\tilde{\rho})^{-1} \\ 0 & \tilde{\rho}\left(\tilde{a}^2 - \frac{4}{3}\tilde{b}^2\right) & \tilde{v} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3}\tilde{\rho}\,\tilde{b}^2 & 0 & \tilde{v} \end{Vmatrix}, \quad u = \begin{Vmatrix} \rho \\ v \\ p \\ s_x \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

где E — единичная матрица; компоненты вектор-функции $u(x, t)$ представляют собой малые отклонения плотности ρ, скорости v, давления p, составляющей девиатора напряжений s_x от их постоянных значений $\tilde{\rho}$, $\tilde{v}$, $\tilde{p}$, $\tilde{s}_x$ в невозмущенном состоянии; $\tilde{b} = \left(\frac{\mu}{\tilde{\rho}}\right)^{1/2}$, μ — модуль сдвига; величина a, входящая в (2), вычисляется по формуле

$$a = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\varepsilon - \frac{s_x - p}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right)_\rho + \frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho}\right]^{1/2}, \quad \tilde{a} = a(\tilde{p}, \tilde{s}_x, \tilde{\rho}). \tag{4}$$

Кроме уравнений (2) необходимо учитывать, что $s_y = s_z$, $I_2 \leqslant \sigma_s^2$ (I_2 — второй инвариант девиатора тензора напряжений; σ_s — предел текучести при чистом сдвиге).

В рассматриваемом здесь линейном случае система (2) невырожденным преобразованием $q = Lu$ (L — матрица, строками которой являются левые собственные векторы матрицы A) может быть приведена к каноническому виду

$$E\frac{\partial q}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

с диагональной матрицей Λ, на диагонали которой стоят собственные числа λ_k матрицы A:

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\lambda_1=\tilde{v}+\tilde{a},\quad \lambda_2=\tilde{v}-\tilde{a},\quad \lambda_3=\lambda_4=\tilde{v}. \tag{6}$$

Инварианты Римана q_k имеют вид

$$q_1=v-\frac{\sigma_x}{\tilde{\rho}\,\tilde{a}},\quad q_2=v+\frac{\sigma_x}{\tilde{\rho}\,\tilde{a}},\quad (\sigma_x=-p+s_x), \tag{7}$$

$$q_3=\tilde{a}^2\rho+\sigma_x,\quad q_4=\frac{4}{3}\tilde{b}^2\rho+s_x.$$

Отметим, что инварианты (7) определяются неоднозначно.

Для систем уравнений (2), (5) будем рассматривать задачу Коши с начальными данными:

$$\begin{aligned} u(x,0)&=u_0(x),\\ q(x,0)&=q_0(x), \end{aligned}\qquad -\infty<x<\infty. \tag{8}$$

Разностная схема [3], записанная для случая одной пространственной переменной, после линеаризации превращается в схему для линейной системы (2) и в случае равномерной (неподвижной) сетки по координате x с шагом h имеет вид

$$u^{l-1/2}=u_{l-1/2}-\frac{\tau}{h}A(U_i-U_{l-1}), \tag{9}$$

$$t=0,\ u_{l-1/2}=u_0(x_{l-1/2}),\ i=0,\ \pm1,\ \pm2,...,$$

где совокупность величин $\{u_{l-1/2},\ i=0,\ \pm1,...\}$ задает вектор-функцию $u(x,t)$ на нижнем временном слое t_n, $\{u^{l-1/2},\ i=0,\ \pm1,...\}$ — на верхнем слое $t_{n+1}=t_n+\tau$, а „большие“ величины $U_l=\{R_l, V_l, P_l, S_{xl}\}$ находятся как решение задачи о распаде разрыва для системы уравнений (2) с начальными данными

$$u=\begin{cases} u_{l-1/2}, & x<x_l,\\ u_{l+1/2}, & x>x_l. \end{cases}$$

Решение этой задачи будет кусочно-постоянным. Области постояиства (их четыре) разделены разрывами, траектории которых в плоскости (x,t) описываются прямыми $x=(\tilde{v}+\tilde{a})\,t$, $x=(\tilde{v}-\tilde{a})\,t$, $x=\tilde{v}t$. Следовательно, при выборе больших величин U_l необходимо рассматривать четыре случая в зависимости от соотношения величин $\tilde{v}$ и $\tilde{a}$:

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

I) если $\tilde{v} > \tilde{a}$, то $\{R, V, P, S_x\}_i = \{\rho, v, p, s_x\}_{i-1/2}$; (10)

II) если $\tilde{v} < \tilde{a}$, то $\{R, V, P, S_x\}_i = \{\rho, v, p, s_x\}_{i+1/2}$; (11)

III) если $0 < \tilde{v} < \tilde{a}$, то

$$V_i = \frac{v_{i-1/2} + v_{i+1/2}}{2} + \frac{1}{\tilde{\rho}\,\tilde{a}} \frac{\sigma_{xi+1/2} - \sigma_{xi-1/2}}{2}; \tag{12}$$

$$\Sigma_{xi} = \tilde{\rho}\,\tilde{a} \frac{v_{i+1/2} - v_{i-1/2}}{2} + \frac{\sigma_{xi+1/2} + \sigma_{xi-1/2}}{2}; \tag{13}$$

$$R_i = \rho_{i-1/2} + \frac{1}{\tilde{a}^2}(\sigma_{xi-1/2} - \Sigma_{xi}) = \rho_{i-1/2} - \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{a}}(V_i - v_{i-1/2}); \tag{14}$$

$$S_{xi} = s_{xi-1/2} - \frac{4}{3}\tilde{b}^2(R_i - \rho_{i-1/2}),\ P_i = S_{xi} - \Sigma_{xi}; \tag{15}$$

IV) если $-\tilde{a} < \tilde{v} < 0$, то

$$R_i = \rho_{i+1/2} + \frac{1}{\tilde{a}^2}(\sigma_{xi+1/2} - \Sigma_{xi}) = \rho_{i+1/2} + \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{a}}(V_i - v_{i+1/2}); \tag{16}$$

$$S_{xi} = s_{xi+1/2} - \frac{4}{3}\tilde{b}^2(R_i - \rho_{i+1/2}),\ P_i = S_{xi} - \Sigma_{xi}, \tag{17}$$

где v_i, Σ_{xi} вычисляются по формулам (13), (14).

Разностная схема для системы уравнений (5), ввиду диагональности матрицы Λ, распадается на четыре независимых уравнения для отдельных компонент q_k:

$$q_k^{i-1/2} = q_{ki-1/2} = \frac{\tau}{h}\lambda_k(Q_{ki} - Q_{ki-1}), \tag{18}$$

$$t = 0,\quad q_{ki-1/2} = q_{k0}(x_{i-1/2}),\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$Q_{ki} = \begin{cases} q_{ki-1/2}, & \lambda_k > 0, \\ q_{ki+1/2}, & \lambda_k < 0, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{19}$$

В случае $\lambda_k = 0$ величины Q_{ki} могут быть заданы произвольно, поскольку в (18) они будут умножены на λ_k. Поэтому будем считать, что случай $\lambda_k = 0$ включен в один из вариантов (19).

Разностные схемы (9) и (18) эквивалентны и могут быть получены одна из другой. В частности, расчет можно вести по последней схеме и лишь в случае необходимости восстанавливать компоненты вектор-функции $u(x, t)$ с помощью обратного преобразования $u = L^{-1}q$.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Исследование устойчивости заключается в обосновании ограниченности произвольных степеней оператора перехода разностной схемы (отметим, что он будет различным в каждом из случаев I—IV) в некоторой норме [4]. В линеаризованной постановке это сводится к выявлению ограничений на параметры схемы, при которых спектр оператора перехода лежит в круге радиуса $1 + O(\tau)$ на комплексной плоскости.

Рассмотрим при $\tilde{v} > \tilde{a}$ частное решение однородных уравнений (9) вида $u^{k-1/2} = \nu u_{k-1/2} = \nu(\theta) u_* e^{ik\theta}$, где i — мнимая единица. Подставив его в (9) и раскрывая определитель

$$\det \| (1-\nu) E + \frac{\tau}{h} A (1 - e^{-i\theta}) \| = 0,$$

получим

$$\nu(\theta) = 1 - C_0 + C_0 e^{i\theta}, \quad C_0 = \frac{\tau}{h} \tilde{v}; \tag{20}$$

$$\nu(\theta) = 1 - C_a^{\pm} + C_a^{\pm} e^{i\theta}, \quad C_a^{\pm} = \frac{\tau}{h} (\tilde{v} \pm \tilde{a}). \tag{21}$$

Гармоники, в которых для каждого θ значение ν определяется из (20), (21), являются собственными сеточными функциями оператора перехода.

Уравнение (20) представляет собой уравнение окружности с центром в точке $1 - C_0$ и радиусом C_0 на комплексной плоскости. В случае $C_0 < 1$ эта окружность лежит внутри единичного круга, касаясь его в точке $\nu = 1$, при $C_0 = 1$ совпадает с единичной окружностью, при $C_0 > 1$ лежит вне единичного круга. Следовательно, для устойчивости разностной схемы (9) необходимо выполнение условий $C_0 \leqslant 1$, $C_a^{\pm} \leqslant 1$ или

$$\frac{\tau}{h} \max_{1 \leqslant k \leqslant 4} (\lambda_k) \leqslant 1.$$

Рассматривая аналогично варианты II—IV, получим ограничение

$$C = \frac{\tau}{h} \max_{1 \leqslant k \leqslant 4} |\lambda_k| \leqslant 1. \tag{22}$$

При выполнении условия (22) все гармоники будут ограничены, однако отсюда еще не следует ограниченность общего ре-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

шения, поскольку оператор перехода схемы (9) не является самосопряженным. Следовательно, (22) — лишь необходимое условие устойчивости. Согласно [2] для устойчивости необходимо, чтобы первое дифференциальное приближение, которое при $\tilde{v} > \tilde{a}$ имеет для схемы (9) вид

$$E\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{h}{2}A\left(E - \frac{\lambda}{h}A\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

было неполной параболической системой, что также приводит к критерию (22).

Для вывода достаточного условия устойчивости воспользуемся энергетическим методом [1, 4, 5]. Будем исходить из разностной схемы, записанной в инвариантах. Из (18), (19) следует

$$q_k^{i-1/2} = \begin{cases} (1-C_k)\,q_{ki-1/2} + C_k\,q_{ki-3/2}, & \lambda_k > 0, \\ (1+C_k)\,q_{ki-1/2} - C_k\,q_{ki+1/2}, & \lambda_k < 0, \end{cases} \quad C_k = \frac{\tau}{h}\lambda_k. \tag{23}$$

Если $C_k \leqslant 1$, то, возводя обе части первого равенства (23) в квадрат, получим

$$(q_k^{i-1/2})^2 = (1-C_k)\,q_{ki-1/2}^2 + C_k\,q_{ki-3/2}^2 - C_k(1-C_k)(q_{ki-1/2} - q_{ki-3/2})^2 \leqslant$$
$$\leqslant (1-C_k)\,q_{ki-1/2}^2 + C_k\,q_{ki-3/2}^2, \quad \lambda_k > 0. \tag{24}$$

Если $|C_k| \leqslant 1$, то

$$(q_k^{i-1/2})^2 \leqslant (1+C_k)\,q_{ki-1/2}^2 - C_k\,q_{ki+1/2}^2, \quad \lambda_k < 0. \tag{25}$$

Учитывая (19), запишем (24), (25) в виде одного неравенства

$$(q_k^{i-1/2})^2 - q_{ki-1/2}^2 + C_k(Q_{ki}^2 - Q_{ki-1}^2) \leqslant 0.$$

Это неравенство верно для каждой из компонент q_k, если выполнены условия $|C_k| \leqslant 1$, $\kappa = 1, 2, 3, 4$. Объединение неравенств для всех компонент приводит к векторному неравенству

$$(q^{i-1/2},\ q^{i-1/2}) - (q_{i-1/2},\ q_{i-1/2}) + \frac{\tau}{h}[(\Lambda Q_i, Q_i) - (\Lambda Q_{i-1}, Q_{i-1})] \leqslant 0, \tag{26}$$

справедливому, если шаг по времени τ удовлетворяет ограничению (22).

Будем дополнительно считать, что функции $u_0(x)$, $q_0(x)$ являются финитными [1]. Тогда решение как дифференциальной

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

задачи, так и разностной в любой конечный момент времени будет также финитным.

В пространстве сеточных функций $\{u_{i-1/2}, i=0,\pm1,..\}$ определим норму

$$\|u_{i-1/2}\|=\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} h\left[2\left(v_{i-1/2}^2+\frac{\sigma_{xi-1/2}^2}{\tilde{\rho}^2\tilde{a}^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\tilde{a}^2\rho_{i-1/2}+\sigma_{xi-1/2})^2+\left(\frac{4}{3}\tilde{b}^2\rho_{i-1/2}+s_{xi-1/2}\right)^2\right]\right\}^{1/2}. \qquad (27)$$

Просуммировав (26) по i от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$\|u_{i-1/2}\|\leqslant\|u^{i-1/2}\|, \qquad (28)$$

что означает равномерную устойчивость разностной схемы по начальным данным, если $C\leqslant 1$. Достаточное условие устойчивости совпадает в данном случае с необходимым. Неравенство (28) гарантирует ненарастание не только начальных ошибок, но и погрешностей, внесенных на любом промежуточном временном слое.

Если рассматривать задачу в ограниченной области при диссипативных [4] краевых условиях, то оценка (28) остается справедливой. Обобщения полученного критерия на случай переменного шага h и подвижной сетки очевидны. Численные расчеты подтверждают справедливость проведенного здесь анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики.— М.: Наука, 1975.— 352 с.

2. Шокин Ю. И. Метод дифференциального приближения.— Новосибирск: Наука, 1979.— 221 с.

3. Демидов В. Н., Корнеев А. И. Схема распада разрыва в подвижных сетках для расчета течений сжимаемой упругопластической среды.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985, с. 19—29.

4. Годунов С. К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики.— М.: Наука, 1976.— 400 с.

5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 418 с.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ЖИДКОЙ ФАЗЫ ЖЕЛЕЗА

А. В. Жуков

В [1] предложены термодинамически полные уравнения состояния α-, ε-, γ-фаз железа, отражающие специфику фазовой диаграммы, в частности тройную точку. В данной работе описано уравнение состояния жидкой фазы, которое совместно с уравнениями других фаз предназначено для анализа и численного моделирования особенностей волн напряжений [2].

Уравнение записано в виде, единообразном для всех фаз:

$$S(\rho, E)=S_0+m\ln(1+y+Ly^2),\ y=\frac{E-E_s(\rho)}{mT_0Q(\rho)}, \qquad (1)$$

где S — энтропия; ρ — плотность; E — удельная внутренняя энергия; $m = 3R/A = 0{,}4466$ кДж/(кг·град); R — газовая постоянная; A — атомный вес; $L=\nu_0T_0/6R=0{,}029$; ν_0 — коэффициент электронной теплоемкости, одинаковый для всех фаз; Q — относительная характеристическая температура; E_s — энергия на изэнтропе, проходящая через начальную точку (давление $P = 0$, температура $T_0 = 293$ К.

Поскольку в выбранных переменных термодинамический потенциал S является полным дифференциалом из (1), обычным образом легко получить выражения для всех термодинамических величин, например:

$$T=1/(\partial S/\partial E)_\rho=T_0Q\frac{1+y+Ly^2}{1+2\,Ly},$$

$$P=-T\rho^2\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_E=\rho^2\frac{dE_s}{d\rho}+\frac{\rho}{Q}\frac{dQ}{d\rho}\rho(E-E_s).$$

Для представления $E_s(\rho)$ и $Q(\rho)$ использованы хорошо зарекомендовавшие себя для металлов зависимости

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$E_s(\rho) + \frac{B_0}{\rho_0}\frac{9}{2\mu}\left[e^{2\mu(1-x)} - 2e^{\mu(1-x)} + \beta_0\right], \qquad (2)$$

$$Q(\rho) = \exp[\gamma_0(1-x^3)],\ x^3 = \rho_0/\rho,$$

где B_0 — модуль объемной адиабатической сжимаемости; γ_0 — термодинамический коэффициент Грюнайзена; μ — параметр формулы.

В табл. 1 приведены параметры формул (1), (2) для α-, ε-, γ- и жидкой фаз железа, определенные из условия наилучшего описания имеющегося эксперимента по термическому и силовому воздействию как в статике, так и в динамике. Нормировочные константы S_0 и β_0 выбраны таким образом, чтобы обеспечить единый для всех фаз уровень отсчета энтропии и энергии от их значений для α-фазы при нормальных условиях.

Таблица 1

Физико-механические характеристики для различных фаз

Фаза	ρ_0, $\frac{ккг}{м^3}$	B_0, *ГПа*	γ_0	μ	β_0	S_0, $\frac{кДж}{кг \cdot г}$
α	7,85	169,0	1,69	3,560	1,0	0,0
ε	8,36	197,9	1,94	3,755	1,01181	0,020
γ	8,13	180,7	1,90	3,646	1,01597	0,105
Жидк.	7,75	160,4	1,85	4,0	1,08615	0,315

На рис. 1 приведена сплошной линией прогнозируемая фазовая диаграмма, определяемая равенством термодинамических потенциалов $\Phi = E + p/\rho - T \cdot S$ различных фаз. В области устойчивости каждой фазы соответствующий потенциал минимален. Штриховой линией даны ударные адиабаты ε-, γ-, жидкой фаз, рассчитанные по формуле $E_r = 0{,}5\,P \cdot (v_0^{\alpha} - v)$ с начальными условиями для α-фазы. Значком «треугольник» отмечена точка начала плавления на адиабате, рассчитанная в [3] на основе критерия Линденмана. Рис. 1 дает представление о масштабе давлений и температур возможных фазовых переходов в ударной волне. Переход $\varepsilon \leftrightarrow \gamma$ должен наблюдаться, начиная с давлений ударного сжатия ~ 150 ГПа, а плавление γ-фазы — с давлений ~ 280 ГПа.

На рис. 2 приведены рассчитанные ударные адиабаты различных фаз в координатах массовая скорость — давление. Волнистой линией отмечена граница потери устойчивости со-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

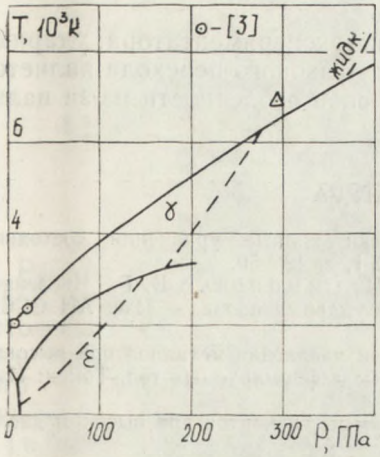

Рис. 1. Фазовая диаграмма

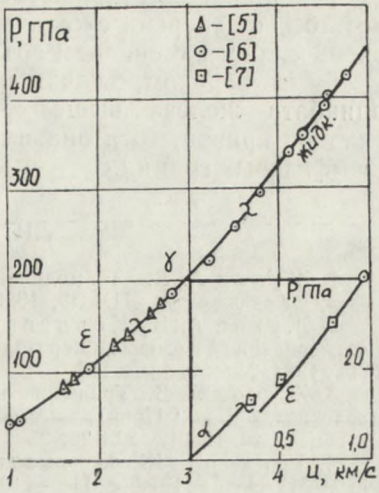

Рис. 2. Ударная адиабата

ответствующих фаз. Наблюдается четко выраженный α переход. Переход $\varepsilon \leftrightarrow \gamma$ практически не сказывается на виде адиабаты. Плавление имеет определенную особенность, но она укладывается в ошибку эксперимента. В табл. 2 даны энергия

Таблица 2

Изменение механических характеристик при фазовом переходе

Величина	$\alpha \leftrightarrow \varepsilon$	$\varepsilon \leftrightarrow \gamma$	$\gamma \leftrightarrow$ жидк.
$E_г, \frac{кДж}{г}$	0,0785	3,19	7,41
$\Delta E, \frac{кДж}{г}$	0,0821	0,516	0,575
$\Delta v, \frac{см^3}{г}$	— 0,00641	0,00049	0,00275

ударного сжатия, изменение энергии и объема в точках потери устойчивости нижней фазы на адиабате Гюгонио. Если для $\alpha \leftrightarrow \varepsilon$ перехода энергия фазового превращения сравнима и даже несколько превышает энергию ударного сжатия, то в

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

случае плавления γ-фазы изменение энергии составляет менее 10% от энергии сжатия. Переход $\varepsilon \leftrightarrow \gamma$ характеризуется очень малым изменением объема.

Таким образом, с точки зрения экспериментатора, ударная адиабата железа выше $\alpha \leftrightarrow \varepsilon$ фазового перехода является гладкой кривой, хотя она имеет свои особенности из-за наличия фазовых границ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков А. В. Термодинамически полные уравнения состояния α-, ε-, γ-фаз железа.— ПМТФ, 1986, № 1, с. 48—50.

2. Жуков А. В., Корнеев А. И., Симоненко В. Г. Численное моделирование фазовых переходов в ударных волнах.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 4, с. 138—143.

3. Жуков А. В., Уравнение кривой плавления металлов при высоких давлениях.— В кн.: Прикладные вопросы деформируемых тел. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980, с. 23—28.

4. Тонков Е. Ю. Фазовые диаграммы элементов при высоком давлении.— М.: Наука, 1979, с. 115—119.

5. Мак-Куин Р., Марш С. Уравнения состояния девятнадцати металлических элементов по ударно-волновым измерениям до 2 Мбар.— В кн.: Динамические исследования твердых тел при высоких давлениях. М.: Мир, 1975, с. 93—143.

6. Альтшулер Л. В., Чекин Б. С. Метрология высоких импульсных давлений.— Докл. 1-го Всесоюз. симпоз. по импульсным давлениям. М.: ВНИИФТРИ, 1971, т. 1, с. 5—22.

7. Barker L. M., Hollenbach R. E. Shock wave study of the α-phase transition in iron.— J. Appl. Phys., 1974, v. 45, № 11, p. 4872—4887.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЫПУЧИВАНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ АРКИ

А. Н. Кудинов, С. В. Дмитриев

Работа посвящена изучению неупругого выпучивания круговой, жестко заделанной пологой арки под действием сосредоточенных нагрузок. Арка рассматривалась в условиях плоского напряженного состояния с использованием восьмиузлового изопараметрического конечного элемента. Алгоритм решения линейной задачи строился в соответствии с работой [1] и был дополнен моментной схемой конечных элементов [2].

Учет геометрической нелинейности осуществлялся методом пошагового нагружения. Для описания неупругого материала моделью упругопластического тела с нелинейным упрочнением был применен вариант метода переменной упругости с учетом разгрузки [3]. Принималось, что разгрузка беспредельно упруга. Проводится сравнение с экспериментальными данными, полученными авторами.

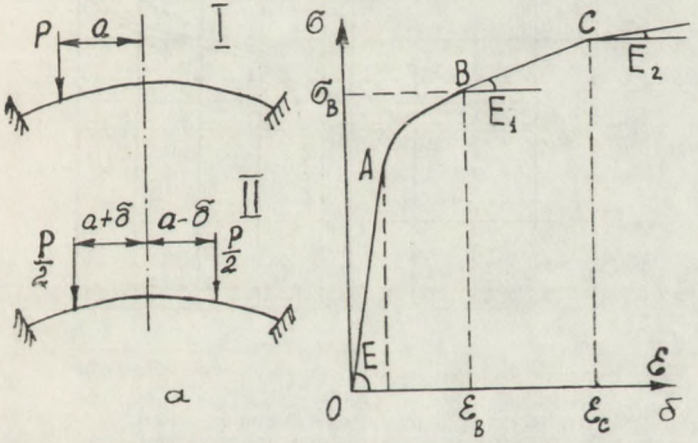

Рис. 1. Схемы нагружения исследуемой круговой арки *(а)* и аппроксимация диаграммы растяжения *(б)*

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Рассмотрены два случая нагружения (рис. 1, *а*). В случае схемы нагружения II нагрузки прикладывались с малым эксцентриситетом δ. Сетка конечных элементов 2 × 20 сгущалась к концам арки и в зоне приложения нагрузок. Геометрические размеры, положенные в расчет, соответствовали экспериментальным образцам: длина $L = 15{,}3$ см, толщина $h = 0{,}295$ см, стрела подъема $f = 0{,}2$ см. Материал арки — отожженная медь, реальная диаграмма которой аппроксимировалась тремя прямолинейными участками и плавно сопряженным отрезком параболы (рис. 1, *б*). При этом $E = 1{,}01 \cdot 10^6$ кг/см^2, $E_1 = 1{,}3 \cdot 10^4$ кг/см^2, $E_2 = 0{,}7 \cdot 10^4$ кг/см^2, $\varepsilon_A = 3{,}77 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_B = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon^C = 2{,}17 \cdot 10^{-3}$, $\sigma_B = 590$ кг/см^2.

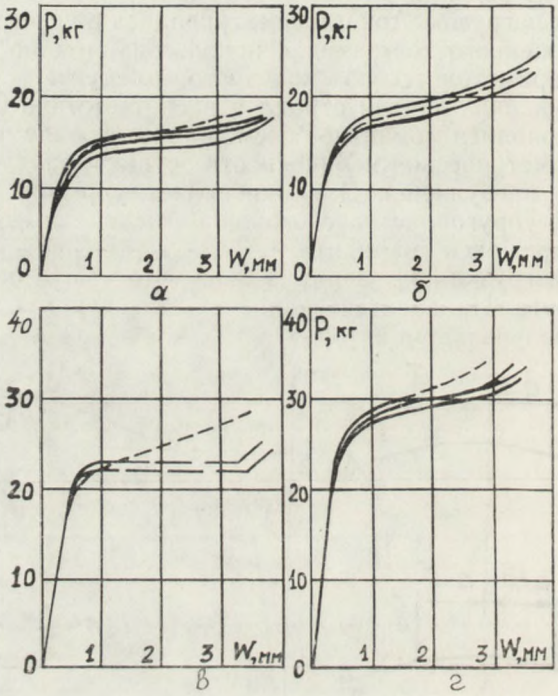

Рис. 2. Кривые «характерный прогиб-нагрузка» для:

а — схемы нагружения I при $a = 1$ см;
б — схемы нагружения I при $a = 3$ см;
в — схемы нагружения II при $a = 3$ см;
г — схемы нагружения II при $a = 4$ см

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Сравнение экспериментальных и расчетных данных наглядно показаны кривыми $P \sim W$ на рис. 2, *а*, *б*, *в*, *г* соответственно для схемы нагружения I для $a = 1$ *см*, $a = 3$ см и для схемы нагружения II для $a = 3$ см, $a = 4$ см. Пунктиром показан расчет, сплошной линией — эксперимент. Известно, что предел текучести для меди мал и его экспериментальное определение затруднительно, поэтому он был подобран на примере нагружения по схеме 1 ($a=3$ см) из условия наилучшего совпадения с экспериментом.

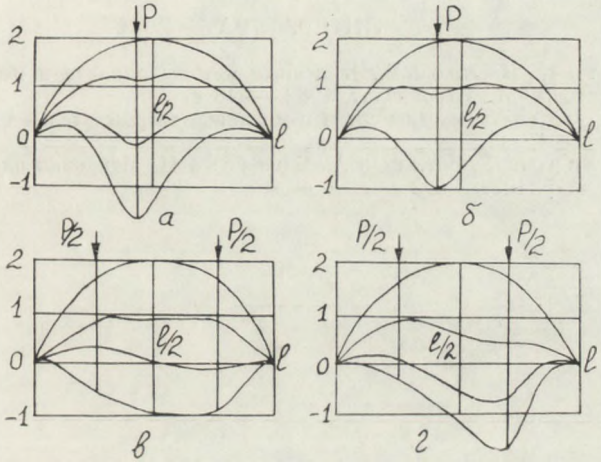

Рис. 3. Формы срединной поверхности арок при различных уровнях нагрузки: *а* — расчетные кривые по схеме нагружения I при $a = 1$ см; *б* — экспериментальные кривые по схеме нагружения I при $a = 1$ см; *в* — расчетные кривые по схеме нагружения II при $a = 4$ см; *г* — экспериментальные кривые по схеме нагружения II при $a = 4$ см

На рис. *3*, *а*, *в* представлены расчетные последовательности изгибных форм арки для схемы нагружения I ($a = 1$ см) и схемы II ($a = 4$ см) соответственно, а на рис. 3, *б*, *г* — аналогичные экспериментальные кривые.

Интересными являются кривые рис. *3*, *в*, *г* для случая нагружения с малым эксцентриситетом δ. При $a=3$ см этот эксцентриситет не ощущается, и деформирование арки проходит почти симметрично, а для $a=4$ см тот же по величине эксцентриситет приводит к заметной несимметрии. Этот факт под-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

тверждается экспериментом. Так, для $a = 3$ см наблюдались симметричные формы потери устойчивости, а для $a = 4$ см — несимметричные.

Согласование расчетных и экспериментальных данных ухудшается для схемы нагружения II. Это, по-видимому, связано с тем, что в этом случае возникают более развитые зоны пластичности и разгрузки, так что неучет пластичности при разгрузке приводит к более резкому возрастанию расчетных кривых на рис. 2 в области больших прогибов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов.— М.: Стройиздат, 1982.— 448 с.

2. Метод конечных элементов в механике твердых тел.— Киев: Вища школа, 1982.— 479 с.

3. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред.— М.: Мир, 1979.— 302 с.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

РЕАКЦИЯ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА ДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

М. В. Лазаренко

Поведение упругих оболочек, находящихся под действием локальных движущихся нагрузок, представляет большой интерес с прикладной точки зрения. Результаты расчета цилиндрических оболочек с заполнителем на кольцевую нагрузку, движущуюся вдоль оси оболочки с постоянной скоростью, приведены в работах [1—3]. При этом в [2, 3] изучены докритические скорости движения осесимметричной и неосесимметричной нагрузок соответственно. В работе [1] рассмотрены случаи докритической и закритической скоростей движения нагрузки с учетом линейного демпфирования.

В данной работе изучается реакция бесконечной круговой ортотропной цилиндрической оболочки на действие нормальной сосредоточенной силы, движущейся вдоль оси оболочки с постоянной скоростью, а также рассматриваются случаи докритической и закритической скоростей движения нагрузки. Решение ищется в виде бесконечного ряда по общим решениям однородных уравнений равновесия. Коэффициенты ряда определяются из условия склейки. Выделение единственного решения при закритических скоростях осуществляется с помощью энергетического принципа излучения Мандельштама.

1. Пусть точка приложения нормальной сосредоточенной силы движется в направлении продольной оси ξ с постоянной скоростью V. Положение нагрузки в некоторый момент времени $t = 0$ характеризуется продольной ξ_0 и окружной η_0 координатами. Уравнения упругого движения ортотропной цилиндрической оболочки в линейной постановке [6] можно записать в смещениях в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой постоянной скоростью,

$$R\alpha = \xi - \xi_0 - Vt, \quad R\beta = \eta - \eta_0 \tag{1.1}$$

в следующем виде:

$$[(c_{11} - c)\partial_1^2 + c_{66}\partial_2^2]u + (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2 v + c_{12}\partial_1 w = 0,$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$(c_{12}+c_{66})\partial_1\partial_2 u+[(1+4a^2)c_{66}-c]\partial_1^2 v+(1+a^2)c_{22}\partial_2^2 v+$$
$$+c_{22}\partial_2 w-a^2[c_{12}+4c_{66})\partial_1^2+c_{22}\partial_2^2]\partial_2 w=0,$$

$$c_{12}\partial_1 u+c_{22}\partial_2 v-a^2[(c_{12}+4c_{66})\partial_1^2+c_{22}\partial_2^2]\partial_2 v+c_{22}w+ \qquad (1.2)$$
$$+c\partial_1^2 w+a^2[c_{11}\partial_1^4+2(c_{12}+2c_{66})\partial_1^2\partial_2^2+c_{22}\partial_2^4]w=F_z\delta(\alpha,\beta),$$

$$\partial_1=\frac{\partial}{\partial\alpha},\ \partial_2=\frac{\partial}{\partial\beta},\ c=\rho hV^2,\ a^2=\frac{h^2}{12R^2},$$

$$c_{11}=\frac{E_1 h}{1-\nu_1\nu_2},\ c_{22}=\frac{E_2 h}{1-\nu_1\nu_2},\ c_{12}=\nu_2 c_{11}=\nu_1 c_{22},\ c_{66}=hG_{12},$$

где u, v, w — компоненты вектора смещений; F_z — нормальная компонента внешней нагрузки; h, R, ρ — толщина, радиус срединной поверхности и плотность материала оболочки; E_1, E_2, G_{12}, ν_1, ν_2 — упругие постоянные; $\delta(\alpha,\beta)$ — дельта-функция Дирака.

Система дифференциальных уравнений (1.2) приводится к разрешающему дифференциальному уравнению 8-го порядка

$$D\Phi=\delta(\alpha,\beta) \qquad (1.3)$$

относительно потенциальной функции Φ, через которую смещения записываются с помощью соотношений

$$u=F_z D_{13}\Phi,\ v=F_z D_{23}\Phi,\ w=F_z D_{33}\Phi. \qquad (1.4)$$

Дифференциальные операторы $Д$, $Д_{i3}$ имеют вид

$$D=\sum_{l=4}^{8}\sum_{n=0}^{l} p_{ln}\partial_1^{l-n}\partial_2^n,$$

$$c_{11}D_{13}=-a^2 b_{12}(1+4a^2-b_6)\partial_1^3-b_{22}(b_{16}-a^{-2})\partial_1\partial_2^2-$$
$$-(b_{12}b_{16}+5b_{12}+4b_{66})\partial_1^3\partial_2^2-b_{22}(1+b_{16})\partial_1\partial_2^4, \qquad (1.5)$$
$$c_{11}D_{23}=a^{-2}[b_{12}(1+b_{16})-b_{26}(1-b_1)]\partial_1^2\partial_2-a^{-2}b_{22}\partial_2^3+$$
$$+(1-b_1)(4+b_{16})\partial_1^4\partial_2+[b_{12}+4b_{66}+b_{26}(1-b_1)]\partial_1^2\partial_2^3+b_{22}\partial_2^5,$$
$$c_{11}D_{33}=a^{-2}(1-b_1)(1+4a^2-b_6)\partial_1^4+[4b_{66}-a^{-2}(b_1+2b_{12}+b_{12}b_{16})+$$
$$+(1+a^{-2})(1-b_1)b_{26}]\partial_1^2\partial_2^2+(1+a^{-2})b_{22}\partial_2^4,$$

а их коэффициенты

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$p_{80}=(1-b_1)(1+4a^2-b_6),$$
$$p_{82}=(1+a^2)(b_{26}-b_{12}b_{16}+4b_{66})-b_1[5+2b_{12}+2b_{16}+4b_{66}+$$
$$+(1+a^2)b_{26}-a^2b_{12}b_{16}-2b_1(2+b_{16})],$$
$$p_{84}=6b_{22}+2b_{12}(b_{26}-b_{12}b_{16}-4b_{12}-4b_{66})+a^2(b_{22}-b_{12}^2)-$$
$$-b_1[b_{26}+2b_{12}+4b_{66}+b_{22}(5+2b_{16}-b_6)],$$
$$p_{86}=b_{22}[4b_{66}-b_{12}b_{16}+b_{26}-b_1(1+b_{26})],\quad p_{88}=b_{22}^2,$$
$$p_{60}=a^{-2}b_1(1-b_1)(1+4a^2-b_6),\quad p_{66}=2b_{22}^2,$$
$$p_{62}=8b_{22}+2b_{12}(b_{26}-b_{12}b_{16}-4b_{66}-5b_{12})+b_1[4b_{66}+b_{26}-$$
$$-8b_{22}-2b_{12}b_{26}+a^{-2}(b_{26}-2b_{12}-b_{12}b_{16})-b_1(a^{-2}+(1+a^{-2})b_{26})],\qquad (1.6)$$
$$p_{64}=2b_{22}(b_{26}-b_{12}b_{16}+4b_{66})+b_1b_{22}(1+a^{-2}-2b_{26}),$$
$$p_{40}=a^{-2}(1+4a^2-b_6)[(1-b_1)b_{22}-b_{12}^2],\quad p_{44}=b_{22}^2,$$
$$p_{42}=b_{22}[(b_{26}-b_{12}b_{16}+4b_{66})-b_1(a^{-2}+b_{26})],$$
$$b_1=c/c_{11},\ b_6=c/c_{66},\ b_{22}=c_{22}/c_{11},\ b_{12}=c_{12}/c_{11},$$
$$b_{16}=c_{12}/c_{66},\ b_{26}=c_{22}/c_{66},\ b_{66}=c_{66}/c_{11}.$$

2. Решение уравнения (1.3), следуя [4], ищется в виде бесконечного ряда по общим решениям однородного разрешающего уравнения (1.2)

$$4\pi p_{80}\Phi=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}A_{im}\varphi_{im}(\alpha)\cos m\beta. \qquad (2.1)$$

Коэффициенты A_{im} определяются из условия непрерывности производных от функции Φ по α до 7-го порядка включительно при переходе через линию $\alpha=0$, $\beta\neq 0{,}2\pi$ и удовлетворения уравнения (1.3). При этом система уравнений для коэффициентов распадается на бесконечную последовательность независимых систем линейных алгебраических уравнений 4-го порядка

$$\sum_{i=1}^{4}A_{im}f_{im}(j)=(\delta_0^m-2)\delta_4^j,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4, \qquad (2.2)$$

где δ_i^j—символ Кронекера.

Вид функций φ_{im}, f_{im} зависит от типа корней k_{im} характеристического уравнения

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sum_{l=4}^{8}\sum_{n=0}^{l} p_{ln}k^{l-n}m^{n}=0, \qquad (2.3)$$

соответствующего однородному уравнению (1.3),

$$\varphi_{im}(\alpha)=\exp(-k_{im}|\alpha|),\ f_{im}(j)=k_{im}^{2j-1},\ \mathrm{Re}\ k_{im}>0;$$
$$\varphi_{im}(\alpha)=|\alpha|^{2n-1},\ f_{im}(j)=-(2n-1)!\,\delta_{2n-1}^{j},\ k_{im}=0,\ n\leqslant p; \qquad (2.4)$$
$$\varphi_{im}(\alpha)=2\sin(|\alpha|\,\mathrm{Im}k_{im}),\ f_{im}(j)=(-1)^{j}(\mathrm{Im}\,k_{im})^{2j-1},\ \mathrm{Re}\,k_{im}=0,$$

где n — номер нулевого корня кратности p.

Следуя работе [4], можно показать, что при таком выборе Ф удовлетворяет однородному уравнению (1.3) и является аналитической функцией везде, кроме точки $\alpha=0$, $\beta=0$, а при α, $\beta\to 0$ удовлетворяет уравнению (1.3).

3. Характеристическое уравнение (2.3) при нулевой скорости движения нагрузки имеет лишь кратные нулевые корни, которым соответствует балочное решение, удовлетворяющее условиям на бесконечности, и комплексно-сопряженные или действительные корни, которым соответствует экспоненциально затухающее на бесконечности решение. При скорости движения нагрузки, отличной от нуля, характеристическое уравнение может иметь чисто мнимые корни, которым соответствуют члены, описывающие гармонические колебания. Зависимость низших частот возбуждаемых колебаний от скорости приведена на рис. 1. Цифрами обозначены значения парамет-

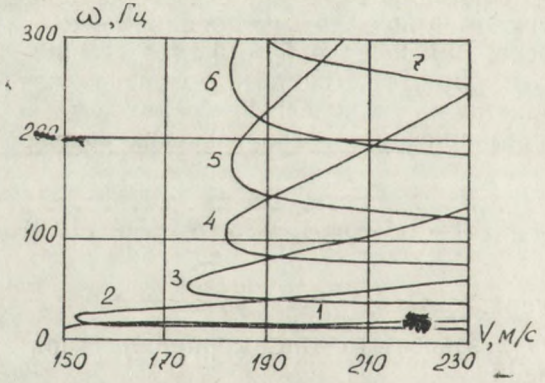

Рис. 1. Зависимость низших частот колебаний от скорости движения нагрузки.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ра m в разложении нагрузки в ряд по окружной координате, для которого наблюдаются колебания данных частот. На низкочастотные колебания накладываются высокочастотные, с ростом скорости спектр частот расширяется. Причем для каждой конкретной скорости движения нагрузки, меньшей скорости распространения волн сдвига, количество частот ограничено. Для каждой отдельной гармоники по m характерно поведение частот от скорости, приведенное на рис. 2 для $m=9$.

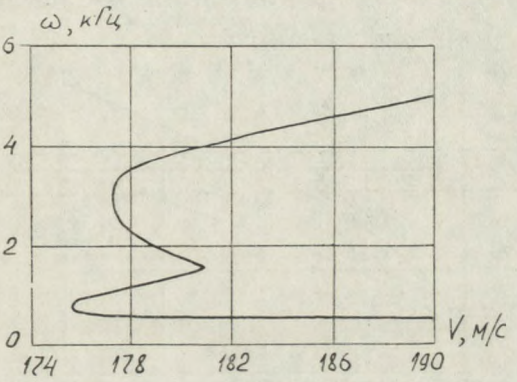

Рис. 2. Зависимость частоты от скорости для $m=9$

Здесь и ниже приводятся результаты для оболочки с параметрами: $h=5$ мм, $R=1$ м, $E_1=21$ ГПа, $E_2=16$ ГПа, $G_{12}=4{,}1$ ГПа, $\nu_1=0{,}09$, $\rho=1350$ кг/м^3.

Будем называть скорости, при которых появляются новые, чисто мнимые корни, резонансными. Эти скорости много меньше скоростей продольной и поперечной волн в оболочке. Так, при $m=0$ резонансная скорость $V_*^4=4a^2E_1E_2\rho^{-2}(1-\nu_1\nu_2)^{-1}$. Наименьшую из резонансных скоростей будем называть низшей критической скоростью. Зависимость низшей критической скорости для самоуравновешенной сосредоточенной нагрузки от толщины оболочки приведена на рис. 3. Кривая *1* построена для оболочки с вышеприведенными упругими характеристиками, кривая *2* — для стальной оболочки ($E=210$ ГПа, $\nu=0{,}32$, $\rho=7800$ кг/м^3).

При скоростях движения нагрузки, больших низшей критической, решение не затухает на бесконечности. Использование стандартного метода, сводящегося к преобразованию Фурье соответствующих уравнений, становится невозможным, т. к. не выполняются условия абсолютной интегрируемости ре-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

шения на бесконечном интервале, накладываемые на функцию, представимую интегралом Фурье. Эта проблема решается введением в уравнения движения диссипативных членов [1], рассмотрением докритических скоростей [2, 3] или наложением условия затухания решения на бесконечности. Однако при этом от внимания ускользает эффект генерирования незатухающих упругих колебаний в оболочке. В работе [7] предлагается в этом случае рассматривать нестационарную задачу и от нее осуществлять переход к стационарной задаче. Однако,

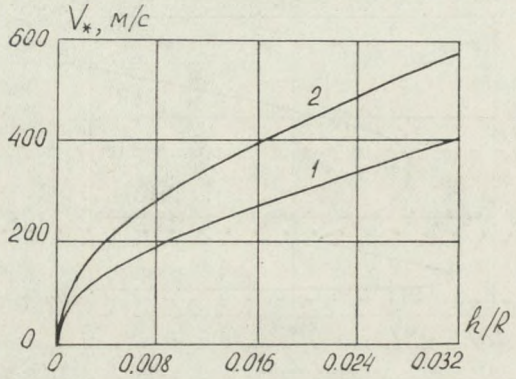

Рис. 3. Зависимость низшей критической скорости от толщины оболочки

как указывается в [7], такой переход не всегда корректен, так как в некоторых случаях предельное решение нестационарной задачи не совпадает с решением стационарной задачи. Если же сразу рассматривается стационарное решение, то в [7] предлагается принцип доопределения преобразования Фурье, сводящийся в случае однократных корней характеристического уравнения к принципу Мандельштама. Предлагаемый в данной работе метод непосредственно использует принцип Мандельштама и позволяет строить решение как при докритических, так и при закритических скоростях.

При закритических скоростях решение (2.1) становится не единственным и определяется с точностью до суммы

$$4\pi p_{80}\Phi_1 = \sum_{i,m} B_{im} \sin(\alpha \operatorname{Im} k_{im}) \cos m\beta, \qquad (3.1)$$

где суммирование ведется по всем значениям i, m, при которых имеются чисто мнимые корни.

Поток энергии Q_{im} в направлении оси ξ через сечение $\xi = \text{const}$ за период колебания T, связанный с элементарным решением

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\Phi_{im}=\cos m\beta \sin k\alpha,\quad k=\operatorname{Im} k_{im},\ \operatorname{Re} k_{im}=0, \tag{3.2}$$

можно записать

$$TQ_{im}=\int_0^T\int_0^{2\pi R}\left[T_1\frac{\partial u}{\partial t}+S_{12}\frac{\partial v}{\partial t}+N_1\frac{\partial w}{\partial t}-M_1\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial t}-\right.$$
$$\left.-H_{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\eta\partial t}-\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right]d\eta\,dt, \tag{3.3}$$

где T_1, S_{12}, N_1, M_1, H_{12} — внутренние усилия и моменты.

Если в (3.3) подставить соотношения (1.4), (3.2) с учетом соотношений упругости и выполнить интегрирование, то поток энергии Q_{im} можно записать

$$Q_{im}=(1+\delta_0^m)\pi k^2V(2Rc_{11})^{-1}\{A^2(b_{66}m^2-k^2b_1)-b_{66}m^2B^2-$$
$$-2a^2[k^2C^2+m^2b_{12}C(B+C)+2m^2b_{66}(B+C)^2]\},$$
$$A=(4+a^{-2})b_{12}k^2+(b_{16}-a^{-2})b_{22}m^2-(b_{12}b_{16}+5b_{12}+4b_{66})k^2m^2-$$
$$-b_{22}(1+b_{16})m^4-a^{-2}b_1b_{16}k^2, \tag{3.4}$$
$$B=a^{-2}k^2[b_{12}+b_{12}b_{16}-b_{26}(1-b_1)]-k^4(4+b_{16})(1-b_1)-$$
$$-m^2k^2[b_{12}+4b_{66}-b_{26}(1-b_1)]-b_{22}m^2(m^2+a^{-2}),$$
$$C=a^{-2}k^4(1-b_1)(1+4a^2-b_6)+(1+a^{-2})b_{22}m^4+$$
$$+m^2k^2\{(1-b_1)[b_{26}(1+a^{-2})+a^{-2}]+4b_{66}-a^{-2}(1+2b_{12}+b_{12}b_{16})\}$$

Поток энергии Q, связанный с решением $\Phi+\Phi_1$, тогда запишется

$$Q=(4\pi p_{80})^{-2}F_z^2\sum_{i,m}[A_{im}\operatorname{sign}\alpha+B_{im}]^2Q_{im}.$$

Согласно принципу Мандельштама при возбуждении оболочки в конечной области физически реальным является решение, осуществляющее перенос энергии в направлении от источника возбуждения в бесконечность, т. е. поток энергии Q должен удовлетворять условию

$$\operatorname{sign}\alpha\cdot\operatorname{sign}Q\leqslant 0,\quad |\alpha|\to\infty. \tag{3.5}$$

В связи с тем, что для потока энергии Q_{im} справедливо утверждение $Q_{im}\leqslant 0$ (при $m=0$ это очевидно, а при $m>0$ проверяется численно по формулам (3.4)), то условие (3.5) позволяет единственным образом определить коэффициенты функции Φ_1: $B_{im}\equiv A_{im}$.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Таким образом, функция Ф определяет единственное решение при докритической скорости, а функция $\Phi + \Phi_1$ — при закритической за исключением конечного числа малых интервалов, охватывающих резонансные скорости.

4. Численные расчеты для ортотропной оболочки приведены для случая действия двух радиальных сосредоточенных сил $F_z = 1$Н, приложенных в точках $\alpha = 0$, $\beta = 0$, π. На рис. 4 показана зависимость прогиба под одной из сосредоточенных

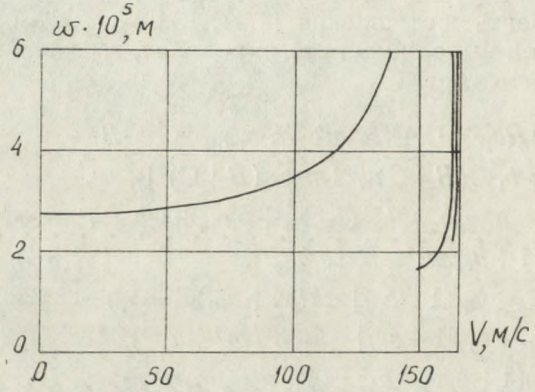

Рис. 4. Зависимость прогиба под одной из двух нормальных сосредоточенных сил от скорости

сил от скорости движения нагрузки. При резонансных скоростях данное решение несправедливо, а при приближении к ним решение неограниченно возрастает. При $V \longrightarrow 0$ решение переходит в решение соответствующей статической задачи [4]. Распределение прогиба в оболочке для скоростей $V = 0$, 120, 156, 164 м/с приведено на рис. 5, 6. Как видно из рис. 4, скорость $V = 120$ м/с — докритическая, а скорости $V = 156$, 164 м/с — закритические. При докритических скоростях движения нагрузки решение аналогично статическому решению. При закритической скорости в области $\alpha < 0$ решение быстро затухает, а в области $\alpha > 0$ распространяются незатухающие колебания большой амплитуды. Такое поведение характерно для всех параметров НДС. На рис. 5 показано распределение прогиба вдоль линии $\beta = 0$. При скорости $V =$ 164 м/с на колебания низкой частоты, близкие к кривой *3*, накладываются высокочастотные колебания меньшей амплитуды. Распределение прогиба вдоль линии $\alpha = 0$ отражено на рис. 6. При закритической скорости движения изменяется характер волнообразования в окружном направлении.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

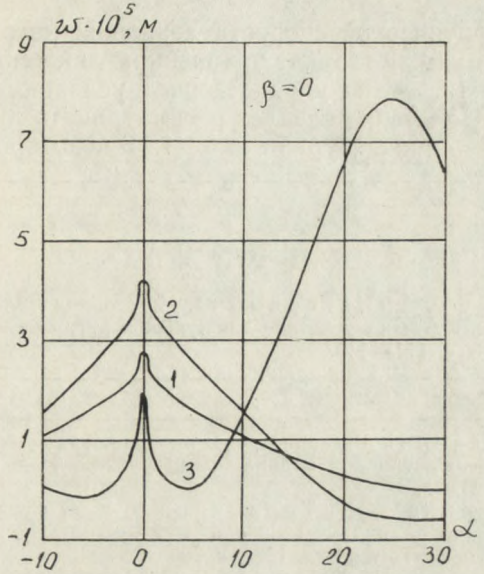

Рис. 5. Распределение прогиба в сечении $\beta = 0$

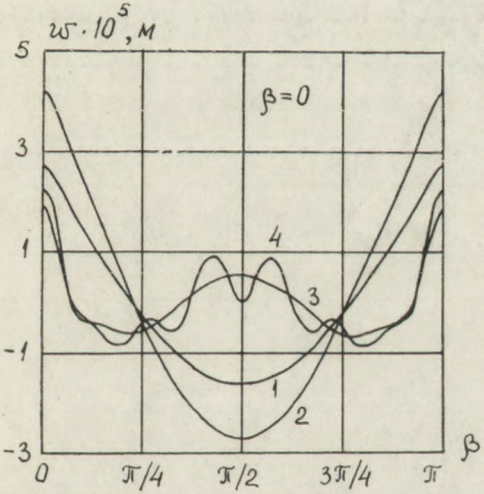

Рис. 6. Распределение прогиба в сечении $\alpha = 0$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

При закритической скорости движения нагрузки полученное решение удовлетворяет уравнениям движения и условиям единственности, но не удовлетворяет условию баланса энергии. Поэтому решение следует рассматривать лишь как решение линеаризованных уравнений (1.2) некоторой нелинейной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корбут Б. А., Нагорный Ю. И. Реакция цилиндрической оболочки с заполнителем на действие движущейся нагрузки.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 3, с. 111—119.

2. Кюркчиев Р. Цилиндрическая оболочка с заполнителем под действием подвижной кольцевой нагрузки.— Вестник МГУ. Механика, 1970, № 6, с. 80—84.

3. Пожуев В. И. Реакция трехслойной цилиндрической оболочки на действие неосесимметричной подвижной нагрузки.— Изд. АН СССР. МТТ, 1982, № 5, с. 161—168.

4. Лазаренко М. В., Тараканов В. И. О фундаментальных решениях уравнений цилиндрической оболочки.— В кн.: Механика сплошных сред. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983, с. 35—47.

5. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.— М.: Наука, 1979.— 320 с.

6. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек.— М.: Наука, 1972.— 432 с.

7. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны.— Л.: Судостроение, 1972.— 374 с.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В МЕТОДИКЕ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Н. Лейцин

Предложено частное решение, позволяющее улучшить аппроксимацию интегральных операторов в граничных интегральных уравнениях (ГИУ) осесимметричной теории упругости.

В случае отсутствия объемных сил ГИУ теории упругости можно получить в результате применения фундаментальных решений $\bar{u}_i(s, l)$, $\bar{t}_i(s, l)$ к теореме взаимности Бетти, выбирая полюса фундаментальных решений в узловых точках поверхности исследуемой области

$$K_i^l u_i(l) = \int_S [u_i(s)\bar{t}_i(s, l) - t_i(s)\bar{u}_i(s, l)]ds = 0, \qquad (1)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j, \; i, j = 1, 2, 3,$$

где s — поверхность области; l — координаты полюса; K_i^l — константы, определяемые телесным углом в точке l; n_j — направляющие косинусы внешней нормали.

В ГИУ (1) интегралы $\int_{s_\varepsilon} u_i(s)\bar{t}_i(s, l)ds$ (2) являются сингулярными в ε окрестности точки $s = l$ и существуют в смысле главного значения по Коши несобственных интегралов [1]. Для точного вычисления этих интегралов применяются формулы Гаусса приближенного интегрирования высоких порядков или формулы типа Гаусса приближенного вычисления интегралов с весовыми функциями $1/r$, $1/r^2$, $\ln(r)$ [2], где r определяет расстояние между точками $s(x_i)$ и $l(x_{i0})$. Точное вычисление интегралов (2) в окрестности точки $s(x_i) = l(x_{i0})$ требуется для хорошей аппроксимации интегральных операторов в ГИУ, что необходимо для повышения точности алгоритмов метода ГИУ. Аксиома об отсутствии напряжений в теле, движущемся как жесткое целое, позволяет вычислять эти инте-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

гралы в окрестности точки $s(x_i) = l(x_{i0})$ вместе со свободным членом[3]:

$$K_i^l u_i^l(l) + \int_{S_\varepsilon} u_i^l \bar{t}_i(s, l) ds = -\int_{S-S_\varepsilon} u_i^l \bar{t}_i(s, l) ds, \tag{3}$$

$$u_i^l = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

В случае отсутствия объемных сил ГИУ осесимметричной теории упругости в цилиндрической системе координат R, φ, Z имеют вид

$$K_i^l u_i(l) + \int_S [u_i(s)\bar{t}_i(s, l) - t_i(s)\bar{u}_i(s, l)] R ds = 0, \tag{4}$$

$$i = R, Z,$$

где $s(R, Z), l(R_0, Z_0)$ — координаты точек контура меридианного сечения расчетной области.

Свойство (3) применимо в случае осевой симметрии для $i = Z$.

При задании $U_R^l = 1$ в осесимметричном теле наводятся напряжения

$$\sigma_R^0 = \sigma_\varphi^0 = \sigma_Z^0 = \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R}, \tag{5}$$

определяющие появление в уравнениях равновесия объемных сил. Здесь E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона. Задание начальных напряжений (5) и соответствующих им объемных сил эквивалентно наложению на тело стационарного температурного поля

$$T = -\frac{\nu}{1+\alpha} \frac{1}{R}, \tag{6}$$

если положить коэффициент линейного теплового расширения

$$\alpha = 1. \tag{7}$$

Фундаментальные решения осесимметричной теории упругости можно выразить через логарифмические потенциалы $\delta_1(s, l)$ и $\delta_2(s, l)$:

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\nabla^2\delta_1=0,\ \left(\nabla^2-\frac{1}{R^2}\right)\delta_2=0,$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

в следующем виде [4]:

$$1)\ \bar{u}^1_R=(4\nu-3)\delta_2-(Z-Z_0)\delta_{2,z},$$
$$\bar{u}^1_Z=(Z-Z_0)(\delta_{2,R}+\delta_2/R),$$
$$\bar{t}^1_R/2\mu=[(2\nu-3)\delta_{2,R}-2\nu\delta_2/R-(Z-Z_0)\delta_{2,RZ}]\cdot n_R-$$
$$-[(Z-Z_0)\delta_{2,zz}+2(1-\nu)\delta_{2,z}]\cdot n_Z,$$
$$\bar{t}^1_Z/2\mu=[(Z-Z_0)\delta_{2,zz}+2(1-\nu)\delta_{2,z}]\cdot n_R+$$
$$+[(1-2\nu)(\delta_{2,R}+\delta_2/R)+(Z-Z_0)(\delta_{2,RZ}+\delta_{2,z}/R)]\cdot n_Z; \tag{8}$$

$$2)\ \bar{u}^2_R=(Z-Z_0)\delta_{1,R},$$
$$\bar{u}^2_Z=(Z-Z_0)\delta_{1,z}-(3-4\nu)\delta_1,$$
$$\bar{t}^2_R/2\mu=[2\nu\delta_{1,z}-(Z-Z_0)\delta_{1,RR}]\cdot n_R+$$
$$+[(1-2\nu)\delta_{1,R}-(Z-Z_0)\delta_{1,zR}]\cdot n_Z,$$
$$\bar{t}^2_Z/2\mu=[(1-2\nu)\delta_{1,R}-(Z-Z_0)\delta_{1,zR}]\cdot n_R+$$
$$+[2(1-\nu)\delta_{1,z}-(Z-Z_0)\delta_{1,zz}]\cdot n_Z,$$
$$2\mu=E/(1+\nu).$$

Для стационарной термоупругости справедливо соотношение Бетти-Майзеля [5]:

$$K^l_i u_i(l)+\int_S[u_i(s)\bar{t}_i(s,l)-t_i(s)\bar{u}_i(s,l)]Rds+ \tag{9}$$
$$+\frac{\alpha E}{1-2\nu}\int_\Omega \bar{T\varepsilon}_{kk}Rd\Omega=0,\ i=R,z,$$
$$\bar{\varepsilon}_{kk}=\bar{u}_{R,R}+\bar{u}_R/R+\bar{u}_{Z,z}.$$

Здесь второй интеграл является интегралом по площади меридианного сечения Ω осесимметричной области. После подстановки (6), (7) и (8) в интеграл по площади меридианного сечения уравнений (9) и применения к интегралам по площа-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ди Ω теоремы Остроградского — Гаусса соотношения (9) принимают вид для случая $U_R = U_R$:

$$K_R^l u_R^I + \int_S u_R^I \bar{t}_R^1(s, l) R ds -$$

$$-2\nu \cdot 2\mu \int_S (R - R_0)[(\delta_{2,R} + \delta_2 / R) n_R + \delta_{2,Z} \cdot n_Z] ds = 0, \qquad (10)$$

$$\int_S u_R^I t_R^2(s, l) R ds + 2\nu \cdot 2\mu \int_S \delta_1 \cdot n_Z \cdot ds = 0.$$

Соотношения (3) для $i = Z$ и (10) позволяют вычислять сингулярные интегралы в ГИУ осесимметричной теории упругости с помощью соотношений

$$K_R^l u_R^I + \int_{S_\varepsilon} u_R^I \bar{t}_R^1(s, l) R ds = -\int_{S - S_\varepsilon} u_R^I \bar{t}_R^1(s, l) R ds +$$

$$+2\nu \cdot 2\mu \int_S (R - R_0)[(\delta_{2,R} + \delta_2 / R) \cdot n_R + \delta_{2,Z} \cdot n_Z] ds, \qquad (11)$$

$$\int_{S_\varepsilon} u_Z^I \bar{t}_Z^1(s, l) R ds = -\int_{S - S_\varepsilon} u_Z^I \bar{t}_Z^1(s, l) R ds,$$

$$\int_{S_\varepsilon} u_R^I \bar{t}_R^2(s, l) R ds = -\int_{S - S_\varepsilon} u_R^I \bar{t}_R^2(s, l) R ds -$$

$$-2\nu \cdot 2\mu \int_S \delta_1 \cdot n_Z ds,$$

$$\int_{S_\varepsilon} u_Z^I \bar{t}_Z^2(s, l) R ds = -\int_{S - S_\varepsilon} u_Z^I t_Z^2(s, l) R ds.$$

Соотношения (11) позволяют выразить несобственные интегралы в ε окрестности полюса, существующие в смысле главного значения по Коши, через регулярные интегралы и интегралы, существующие в обычном смысле.

В заключение следует сказать, что уравнения (11), полученные из ГИУ осесимметричной упругости для частных решений $u_R^I = 1$ и $u_Z^I = 1$, позволяют, при реализации метода ГИУ, вычислять несобственные интегралы от произведений фундаментальных решений на базисные функции. Этот прием дает возможность не привлекать для вычисления интегралов, существующих в смысле главного значения по Коши, специальных формул приближенного вычисления несобственных интегралов, а также не требует вычисления констант K_i^l , значения которых определяются величиной телесного угла в точке l.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.— М.: Физматгиз, 1962 — 254 с.

2. Перлин П. И., Шафаренко Е. М., Штерншис А. З. Некоторые вопросы применения метода потенциала к решению пространственных задач теории упругости.— Соврем. пробл. мех. и авиации. М., 1982, с. 221—228.

3. Безукер Ф. М., Сноу Д. И. Применение двумерного метода граничных интегральных уравнений для решения инженерных задач.— В кн.: Метод граничных элементов — М.: Мир, 1978, вып. 15, с. 129—151.

4. Тараканов В. И. Об одном методе решения краевых задач упругости для тел вращения сложной формы: Дис... канд. физ.-мат. наук.— Томск, 1971.— 188 с.

5. Майзель В. М. Температурная задача теории упругости.— Киев: Изд-во АН УССР, 1951.— 152 с.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СОПРЯЖЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОСКИХ ТЕЛ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

О. М. Лейцина, С. В. Пономарев, В. В. Федоренко

В данной работе рассматривается эффективность использования метода сопряженной аппроксимации для исследования напряженно-деформированного состояния плоских тел с наличием зон концентрации напряжений.

1. Метод сопряженной аппроксимации. Метод сопряженной аппроксимации базируется на положении [1]. Наилучшей аппроксимацией функции $F_1(\bar{x})$ гильбертова пространства H в подпространстве Φ конечной размерности G, базисом которого является заданное множество функций, будет элемент из Φ, ближайший к $F_1(\bar{x})$ относительно естественной метрики

$$d[F_1(\bar{X}),\ B(\bar{X})] = \| F_1(\bar{X}) - B(\bar{X}) \| \tag{1.1}$$

в H.

Если Δ^Δ — произвольные G чисел, такие что $\Delta^\Delta \Phi_\Delta(\bar{X}) \in \Phi$, то необходимо определить Δ^Δ, минимизирующие функционал

$$I(\Delta^\Delta) = \langle F_1 - \Delta^\Delta \Phi_\Delta,\ F_1 - \Delta^\Delta \Phi_\Delta \rangle, \tag{1.2}$$

где $\langle \cdots \rangle$ — определенное на H скалярное произведение. Этот функционал является мерой расстояния между $F_1(\bar{X})$ и $\Delta^\Delta \Phi_\Delta$ $(\bar{X})$. Представляя $F_1(\bar{X})$ как

$$F_1(\bar{X}) = \bar{F}(\bar{X}) + \hat{F}(\bar{X}),$$

где $\bar{F}(\bar{X}) \in \Phi$ и $\hat{F}(\bar{X}) \in H^1$, $H^1 = H \setminus \Phi$, (1.3)

можно показать, что

$$\langle F_1,\ \Phi_\Delta \rangle = \langle \bar{F} + \hat{F},\ \Phi_\Delta \rangle = F_\Delta + \hat{F}_\Delta, \tag{1.4}$$

где

$$\langle \hat{F},\ \Phi_\Delta \rangle = F_\Delta;$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$<\bar{F},\ \Phi_\Delta>=F_\Delta. \qquad (1.5)$$

Для нахождения Λ^Δ, которые минимизируют $I(\Lambda^\Delta)$, положим

$$\frac{\partial I(\Lambda^\Delta)}{\partial \Lambda}=0. \qquad (1.6)$$

После некоторых преобразований приходим к системе линейных уравнений

$$\Lambda^\Delta_{\min}=F^\Delta+C^{\Delta\Gamma}F_\Gamma\ (\Delta,\ \Gamma=1...G), \qquad (1.7)$$

где

$$C^{\Delta\Gamma}\equiv(C_{\Delta\Gamma})^{-1};$$

$$C_{\Delta\Gamma}=<\Phi_\Delta;\ \Phi_\Gamma>=\sum_{e=1}\sum_{f=1}\Omega^{(e)N}_\Delta\,\Omega^{(f)M}_\Delta<\Psi^{(e)}_N;\ \Psi^{(e)}_M>. \qquad (1.8)$$

$\Psi^{(e)}_N;\ \Psi^{(e)}_M$—соответствующие функции формы.

Полагая $F_1(\bar{X})\simeq\bar{F}(\bar{X})$, имеем

$$\Lambda^\Delta_{\min}=F^\Delta=C^{\Delta\Gamma}F_\Gamma\ (\Delta,\ \Gamma=1...G). \qquad (1.9)$$

Следовательно, наилучшей аппроксимацией заданной функции $F_1(\bar{X})$ в подпространстве Φ является функция $\bar{F}(\bar{X})\varepsilon\Phi$, компоненты которой относительно базиса $\{\Phi_\Delta\}$ равны скалярным произведениям $F(\bar{X})$ с сопряженными базисными функциями $\Phi^\Delta\ (\bar{X})$.

При использовании метода сопряженной аппроксимации необходимо рассматривать все в базисе, имеющем своей областью определения всю совокупность конечных элементов. В этом случае локальная сопряженная аппроксимация будет согласована с определенным на Φ линейным функционалом.

2. Метод решения. Эффективность использования метода сопряженной аппроксимации показана на двух задачах, (рис. 1, 2). В первом случае рассматривалась тонкая упругая пластина, ослабленная отверстием диаметра d. К торцам пластины $\left(\bar{x}=\pm\frac{L}{2}\right)$ прилагалась нагрузка интенсивностью P. На боковых поверхностях $y=\pm\frac{H}{2}$, $\sigma_{ij}=0$, $i, j=x, y, z$. Поверхности отверстия свободны от нагрузок. Во втором случае требовалось определить напряженно-деформированное состоя-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ние ступенчатой пластины с симметричными галтелями (детали конструкции с круговой выточкой) радиуса r, к торцам детали ($x=0$, L_1) прикладывалась нагрузка интенсивностью $P_1/2$ и P_1 соответственно. Боковые поверхности свободны от напряжений. Для решения данных задач использовались уравнения равновесия, Коши, физические уравнения. Эти соотношения в совокупности с граничными условиями составляют краевую задачу, которая может быть сформулирована в вариационном виде. Решение проводится в два этапа: I. Дискретизация области. II. Минимизация потенциальной энергии системы при отыскании узловых значений вектора перемещений.

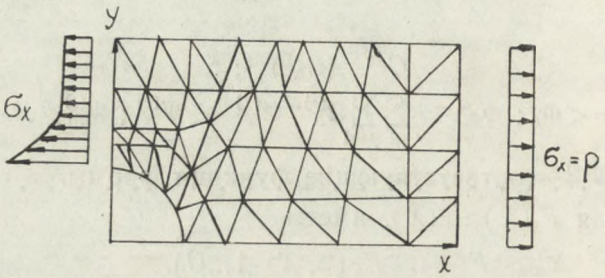

Рис. 1

Расчетные области разбивались на элементы сеткой с 360 элементами и 210 узлами (см. рис. 1) и сеткой с 144 элементами и 95 узлами (см. рис. 2).

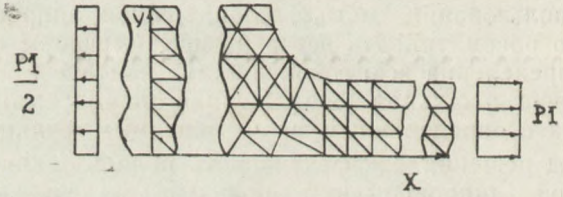

Рис. 2

Перемещения внутри элементов аппроксимировались линейной функцией

$$u=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y. \qquad (2.1)$$

Тогда компоненты перемещений выразятся через узловые перемещения в виде

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\{u\}=[\Psi]\{U\}, \tag{2.2}$$

где U — вектор узловых перемещений элемента.

Записывая выражение для полной потенциальной энергии и дифференцируя его, получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}}=\sum_{e=1}^{E}\left[\int_{V^{(e)}}[B^{(e)}][D][B^{(e)}]dV\{U\}+f^{(e)}\right]=0, \tag{2.3}$$

где $f^{(i)}$ — сумма всех усилий в элементе;

$[Д]$ — матрица упругих констант;

$[B]$ — матрица, получаемая после дифференцирования матрицы $[\psi]$.

Соотношение (2.3) с использованием глобальной матрицы жесткости и глобального вектора столбца сил запишется в виде

$$[K]\{U\}=\{Q\}. \tag{2.4}$$

Для определения узловых значений решаем систему алгебраических уравнений (2.4) методом Гаусса.

Определив узловые значения перемещений, находим значения σ_{ij}, ε_{ij} в элементах. Узловые значения σ_{ij}, ε_{ij} определяем 2 способами:

1) методом осреднения, т. е. за узловое значение принимается среднеарифметическое из всех элементов, примыкающих к данному узлу:

$$\sigma_i=\frac{\sum_{i=1}^{N}\bar{\sigma}_i}{N}; \tag{2.5}$$

2) методом сопряженной аппроксимации. Используя соотношения из способа 1, запишем

$$[C]\{\Omega\}=\{F\}.$$

Матрицы $[C]$ и $\{F\}$ представляют собой сумму матриц элемента

$$[C^{(e)}]=\int_{V^{(e)}}[\Psi^{(e)}]^T[\Psi^{(e)}]dV; \tag{2.6}$$

$$[f^{(e)}]=\int_{V^{(e)}}\bar{\sigma}[\Psi^{(e)}]^T dV, \tag{2.7}$$

где $\bar{\sigma}$ — напряжения или деформации в элементе.

3. Анализ результатов. На рис. 1, 3 приведены эпюры напряжений σ_x в зонах концентрации напряжений. В табл. 1, 2

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

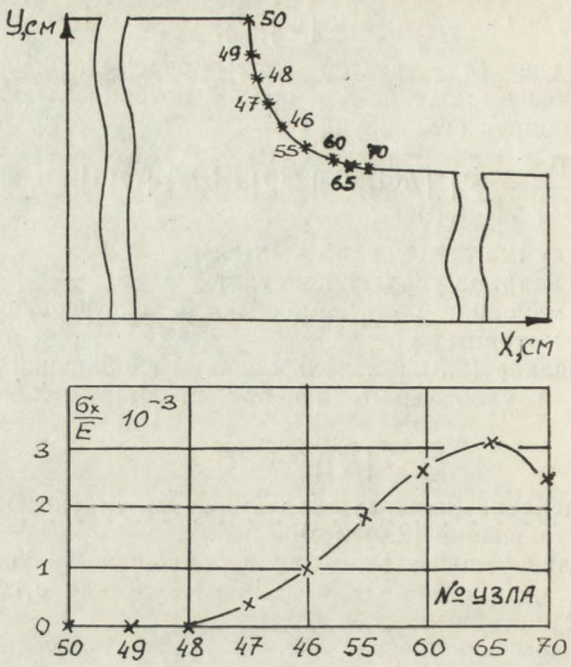

Рис. 3

приведены результаты сравнения двух методов для пластины с отверстием и ступенчатой пластины соответственно. Теоретические значения коэффициентов концентрации напряжений [2]

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_N} \qquad (3.1)$$

Таблица 1

Сравнение напряжения для задачи о растяжении пластины с отверстием

Способ	Координаты у точек при $X=0$, см					
	1,0	1,07	1,24	1,5	3,56	5,2
По методу сопряженной аппроксимации	2,44	2,05	1,63	1,25	0,83	0,75
По методу осреднения	2,24	1,98	1,61	1,27	0,83	0,77

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Таблица 2

Ступенчатая пластина с гантелями. Значения напряжений σ_x, кгс/см²

Способ	Номер узлов								
	70	65	60	55	46	47	48	49	50
По методу сопряженной аппроксимации	5,12	**6,31**	5,4	3,68	1,9	0,77	0,21	0,06	0,008
По методу осреднения	5,2	5,79	5,22	3,87	2,22	0,93	0,31	0,06	—0,003

отличаются от расчетных коэффициентов, полученных по методу сопряженной аппроксимации не более 1%, а по методу осреднения — до 10%.

Таким образом, показано, что применение метода сопряженной аппроксимации при расчете напряженно-деформированного состояния конструкций методом конечных элементов позволяет существенно уточнить полученное численное решение на сравнительно крупных расчетных сетках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.— М.: Мир, 1976.— 464 с.
2. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. — М.: Мир, 1977.— 302 с.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов.— М.: Мир, 1979.— 392 с.
4. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике.— М.: Мир, 1975.— 541 с.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ОЦЕНКА НЕСИММЕТРИЧНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

В. Н. Лихачев

Процесс несимметричного деформирования оболочек был рассмотрен в работах [1—3], где отмечалось, что модель оболочки первого приближения, основанная на гипотезах Кирхгоффа-Лява, приемлема для расчета оболочечных конструкций при ударном нагружении. Она дает хорошо совпадающую качественно и количественно картину деформирования с моделью оболочки второго приближения типа Тимошенко, но при этом существенно, почти в два раза, уменьшается время расчетов на ЭВМ, хотя его затраты велики и в этом случае. Возникает необходимость в более простой и экономичной оценке напряженно-деформированного состояния (НДС) в рамках теории оболочек.

В данной работе рассматривается процесс деформирования упругопластической оболочки вращения под действием ударной осесимметричной нагрузки с целью сравнения результатов с теми, что получены в аналогичной по постановке задаче, но при действии несимметричной ударной нагрузки, при этом максимальные значения нагрузок в обеих задачах совпадают.

В качестве исходных соотношений принимались уточненные уравнения движения элемента оболочки [4]:

$$\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial N_{11}}{\partial s}+\frac{\sin\alpha}{R}(N_{22}-N_{11})-\frac{1}{R_1}\left[\frac{\partial M_{11}}{\partial s}-\frac{\sin\alpha}{R}M_{11}\right]+q_1;$$

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial s^2}-\frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial M_{11}}{\partial s}-$$

$$-\frac{\sin\alpha}{R}\left[\frac{\partial M_{11}}{\partial s}-\frac{\sin\alpha}{R}M_{11}\right]+\frac{N_{11}}{R_1}+\frac{N_{22}}{R_2}+q_3,$$

где N_{11}, N_{22}, M_{11}, M_{22}— усилия и моменты; q_1, q_3— силы, приложенные в направлении s и z к элементу оболочки. Деформа-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ции и кривизны линейно зависят от перемещений и представляются в виде

$$e_{11}=\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{w}{R_1},\quad e_{22}=-\frac{\sin\alpha}{R}\cdot u-\frac{w}{R_2},\quad e_{12}=0,$$

$$\varkappa_{11}=-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u}{R_1}+\frac{\partial w}{\partial s}\right),\quad \varkappa_{22}=\frac{\sin\alpha}{R}\left(\frac{u}{R_1}+\frac{\partial w}{\partial s}\right),\quad \varkappa_{12}=0.$$

Материал оболочки удовлетворяет соотношениям теории малых упругопластических деформаций А. А. Ильюшина. Разгрузка материала не учитывается. Физические соотношения принимают вид

$$N_{11}=B[1-\omega(e_i)](e_{11}+\nu e_{22}),\quad N_{22}=B[1-\omega(e_i)](e_{22}+\nu e_{11}),$$
$$M_{11}=D[1-\omega(e_i)](\varkappa_{11}+\nu\varkappa_{22}),\quad M_{22}=D[1-\omega(e_i)](\varkappa_{22}+\nu\varkappa_{11}),$$

где $\omega(e_i)$ — функция пластичности Ильюшина [5].

Начальные условия в задаче принимаются нулевыми:

$$u(s,\,0)=w(s,\,0)=0,\quad \dot{u}(s,\,0)=\dot{w}(s,\,0)=0.$$

Граничным условиям одного торца оболочки соответствует жесткая заделка в невесомую недеформируемую диафрагму. Другой торец оболочки находится под действием осевой нагрузки $P(x,\,t)$, которая может быть представлена следующим образом:

$$P(x,\,t)=\Phi_{\text{м}}\cdot T(t),$$

где $\Phi_{\text{м}}$ — максимальное значение осевого усилия; $T(t)$ — закон изменения нагрузки во времени. В данной задаче нагрузка возрастает от $\tau=0$ до $\tau=2$ и убывает до $\tau=5$ линейно. За $\tau=1$ принято время пробега упругой волны по длине оболочки.

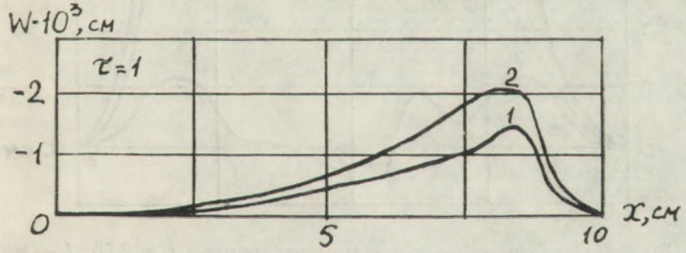

Рис. 1. Прогибы оболочки в момент времени $\tau=1$: *1* — при несимметричной нагрузке; *2* — при осесимметричной нагрузке

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Численное решение задачи проводится по нецентральной разностной схеме второго порядка точности относительно шагов по пространственной и временной координатам [6]. Тестовые расчеты проведены для цилиндрической оболочки со следующими геометрическими и физико-механическими характеристиками: длина $L = 10$ см, радиус $R = 2{,}45$ см, толщина

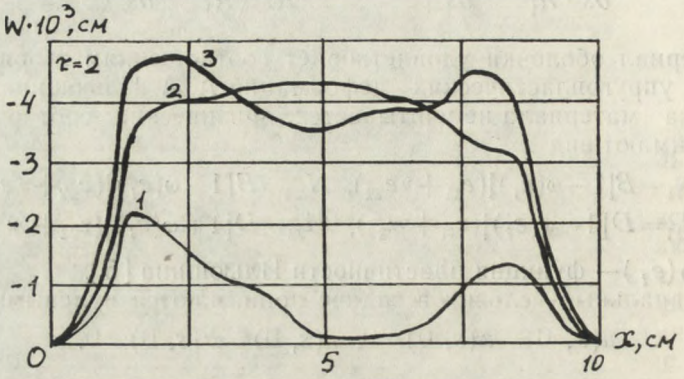

Рис 2. Прогибы оболочки в момент времени $\tau = 2$: *1* — минимальные при несимметричной нагрузке; *2* — при осесимметричной нагрузке; *3* — максимальные при несимметричной нагрузке

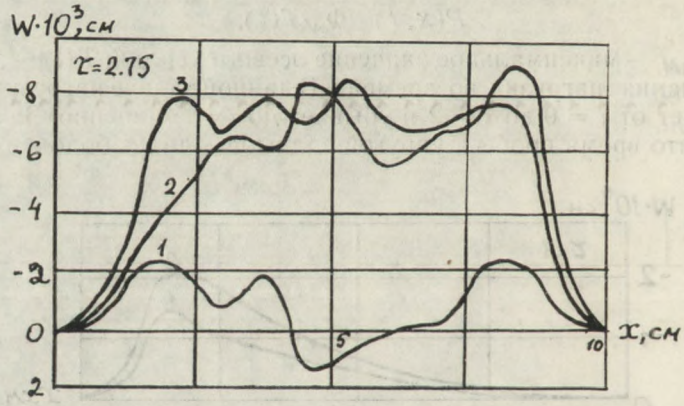

Рис. 3. Прогибы оболочки в момент времени $\tau = 2{,}75$: *1* — минимальные при несимметричной нагрузке; *2* — при осесимметричной нагрузке; *3* — максимальные при несимметричной нагрузке.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$h = 0{,}2$ см, материал — дюралюминий; модуль Юнга $E = 7 \cdot 10^5$ кг/см^2, плотность $\rho = 2{,}79 \cdot 10^{-3}$ кг/см^3, коэффициенг Пуассона $\nu = 0{,}31$. По длине оболочка разбивалась сеткой в 14 узлов, число шагов на единицу времени $N = 300$.

Получены результаты, которые можно использовать для оценки несимметричного НДС оболочки вращения. На рис. 1—3 представлены эпюры прогибов, полученные при решении двух задач в различные моменты времени, кривые *2* — эпюры прогибов при осесимметричной нагрузке, кривые *1* и *3* — несимметричной, причем кривые *3* — для максимальных прогибов, а *1* — для минимальных. На рис. 1 кривые *1* и *3* совпадают.

На основании анализа полученных результатов можно сделать вывод, что полученное решение качественно верно описывает процесс деформирования оболочки во времени, хорошо прослеживается возникновение и развитие волнового процесса. Количественные оценки для прогибов при осесимметричном нагружении на 5—10% выше, чем при несимметричном, что при значительном выигрыше во времени и экономии ресурсов ЭВМ можно считать удовлетворительным для оценочного расчета несимметричного НДС оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Люкшин Б. А. Расчет несимметричного упругого деформирования оболочек вращения.— В кн.: Механика сплошных сред. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983, с. 3—9.

2. Лихачев В. Н. Неосесимметричное напряженно-деформированное состояние упругопластической оболочки под действием ударной нагрузки.— Материалы XXI Всес. науч. конф. Математика. Новосибирск, 1983, с. 38—42.

3. Лихачев В. Н., Люкшин Б. А. Численное исследование неосесимметричного НДС упругопластической оболочки вращения переменной толщины при ударном нагружении.— VIII Всес. конф. по прочн. и пластич. Тезисы докладов. Пермь, 1983, с. 102.

4. Огибалов П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963.— 417 с.

5. Ильюшин А. А. Пластичность.— М.: Гостехиздат, 1948.— 376 с.

6. Уорминг, Кутлер, Ломакс. Нецентральные разностные схемы II и III порядка точности для решения нелинейных уравнений гиперболического типа.— Рак. техн. и косм., 1973, т. 11, № 2, с. 76—85.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

П. А. Люкшин

При расчете на устойчивость сферического днища с радиально-кольцевым подкреплением возникает вопрос о местной устойчивости (участок обшивки между двумя соседними стрингерами и шпангоутами). Потеря устойчивости сферической панели (рис. 1) может происходить раньше общей формы потери

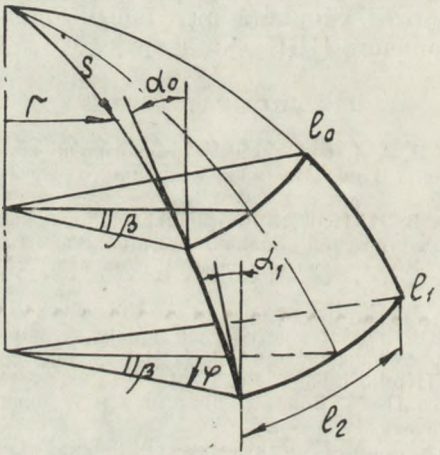

Рис. 1. Ортотропная сферическая панель

устойчивости сферического днища (когда выпучина захватывает в свои пределы не только обшивку, но и подкрепляющие элементы). Местная форма потери устойчивости обшивки может происходить раньше общей как из-за малой толщины обшивки, так и вследствие того, что модуль упругости обшивки может быть в 2 — 3 раза меньше модулей упругости подкрепляющих элементов (в случае использования композиционных материалов).

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Для получения уравнений устойчивости используем метод «фиктивной нагрузки» [1].

Уравнения нейтрального равновесия сферической панели в усилиях-моментах имеют вид [1]:

$$\frac{\partial N_1}{\partial s}+\frac{\partial T}{r\partial\varphi}+\frac{1}{r}(N_1-N_2)(-\sin\alpha)-\frac{Q_1}{R_{0Б}}=0;$$

$$\frac{\partial N_2}{r\partial\varphi}+\frac{\partial T}{\partial s}+\frac{2T}{r}(-\sin\alpha)-\frac{Q_2}{R_{0Б}}=0; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial s^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial^2 H}{\partial s\partial\varphi}+\frac{2}{r}\frac{\partial M_1}{\partial s}(-\sin\alpha)-\frac{\partial M_2}{\partial s}\frac{1}{r}(-\sin\alpha)-$$

$$-\frac{M_1-M_2}{R_{0Б}^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 M_2}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial H}{\partial\varphi}(-\sin\alpha)+\frac{N_1+N_2}{R_{0Б}}+$$

$$+N_1^0\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)+N_2^0\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}(-\sin\alpha)\right)=0,$$

где N_1, N_2, T — усилия растяжения-сжатия и сдвига; Q_1, Q_2 — перерезывающие силы; M_1, M_2, H — изгибающие и крутящий моменты; N_1^0, N_2^0 — усилия,, возникающие в панели перед потерей устойчивости; α — угол между касательной к меридиану и осью вращения; $R_{0Б}$ — радиус срединной поверхности сферической оболочки.

Кинематические и физические соотношения для сферической панели принимаются линейными и запишутся в виде [2]:

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u_1}{\partial s}-\frac{w}{R_{0Б}};\quad \varepsilon_2=\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial\varphi}+\frac{u_1}{r}(-\sin\alpha)-\frac{w}{R_{0Б}};$$

$$\gamma=\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_2}{\partial s}-\frac{u_2}{r}(-\sin\alpha);\quad \varkappa_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial s^2};$$

$$\varkappa_2=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r}(-\sin\alpha)\frac{\partial w}{\partial s}; \qquad (2)$$

$$\chi=-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial s\partial\varphi}+\frac{(-\sin\alpha)}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi};$$

$$N_1=\frac{E_{10}h}{1-\mu_1\mu_2}(\varepsilon_1+\mu_2\varepsilon_2);\quad N_2=\frac{E_{20}h}{1-\mu_1\mu_2}(\varepsilon_2+\mu_1\varepsilon_1);$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$T=Gh\gamma; \qquad H=\frac{Gh^3}{6}\chi;$$

$$M_1=\frac{E_{10}h^3}{12(1-\mu_1\mu_2)}(\varkappa_1+\mu_2\varkappa_2); \qquad M_2=\frac{E_{20}h^3}{12(1-\mu_1\mu_2)}(\varkappa_2+\mu_1\varkappa_1),$$

где ε_1, ε_2, γ — деформации растяжения-сжатия и сдвига; u_1, u_2, w — перемещения в меридиональном, широтном и нормальном направлениях; $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, χ — изменения кривизн и кручения; E_{10}, E_{20}, G — модули упругости на растяжение-сжатие и сдвиг.

Докритические усилия N_1^0, N_2^0, действующие в сферической панели, находятся из предположения, что в подкрепленном сферическом днище его элементы напряжены так, как если бы внешнее давление q_3 воспринималось только обшивкой, т. е.

$$N_1^0=N_2^0=\frac{q_3R_{0б}}{2}. \tag{3}$$

Подставляя в уравнение (1) усилия и моменты, выраженные через перемещения, получим уравнения нейтрального равновесия ортотропной сферической панели в перемещениях, которые здесь из-за их громоздкости не приводятся. На кромках сферической панели ставятся условия неподвижного шарнира

$$\left.\begin{aligned} s&=l_0,\\ s&=l_1,\end{aligned}\right\} \; u_1=u_2=w=M_1=0,$$

$$\varphi=\pm\beta, \quad u_1=u_2=w=M_2=0. \tag{4}$$

Задача нахождения критической нагрузки сферической панели сводится к задаче нахождения собственных чисел системы однородных дифференциальных уравнений в частных производных с однородными граничными условиями. Методом Власова—Канторовича [4] система дифференциальных уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого представляем перемещения в виде [3]:

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(s)\cos(2n-1)\frac{\pi\varphi}{2\beta};$$

$$u_2=\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}(s)\sin 2n\frac{\pi\varphi}{2\beta};$$

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}u_{1n}(s)\cos(2n-1)\frac{\pi\varphi}{2\beta}. \tag{5}$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Подставляя в уравнения нейтрального равновесия аппроксимации (5) и используя метод Власова—Канторовича [4], можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует отметить, что если в аппроксимациях для перемещений (5) сохранять один член, то в результате применения метода Власова—Канторовича получается система из 3 обыкновенных дифференциальных уравнений, если в (5) сохранять 2 члена, то получается система из 6 уравнений и т. д. Максимальное число членов, удерживаемое в аппроксимациях для перемещений в данной работе, равнялось трем.

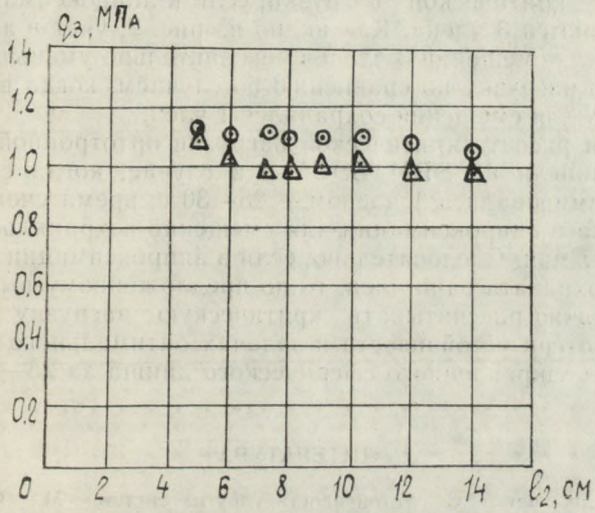

Рис. 2. Зависимость критического внешнего давления сферической панели от размера панели l_2

Полученные системы обыкновенных дифференциальных уравнений решались методом конечных разностей (МКР). Число разбиений панели в меридиональном направлении при использовании МКР равнялось десяти.

В результате использования МКР система обыкновенных дифференциальных уравнений сводилась к системе алгебраических уравнений. Насчитывая определитель системы алгебраических уравнений для возрастающих значений параметра внешней нагрузки и определяя интервал нагрузок, в котором определитель меняет свой знак, получим значение критической нагрузки сферической панели.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Были найдены критические нагрузки сферической панели со следующими геометрическими и физико-механическими характеристиками: $R_{об} = 29{,}55$ см, $c = 23$ см, $l_0 = 21{,}08$ см, $l_1 = 26{,}35$ см, $h = 0{,}057$ см, $E_{10} = E_{20} = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 0{,}77 \cdot 10^5$ МПа, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$. Размер панели l_2 по широте сферического днища изменялся в пределах 4—14 см. На рис. 2 приведена зависимость критического внешнего давления от размера панели l_2. Кружочками обозначены значения критической нагрузки сферической панели в случае, если в аппроксимациях для смещений (5) удерживается 1 член, треугольниками — значения критической нагрузки, если в аппроксимациях (5) удерживаются 3 члена. Как видно из рис. 2, учет в аппроксимациях для смещений 3 членов незначительно уменьшает критическую нагрузку по сравнению со случаем, когда в аппроксимациях для смещений сохранялся 1 член.

Время расчета критической нагрузки ортотропной сферической панели на ЭВМ БЭСМ-6 в случае, когда смещения аппроксимировались 1 членом,— 25—30 с, время счета в случае, когда в аппроксимации для смещений сохранялось 3 члена,— 5—7 мин. Следовательно, если в аппроксимации для смещений сохранять один член, то по предложенному выше алгоритму можно рассчитывать критическую нагрузку местной формы потери устойчивости в задачах оптимального проектирования подкрепленного сферического днища за 25—30 с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем.— М.: Физматгиз, 1963.— 880 с.

2. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ.— М.: Машиностроение, 1976.— 278 с.

3. Костров В. П. Исследования напряженно-деформированного состояния конической панели при воздействии нормального давления.— В кн.: Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1976, с. 85—95.

4. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука, 1970.— 512 с.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ ВЫСОКОТОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. Д. Матвеев, Ю. В. Немировский

При решении задач теории упругости методом конечных элементов (МКЭ) применяется матричный метод [1] вычисления матрицы жесткости трехмерных элементов, который состоит в следующем.

Пусть для трехмерного элемента определена матрица формы, т. е. определено соотношение [1]:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\} = [N]\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{3n} \end{Bmatrix}, \qquad (1)$$

где u, v, w — функции перемещений точек элемента соответственно в направлении осей x, y, z декартовой системы координат xyz; $\{\delta\}$ — вектор узловых неизвестных элемента размерности; $[N]$ — матрица размерности $(3 \times 3n)$; n — число функций формы элемента для аппроксимации функций u, v, w. Матрица $[N]$ и вектор $\{\delta\}$ имеют структуру

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 \ldots N_n\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0\ N_1 \ldots N_n & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0\ N_1 \ldots N_n \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где $N_1, \cdots, N_n$ — функции формы элемента;

$\delta_1, \cdots, \delta_n$ — узловые перемещения в направлении u;

$\delta_{n+1}, \cdots, \delta_{2n}$ — узловые перемещения в направлении v;

$\delta_{2n+1}, \cdots, \delta_{3n}$ — узловые перемещения в направлении w.

Тогда матрица жесткости определяется по формуле

$$[K] = \int_V [B]^T [D][B] dV, \qquad (3)$$

где V — объем элемента; $[Д]$ — матрица упругих характеристик элемента размерности (6×6); $[K]$ — матрица жесткости элемента размерности $(3n \times 3n)$; $[B]$ — матрица размерности $(6 \times 3n)$, которая имеет вид

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$[B]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x}\ldots\frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \ \ldots\ 0 & 0 \ \ldots\ 0 \\ 0 \ \ldots\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y}\ldots\frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \ \ldots\ 0 \\ 0 \ \ldots\ 0 & 0 \ \ldots\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z}\ldots\frac{\partial N_n}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y}\ldots\frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x}\ldots\frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \ \ldots\ 0 \\ 0 \ \ldots\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z}\ldots\frac{\partial N_n}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y}\ldots\frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z}\ldots\frac{\partial N_n}{\partial z} & 0 \ \ldots\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x}\ldots\frac{dN_n}{\partial x} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Матрица $[Д]$ определяется из соотношений закона Гука

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \vdots \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}=[D]\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \vdots \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

($\sigma_x,\ldots,\ \tau_{xz},\ \varepsilon_x,\ldots,\ \gamma_{xz}$ — компоненты полей напряжений и деформаций элемента) и для изотропного элемента имеет вид

$$[D]=\frac{2bE}{1+\nu}\begin{bmatrix} 1 & a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $a=\frac{\nu}{1-\nu}$; $b=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$;

E — модуль упругости; γ — коэффициент Пуассона.

Интеграл (3) для высокоточных элементов определяется с помощью методов численного интегрирования. Самый простой алгоритм вычисления интеграла (3) на ЭВМ сводится к замене этого интеграла интегральной суммой. В результате

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

приближенные значения коэффициентов K_{ij} матрицы $[k']$ определяются по формуле

$$K_{ij}=\sum_{k=1}^{N_0}\left(\sum_{e=1}^{6}\left(\sum_{\alpha=1}^{6}B_{i\alpha}^{P}D_{\alpha e}^{P}\right)B_{ej}^{P}\right)\Delta V_K \qquad (6)$$
$$(i=1,\ldots,3n,\ j=i,\ldots,3n),$$

где $B_{i\alpha}^{P}$, $D_{\alpha i}^{P}$ — значения элементов матриц $[B]$, $[Д]$, вычисленных для точки P центра объема ΔV_k. На современных ЭВМ можно достигнуть точности вычисления интеграла (3) по формуле (6), которая вполне удовлетворяет требованиям инженерных расчетов. Поэтому нет необходимости использовать функции формы элемента в L-координатах [1] для элементов типа тетраэдра и прямоугольной призмы, так как это усложняет структуру реализуемой программы МКЭ. Однако вычисление интеграла (3) по формуле (6) связано с большим объемом арифметических операций, что приводит к существенному повышению времени вычисления и необходимости применения быстродействующих ЭВМ. В данной работе предложен алгоритм определения матрицы жесткости трехмерных высокоточных элементов, объем вычислений которого в несколько раз меньше объема вычислений по формуле (6). Алгоритм основан на представлении потенциальной энергии деформации элемента через энергетическое скалярное произведение [2]. Коэффициенты матрицы жесткости выражаются в явном виде через функции формы N_α элемента, а для прямоугольной призмы (прямоугольного элемента) в соответствии с предлагаемым алгоритмом — аналитически. Для изотропного элемента коэффициенты верхней треугольной части матрицы $[K]$ определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned}K_{\alpha e}&=(\lambda+2G)a_{\alpha e}+G(b_{\alpha e}+c_{\alpha e}),\\K_{\alpha+n,e+n}&=(\lambda+2G)b_{\alpha e}+G(a_{\alpha e}+c_{\alpha e}),\\K_{\alpha+2n,e+2n}&=(\lambda+2G)c_{\alpha e}+G(a_{\alpha e}+b_{\alpha e}),\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\alpha=1,\ldots,n,\\&e=\alpha,\ldots,n;\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}K_{\alpha+n,e+2n}&=\lambda f_{\alpha e}+Gf_{e\alpha},\\K_{\alpha,e+2n}&=\lambda p_{\alpha e}+Gp_{e\alpha},\\K_{\alpha,e+n}&=\lambda d_{\alpha e}+Gd_{e\alpha},\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\alpha=1,\ldots,n,\\&e=1,\ldots,n,\end{aligned} \qquad (7)$$

где $\lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$; G — модуль сдвига;

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\left.\begin{aligned} a_{\alpha e} &= \int_V \frac{\partial N_\alpha}{\partial x}\frac{\partial N_e}{\partial x}\,dV, \\ b_{\alpha e} &= \int_V \frac{\partial N_\alpha}{\partial y}\frac{\partial N_e}{\partial y}\,dV, \\ c_{\alpha e} &= \int_V \frac{\partial N_\alpha}{\partial z}\frac{\partial N_e}{\partial z}\,dV, \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} \alpha=1,\ldots,n, \\ e=\alpha,\ldots,n; \end{matrix} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{\alpha e} &= \int_V \frac{\partial N_\alpha}{\partial x}\frac{\partial N_e}{\partial z}\,dV, \\ d_{\alpha e} &= \int_V \frac{\partial N_\alpha}{\partial x}\frac{\partial N_e}{\partial y}\,dV, \\ f_{\alpha e} &= \int_V \frac{\partial N_\alpha}{\partial y}\frac{\partial N_e}{\partial z}\,dV, \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} \alpha=1,\ldots,n, \\ e=1,\ldots,n. \end{matrix}$$

В этом случае вектор $\{R\}$ узловых усилий элемента определяется по формуле

$$\{R\} = -\int_V [N]^T \{F\} dV = -\int_V \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} dV,$$

где F_x, F_y, F_z — компоненты внешних объемных сил элемента в направлении осей x, y, z. В силу симметрии матриц $[K]$ коэффициенты ее нижней треугольной части определяются из равенств

$$K_{e\alpha} = K_{\alpha e}, \quad \alpha=1,\ldots,3n, \quad e=\alpha,\ldots,3n.$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Покажем процедуру вывода формул (7), (8) вычисления коэффициентов матрицы жесткости для изотропного элемента. Вид энергетического скалярного произведения определяется видом потенциальной энергии деформации элемента и для данного случая эта энергия имеет вид

$$\Pi=G\int_V\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\}dV. \qquad (9)$$

Для потенциальной энергии деформации (11) энергетическое скалярное произведение $(\ ,\ )_e$ представляется в виде

$$(\Phi_1,\Phi_2)_e=G\int_V\left\{\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}\frac{\partial w_2}{\partial z}+\right.$$

$$+\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)+ \qquad (10)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}+\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_2}{\partial z}+\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)\right]dV,\right.$$

где $\Phi_1=\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\w_1\end{Bmatrix}$, $\Phi_2=\begin{Bmatrix}u_2\\v_2\\w_2\end{Bmatrix}$ — векторы возможных перемещений элемента.

Потенциальная энергия элемента с помощью скалярного произведения (12) может быть представлена

$$\Pi_0=\left(\sum_{i=1}^{3n}\Phi_i\delta_i,\sum_{j=1}^{3n}\Phi_j\delta_j\right)_e-\sum_{i=1}^{3n}\delta_i A(\Phi_i), \qquad (11)$$

где $\Phi_i=\begin{Bmatrix}N_{1i}\\N_{2i}\\N_{3i}\end{Bmatrix}$, $i=1,\ldots,3n$;

N_{ij} — элементы матрицы формы $[N]$, т. е. матрицы (2);

$A(\Phi_i)$ — работа внешних сил элемента на векторе перемещений Φ_i;

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

δ_i — компоненты вектора $\{\delta\}$ узловых неизвестных элемента.

Из условия

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \delta_i} = 0$$

получаем систему уравнений равновесия элемента

$$\sum_{j=1}^{3n} (\Phi_i, \Phi_j)_e \delta_j = A(\Phi_i), \quad i=1,\ldots,3n. \tag{12}$$

Отсюда находим выражение для коэффициентов K_{ij} матрицы жесткости $[K]$ элемента через скалярное произведение $(,)_e$

$$K_{ij} = (\Phi_i, \Phi_j)_e, \quad i,j=1,\ldots,3n. \tag{13}$$

Из (15) с учетом (12) и вида векторов Φ_i получаем формулы (7), (8).

Для того же самого представления объема V элементарными объемами $\Delta V_1, \cdots, \Delta V_{N_0}$, которое используется для вычисления интеграла (3) по формуле (6), интегралы (8) будем определять по формулам:

$$\left.\begin{aligned} a_{\alpha e} &= \sum_{k=1}^{N_0} \frac{\partial V_\alpha^p}{\partial x} \frac{\partial N_e^p}{\partial x} \Delta V_k, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ c_{\alpha e} &= \sum_{k=1}^{N_0} \frac{\partial N_\alpha^p}{\partial z} \frac{\partial V_e^p}{\partial z} \Delta V_k, \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \alpha=1,\ldots,n, \\ e=\alpha,\ldots,n; \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} d_{\alpha e} &= \sum_{k=1}^{N_0} \frac{\partial N_\alpha^p}{\partial x} \frac{\partial N_e^p}{\partial y} \Delta V_k, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_{\alpha e} &= \sum_{k=1}^{N_0} \frac{\partial N_\alpha^p}{\partial y} \frac{\partial N_e^p}{\partial z} \Delta V_k, \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \alpha=1,\ldots,n, \\ e=1,\ldots,n, \end{array} \tag{14}$$

где $\frac{\partial V_\alpha^p}{\partial x}, \frac{\partial N_\alpha^p}{\partial y}, \frac{\partial N_\alpha^p}{\partial z}$ — значения функций $\frac{\partial V_\alpha}{\partial x}, \frac{\partial N_\alpha}{\partial y}, \frac{\partial N_\alpha}{\partial z}$ в центре объема ΔV_k.

Пусть для точки P элемента определены значения функций

$$\nu^p, E^p, \frac{\partial N_\alpha^p}{\partial x}, \frac{\partial N_\alpha^p}{\partial y}, \frac{\partial N_\alpha^p}{\partial z}, \tag{15}$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

а следовательно, в силу (4), (5) определены коэффициенты $B^p_{l\alpha}$, $D^p_{\alpha e}$ матриц $[B]$, $[Д]$. Тогда из сравнения (6) и (14) нетрудно видеть, что для значений (15) число операций умножения формулы (6) в 12 раз больше числа операций умножения формул (14), т. е. алгоритм определения коэффициентов матрицы жёсткости по формулам (7), (14) является более экономичным по объему вычислений, чем алгоритм вычисления по формуле (6). Для элемента в форме прямоугольной призмы интегралы (8) вычисляются аналитически. Действительно, следуя МКЭ [1], функции формы N представим в виде

$$N_\alpha = \sum_{l=1}^{n} r_{l\alpha} f_l, \tag{16}$$

где $f_l = f_l(x, y, z) = x^{\alpha_l} y^{\beta_l} z^{\gamma_l}$ (17)

степени α_l, β_l, γ_l, определяемые структурой аппроксимирующего полинома u, v, $w = \sum_{l=1}^{n} a_l f_l$;

$r_{l\alpha}$ — коэффициенты матрицы $[r]$, которая определяется соотношением $\{a\} = [r]\{\bar{\delta}\}$

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{\delta}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{\delta}_n \end{Bmatrix};$$

$\bar{\delta}_l$ — узловые перемещения в направлении u, v, w.

Дифференцируя (16), получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} &= \sum_{l=1}^{n} r_{l\alpha} f^l_x, \\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} &= \sum_{l=1}^{n} r_{l\alpha} f^l_y, \\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} &= \sum_{l=1}^{n} r_{l\alpha} f^l_z, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где

$$\left.\begin{aligned} f^l_x &= \frac{\partial f_l}{\partial x} = \alpha_l x^{\alpha^x_l} y^{\beta^x_l} z^{\gamma^x_l}, \\ f^l_y &= \frac{\partial f_l}{\partial y} = \beta_l x^{\alpha^y_l} y^{\beta^y_l} z^{\gamma^y_l}, \\ f^l_z &= \frac{\partial f_l}{\partial z} = \gamma_l x^{\alpha^z_l} y^{\beta^z_l} z^{\gamma^z_l}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\alpha_i^x=\alpha_i-1,\ \beta_i^x=\beta_i,\ \gamma_i^x=\gamma_i,$$
$$\alpha_i^y=\alpha_i,\ \beta_i^y=\beta_i-1,\ \gamma_i^y=\gamma_i,$$
$$\alpha_i^z=\alpha_i,\ \beta_i^z=\beta_i,\ \gamma_i^z=\gamma_i-1.$$

Подставляя (18) в (8) и учитывая обозначения (19), получаем

$$\left.\begin{aligned} a_{\alpha e}&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} r_{i\alpha}r_{je}\bar{a}_{\alpha e},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ c_{\alpha e}&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} r_{i\alpha}r_{je}\bar{c}_{\alpha e}, \end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&\alpha=1,\ldots,n,\\ &e=\alpha,\ldots,n;\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} d_{\alpha e}&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} r_{i\alpha}r_{je}\bar{d}_{\alpha e},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ f_{\alpha e}&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} r_{i\alpha}r_{je}\bar{f}_{\alpha e}, \end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&\alpha=1,\ldots,n,\\ &e=1,\ldots,n,\end{aligned} \qquad (20)$$

где

$$\bar{a}_{\alpha e}=\frac{\alpha_i\alpha_j}{(\alpha_i^x+\alpha_j^x+1)(\beta_i+1)(\gamma_i+1)}a_0^{\alpha_i^x+\alpha_j^x+1}b_0^{\beta_i+1}c_0^{\gamma_i+1};$$

. . . . . .

$$\bar{f}_{\alpha e}=\frac{\beta_i\gamma_i}{(\alpha_i+1)(\beta_i^y+1)(\gamma_i^z+1)}a_0^{\alpha_i+1}b_0^{\beta_i^y+1}c_0^{\gamma_i^z+1};$$

a_0, b_0, c_0— длины сторон элемента в направлениях x, y, z.

Для двумерного изотропного элемента коэффициенты верхней треугольной части матрицы $[K]$ определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} K_{\alpha e}&=(\lambda+2G)a_{\alpha e}+Gb_{\alpha e},\\ K_{\alpha+n,\,e+n}&=(\lambda+2G)b_{\alpha e}+Ga_{\alpha e},\\ K_{\alpha,e+n}&=\lambda d_{\alpha e}+Gd_{e\alpha},\ \alpha,e=1,\ldots,n, \end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&\alpha=1,\ldots,n,\\ &e=\alpha,\ldots,n,\end{aligned} \qquad (21)$$

где $a_{\alpha e}=\int\limits_V \frac{\partial N_\alpha}{\partial x}\frac{\partial N_e}{\partial x}dV$; $b_{\alpha e}=\int\limits_V \frac{\partial N_\alpha}{\partial y}\frac{\partial N_e}{\partial y}\partial V$;

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$d_{ae} = \int_V \frac{\partial N_a}{\partial x} \frac{\partial N_e}{\partial y} dV,$$

N_a — функция формы двумерного элемента.

Матрица формы $[N]$ имеет вид

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 \ldots N_n & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & N_1 \ldots N_n \end{bmatrix}.$$

Матрица жесткости $[K]$ имеет размерность $(2n \times 2n)$. Для прямоугольного элемента аналогичным образом можно получить аналитические выражения для определения коэффициентов матрицы жесткости.

В качестве примера рассматривалось решение задачи растяжения прямоугольного бруса равномерной нагрузкой в сечениях A, B (рис. 1). Площадь сечения равна 1, $E = 1$. Брус

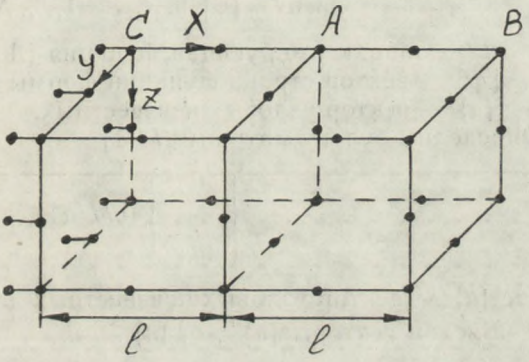

Рис. 1. Представление бруса призматическими элементами

закреплен только в направлении $\bar{x}$ сечения C. Перемещения точек сечения $B = 3l$, $\nu = 0{,}3$, l — длина элемента в направлении x. Брус представлен двумя элементами. Каждый элемент имеет 20 узлов [1]. Время вычисления на ЭВМ ЕС-1052 матрицы жесткости по формулам (7), (14) элемента формы прямоугольной призмы с 20 узловыми точками составляет менее 3 мин. При этом погрешность решения по перемещениям в узловых точках не превышает 2%. Применение высокоточных элементов резко повышает порядок системы уравнений МКЭ. Покажем процедуру многократного уменьшения числа неизвестных в МКЭ на примере плоской задачи теории упругости. Задача изгиба пластины формы S и кручение упругого

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

стержня постоянного поперечного сечения S[2] описываются операторным уравнением вида

$$Aw=f,$$

где A — дифференциальный оператор данной задачи; w — искомая функция; f — заданная функция в S.

Функцию w_n МКЭ для области $S \approx S^N = \bigcup_{k=1}^{N} S_k$, удовлетворяющую по МКЭ главным граничным условиям данной задачи, представим в виде

$$w_n = \begin{cases} w^1 \text{ для элемента } S_1, \\ \vdots \\ w^N \text{ для элемента } S_N, \end{cases} \tag{22}$$

где

$$w^e = [\varphi]^e \{a\}^e, \quad e=1,\ldots,N; \tag{23}$$

w^e — аппроксимирующая функция [1] для S_e;
$[\varphi]^e$ — вектор-строка функций формы [1];
$\{a\}^e$ — вектор узловых неизвестных.

Определим булеву матрицу H [3]:

$$\begin{Bmatrix} \{a\}^1 \\ \vdots \\ \{a\}^N \end{Bmatrix} = H\{a\}_n, \tag{24}$$

где $\{a\}_n$ — вектор узловых неизвестных для S^N.

Введем векторы $\{a\}_k^1, \cdots, \{a\}_k^N$

$$\begin{Bmatrix} \{a\}_k^1 \\ \vdots \\ \{a\}_k^N \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \delta_{1k} \\ \vdots \\ \delta_{nk} \end{Bmatrix}, \tag{25}$$

где $k=1, \cdots, n$, n — размерность вектора $\{a\}_n$;

δ_{ik} — символ Кронекера; размерности векторов $\{a\}^e$ и $\{a\}_k^e$ для $k=1, \cdots, n$ равны.

Покажем, что

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \Phi_k = [\Phi]\{a\}_n, \tag{26}$$

где a_n — компоненты $\{a\}_n$; $[\Phi]$ — вектор-строка $[\Phi] = [\Phi_1, \cdots, \Phi_n]$,

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\Phi_k = \begin{cases} w_k^1 \text{ для } S_1; \\ \vdots \\ w_k^N \text{ для } S_N, \end{cases} \tag{27}$$

где
$$w_k^e = [\varphi]^e \{a\}_k^e. \tag{28}$$

Используя (25), определим равенства

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \{a\}_k^1 \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_n \{a\}_k^N \end{array} \right\} = H, \quad \left\{ \begin{array}{c} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \delta_{1k} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \delta_{nk} \end{array} \right\} = H\{a\}_n, \tag{29}$$

Сравнивая (29) и (24) и учитывая, что размерности векторов $\{a\}^e$ и $\{a\}_k^e$ равны, получим

$$\{a\}^e = \sum_{k=1}^{n} a_k \{a\}_k^e. \tag{30}$$

Используя (27), (28), определим равенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \Phi_k = \begin{cases} [\varphi]^1 \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \{a\}_k^1 \text{ для } S_1, \\ [\varphi]^N \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \{a\}_k^N \text{ для } S_N F. \end{cases} \tag{31}$$

Сравнивая (31) и (22) с учетом (30), (23), получим (26). Систему уравнений МКЭ [4], используя функцию (26), представим в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_k [\Phi_m, \Phi_k]_e = (f, \Phi_m) m = 1, \ldots, n, \tag{32}$$

где $[,]_e$ — энергетическое скалярное произведение [4] данной задачи

$$[\Phi_m, \Phi_k]_e = (A\Phi_m, \Phi_k), \quad (f, \Phi_m) = \sum_{e=1}^{N} (f, w_m^e).$$

Определитель системы уравнений (32) не равен нулю, так как w_n удовлетворяет граничным условиям по МКЭ. Тогда в силу теоремы Грама [4] функции $\Phi_1, \cdots, \Phi_n$ линейно независимы на S.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Систему (32) представим в блочном виде

$$\left.\begin{aligned} A_0\{a\}_1+B_0\{a\}_2=\{R\}_1,\\ C_0\{a\}_1+D_0\{a\}_2=\{R\}_2,\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

где $\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}$ — матрица системы уравнений (32);

$A_0,\ldots,D_0$ — квадратичные матрицы размерности $\left(\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}\right)$;

$\{a\}_1,\ldots,\{K\}_2$ — векторы размерности $\frac{n}{2}$.

Так как $\Phi_1,\cdots,\Phi_n$ линейно независимы, то

$$\det D_0\neq 0.$$

А тогда из (33) получаем

$$\{a\}_2=D_0^{-1}(\{R\}_2-C_0\{R\}_1).$$

Подставляя последнее в первое уравнение (33), получаем систему уравнений относительно вектора $\{a\}_1$ (отметим, что матрица D_0 ленточная [3])

$$(A_0-B_0D_0^1C_0)\{a\}_1=\{R\}_2-B_0D_0^{-1}\{R\}_2, \tag{34}$$

т. е. порядок системы уравнений уменьшился в 2 раза. Аналогичным образом сокращается число неизвестных в МКЭ и в трехмерных задачах теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.— М.: Мир, 1975.— 541 с.

2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука, 1970.— 512 с.

3. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций.— Л.: Судостроение, 1977.— 279 с.

4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.— М.: Мир, 1976.— 464 с.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА И МЕТОД ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОГРУЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ УПРУГОСТИ И ВЯЗКОУПРУГОСТИ

А. А. Светашков

1. При численном решении краевых задач теории упругости и вязкоупругости в вариационной постановке важное значение приобретают такие свойства минимизируемых функций, как выпуклость, степень вытянутости линий уровня, которые в конечном счете определяют число обусловленности разрешающей системы алгебраических уравнений. Рассмотрим один из возможных методов регуляризации, основанный на использовании метода вспомогательного функционала (МВФ).

Пусть требуется найти с некоторой точностью $\varepsilon > 0$ минимум непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$

$$y(x_\varepsilon) \leqslant y_* + \varepsilon, \quad y = \min y(x).$$

Градиентные методы дают последовательность точек x_k таких, что

$$y'(x_k) \underset{k\to\infty}{\to} 0, \quad y(x_k^n) \leqslant y(x_{k-1}).$$

В случае выпуклой функции в качестве решения задачи минимизации принимается x_{k0}, для которого $\| y'(k_{k0}) \| \leqslant \varepsilon/d$, $d > 0$. Однако [1], когда $y(x)$ имеет вытянутые линии уровня в окрестности минимума, применение градиентных и других методов может быть малоэффективным. Действительно, вычисление очередной точки x_{k+1} имеет смысл, если $y(x_k) - y(x_{k+1}) > \eta$ где $\eta > 0$ характеризует вычислительные возможности, разрядность ЭВМ, погрешность вычисления функции. Для методов типа наискорейшего спуска прекращение процесса минимизации происходит [1, 2] при

$$\| y'(x_k) \| = \sqrt{2L\eta},$$

где L — число, характеризующее вытянутость линий уровня $\| y'(x_1) - y'(x_2) \| \leqslant L \| x_1 - x_2 \|$ для всех x_i, для которых $y(x_i) \leqslant y(x_0)$. Тогда в силу

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$y(x_k)-y_* \leqslant d \parallel y'(x_k) \parallel$$

гарантированная точность минимизации может равняться $d(2L\eta)^{1/2}$, которая при больших L может оказаться много больше, чем ε.

В [1] для улучшения градиентных методов минимизации предложено искать минимум последовательности

$$y_{k,\alpha}(x)=y(x)+\alpha \parallel x-x_k \parallel^2, \quad k=0,1,..., \tag{1.1}$$

где α — параметр метода. Справедлива оценка

$$y(x_k)-y(x_{k+1}) \geqslant \parallel y'(x_k) \parallel / 4\alpha. \tag{1.2}$$

Гарантированная точность в случае последовательных задач минимизации (1.1) будет равна $d(4\alpha\eta)^{1/2}$ и при малом α может быть сделана меньше ε. Существенно отметить, что в случае, когда $y(x)$ — выпуклая, $y_{k,\alpha}(x)$ — сильно выпуклая функция.

Рассмотрим данный способ улучшения сходимости методов минимизации с точки зрения МВФ, который применен к решению задач теории упругости [3] и вязкоупругости [4]. В вариационной формулировке данный метод сводится к минимизации функционала

$$Э_1(u)=\frac{1}{2}(Bu, u)+\frac{1}{2}[(Au, u_0)-(Bu, u_0)]-(p, u). \tag{1.3}$$

Здесь обозначено

$$(Iu, u)=\iiint_V W_I(v)dv, \; I=A, B, \; (p, u)=\iint_S \bar{p}\bar{u}ds; \tag{1.4}$$

$$W_A=\theta(t)\overset{\vee}{\Lambda}\theta+\varepsilon_{ij}(t)\breve{G}\varepsilon_{ij}, \; W_B=\theta(t)\lambda_s(t)\breve{G}\,\theta+\varepsilon_{ij}(t)\,\breve{G}\varepsilon_{ij}; \tag{1.5}$$

$$\overset{\vee}{\Lambda}x=\Lambda_0\left[x(t)+2\int_0^t \Lambda(t,\tau)x(\tau)d\tau\right];$$

$$\breve{G}x=G_0\left[x(t)+2\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\right];$$

$$Э_A=\frac{1}{2}(Au, u)-(f, u), \; Э_B=\frac{1}{2}(Bu, u)-(p, u),$$

где $G(t, \tau)$, $\Lambda(t, \tau)$ — ядра сдвиговой и объемной релаксации; $\Lambda_0(t)$, $G_0(t)$ — упругие модули стареющего тела; V, S — объем и поверхность тела; $\theta=\varepsilon_{ij}\delta_{ij}$ $(i, j=1, 2, 3)$, ε_{ij}, u — тензор

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

и вектор деформаций; λ_s (t) — функция, выбираемая из условия максимальной скорости сходимости. Конечно-разностная (КР) или конечно-элементная (КЭ) аппроксимация $Э_1$ приводит к задаче минимизации некоторой выпуклой функции. Введем функционал

$$Э_1^{\alpha}=Э_1+\alpha\iiint_V(u-u_k)^2dv, \tag{1.6}$$

где u_k —известное приближение. Тогда КР или КЭ аппроксимация $Э_1^{\alpha}$ приводит к задаче минимизации сильно выпуклой функции, для которой справедливы оценки типа (1.2). Процесс минимизации (1.6) можно провести с некоторой гарантированной точностью. Для функционала $Э_1^{\alpha}$ вспомогательному соответствует функционал

$$(B_1 u, u)=(Bu, u)+\alpha\iiint_V u^2dv. \tag{1.7}$$

Сходимость итерационного процесса типа (1.3), где вместо оператора B стоит B_1, определится из оценки энергетической близости операторов A и B_1:

$$m(B_1 u, u)\leqslant(Au, u)\leqslant M(B_1u, u). \tag{1.8}$$

Для простоты анализа сходимости введем регуляризующий функционал в виде

$$Э_{\alpha}=Э_1+\alpha\iiint_V(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^k)(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^k)dv\,(i, j=1,2,3). \tag{1.9}$$

Тогда для выполнения (1.8) достаточно, чтобы

$$mW_1(\varepsilon_{ij}, t)\leqslant W_A(\varepsilon_{ij}, t)\leqslant MW_1(\varepsilon_{ij}, t), \tag{1.10}$$

где $W_1(\varepsilon_{ij}, t)=W_B(\varepsilon_{ij}, t)+W_R(\varepsilon_{ij}, t)$. В общем случае $W_R(\varepsilon_{ij}, t)=\alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}(i, j=1,2,3)$. Рассмотрим случай, когда удельная потенциальная энергия регуляризующего функционала берется в виде

$$W_R=\alpha(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2).$$

Для выполнения (1.10) достаточно рассмотреть задачи

$$m=\min W_A(\varepsilon_{ij}, t),\quad M=\max W_A(\varepsilon_{ij}, t),$$
$$W_1(\varepsilon_{ij}, t)=1,\ W_1(\varepsilon_{ij}, t)=1.$$

Составим функцию Лагранжа $w=w_A-\mu w_1$, условия экстремума которой дадут уравнения

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$(3\overset{\vee}{\Lambda}+2\,\tilde{G})\varepsilon-\mu(t)(3\lambda_s(t)+2)\tilde{G}\,\varepsilon-\mu(t)\alpha\varepsilon(t)=0;$$
$$(1-\mu(t))\tilde{G}e=0;$$
$$9\,\varepsilon(t)\overset{\vee}{\Lambda}\varepsilon+6\,\varepsilon\,\tilde{G}\,\varepsilon+e(t)\,\tilde{G}\,e=\mu(t); \qquad (1.11)$$
$$9\,\varepsilon(t)\lambda_s(t)\tilde{G}\,\varepsilon+6\,\varepsilon(t)\,\tilde{G}\,\varepsilon-3\,\mu(t)\alpha\varepsilon^2(t)=1,$$

где $\varepsilon=\varepsilon_{ii}$; $e=\varepsilon_{ij}$ $(i\neq j)$. Решая систему интегральных уравнений (1.11), найдем искомое $\mu(t)$. Воспользуемся приближенным методом [6], заменив ВУ-операторы на соответствующие функции $\tilde{G}x\approx G(t),x(t)$, $\overset{\vee}{\Lambda}x\approx\Lambda(t)x(t)$. Тогда получим

$$\mu_1(t)=1,\ \mu_2(t)=\frac{3\,\Lambda(t)+2\,G(t)-\alpha}{(3\lambda_s(t)+2)G(t)}. \qquad (1.12)$$

Скорость сходимости итерационного процесса типа (1.3) обратно пропорциональна квадрату разности $\mu_1(t)-\mu_2(t)$. Имея произвол в выборе $\alpha,\lambda_s(t)$, найдем условие $\mu_1(t)-\mu_2(t)=0$. В этом случае

$$\alpha=\alpha(t)=3(\Lambda(t)-\lambda_s(t)G(t)) \qquad (1.13)$$

и скорость сходимости максимальна.

В случае $W_B=0$, $W_R=\alpha(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)+\beta\varepsilon^2{}_3$ аналогичным способом найдем

$$\mu_1(t)=(3\,\Lambda(t)+2\,G(t))/\alpha,\ \mu_2(t)=G(t)/\beta; \qquad (1.14)$$
$$\mu_1(t)-\mu_2(t)=(3\,\Lambda(t)+2\,G(t))/\alpha-G(t)/\beta. \qquad (1.15)$$

При заданных $\Lambda(t),G(t)$ можно подобрать α, β, соответствующие максимальной энергетической близости функционалов $Э_A$ и $Э_\alpha$.

Таким образом, во-первых, применение регуляризующего функционала позволяет улучшить структуру минимизируемого функционала (сделать его сильно выпуклым), во-вторых, существуют оценки сходимости методов типа наискорейшего спуска до некоторой гарантированной точности, в-третьих, поскольку регуляризующий функционал есть частный случай вспомогательного функционала, это дает возможность выбрать параметр регуляризации, исходя из энергетической близости основного и регуляризующего функционалов.

2. Как уже было отмечено, МВФ применяется для задач упругости и вязкоупругости с целью упрощения оператора

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

исходной краевой задачи. Так, например, для задач упругости анизотропного тела в качестве вспомогательного берется оператор (или функционал), соответствующий изотропному телу [3]; для задач вязкоупругости (ВУ) в качестве вспомогательного берется [4] функционал ВУ тела с подобными операторами продольной и поперечной релаксации. Упрощение может происходить не только по линии изменения физических свойств оператора исходной задачи. В [5] разработан метод геометрического погружения, суть которого состоит в сведении исходной задачи для тела со сложной геометрической конфигурацией к итерационной последовательности задач на канонических областях. Поставим целью объединить оба подхода с целью построения метода физико-геометрического погружения, который сводил бы исходную краевую задачу для материала со сложными физическими свойствами и сложной геометрией к последовательности задач для тел на канонической области и упрощенным физическим законам.

Пусть исходное тело занимает произвольную область с объемом V, внешней поверхностью S, поверхностными нагрузками, определяемыми вектором $\bar{p}$, удельным потенциалом $W(\varepsilon_{ij}, t)$. Наличие заданных на поверхности тела перемещений переводит задачу минимизации исходного функционала в задачу меньшей размерности

$$Э = \iiint_V W(\varepsilon_{ij}, t)dv - \iint_S \bar{p}\bar{u}ds. \qquad (2.1)$$

Введем вспомогательный функционал для тела, занимающего объем V_0, ограниченного канонической поверхностью S_0 и поверхностными нагрузками $\bar{p}_0$ и потенциалом $W_0(\varepsilon_{ij}, t)$:

$$Э_0 = \iiint_{V_0} W_0(\varepsilon_{ij}, t)dv - \iint_{S_0} \bar{p}_0\bar{u}_0 ds. \qquad (2.2)$$

В качестве примера рассмотрим ЛВУ-среду, для которой $W = W_A$, $W_0 = W_B$, определяемые (1.5). Итерационный процесс физико-геометрического погружения будет определяться соотношением типа (1.3), в котором оператору A соответствует исходный функционал, оператору B — вспомогательный. Необходимо выяснить, какие физические и геометрические характеристики вспомогательного функционала (2.2) влияют на сходимость итерационного процесса (1.3), которая следует из положительной определенности оператора B и B-ограниченности оператора A. Предположим, что граничные условия на канонической поверхности таковы, что

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\iint_S \bar{p}\,\bar{u}ds = \iint_{S_0} \bar{p}_0\,\bar{u}ds.$$

Скорость сходимости, как известно, определяется [7]:

$$q = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2, \quad m\,\Theta_0 \leqslant \Theta \leqslant M\,\Theta_0.$$

Введем функционал

$$\Pi(\varepsilon_{ij}, t) = \iiint_V (\theta(t)\overset{\vee}{\Lambda}\theta + \varepsilon_{ij}(t)\breve{G}\,\varepsilon_{ij})dv -$$

$$-\mu(t)\iiint_{V_0} (\theta(t)\lambda_s(t)\breve{G}\,\theta + \varepsilon_{ij}(t)\breve{G}\,\varepsilon_{ij})dv.$$

Условия его экстремальности по переменным ε_{ij} (t)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{ii}} = \iiint_V (2\overset{\vee}{\Lambda}\theta + 4\,\breve{G}\varepsilon_{ii})dv - \mu(t)\iiint_V (2\lambda_s(t)\breve{G}\theta + 4\,\breve{G}\,\varepsilon_{ii})dv = 0; \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \iiint_V 2\,\breve{G}\,\varepsilon_{ij}dv - \mu(t)\iiint_{V_0} 2\,\breve{G}\,\varepsilon_{ij}dv = 0. \tag{2.4}$$

Из (2.3), (2.4) следует, что $\varepsilon_{ii} = \varepsilon\,(t)$, $\varepsilon_{ij} = e\,(t)$. При $\varepsilon(t) = 0$ уравнение (2.3) удовлетворяется, тогда $\mu(t)$ определится из

$$\mu(t) = \frac{\iiint_V \breve{G}edv}{\iiint_{V_0} \breve{G}edv}. \tag{2.5}$$

Кроме (2.5) имеем уравнения

$$\iiint_{V_0} W_0(\varepsilon_{ij}, t)dv = \iiint_{V_0} e(t)\,\breve{G}\,edv = 1; \tag{2.6}$$

$$\mu(t) = \iiint_V W(\varepsilon_{ij}, t)dv = \iiint_V e(t)\,\breve{G}\,edv. \tag{2.7}$$

Положим, как и прежде, $\breve{G}\,x \approx G(t)\,x(t)$, тогда получим

$$\mu(t) = \mu_1(t) = \frac{\iiint_V edv}{\iiint_{V_0} edv} = \frac{\iiint_V e^2 dv}{\iiint_{V_0} e^2 dv}.$$

Последнее соотношение выполняется при $e = const$, тогда

$$\mu_1(t) = V/V_0.$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Аналогично рассуждая, найдем

$$\mu(t)=\frac{\iiint_V \varepsilon(t)(3\hat{\Lambda}+2\,\tilde{G})\varepsilon\,dv}{\iiint_{V_0}\varepsilon(t)(3\lambda_s+2)\tilde{G}\,\varepsilon\,dv},$$

$$3\iiint_{V_0}(3\lambda_s(t)+2)\tilde{G}\,\varepsilon\,dv=1,\ \mu(t)=3\iiint_V \varepsilon(t)(3\overset{\vee}{\Lambda}+2\,\tilde{G})\varepsilon\,dv,$$

Полагая $\tilde{G}x\approx G(t)x(t)$, $\overset{\vee}{\Lambda}x\approx\Lambda(t)x(t)$, получим

$$\frac{\mu(t)}{k(t)}=\frac{\iiint_V \varepsilon\,dv}{\iiint_{V_0}\varepsilon\,dv}=\frac{\iiint_V \varepsilon^2 dv}{\iiint_{V_0}\varepsilon^2 dv}, \tag{2.8}$$

откуда

$$\mu_2(t)=k(t)\frac{V}{V_0}=\frac{3\,\Lambda(t)+2\,G(t)}{(3\lambda_s(t)+2)G(t)}\,\frac{V}{V_0}. \tag{2.9}$$

Таким образом, показатель скорости сходимости определяется соотношением объемов основной и вспомогательной области, а также соотношением физических характеристик двух сред, поскольку $m=\min(\mu_1,\mu_2)$, $M=\max(\mu_1,\mu_2)$. Заметим, что в [5] имеется другое доказательство сходимости метода геометрического погружения без исследования качественных характеристик сходимости, которые определяют эффективность итерационного процесса.

Итерационный процесс (1.3) можно проводить с выбором длины шага по направлению антиградиента основного функционала. Действительно, (1.3) можно представить в виде

$$Э_1(u)=Э_0(u)+u(Э'(u_0)-Э_0'(u_0)).$$

При $u=u_0$ $Э_1'(u)=Э'(u_0)$. При известных приближениях u_0, u_1 длина шага ω определится из уравнения

$$Э_\omega'(u_1+\omega(u_1-u_0))=0.$$

Имея правило выбора длины шага и располагая условиями энергетической близости основного и вспомогательного функционалов, можно добиться быстрой сходимости итерационного процесса.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ЛИТЕРАТУРА

1. Нефедов В. Н. Об одном способе повышения эффективности методов минимизации.— Вест. МГУ. Выч. матем. и кибер., 1983, № 1, с. 7—11.

2. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач.— М., 1980.— 520 с.

3. Деруга А. П. Вариационные формулировки некоторых итерационных методов.— В кн.: Пространственные конструкции в Красноярском крае. Красноярск, 1979, с. 34—46.

4. Светашков А. А. Выбор вспомогательного функционала при решении задач линейной и нелинейной вязкоупругости итерационным методом.— Томск, 1984.— 38 с. Деп. в ВИНИТИ 12 дек. 1984, № 7950—84.

5. Шардаков И. Н., Трояновский И. Е., Труфанов Н. А. Метод геометрического погружения для решения задач теории упругости.— Свердловск, 1984.— 66 с.

6. Мальцев Л. Е. Приближенное операционное исчисление для уравнений Вольтерра в задачах механики полимеров.— Механика полимеров, 1977, № 5, с. 804—811.

7. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика. —Успехи математических наук, 1948, т. 3, № 6, с. 89—185.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ В РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

А. А. Светашков

Известны методы решения краевых задач линейной (ЛВУ) и нелинейной вязкоупругости (НВУ), основанные на принципе соответствия [1—5]. Имеются определенные трудности в реализации принципа соответствия для задач, решение которых может быть получено лишь в численном виде (восстановление зависимости от коэффициента Пуассона), а также при переходе от решения задачи нелинейной упругости к НВУ-решению. В [6] предложен метод вспомогательного функционала (МВФ), основанный на отказе от принципа соответствия. Данный метод является методом первого порядка. Возникает вопрос, нельзя ли при решении задач вязкоупругости (ВУ) использовать методы оптимизации более высокого порядка, которые применяются в задачах нелинейной упругости и пластичности? Данная работа позволяет утвердительно ответить на данный вопрос.

1. Рассмотрим метод покоординатного спуска (МПС). Функционал Лагранжа изотропного ЛВУ тела в отсутствие объемных сил имеет вид

$$Э=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V}[\theta(t)\overset{\vee}{\Lambda}\theta+\varepsilon_{ij}(t)\breve{G}\,\varepsilon_{ij}]dv-\iint\limits_{S}p_i u_i ds,(i,j=1,2,3), \tag{1.1}$$

где V, S — объем тела и его поверхность; P_i —заданные поверхностные силы; ε_{ij} — компоненты тензора деформации; $\theta=\varepsilon_{ij}\delta_{ij}$, $\overset{\vee}{\Lambda}$, $\breve{G}$ — операторы линейной наследственности с ядрами неразностного типа;

$$\overset{\vee}{\Lambda}x=\Lambda_0(t)\left[x(t)+2\int\limits_0^t\Lambda(t,\tau)x(\tau)d\tau\right],\ \breve{G}x=$$

$$=G_0(t)\left[x(t)+2\int\limits_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\right], \tag{1.2}$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$u_1(x, t)=u_0(x, t)+\lambda(t)s_0(x, t), \qquad (2.2)$$

где $\lambda(t)$ — длина шага, определяемая из условия минимума Э по направлению $s_0(x, t)$;

$$d/d\ \lambda(t)\Э(u_0(x, t)+\lambda(t)s_0(x, t))=0. \qquad (2.3)$$

Соотношение (2.3) представляет собой линейное интегральное уравнение относительно $\lambda(t)$. На k-м шаге МСГ направление спуска определится из

$$s_k(x, t)=-\Э'(u_k)+s_{k-1}(x, t)\beta_{k-1}(t),$$

$$\beta_{k-1}(t)=\frac{(\Э'(u_k),\ \Э'(u_k))}{(\Э'(u_{k-1}),\Э'(u_{k-1}))}. \qquad (2.4)$$

Величина $\beta_k(t)$ находится путем суммирования по объему тела невязок $r_k=\Э'(u_k)=Au_k-f$, $\Э=\frac{1}{2}\ (Au, u)-(f, u)$. После определения $S_k(x, t)$, $\lambda_k(t)$ следующее приближение будет иметь вид

$$u_{k+1}(x, t)=u_k(x, t)+\lambda_k(t)s_k(x, t). \qquad (2.5)$$

Таким образом, в процессе реализации МСГ для ЛВУ у тел необходимо удерживать в памяти векторы перемещений $U_k\ (x, t)$ и направления спуска $S_k\ (x, t)$. Для краевых задач НВУ процесс минимизации по МСГ происходит по аналогичной схеме [8].

3. Отметим особенности применения метода Ньютона к решению задач НВУ. Пусть $\Э(u)$ — функционал задачи, тогда его приращение в точке $u_k\ (x, t)$ с точностью до членов второго порядка имеет вид [11]:

$$\Delta\Э(u_k)=\Э(u_k+\Delta u)-\Э(u_k)=(\Э'(u_k),\ \Delta u)+\frac{1}{2}(\Э''(u_k)\Delta u,\ \Delta u) \qquad (3.1)$$

$$\Delta u=u-u_k.$$

Функционал (3.1) является квадратичным относительно неизвестного Δu, для его минимизации можно применять известные методы. Рассмотрим первую вариацию функционала

$$\left(\frac{\partial\Э}{\partial u},\ \Delta u\right)=\frac{1}{2}\iiint_V\left(\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\Delta\varepsilon_{ij}-F_i\Delta u_i\right)dv-\iint_S F_i\Delta u_i ds, \qquad (3.2)$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

где $\Delta\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(u)-\varepsilon_{ij}(u_k)$; $\Delta u_i=u_i-u_i^k$.
Вторая вариация Э (u) имеет вид

$$\frac{\partial^2 Э}{\partial u^2}(\Delta u,\ \Delta u)=\frac{1}{2}\iiint\limits_V \frac{\partial^2 W}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{ke}}\Delta\varepsilon_{ij}\Delta\varepsilon_{ke}dv\ (i,\ j,\ k,e=1,2,3). \tag{3.3}$$

В случае, если W — потенциал ЛВУ-тела, то

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{ke}}\Delta\varepsilon_{ij}\Delta\varepsilon_{ke}=W(\varepsilon_{ij}).$$

Пусть $\tilde{u}(x,\ t)$ — результат минимизации ΔЭ на к-м шаге. Тогда последующее приближение отыщется по формуле

$$u_{k+1}(x,\ t)=u_k(x,\ t)+\alpha_k(t)(\tilde{u}(x,\ t)-u_k(x,\ t)). \tag{3.4}$$

Длина шага определится как решение нелинейного интегрального уравнения по t:

$$\alpha_k(t)=\min_{\alpha(t)} Э(u_k(x,\ t)+\alpha(t)(\tilde{u}(x,\ t)-u_k(x,\ t))).$$

Скорость сходимости метода Ньютона квадратична. Процесс минимизации можно регуляризовать, если сделать исходный функционал сильно выпуклым.

Таким образом, специфика применения метода Ньютона к задачам ВУ заключается в том, что, во-первых, искомый вектор перемещений есть функция не только координат, но и времени, поэтому при вычислении первой и второй вариаций функционала необходимо проводить интегрирование по всей предыстории изменения u_k во времени. Во-вторых, длина шага метода Ньютона есть функция времени, определяемая из некоторого интегрального уравнения.

4. При расчете вязкоупругих конструкций одной из особенностей, затрудняющих отыскание решения, является слабая объемная сжимаемость материалов. При стремлении коэффициента Пуассона к 0,5 функционал ЛВУ становится вырожденным, число обусловленности системы алгебраических уравнений растет. Применим метод вспомогательного функционала (МВФ) для случая слабосжимаемых сред. Запишем близкий к исходному Э(u) функционал Э$_0(u)$, который не будет содержать операторов ЛВУ, будет соответствовать объемному поведению со сколь угодно отличным от 0,5 коэффициентом Пуассона

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\Theta_0(u)=\frac{1}{2}\iiint_V[\Lambda_0(t)\theta^2(t)+G_0(t)\varepsilon_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(t)]dv-\iint_S p_i u_i ds \qquad (4.1)$$

$$(i, j=1, 2, 3).$$

Функционал (4.1) представляет собой функционал упругостареющего тела с переменными модулями упругости; обозначим его потенциал через $W_0(\varepsilon_{ij}, t)$. Рассмотрим условия энергетической близости функционалов (4.1) и (1.1)

$$m\Theta_0(u)\leqslant\Theta(u)\leqslant M\Theta_0(u). \qquad (4.2)$$

Для выполнения (4.2) достаточно, чтобы

$$mW_0(\varepsilon_{ij}, t)\leqslant W(\varepsilon_{ij}, t)\leqslant MW_0(\varepsilon_{ij}, t). \qquad (4.3)$$

Последние неравенства эквивалентны отысканию

$$m=\min W(\varepsilon_{ij}, t), \quad M=\max W(\varepsilon_{ij}, t), \qquad (4.4)$$
$$W_0(\varepsilon_{ij}, t)=1, \qquad W_0(\varepsilon_{ij}, t)=1.$$

Для определения m, M составим функцию Лагранжа $W_1(\varepsilon_{ij}, t)=W(\varepsilon_{ij}, t)-\mu(t)W_0(\varepsilon_{ij}, t)$, собственные числа которой дадут нам искомые m, M. Необходимые условия экстремума $W_1(\varepsilon_{ij}, t)$:

$$\frac{\partial W_1(\varepsilon_{ij}, t)}{\partial\varepsilon_{ij}}=(\breve{G}-\mu(t)\breve{G}_0)\varepsilon_{ij}=0 \quad (i\neq j); \qquad (4.5)$$

$$\frac{\partial W_1(\varepsilon_{ij}, t)}{\partial\varepsilon_{ii}}=(3\breve{\Lambda}+2\breve{G})\varepsilon_{ii}-\mu(t)(3\Lambda_0(t)+2G_0(t))\varepsilon_{ii}(t)=0.$$

Кроме системы интегральных уравнений (4.5) имеем следующие уравнения:

$$9\Lambda_0(t)\varepsilon^2(t)+6G_0(t)\varepsilon^2(t)+G_0(t)e^2(t)=1; \qquad (4.6)$$

$$\mu(t)=9\varepsilon(t)\breve{\Lambda}\varepsilon+6\varepsilon(t)\breve{G}\varepsilon+e(t)\breve{G}e, \qquad (4.7)$$

где $\varepsilon(t)=\varepsilon_{ii}(t)$; $e(t)=\varepsilon_{ij}(t)$ $(i\neq j)$. Последнее уравнение записано на основании того факта, что значение квадратичной формы в экстремальной точке является и ее собственным значением. Система (4.5), (4.6) — нелинейная замкнутая относительно $e(t)$, $\varepsilon(t)$, $\mu(t)$. Для приближенного решения системы воспользуемся методом [9]. Положим

$$\breve{G}x\approx G(t)x(t), \quad \breve{\Lambda}x\approx\Lambda(t)x(t),$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

тогда

$$\mu_1(t) = \frac{G(t)}{G_0(t)},\ \mu_2(t) = \frac{3\Lambda(t)+2G(t)}{3\Lambda_0(t)+2G_0(t)}, \qquad (4.8)$$

где $G(t)$, $\Lambda(t)$ — разностные ядра сдвиговой и объемной релаксации. При $\mu = \mu_1(t)$ имеем из второго из уравнений (4.5) $\varepsilon(t) = 0$, тогда по (4.6) $e^2(t) = 1/G_0(t)$. Подставляя в (4.7), получим $\mu(t) = G(t)\, e^2(t) = \mu_1(t)$. Аналогично можно проверить, что $\mu_2(t)$ также удовлетворяет (4.7). Для момента времени t скорость сходимости процесса минимизации функционала

$$\Theta_1(u) = \frac{1}{2}\iiint_V \{\Lambda_0(t)\theta^2(t) + \varepsilon_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(t)G_0(t) + \theta(t)\overset{\vee}{\Lambda}\theta_0 +$$

$$+ \varepsilon_{ij}(t)\overset{\vee}{G}\varepsilon^0_{ij} - \Lambda_0(t)\theta(t)\theta_0(t) - G_0(t)\varepsilon_{ij}(t)\varepsilon^0_{ij}(t)\}dv - \iint_S p_i u_i ds, \qquad (4.9)$$

где u_0, θ_0, ε^0_{ij} — известные из предыдущего шага функции, определится показателем

$$q(t) = \left(\frac{\mu_1(t)-\mu_2(t)}{\mu_1(t)+\mu_2(t)}\right)^2 \qquad (4.10)$$

В выборе функций $G_0(t)$, $\Lambda_0(t)$ мы имеем произвол, который подчиним требованию $\min q(t)$. Используя (4.8), находим, что максимальная скорость сходимости достигается при

$$G(t)/G_0(t) = \Lambda(t)/\Lambda_0(t).$$

Более точное исследование скорости сходимости можно провести на основе численного решения системы (4.5), (4.6).

Таким образом, исходная задача ЛВУ для слабосжимаемого тела свелась к последовательности задач стареющего упругого тела со сколь угодно отличным от 0,5 значением коэффициента Пуассона.

Выводы

1. На примере нескольких методов оптимизации впервые показана возможность их использования для решения краевых задач ЛВУ и НВУ.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

2. Преимущество использования методов оптимизации заключается, во-первых, в их применении к краевым задачам, которые могут быть решены как численно, так и аналитически, во-вторых, в использовании единого алгоритма при решении как линейных, так и нелинейных задач.

3. Предложен метод, позволяющий решать задачи для слабосжимаемого ВУ тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости.— М., 1970.— 280 с.

2. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел.— М., 1977.— 384 с.

3. Малый В. И. Квазиконстантные операторы в теории вязкоупругости стареющих материалов.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1980, № 1, с .120—127.

4. Победря Б. Е. Расчет вязкоупругих систем по численной упругой реализации.— Проблемы прочности, 1973, № 4, с. 58—61.

5. Колокольчиков В. В. Метод последовательных приближений, основанный на принципе соответствия.— Механика полимеров, 1978, № 3, с. 417—424.

6. Светашков А. А. Выбор вспомогательного функционала при решении задач линейной и нелинейной теории вязкоупругости итерационным методом.— Томск, 1984.— 38 с. Деп. в ВИНИТИ 12 дек. 1984, № 7950—84.

7. Василенко Н. В., Бабенко А. Е., Цыбенко А. С., Чирков А. Ю. Решение задач теории упругости методом покоординатного спуска.— Проблемы прочности, 1983, № 1, с. 102—104.

8. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач.— М., 1980.— 518 с.

9. Мальцев Л. Е. Приближенное операционное исчисление для уравнений Вольтерра в задачах механики полимеров.— Механика полимеров, 1977, № 5, с. 804—811.

10. Алексеев Л. А., Светашков А. А., Федоренко В. Д. Исследование реологического поведения материалов с изменяющейся структурой.— Томск, 1975.— 15 с. Деп. в ВИНИТИ, 10 апр. 1975, № 1034—75.

11. Абовский Н. П., Деруга А. П., Енджиевский Л. В., Светашков А. А. Один общий подход к задачам теории оболочек с переменными параметрами и его численная реализация.— В кн.: Пространственные конструкции в Красноярском крае. Красноярск, 1979, с. 3—22.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ОЦЕНКА В L_2 РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ О ДЕФОРМИРОВАНИИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

В. И. Тараканов

Получены оценки в L_2 решения краевой задачи упругости о деформировании тела вращения при кручении. Оценки связывают нормы в L_2 правых частей граничных операторов с нормами производных от решений на границе области.

Оценки носят количественный характер, так как указывается способ нахождения констант в соответствующих неравенствах. Это дает возможность их использования при определении погрешности приближенных решений краевой задачи.

Следует заметить, что с функциональной точки зрения полученные оценки не вытекают из существующих априорных оценок уравнений эллиптического типа [1, 2] и теорем вложения [3]. Приводимые оценки отличаются и от количественных оценок, разработанных специально для рассматриваемого уравнения [4].

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается область $D(x, y) \subset G(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant \infty$, $-\infty < y < \infty$, ограниченная простой замкнутой кривой Γ_0, состоящей из гладкой кривой Γ и отрезков прямых $x = 0$. В частном случае кривые Γ_0 и Γ могут совпадать. Предполагается выполнение следующих условий:

$$\alpha_k(s) \in C^2(\Gamma), \tag{1.1}$$

где $\alpha_1 = \cos sx$, $\alpha_2 = \cos sy$, ds — элемент дуги Γ. Деформированное состояние тела вращения при кручении описывается уравнением эллиптического типа

$$V_{,xx} + x^{-1}V_{,x} - x^{-2}V + V_{,yy} = 0, \; x, y \in D, \tag{1.2}$$

где V — компонента вектора смещения, а ненулевые безразмерные компоненты тензора напряжений $\sigma_{z\varphi}$, $\sigma_{r\varphi}$ имеют вид

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sigma_{r\varphi}=V_{,x}-x^{-1}V,\quad \sigma_{z\varphi}=V_{,y}. \tag{1.3}$$

Задание на границе усилий эквивалентно заданию в качестве граничных условий величины

$$x^{-1}(x^{-1}V)_{,n}=f,\quad f\in L_2(\Gamma), \tag{1.4}$$
$$(\cdot)_{,n}=\alpha_2(\cdot)_{,x}-\alpha_1(\cdot)_{,y},$$
$$(\cdot)_{,s}=\alpha_1(\cdot)_{,x}+\alpha_2(\cdot)_{,y}.$$

Краевая задача для уравнения (1.2) рассматривается в классе функций

$$V\in C^{\infty}(D\cup\Gamma_0/\Gamma)\cap C(D\cup\Gamma_0),\quad V(x=0,\,y)=0, \tag{1.5}$$
$$\int_{\Gamma_0}(x^{-1}V)_{,s}^2\,ds<\infty, \tag{1.6}$$
$$P\equiv\int_D x[V_{,y}^2+(V_{,x}-x^{-1}V)^2]d\sigma\equiv\int_{\Gamma}xV(x^{-1}V)_{,n}ds<\infty. \tag{1.7}$$

Относительно области D предполагается следующее. В D найдется хотя бы одна точка Q, которую можно связать со всеми граничными точками Γ множеством произвольных кривых $\gamma\in D$ и проходящих так, что если на каждой кривой ν отсчитывать дугу s от точки пересечения с Γ, то для всей системы кривых γ выполняется

$$\max_{\gamma}\sqrt{0{,}8\pi}\int_{\gamma}sd^{-1}(s)ds=k<\infty, \tag{1.8}$$

где через $d(s)=d(x,\,y)$ обозначено расстояние между точкой $M(x,\,y)$ и кривой Γ_0. Предполагается, что на системе кривых γ существует крайняя точка

$$\max_{x\in\gamma}x=b<\infty. \tag{1.9}$$

Кроме того, существует полоса D_0: $0\leqslant x\leqslant a$, $a>0$, в которой для каждой кривой γ минимальное значение x достигается в точке пересечения γ и Γ;

$$\min_{\xi\in\gamma\cap D_0}\xi=x\in\Gamma. \tag{1.10}$$

Из условий (1.9), (1.10) получается следующий результат. Пусть $\xi\in\gamma$, $x\in\gamma\cap\Gamma$, тогда

$$x\leqslant\frac{b}{a}\xi. \tag{1.11}$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Систему кривых, удовлетворяющих условиям (1.8) — (1.10), в прикладных задачах всегда можно построить, причем условие (1.8) означает, что кривые γ подходят к Γ по некасательным путям.

§ 2. Обобщенный интеграл Коши и оценки типа Куранта внутри области

Кроме решения V вводятся функции U, Φ_j по формулам:

$$U_{,x}=x^2V_{,y}, \quad U_{,y}=-x^3(x^{-1}V)_{,x}, \tag{2.1}$$

$$\Phi_1(x, y, Q)=U(x, y)-U(Q), \tag{2.2}$$

$$\Phi_2(x, y, Q)=V(x, y)-V(Q)\frac{x}{x_0}, \tag{2.3}$$

где $Q(x_0,y_0)$ — точка, существование которой связано с условием (1.8)

Из (2.1) — (2.3) следует

$$\Phi_{1,x}=x^2\Phi_{2,y}, \quad \Phi_{1,y}=-x^3(x^{-1}\Phi_2)_{,x}, \tag{2.4}$$

$$\Phi_j(Q)=0. \tag{2.5}$$

Для функций U, V, Φ_j справедлив обобщенный интеграл Коши, который можно представить в виде двух действительных уравнений (так же как и обычный интеграл Коши после разделения действительной и мнимой части):

$$m\Phi_1(x, y)=-\int_{\dot\Gamma_1}\xi^{-3}\Phi_1\delta_{3,\nu}d\lambda+\int_{\dot\Gamma_1}(\xi^{-1}\Phi_2)_{,\lambda}\delta_3 d\lambda, \tag{2.6}$$

$$m\Phi_2(x, y)=-\int_{\dot\Gamma_1}\xi^2\Phi_2(\xi^{-1}\delta_2)_{,\nu}d\lambda-\int_{\dot\Gamma_1}\xi^{-1}\Phi_{1,\lambda}\delta_2 d\lambda, \tag{2.7}$$

$$m=\{1,\ x, y\in D_1, \quad 0{,}5,\ x, y\in\Gamma_1, \quad 0,\ x, y\notin D_1\cup\Gamma_1\},$$

$$D_1\cup\Gamma_1\in D_0\cup\Gamma_0,$$

$$\delta_1(\xi, \eta, x, y)=(2\pi)^{-1}\sqrt{\omega\xi^{-1}x^{-1}}K(\omega),$$

$$\delta_2(\xi, \eta, x, y)=(2\pi)^{-1}\sqrt{\omega\xi^{-1}x^{-1}}[(2\omega^{-1}-1)K(\omega)-2\omega^{-1}E(\omega)]],$$

$$3\delta_3(\xi, \eta, x, y)=2x\xi[x^2+(y-\eta)^2+\xi^2]\delta_2-x^2\xi^2\delta_1,$$

где K, E — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода; $\omega=4\xi x[(x+\xi)^2+(y-\eta)^2]^{-1}$ — модуль эллиптического интеграла;

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$(\cdot)_{,\upsilon}=\alpha_2(\lambda)(\cdot)_{,\xi}-\alpha_1(\lambda)(\cdot)_{,\eta};$$
$$(\cdot)_{,\lambda}=\alpha_1(\lambda)(\cdot)_{,\xi}+\alpha_2(\lambda)(\cdot)_{,\eta};$$
$$\xi=\xi(\lambda);\ \eta=\eta(\lambda)\in\Gamma.$$

Обобщенный интеграл Коши (2.6), (2.7) является конкретизацией обобщенного интеграла Коши для p-аналитических функций с характеристикой $p=x^3$ [4]. Следует заметить, что, хотя в работе [4] специально рассматривалась система (2.3), конкретный вид обобщенного интеграла Коши с явным представлением ядер через эллиптические интегралы не был получен.

В дальнейшем удобно использовать следующие соотношения для потенциалов δ_i, являющихся аналогами логарифмического потенциала:

$$\delta_{2,xx}+x^{-1}\delta_{2,x}-x^{-2}\delta_2+\delta_{2,yy}=0, \tag{2.8}$$

$$\delta_{3,xx}-3x^{-1}\delta_{3,x}+\delta_{3,yy}=0, \tag{2.9}$$

$$\xi^{-3}\delta_{3,\nu\eta}=(\xi^{-3}\delta_{3,\xi})_{,\lambda};\ \xi^3(\xi^{-1}\delta_2)_{,\nu\eta}=[\xi^3(\xi^{-1}\delta_2)_{,\xi}]_{,\lambda}. \tag{2.10}$$

В особой точке потенциалы δ_i имеют асимптотику

$$\delta_1=-(2\pi\xi)^{-1}\ln R\left[1+0\left(\frac{\perp}{R}\right)\right],\ \delta_2=-(2\pi\xi)^{-1}\ln R\left[1+0\left(\frac{\perp}{R}\right)\right], \tag{2.11}$$

$$\delta_3=-(2\pi)^{-1}\xi^3\ln R[1+0(R^{-1})],\ R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

При малых ξ, x выполняется асимптотика

$$\delta_2=\xi x+0(\xi^2x^2). \tag{2.12}$$

Если в (2.6) взять в качестве кривой Γ_1 окружность с центром в точке x, y

$$\Gamma_1:\xi=x+R\cos\varphi,\ \eta=y+R\sin\varphi,\ 0\leqslant R<d,$$

продифференцировать по параметру y соотношение (2.6), то после ряда преобразований, учитывающих (2.2), (2.3), (2.10), получится

$$\Phi_{1,y}(x,y)=-R\int_0^{2\pi}\{\xi^{-1}\Phi_{2,\eta}(\delta_{3,\eta}\cos\varphi-\delta_{3,\xi}\sin\varphi)- \tag{2.13}$$
$$-(\Phi_{2,\xi}-\xi^{-1}\Phi_2)\xi^{-1}(\delta_{3,\xi}\cos\varphi+\delta_{3,\eta}\sin\varphi)\}d\varphi.$$

При умножении (2.13) на R и интегрировании по R (2.13) преобразуется к виду

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Объединяя результаты (2.15) — (2.17), можно записать

$$|\Phi_{1,y}(x, y)| \geqslant d^{-1}x^{1,5}\sqrt{0{,}8\pi P}, \tag{2.18}$$

$$|\Phi_{2,y}(x, y)| \leqslant d^{-1}x^{-0,5}\sqrt{0{,}8\pi P}. \tag{2.19}$$

Оценки (2.18), (2.19) являются аналогами неравенства Куранта [5], связывающего производные гармонической функции на плоскости с интегралом Дирихле.

§ 3. Оценки на границе области вспомогательных функций

С решением Φ_j связываются вспомогательные функции W_j с помощью соотношений

$$W_1(x, y) = \int\limits_{M(x,y)}^{Q} (\alpha_1 x^2\Phi_2 + \alpha_2\Phi_1)ds, \tag{3.1}$$

$$W_2(x, y) = -x\int\limits_{M(x,y)}^{Q} [\alpha_1 x^{-3}\Phi_1 - \alpha_2 x^{-1}\Phi_2]ds. \tag{3.2}$$

В силу соотношений (2.4) интегралы W_j не зависят от пути интегрирования. При этом для $\forall\, x, y \in D \cup \Gamma$ выполняется

$$\Phi_1 = \alpha_2 W_{1,s} - \alpha_1 x^3 (x^{-1}W_2)_{,s}, \tag{3.3}$$

$$x^2\Phi_2 = \alpha_1 W_{1,s} + \alpha_2 x^3 (x^{-1}W_2)_{,s}, \tag{3.4}$$

где производная берется по произвольному направлению s. Соотношения (3.1), (3.2) дальше рассматриваются, когда в качестве пути интегрирования выбраны кривые γ, определяемые соотношением (1.8), а дуга s отсчитывается от точки $M \in \Gamma$. При интегрировании (3.1) по частям с учетом (2.4) получается

$$W_1(x, y) = -\int\limits_0^s \left\{(x^{-1}\Phi_2)_{,s}\int\limits_0^s \alpha_1 x^3 ds + \Phi_{1,s}\int\limits_0^s \alpha_2 ds\right\}ds =$$

$$= -\int\limits_0^s \left\{[x^{-1}\alpha_2\,\Phi_{2,y} - x^{-3}\alpha_1\,\Phi_{1,y}]\int\limits_0^s \alpha_1 x^3 ds + \right. \tag{3.5}$$

$$\left. + [x^2\alpha_1\Phi_{2,y} + \alpha_2\Phi_{1,y}]\int\limits_0^s \alpha_2 ds\right\}ds.$$

Для интегралов, входящих в (3.5), с учетом (1.11) несложно вывести оценки

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\left| \int_0^s \alpha_1 x^3 ds \right| = 0{,}25 \, | x^4(s) - x^4(0) | \leqslant \tag{3.6}$$

$$\leqslant 0{,}25 \, s x^3(s)(1 + b/a)(1 + b^2/a^2);$$

$$\left| \int_0^s \alpha_2 ds \right| \leqslant s. \tag{3.7}$$

Переходя в (3.4) к неравенству, с учетом оценок (3.6), (3.7), (2.18), (2.19) можно получить

$$| W_1 | \leqslant C_1 \sqrt{P}, \; C_1 = 2 k b^{1,5} \left[1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \right] \sqrt{P} \, . \tag{3.8}$$

При интегрировании (3.2) по частям с учетом (2.4) получается

$$x W_2(x, y) = x^2 \int_0^s \left\{ [\alpha_1 x^2 \Phi_{2,y} + \alpha_2 \Phi_{1,y}] \int_0^s \alpha_1 x^{-3} ds + \right. \tag{3.9}$$

$$\left. + [\alpha_1 x^{-3} \Phi_{1,y} - \alpha_2 x^{-1} \Phi_{2,y}] \int_0^s \alpha_2 ds \right\} ds.$$

На основании (1.11) можно получить следующую оценку:

$$\left| \int_0^s \alpha_1 x^{-3} ds \right| = 2 \, x^{-2}(s) x^{-2}(0) \, | \, x(s) - x(0) \, | \cdot | \, x(s) - x(0) \, | \leqslant$$

$$\leqslant 2 a^{-1} x^{-1}(s) x^{-2}(0)(a + b) s. \tag{3.10}$$

При переходе в (3.9) к неравенству с учетом оценок (2.18), (2.19), 3(10) следует

$$| x W_2(x, y) | \leqslant C_2 \sqrt{P}, \tag{3.11}$$

$$C_2 = 2 k \sqrt{b} \left[2 \left(1 + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{a} \right)^{1,5} \right].$$

§ 4. Основные оценки

При выводе основной оценки используются следующие параметры, зависящие только от геометрии области:

$$d_1 = 3 \, \| \, \alpha_1 \alpha_2 \, \| + 2 \, \| \int_{\Gamma_0} | \, x^3 [\alpha_1 (\xi^{-1} \delta_2)_{,\nu}]_{,\lambda} +$$

$$+ 1{,}5 \, \alpha_1 \alpha_2 l^{-1} \operatorname{ctg}[\pi(s - \lambda) l^{-1}] \, | \, d\lambda \, \| \, ; \tag{4.1}$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\Phi_{1,y}(x,\ y)d^2=-2\int\limits_e R\{\xi^{-1}\Phi_{2,\eta}(\delta_{3,\eta}\cos\varphi-\delta_{3,\xi}\sin\varphi)-$$

$$-(\Phi_{2,\xi}-\xi^{-1}\Phi_2)\xi^{-1}(\delta_{3,\xi}\cos\varphi+\delta_{3,\eta}\sin\varphi)\}d\sigma, \qquad (2.14)$$

$$e:(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqslant d^2.$$

На основе (2.14) получается неравенство

$$|\Phi_{1,y}(x,\ y)|\leqslant 2d^{-2}\{[\int\limits_e \xi\Phi_{2,\eta}^2 d\sigma\cdot\int\limits_e R^2\xi^{-3}\delta_{3,\eta}^2 d\sigma]^{0,5}+$$

$$+[\int\limits_e \xi\Phi_{2,\eta}^2 d\sigma\cdot\int\limits_e R^2\xi^{-3}\delta_{3,\xi}^2 d\sigma]^{0,5}+$$

$$+[\int\limits_e \xi(\Phi_{2,\xi}-\xi^{-1}\Phi_2)^2 d\sigma\cdot\int\limits_e R^2\xi^{-3}\delta_{3,\xi}^2 d\sigma]^{0,5}+$$

$$+[\int\limits_e \xi(\Phi_{2,\xi}-\xi^{-1}\Phi_2)^2 d\sigma\cdot\int\limits_e R^2\xi^{-3}\delta_{3,\eta}^2 d\sigma]^{0,5}\}.$$

С учетом обозначений (1.7), (2.2), неравенств

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2(a+b)},\quad a,\ b\geqslant 0,$$

$$\int\limits_e \xi^2[\Phi_{2,\eta}^2+(\Phi_{2,\xi}-\xi^{-1}\Phi_2)^2]d\sigma\leqslant P$$

следует

$$|\Phi_{1,y}(x,\ y)|\leqslant x^{1,5}d^{-1}\sqrt{16\pi\sigma P}, \qquad (2.15)$$

$$\sigma=\max_{\xi,\eta\in e_0} h,\quad e_0:(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant x^2,$$

$$h=R^2\xi^{-3}x^{-3}[\delta_{3,\xi}^2+\delta_{3,\eta}^2].$$

Аналогично из соотношений (2.7) получается неравенство

$$|\Phi_{2,y}(x,\ y)|\leqslant x^{-0,5}d^{-1}\sqrt{16\pi\sigma_1 P}, \qquad (2.16)$$

$$\sigma_1=\max_{\xi,\eta\in e_0} h_1,\quad h_1=\xi xR^2[(\delta_{2,\xi}-\xi^{-1}\delta_2)^2+\delta_{2,\eta}^2].$$

В силу асимптотики (2.11) величины h, h_1 ограничены в особой точке $\xi=x$, $\eta=y$, следовательно, ограничены в e_0. При этом величины h, h_1 не зависят от параметра x:

$$h\equiv h\left(\frac{\xi}{x},\frac{\eta-y}{x}\right),\qquad h_1\equiv h_1\left(\frac{\xi}{x},\frac{\eta-y}{x}\right).$$

Численные расчеты дают

$$\sigma\approx 0{,}046<0{,}05,\qquad \sigma_1\approx 0{,}045<0{,}05. \qquad (2.17)$$

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$d_2=2\,\|\int\limits_{\Gamma_0}|\,x^3\xi^{-2}[\alpha_2\xi^3(\xi^{-1}\delta_2),_\upsilon],_\lambda+$$

$$+1{,}5\,\alpha_2^2\,\xi\,l^{-1}\operatorname{ctg}[\pi(s-\lambda)l^{-1}]\,|\,d\lambda\,\|+3\,\|\,\xi\alpha_2^2\,\|\,; \qquad (4.2)$$

$$d_3=2\,\|\int\limits_{\Gamma_0}\xi^4x^3\delta_2\,d\lambda\,\|\,; \qquad (4.3)$$

$$d_4=3+2\,\|\,\{\int\limits_{\Gamma_0}[x^4\xi^{-1}(\xi^{-1}\delta_2),_\upsilon],_s-1{,}5\,\alpha_2 l^{-1}\operatorname{ctg}[\pi(s-\lambda)l^{-1}]\,|\,d\lambda\}^{0,5}\|; \qquad (4.4)$$

$$d_5=2\,b^3+2\,\|\,\{\int\limits_{\Gamma_0}[(\xi^4\delta_2),_s+\xi^3l^{-1}\operatorname{ctg}[\pi(s-\lambda)l^{-1}]^2\,d\lambda\}^{0,5}\|\,, \qquad (4.5)$$

$$l=\int\limits_{\Gamma_0}ds.$$

Норма $L_2(\Gamma)$ вводится обычным образом:

$$\|\cdot\|=[\int\limits_{\Gamma}(\cdot)^2ds]^{0,5}.$$

С учетом обозначений (4.1) — (4.5) основную оценку можно представить в следующем виде.

Теорема. Для любого решения задачи (1.2), (1.4) в классе функций (1.5) — (1.7) справедлива оценка

$$\|\,(x^4V),_s\,\|\equiv\|\,(x^4\Phi_2),_s\,\|\leqslant\varkappa\,\|\,f\,\|\,; \qquad (4.6)$$

$$\varkappa=d_5+\varkappa_1d_4; \qquad (4.7)$$

$$\varkappa_1=0{,}25\{C_1d_1+C_2d_2+[(C_1d_1+C_2d_2)^2+4\,d_3]^{0,5}\}^2. \qquad (4.8)$$

Доказательство. Граничные условия (1.4) на основе соотношений (2.4) можно представить в виде

$$(x^{-1}V),_n\equiv(x^{-1}\Phi_2),_n\equiv-x^{-3}\Phi_1,_s=x^2f. \qquad (4.9)$$

Подставляя в (2.7), когда $\Gamma_1=\Gamma$, $x,\ y\in\Gamma$, значение Φ_s из (4.7) и $\xi^2\Phi_2$ из (3.4) можно записать

$$0{,}5\,x^3\Phi_2=\int\limits_{\Gamma}x^3W_1[\alpha_1(\xi^{-1}\delta_2),_\upsilon],_\lambda d\lambda+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\xi^{-1}x^3W_2[\alpha_2\xi^3(\xi^{-1}\delta_2),_\upsilon],_\lambda d\lambda+\int\limits_{\Gamma}x^3\xi^4f\delta_2d\lambda, \qquad (4.10)$$

$$x=x(s),\ y=y(s),\ \xi=\xi(\lambda),\ \eta=\eta(\lambda).$$

Расписывая асимптотику в особой точке, можно проверить, что следующие выражения имеют особенности, не больше логарифмической, и, следовательно, квадратично суммируемы на Γ:

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$H_1=\xi\delta_{2,s}+l^{-1}\operatorname{ctg}[\pi(s-\lambda)l^{-1}]; \tag{4.11}$$

$$H_2=(\xi^{-1}\delta_2),_\upsilon+1{,}5\ \alpha_2\xi^{-2}\delta_2; \tag{4.12}$$

$$H_3=x^3[\alpha_1(\xi^{-1}\delta_2),_\upsilon],_\lambda+1{,}5\ \alpha_1\alpha_2 l^{-1}\operatorname{ctg}[\pi(s-\lambda)l^{-1}; \tag{4.13}$$

$$H_4=x^3\xi^{-1}[\alpha_2\xi^3(\xi^{-1}\delta_2),_\upsilon],_\lambda+1{,}5\ \alpha_2^2\xi^2 l^{-1}\operatorname{ctg}[\pi(s-\lambda)l^{-1}]; \tag{4.14}$$

$$H_5=[x^3(\xi^{-1}\delta_2),_\upsilon],_s-1{,}5\ \alpha_2 l^{-1}\operatorname{ctg}[\pi(s-\lambda)l^{-1}].$$

В соотношениях (4.10) первые два интеграла являются сингулярными. Прибавляя и вычитая к подынтегральным выражениям ядро сингулярного интеграла Гильберта с соответствующим весом, определяемым из (4.13), (4.14), можно разделить эти сингулярные интегралы на интегралы с квадратично суммируемым ядром и на сингулярный интеграл Гильберта, норма которого в L_2 известна:

$$\| l^{-1}\int_{\Gamma_0}\varphi(s)\operatorname{ctg}[\pi(s-\lambda)l^{-1}]ds\| = \|\varphi\|. \tag{4.15}$$

Переходя в (4.10) к неравенству с учетом такого разделения сингулярных интегралов, учитывая оценки (3.8), (3.11) и обозначения (4.1), (4.2), (4.3), можно получить неравенство

$$\| x^3\Phi_2\| \leqslant (C_1d_1+C_2d_2)\sqrt{P}+d_3\|f\|. \tag{4.16}$$

Подставляя вместо величины энергии P ее выражение через граничные условия (1.7), неравенство (4.16) можно представить в виде

$$\| x^3\Phi_2\| \leqslant (C_1d_1+C_2d_2)\,\| x^3\Phi_2\|^{0,5}\cdot\|f\|^{0.5}+d_3\|f\|.$$

Разрешая неравенство, получим

$$\| x^3\Phi_2\| \leqslant \varkappa_1\|f\|; \tag{4.17}$$

$$\varkappa_1=0{,}25[C_1d_1+C_2d_2+\sqrt{(C_1d_1+C_2d_2)^2+4d_3}]^2.$$

На основе оценки (4.17) получается оценка, сформулированная в теореме. Для этого соотношение (2.7), когда $x, y\in\Gamma_0$, умножается на x^4 и дифференцируется по дуге контура, а затем производится переход к неравенству

$$\|(x^4\Phi_2),_s\| \leqslant 2\,\|\int_{\Gamma_0}\xi^3\Phi_2[x^4\xi^{-1}(\xi^{-1}\delta_2),_\upsilon],_s d\lambda\| + \tag{4.18}$$

$$+2\,\|\int_{\Gamma_0} f(\xi^4\delta_2),_s d\lambda\|.$$

Интегралы в (4.18) сингулярные, поэтому, учитывая, что выражения H_1, H_2 (4.11), (4.12) квадратично суммируемы, мож-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

но добавить и вычесть от подынтегральных выражений ядро интеграла Гильберта с соответствующим весом; используя норму интеграла Гильберта (4.15), а также обозначения (4.3), (4.4), можно получить неравенство

$$\| (x^4\Phi_2)_{,s} \| \leqslant d_4 \| x^3\Phi_2 \| + d_5 \| f \| . \qquad (4.19)$$

Из неравенств (4.17), (4.19) получается основная оценка теоремы (4.6).

Неравенство (4.6) позволяет получить количественные оценки неизвестного решения краевой задачи через правую часть граничного оператора. Все коэффициенты, входящие в постоянную x, можно найти численно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.— М.: ИЛ, 1962.— 203 с.

2. Лионс Ж., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.— 370 с.

3. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1977.— 455 с.

4. Положий Г. Н. Теория и применение ρ-аналитических и (p, q)-аналитических функций.— Киев: Наукова Думка, 1973.— 420 с.

5. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций.— М.: Наука, 1968.— 648 с.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Е. И. Тарновский

Устойчивость цилиндрической оболочки при произвольном внешнем давлении с различными граничными условиями исследовалась теоретически в [1, 2] и экспериментально в [3, 4].

В данной работе с позиции приближенного подхода [5] изложен алгоритм численного исследования устойчивости цилиндрической оболочки при неосесимметричном нагружении внешним давлением по части контура поперечного сечения оболочки для различных граничных условий.

1. Рассмотрим цилиндрическую оболочку (L, R, h, E, ν) с граничными условиями вида

$$\begin{aligned} &\Gamma_1 : v=w=T_1=M_1=0,\\ &\Gamma_2 : w=w_x=T_1=T_{12}=0,\\ &\Gamma_3 : w=M_1=T_1=T_{12}=0,\\ &\Gamma_4 : u=v=w=w_x=0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

нагруженную по полосе вдоль образующей, с центральным углом φ_0, равномерно распределенным внешним давлением интенсивностью q. Граничные условия Γ_1— Γ_4 реализованы в [6].

При исследовании докритического напряженно-деформированного состояния исходили из системы линейных уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+D\,\nabla^2\nabla^2 w=p(x, y);\\ -\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2\Phi=0; \quad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

В качестве исходных уравнений задачи устойчивости использовались уравнения нейтрального равновесия с учетом моментности докритического состояния

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\nabla^4 F - E\left[2w^0_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} - w^0_{xx}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - w^0_{yy}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = 0;$$

$$D\nabla^4 w - h\left[\frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + T_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + T_1^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2S^0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \right. \tag{1.3}$$

$$\left. + w^0_{yy}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + w^0_{xx}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2w^0_{xy}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right] = 0,$$

где выражения с $(\cdot)^0$ определялись из (1.2):

$$T_1^0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \qquad w^0_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$T_2^0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \qquad w^0_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$S^0 = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}; \qquad w^0_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y};$$

2. Алгоритм расчета. В основу решения уравнений (1.2), с заданными граничными условиями вида (1.1) и определения исходного состояния оболочки при неоднородном внешнем нагружении, положен алгоритм расчета [7], который основан на применении метода последовательных смещений к эллиптическим разностным уравнениям. В результате решение исходной задачи сводится к решению итерационным методом с использованием метода последовательных смещений, уравнений (1.2), представленных в разностной форме, где для аппроксимации производных используются центральные разности второго порядка точности.

Рекуррентная зависимость между значениями в узлах сетки

$$w^k_{ij} = L_1(w^{k-1}_{i,j},\ w^{k-1}_{i\pm\xi,\,j\pm\eta},\ldots,\Phi^{k-1}_{i,j},\ \Phi^{k-1}_{i\pm\xi,\,j\pm\eta},\ldots); \tag{2.1}$$

$$\Phi^k_{ij} = L_2(w^k_{i,j},\ w^{k-1}_{i,j},\ w^{k-1}_{i\pm\xi,\,j\pm\eta},\ldots,\Phi^{k-1}_{ij},\ \Phi^{k-1}_{i\pm\xi,\,j\pm\eta},\ldots),$$

где K — номер итерации; i, j — номер узлов сетки; m — число точек в разностной схеме вдоль образующей; n — по меридиану; L_1, L_2 — линейные алгебраические операторы; ξ, η — 1, 2, 3.

При решении (1.2) ряд законтурных точек для $i = 3$ и $i = m-3$ задавался из граничных условий вида (1.1), представленных в функциях усилий и перемещений, причем выра-

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

женных через внутриконтурные их значения для данного итерационного шага k.

Для первого шага итерации ($k = 1$) значения из (2.1) в узлах сетки (для $i = 1, 2, \cdots, m$; $j = 1,2, \cdots, n$) определялись из решения системы уравнений (1.2) в форме

$$w = \sum_{m=0}^{\bar{m}} \sum_{n=1}^{\bar{n}} w_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \cos \psi_n y, \quad \psi_n = \frac{n}{2R},$$

$$\Phi = \sum_{m}^{\bar{m}} \sum_{n}^{\bar{n}} \Phi_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \cos \psi_n y, \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{L} \qquad (2.2)$$

с балочными функциями, удовлетворяющих граничным условиям вида Γ_1. Внешнее давление интенсивности q задавалось в виде ряда

$$p(x, y) = \sum_{m=0}^{\bar{m}} \sum_{n=1}^{\bar{n}} Z_{mn} \cdot \sin \lambda_m x \cdot \cos \psi_n y,$$

где

$$Z_{mn} = \frac{2\varphi_0}{n\pi^2} q, \quad \begin{matrix} m=0, \\ n=1,2,3,\ldots \bar{n}, \end{matrix}$$

$$Z_{mn} = \frac{8q}{mn\pi^2} \sin\left(m \cdot \frac{\varphi_0}{2}\right), \quad \begin{matrix} m=1,2,\ldots,\bar{m}, \\ n=1,2,\ldots,\bar{n}. \end{matrix}$$

Затем (для $k = 2$) вводились граничные условия вида (1.1), и решение для уже заданных граничных условий уточнялось итерационным методом. В основу решения уравнений устойчивости (1.3) положен приближенный подход [5].

3. Результаты расчета. Численный расчет реализован на FORTRAN-IV для машин серии ЕС. Срединная поверхность оболочки с учетом симметрии разбивалась на сетку (19×144) узла; в рядах (2.2) удерживалось по 40 членов ($\varepsilon = 4\%$).

На рис. 1 представлены результаты расчета параметра критической нагрузки $\psi = q_1^*/q_{1_0}$ оболочки L/R = 3, R/h = 200 (материал сталь IX18H9T) от угла загружения φ_0 для граничных условий Γ_1 (q_i^* — критическая неоднородная нагрузка и $q_{i_0}^*$ — критическая однородная нагрузка при реализованных граничных условиях Γ , $i = 1,2,\cdots,4$).

Кривой *1* (см. рис. 1) соответствуют результаты [2], кривой 2 — по предложенной методике и экспериментальные данные [3].

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

На рис. 2 представлены результаты расчета параметра $\psi = \psi(\varphi_0)$ цилиндрической оболочки ($L/R = 3{,}1$, $R/h = 200$, материал Д16Т) для граничных условий вида Γ_1—Γ_4.

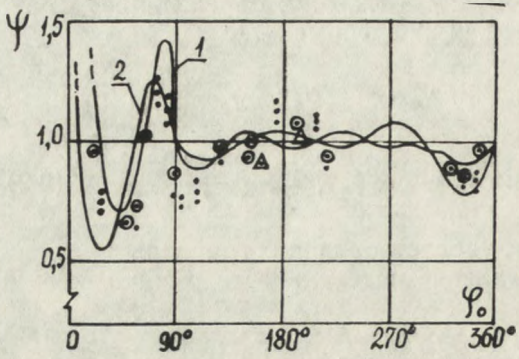

Рис. 1. Зависимости параметра критической нагрузки ψ от угла нагружения φ_0 для граничных условий Γ_1 оболочки $\frac{L}{R} = 3$, $\frac{R}{h} = 200$, материал сталь 1Х18Н9Т

Анализ видов граничных условий и изменение параметра критической нагрузки $\psi = q_i^*/q_{i_0}^*$ показывают, что ограничение, накладываемое для оболочек средней длины на угол поворота образующей, и ограничение на окружное смещение почти

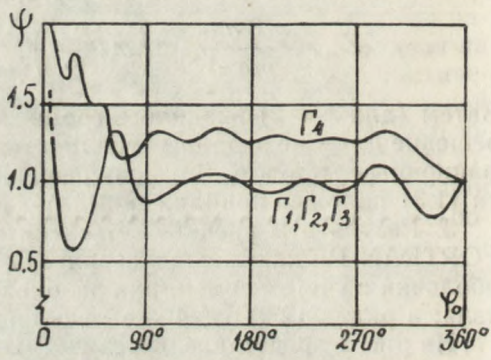

Рис. 2. Зависимости параметра критической нагрузки ψ от угла нагружения φ_0 для граничных условий Γ_1—Γ_4 оболочки $\frac{L}{R} = 3{,}1$, $\frac{R}{h} = 200$, материал Д16Т

(в пределах 7%) не сказываются на величине параметра критической нагрузки во всем диапазоне изменения неоднородности нагружения. Наибольшее влияние на величину критической нагрузки оказывает ограничение продольного (вдоль образующей) смещения. Величина параметра ψ защемленных оболочек при $90° \leqslant \varphi_0 \leqslant 350°$ выше на 30—40% и при $10° \leqslant \varphi_0 \leqslant 60°$ — на 50—100% по сравнению с равномерно нагруженной оболочкой.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанов В. В. Исследование устойчивости оболочек методом конечных разностей.— Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 1, с. 24—29.

2. Кабанов В. В., Михайлов В. Д. Устойчивость цилиндрической оболочки при неосесимметричном нагружении.— Труды XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван: Изд-во Ерев. ун-та, 1980, т. 2, с. 184—190.

3. Кудинов А. Н., Тарновский Е. И. Результаты испытаний на устойчивость цилиндрических оболочек при неосесимметричном нагружении.— В кн.: Пространственные конструкции в Красноярском крае. Красноярск, 1981, с. 149—154.

4. Преображенский И. Н. Экспериментальное исследование устойчивости круговых цилиндрических оболочек при действии осесимметричного давления.— В кн.: Исследование по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1972, вып. 8, с. 299—311.

5. Кудинов А. Н. Об одном методе решения задач устойчивости оболочек при неоднородном напряженном состоянии.— В кн.: Тезисы докладов. Всесоюзный симпозиум по устойчивости в механике деформируемого твердого тела. Калинин, 1981, с. 33—34.

6. Елкин Е. Е., Кудинов А. Н., Тарновский Е. И. Экспериментальное изучение прочности и устойчивости стеклопластиковых и неупругих цилиндрических оболочек.— Механика композитных материалов, 1984, № 3, с. 471—476.

7. Авдонин А. С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций.— М.: Машиностроение, 1969.— 402 с.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

В. Н. Барашков, О. Г. Дмитриева. Упругопластическая задача для тела вращения с использованием различных исходных аппроксимирующих соотношений 3

А. Н. Богомолов, В. А. Горельский, С. А. Зелепугин, И. Е. Хорев. Исследование взаимодействия разноплотных тел при динамическом нагружении в условиях больших пластических деформаций 9

Ю. В. Бузунов, В. А. Колдунов. Расчет нагружения упруго-идеально-пластического тела вращения вариационно-разностным методом 16

А. П. Варочкин, А. В. Герасимов, Б. А. Люкшин. Оценка параметров напряженно-деформированного состояния конструкций при динамическом нагружении по оболочечным и пространственным расчетным схемам 20

И. В. Вологдина, Б. А. Люкшин. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния оболочек вращения при динамическом нагружении 26

Ю. А. Галынский, С. В. Пономарев. Определение упругих постоянных эластичного материала методом локального деформирования 34

А. В. Герасимов. Расширение цилиндрической оболочки переменной толщины под действием сжатого газа 39

В. А. Горельский, С. А. Зелепугин, Т. М. Платова, И. Е. Хорев. Численное исследование задачи контактирования плоских тел с пластиной при несимметричном нагружении 44

В. Н. Демидов. Анализ устойчивости схемы распада разрывов для одномерных уравнений динамики упругопластических сред . . 50

А. В. Жуков. Уравнение состояния жидкой фазы железа . . 57

А. Н. Кудинов, С. В. Дмитриев. Решение задачи о выпучивании упругопластической круговой арки 61

М. В. Лазаренко. Реакция ортотропной цилиндрической оболочки на действие подвижной сосредоточенной нагрузки 65

В. Н. Лейцин. Применение частного решения осесимметричной теории упругости в методике граничных интегральных уравнений 75

О. М. Лейцина, С. В. Пономарев, В. В. Федоренко. Применение метода сопряженной аппроксимации для исследования напряженно-деформированного состояния плоских тел методом конечных элементов 80

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

В. Н. Лихачев. Оценка несимметричного напряженно-деформированного состояния упругопластической оболочки вращения при ударном нагружении 86

П. А. Люкшин. Устойчивость ортотропной сферической панели под действием внешнего давления 90

А. Д. Матвеев, Ю. В. Немировский. Энергетический метод определения матрицы жесткости двумерных и трехмерных высокоточных элементов 95

А. А. Светашков. Использование регуляризующего функционала и метод физико-геометрического погружения в задачах упругости и вязкоупругости 107

А. А. Светашков. Применение методов оптимизации в решении краевых задач теории вязкоупругости 115

В. И. Тараканов. Оценка в L_2 решения краевой задачи упругости о деформировании тела вращения при кручении 123

Е. И. Тарновский. Влияние граничных условий на устойчивость цилиндрической оболочки при неосесимметричном нагружении внешним давлением 133

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Редактор *Е. С. Юзефович*

Технический редактор *Р. А. Прошенкина*

Корректор *Н. С. Поддубная*

ИБ 1808

Сдано в набор 31.06.86 г. Подписано к печати 17.06.88 г. КЗ 06188. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага типографская № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Печ. л. 9,25. Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. л. 7,94. Тираж 500 экз. Заказ 9775. Цена 1 р. 20 к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4.

Типография изд-ва «Омская правда», г. Омск, пр. Маркса, 39.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

РЕФЕРАТЫ НА ОПУБЛИКОВАННЫЕ СТАТЬИ

УДК 539.3

Барашков В. Н., Дмитриева О. Г. Упругопластическая задача для тела вращения с использованием различных исходных аппроксимирующих соотношений.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 3—8.

В статической постановке на основе пространственных уравнений теории упругости с использованием вариационного принципа Лагранжа решается задача определения осесимметричного упругопластического напряженно-деформированного состояния (НДС) тела вращения. Физически нелинейная задача реализуется с помощью деформационной теории пластичности и метода упругих решений. Применение вариационно-разностного метода приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно искомых компонент вектора перемещений в узлах сеточной области, реализуемой методом Гаусса. Представлены результаты тестовой проверки алгоритма и сравнения с экспериментальными данными, полученными другими авторами для цилиндрических оболочек, которые позволяют сделать вывод о применимости методики к решению задач данного класса. На расчете НДС оболочки сложной формы при действии поверхностных и объемных нагрузок проведен анализ различных аппроксимирующих соотношений для производных от перемещений по координатам в зависимости от формы ячеек, покрывающих исследуемую область. Результаты сравнения приведены в виде графиков.

Библ. 4, ил. 3.

УДК 539.3

Богомолов А. Н., Горельский В. А., Зелепугин С. А., Хорев И. Е. Исследование взаимодействия разноплотных тел при динамическом нагружении в условиях больших пластических деформаций.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 9—15.

Проведено экспериментально-теоретическое исследование взаимодействия медных цилиндров со стальными пластинами. Теоретические исследования для случая осевой симметрии проведены с помощью метода конечных элементов. Использована упругопластическая модель материала, включающая уравнение состояния и определяющая соотношения, связывающие приращения девиатора упругопластических напряжений и деформаций. В широком диапазоне начальных условий исследованы особенности взаимодействия разноплотных тел и влияние геометрической формы цилиндра постоянной массы на характер деформирования пластин.

Библ. 3, ил. 3.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

УДК539.3

Бузунов Ю. В., Колдунов В. А. Расчет нагружения упруго-идеально-пластического тела вращения вариационно-разностным методом. — В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 16—19.

Решается задача об определении осесимметричного НДС упруго-идеально-пластического тела вращения в процессе квазистатического силового нагружения. Реализуется алгоритм, оснащенный на решении сеточных уравнений, полученных вариационно-разностным методом, прямым методом исключения Гаусса.

Библ. 6.

УДК 539.3

Варочкин А. П., Герасимов А. В., Люкшин Б. А. Оценка параметров напряженно-деформированного состояния конструкций при динамическом нагружении по оболочечным и пространственным расчетным схемам.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 20—25.

На основе численного моделирования исследуется задача о НДС достаточно длинной цилиндрической оболочки со ступенчато меняющейся вдоль окружности толщиной при действии нестационарного внутреннего давления. Используются оболочечная и пространственная расчетные схемы. Решение соответственно проводится методом прямых и по методу расчета упругопластических течений Уилкинса. Приведено сравнение полученных характеристик напряженно-деформированного состояния.

Библ. 4, ил. 3.

УДК 539.3

Вологдина И. В., Люкшин Б. А. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния оболочек вращения при динамическом нагружении.— В кн.: Механика сплошных сред. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 26—33.

Пренебрегая инерцией элемента оболочки в срединной поверхности, для описания напряженно-деформированного осесимметричного состояния при динамическом нагружении получена система двух связанных между собой дифференциальных уравнений, одно из которых является квазистатическим, второе — динамическим. После введения пространственной разностной сетки и соответствующих сеточных функций численное решение строится по явно-неявной схеме, позволяющей оценивать параметры напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций на относительно больших временных интервалах в десятки периодов пробега упругой волны по длине оболочки. Отмечена возможность своеобразной интерференции волн прогибов при действии серии возмущений.

Библ. 4, ил. 4.

УДК 678:539.376

Галынский Ю. А., Пономарев С. В. Определение упругих постоянных эластичного материала методом локального деформирования.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 34—38.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Рассматриваются три способа определения упругих постоянных эластичных материалов. Проведено сравнение способов по результатам определения упругих постоянных эластичного материала. Показано, что наибольшую эффективность имеет способ, основанный на испытании вдавливанием и закручиванием индентора, сцепленного с поверхностью материала.

Библ. 6, табл. 1.

УДК 539.3

Герасимов А. В. Расширение цилиндрической оболочки переменной толщины под действием сжатого газа.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 39—43.

Численно решается плоская двумерная задача о расширении толстостенной упругопластической оболочки переменной толщины под действием сильно сжатого газа. Оценивается влияние разностенности оболочки на распределение напряжений и скоростей.

Библ. 4, ил. 3.

УДК 539.3

Горельский В. А., Зелепугин С. А., Платова Т. М., Хорев И. Е. Численное исследование задачи контактирования плоских тел с пластиной при несимметричном нагружении.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 44—49.

С помощью метода конечных элементов проведено численное исследование взаимодействия твердых пластичных тел в условиях несимметричного контакта в плоской постановке. Использована упругопластическая модель среды, поведение материала в которой характеризовалось модулем сдвига, динамическим пределом текучести, константами уравнения состояния. Исследованы особенности деформирования плоского ударника и пластины в случае контакта в широком диапазоне начальных условий. Выявлен механизм образования второго кратера, образующегося в пластине при угле встречи 60°.

Библ. 4, ил. 3.

УДК 518:539.3

Демидов В. Н. Анализ устойчивости схемы распада разрывов для одномерных уравнений динамики упругопластических сред.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 50—56.

Рассмотрена одномерная линеаризованная разностная схема распада разрывов для упругопластической модели среды. С помощью методов Фурье, дифференциального приближения и энергетического метода показано, что необходимым и достаточным условием устойчивости схемы является условие, согласно которому волны, образующиеся при распаде разрывов в течение шага по времени, должны проходить расстояние, не превышающее характерного размера ячейки разностной сетки.

Библ. 5.

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

УДК 539.89

Жуков А. В. Уравнение состояния жидкой фазы железа.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 57—60.

Построена зависимость энтропии от плотности и энергии для жидкой фазы железа. Проанализировано влияние плавления на ударную адиабату.

Библ. 7, табл. 2, ил. 2.

УДК 539.3

Кудинов А. Н., Дмитриев С. В. Решение задачи о выпучивании упругопластической круговой арки.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 61—64.

С использованием моментной схемы конечных элементов решена задача о деформировании пологой круговой неупругой арки под действием сосредоточенных нагрузок. Материал арки описывался моделью тела с нелинейным упрочнением. Для оценки физической нелинейности применялся вариант метода переменной упругости с учетом разгрузки, геометрическая нелинейность определялась пошаговым нагружением. Результаты расчета сравниваются с данными эксперимента.

Библ. 3, ил. 3.

УДК 539.3:534.1

Лазаренко М. В. Реакция ортотропной цилиндрической оболочки на действие подвижной сосредоточенной нагрузки.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 65—74.

Изучается реакция бесконечной круговой ортотропной цилиндрической оболочки на действие нормальной сосредоточенной силы, точка приложения которой движется вдоль оси оболочки с постоянной скоростью. Решение ищется в виде ряда по общим решениям однородной системы уравнений равновесия. Рассмотрены случаи докритической и закритической скоростей. При закритических скоростях выделение единственного решения осуществляется с помощью энергетического принципа излучения Мандельштама.

Библ. 7, ил. 6.

УДК 539.3

Лейцин В. Н. Применение частного решения осесимметричной теории упругости в методике граничных интегральных уравнений.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, с. 75—79.

Предложено частное решение, позволяющее улучшить аппроксимацию интегральных уравнений осесимметричной теории упругости.

Библ. 5.

УДК 539.3

Лейцина О. М., Пономарев С. В., Федоренко В. В. Применение метода сопряженной аппроксимации для исследования напряженно-деформированного состояния плоских тел методом конечных элементов.—

Digital Library (repository) of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

1-665815

1 р. 20 к.

Томский госуниверситет 1878
Научная библиотека 00408416