
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ СБОРНИК

$$(3.1) \quad v = \sum_{i=1}^p u^i v_i, \quad p = \sum_{i=1}^n$$

Подставляя эти выражения в
краевых задач

$$(3.2) \quad A(v_i, n_i) - \nabla p_i = F_i, \quad \operatorname{div} v_i = 0$$

$$F_1 = 0, \quad F_2 = P_{e*}^{-1} (v_1 \nabla) v_1, \quad F_3 =$$

$$F_i = P_{e*}^{-1} \sum_{m+n+2j=i} (-1)^j (v_m \nabla^j v_n)$$

$$H_{i\pm} = 0, \quad H_{i\pm} = \mp \sum_{m+n=i} \frac{\partial n_{m\pm}}{\partial x} v_n$$

$$A(v_i, n_i) = \Delta v_i + B_* n_i E_{(0)}, \quad n_i =$$

$$(3.3) \quad v_i = 0 \quad (x = \pm 1), \quad n_{i+} = 0 \quad (x = -1), \quad n_{i-} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

1-650968

ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Издательств Томского университета

Томск - 1987



ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ СБОРНИК. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1987.-
158 с. 1р. 10к. 300 экз. 1703010000

Межвузовский сборник объединяет ряд статей, посвященных нестационарным проблемам газовой динамики, химической физики, механики деформируемого твердого тела, тепломассообмена и гидродинамики многофазных сред. Представлены численные и аналитические решения некоторых нестационарных задач.

Для научных работников, инженеров и аспирантов, занимающихся указанными проблемами механики сплошной среды.

Рецензент - кандидат физико-математических наук Н.В.Магаров

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ :

Б.А.Шваб, В.И.Лиматов, Л.Н.Ревягин, А.Н.Кудинов, Е.Н.Биллюнов,
Т.М.Платова (гл. редактор), В.А.Скрипняк (ответственный секретарь)

И $\frac{1703010000}{177(012)-87}$ 64-86

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ В УСЛОВИЯХ ПНЕВМОТРАНСПОРТА СПЛОШНЫМ ПОТОКОМ

А.Т. Севостьянов

Физическая картина движения сыпучей среды сплошным потоком в трубопроводе, как было показано в [1], состоит в том, что при фильтрации несущей среды сквозь пористую структуру частиц, находящихся в контакте друг с другом, появляется межфазная сила взаимодействия, которая приводит транспортируемый материал в движение. Последняя определяется по закону Дарси

$$dF = \frac{\eta}{2} m^2 (U - V) S \delta x,$$

где η - динамический коэффициент вязкости воздуха; β - газопроницаемость; m - пористость; V и U - скорости сыпучей и несущей сред соответственно; S - площадь сечения трубопровода; δx - длина гетерогенной ячейки.

Взаимодействие частиц сыпучей среды, концентрация которых близка к насыпной, с шероховатостями стенки трубопровода предполагает возникновение силы сопротивления потоку, достаточно хорошо описываемой законом Адамонта-Кулона [2]. Несоответствие последней межфазной силе взаимодействия приводит к развитию инерционных эффектов и возникновению напряжения σ между контактирующими частицами. Суммарное напряжение σ_x , действующее вдоль оси трубопровода x , определится из уравнения

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = -\frac{\eta}{2} \frac{m^2}{1-m} (U - V) + \frac{d\sigma}{dx}.$$

Касательное напряжение τ_w , действующее на стенку горизонтального трубопровода, может быть вычислено по формуле

$$\tau_w = f \gamma_0 \rho g (1 - m) + \lambda \sigma_x,$$

где первый член учитывает сопротивление, вызванное силой тяжести частиц; f - коэффициент, учитывающий неравномерность распределения напряжений в сечении трубопровода под действием последней; $\lambda \gamma_0$ - коэффициент трения пары сыпучий материал-стенка трубопровода; γ_0 - радиус трубопровода; ρg - истинный удельный вес.

ный вес сыпучей среды; α - коэффициент бокового распора частиц. Последняя формула может быть переписана в виде

$$\tau_w = \frac{2}{z} \varepsilon_1 \rho_1 g (1-m) + \varepsilon \alpha_x,$$

где коэффициенты ε и ε_1 объединяют свойства сыпучей среды и сопротивления транспортного трубопровода и легко определяются экспериментально. Предполагается, что они слабо зависят от параметров потока и их можно считать неизменными при расчётах транспорта конкретной сыпучей среды. Система уравнений, описывающая движение сплошного потока идеально сыпучей среды в прямолинейном горизонтальном трубопроводе, принимает следующий вид:

$$\frac{dP}{dx} = -m \frac{2}{z} (U-V),$$

$$\rho_1 V \frac{dV}{dx} = - \frac{d\alpha_x}{dx} - \varepsilon_1 \rho_1 g - \frac{2\varepsilon}{z_0(1-m)} \alpha_x,$$

$$\frac{d\alpha_x}{dx} = - \frac{m^2}{1-m} \frac{2}{z} + \frac{d\alpha}{dx}, \quad (I)$$

$G = \rho m U S$, $G_1 = \rho_1 (1-m) V S$, $P = \rho R T$, $z = a m^n$, $T = \text{const}$, где P - давление; G - массовый расход; ρ - плотность; T - температура; R - газовая постоянная для несущей среды; G_1 - массовый расход транспортируемого материала. Предполагалось, что газ-проницаемость связана с пористостью степенной зависимостью через эмпирические коэффициенты a и n , характеризующие конкретную сыпучую среду.

Экспериментальная проверка правильности математической модели (I) и выдвинутых предположений производилась на установке горизонтального пневмотранспорта, конструкция которой являлась аналогом аппаратов промышленного типа [3], состоящей из бака питателя, транспортного трубопровода длиной 5,28 м и приёмного бункера с обеспыливающим устройством. Транспортируемый материал загружался в бак питателя, последний герметизировался. Сжатый воздух через редуктор давления и расходомерное устройство подавался к аэрирующему устройству в виде перфорированного конуса, расположенного в нижней части питателя. По достижении заданного перепада давления в камере питателя, регистрируемого контрольным манометром, от-

клевался клапан впуска сыпучей среды в трубопровод и осуществлялся транспорт в течение заданного времени. По длине транспортного трубопровода были размещены 5 датчиков давления, сигналы от которых усиливались тензометрической станцией и регистрировались с помощью шлейфового осциллографа. Предварительная, перед серией опытов, тарировка датчиков и осциллограммы опытов позволяли построить распределение давления несущей среды вдоль транспортного трубопровода.

Экспериментам по пневмотранспорту различных материалов предшествовали лабораторные опыты по определению значений их истинной плотности пикнометрическим способом и зависимости газопроницаемости от пористости по методикам, описанным в [4]. В последнем случае пористость варьировалась от плотной упаковки частиц до возникновения кипящего слоя. Обработка опытных данных по методу наименьших квадратов в логарифмических координатах позволила определить искомые значения коэффициентов α и β в ранее приведённой степенной зависимости.

Обработка опытных данных по транспорту состояла в определении расхода материала по известной его массе и времени транспортирования, расход воздуха рассчитывался по формуле $G = G_0 - \frac{P}{R} G_1$, где G_0 - расход, регистрируемый прибором, а последний член учитывает расход воздуха на замещение объёма сыпучей среды, удалённой из бака питателя в процессе транспорта. Обработка данных по распределению давления вдоль транспортного трубопровода показала, что при достаточно малых перепадах давления на последнем реализуется линейная зависимость вида

$$P = P_0 - \frac{P_0 - P_a}{L} x,$$

где P_0 и P_a - значения давления в начале и конце трубопровода длиной L соответственно. Последнее позволило достаточно просто рассчитать все параметры потока в процессе пневмотранспорта. Так, использование уравнения движения для несущей среды, условия постоянства расходов и выражения для газопроницаемости определило пористость среды через параметры потока в виде

$$m = \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{G_1 L}{R_1 (1 - m) S (P_0 - P_a)} \left(\frac{G}{G_1} \frac{1 - m}{m} \frac{R T}{P} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Это уравнение решалось методом итераций для определения значения пористости в начале трубопровода m_0 . За нулевое приближение

в расчётах принималось значение пористости, соответствующее рыхлой насыпке. Анализ по теории подобия уравнения движения для несущей среды с использованием полученных экспериментальных данных показал, что при линейном распределении давления изменение пористости достаточно точно аппроксимируется зависимостью вида

$$m = m_0 \left(1 - \frac{P_0 - P_a}{P_0 L} x \right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Подстановка последнего выражения в уравнение движения сыпучей среды позволяет получить аналитическое решение в виде

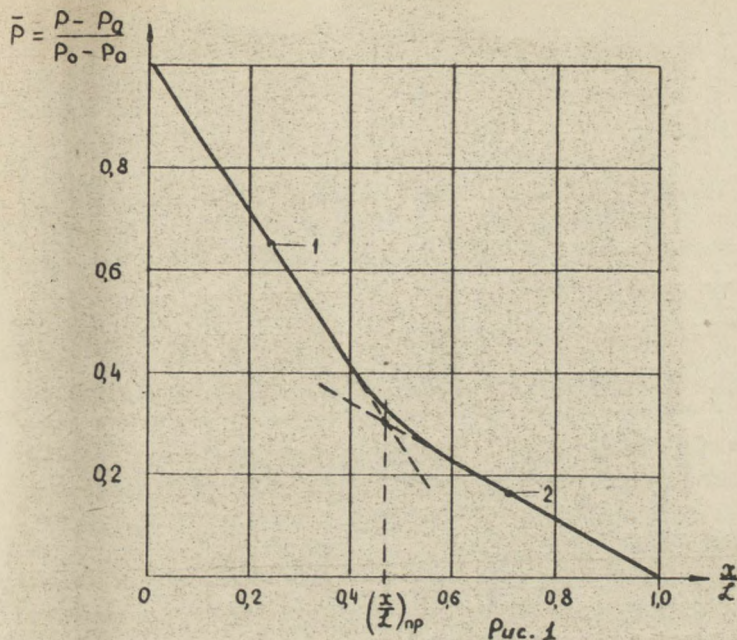
$$\begin{aligned} & \left(\frac{G_1}{S} \right)^2 \frac{1}{A} \left\{ \frac{1}{1-m_k} - \frac{1}{1-m_0} \right\} - \frac{n}{n-1} m_0 P_0 \left[1 - \frac{m_k P_a}{m_0 P_0} \right] - \varepsilon_1 \rho g L \times \\ & \times \left[1 - \frac{n}{n-1} m_0 P_0 \frac{1}{P_0 - P_a} \left(1 - \frac{m_k P_a}{m_0 P_0} \right) \right] - \frac{2\varepsilon n}{2(n-1)} m_0 P_0 L \left\{ \frac{n}{n-1} \frac{P_0}{P_0 - P_a} \right. \\ & \times \left. \left[1 - \frac{m_k}{m_0} \left(\frac{P_a}{P_0} \right)^2 \right] - \frac{P_a m_k}{P_0 m_0} \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $m_k = m_0 \left(\frac{P_a}{P_0} \right)^{-\frac{1}{n}}$ - значение пористости в конце транспортного трубопровода; использовалось граничное условие $\omega = 0$ при $x = L$, соответствующее отсутствию напряжения между частицами при выходе их из транспортного трубопровода.

Подстановка в это выражение экспериментальных данных по транспорту конкретного материала приводит к системе из n алгебраических уравнений относительно неизвестных ε и ε_1 , где n - число проведённых опытов.

Расчёты, проведённые для транспорта трёх материалов (табак, медная руда, поваренная соль), указали на правильность предположения о постоянстве значений коэффициентов ε и ε_1 .

Расшифровка осциллограммы при больших значениях начального давления в баке питателя показала, что распределение давления вдоль движущейся в транспортном трубопроводе сыпучей среды имеет нелинейный характер (рис.1). Две ветви этого графика достаточно точно аппроксимируются линейными зависимостями 1 и 2. Расчёт пористости по ветви 1 и анализ предыдущих опытов показывают, что здесь реализуется движение частиц при наличии контакта друг с другом. Ниже по потоку происходит разрушение структуры сыпучей среды -



гипотетическая кривая между зависимостями I и 2, далее организуется взвешенный транспорт – ветвь 2. Аппроксимация зависимостей I и 2 линейными до их пересечения позволяет оценить значение пористости m_{np} как предельное, при котором нарушается контакт частиц друг с другом в данной сыпучей среде.

Расчёт значений коэффициентов ε и ε_1 по описанной ранее методике для зависимости I дал удовлетворительное совпадение с данными опытов при малых перепадах давления. Аналогичный расчёт для ветви 2 показал, что значение ε близко к нулю и имеет как положительное, так и отрицательное значения. Коэффициент ε_1 – существенно меньше, и его значение убывает с увеличением общего перепада давления. Таким образом, в этой области система уравнений (I) уже не описывает движения гетерогенной среды.

Следуя общепринятой методике, была предпринята попытка критериальной оценки характера поведения коэффициента ε_1 в этой области течения, связанного с учётом сил тяжести транспортируемого материала. С этой целью в интеграле уравнения движения материала (2) значение коэффициента ε полагалось равным нулю. Обработка полученных значений ε_1 велась по критерию Фруда, в который в качестве характерных величин входили параметры, соответствующие

значению пористой пористости

$$F_z = \frac{V_{np}^2}{g(2-x_{np})}.$$

Анализ полученных данных показал, что зависимости $\varepsilon_z = \varepsilon(F_z)$ для различных материалов могут быть аппроксимированы линейными, что хорошо согласуется с данными по взвешенному пневмотранспорту других авторов и, в частности, с данными [5].

Проведённые исследования говорят о том, что расчёту транспорта сыпучей среды с высокой концентрацией должна предшествовать оценка по закону Дарси значения пористости среды в начале транспортного трубопровода. Если обнаружится, что в этом сечении реализуется контакт частиц друг с другом, то, следовательно, реализуется значительный перепад давления, необходимый для транспорта сыпучей среды до разрушения её структуры. Определить последний позволяет изложенная выше методика.

Литература

1. Севостьянов А.Т. Появление и пути ликвидации поршнеобразования при пневмотранспорте плотным слоем. - В кн.: Методы аэрогидромеханики и тепломассообмена в приложении к некоторым технологическим процессам. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983, с. 69-74.
2. Воронин В.Н., Егоров В.М. Сопротивление трения сыпучих материалов при пневмотранспорте в поршневом режиме. - В кн.: Методы гидроаэромеханики в приложении к некоторым технологическим процессам. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1977, с. 51-57.
3. Пневмотранспортные установки: Справочник /Под ред. Б. А. Анинского.-М.: Машиностроение, 1969, с. 102-148.
4. Вилькер Д.С. Лабораторный практикум по гидромеханике. - М.: Физматгиз, 1958, с. 233-283.
5. Горбис З.Р. Теплообмен и гидромеханика дисперсных сквозных потоков. 2-е изд. - М.: Энергия, 1970, с. 247-315.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ РАСЧЁТА ПОТОКОВ В КАНАЛАХ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

В.А. Безпрозванных

Растущие требования к достоверности теоретических оценок, касающихся реальных турбулентных течений, с необходимостью приводят ко всё более широкому внедрению в практику инженерных расчётов современных высокоинформативных моделей турбулентности. Что касается турбулентных потоков в каналах некруглого сечения, они относятся к одному из типов сложных турбулентных течений и их изучение представляет интерес с точки зрения проверки универсальности схемы замыкания. Весьма важен прикладной аспект проблемы моделирования турбулентных течений в каналах сложного профиля, связанный с широким использованием последних в различных технологических устройствах. Такие каналы являются основными элементами конструкций эффективных систем теплообмена атомных энергетических установок, обслуживающих систем энергетических установок космических аппаратов, их применение целесообразно при эксплуатации стеснённых газообильных подземных выработок и т.д.

В настоящее время одной из наиболее детально разработанных схем замыкания является модель переноса турбулентных напряжений, развитая в [1-3]. В работах [4, 5] проанализированы результаты расчёта стабилизированного турбулентного течения в квадратном канале на основе предложений по замыканию [1-3]. Следует отметить чрезмерную сложность численной реализации модели для использования её непосредственно в инженерных приложениях. В этой связи интерес представляет построение локально-равновесных приближений модели и выяснение их возможностей при описании реальных процессов турбулентного обмена.

Ограничившись случаем течения, стабилизированного в направлении X_1 основного потока, и исключив из рассмотрения конвекцию и диффузию корреляционных моментов второго порядка, в соответствии с моделью турбулентности [1-3] можно получить систему шести алгебраических уравнений, связывающих составляющие тензора

турбулентных напряжений $\langle u_i u_j \rangle$ с градиентами осреднённых скоростей, кинетической энергией турбулентности K и скоростью её диссипации ϵ . Эти уравнения можно ещё упростить, учитывая то обстоятельство, что в связи с малостью всех производных осреднённых скоростей по сравнению с градиентами осевой скорости $\partial U_1 / \partial x_2$ и $\partial U_1 / \partial x_3$ слагаемые, содержащие оставшиеся компоненты тензора скоростей деформаций, пренебрежимо малы. Разрешая построенную систему уравнений относительно $\langle u_i u_j \rangle$, получим для компонент тензора напряжений Рейнольдса следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle u_1^2 \rangle = & \frac{1}{A} \left\{ A^5 C + AFG \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^4 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^4 \right] (ABH + CDG + BCG) + \right. \\ & + AG \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 (2BCFG + 2ABDH + 2BCEG - 2ABFH - \\ & - 2CEFG - 2ABEH - 2BCDG + CD^2G - CE^2G) + A^3 \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 \right] (BCG - CFG - ABH - CDG) \right\}, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u_2^2 \rangle = & \frac{1}{A} \left\{ A^5 C + AFG \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^4 (ADH + BCF - CDF) + \right. \\ & + AFG \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^4 (AEH + BCF + CDG - 2CEF) + AG \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 \times \\ & \times (2BCDF + CEF^2 + CDF^2 + CDFG + CE^2F + AD^2H - 2BCF^2 - \\ & - 2BCEF - 2ADFH - AEFH - CEFG - AE^2H - CD^2F) + A^3 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 \times \\ & \times (CDF - BCF - CFG - ADH) + A^3 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 (CEG + CEF - CFG - \\ & - AEH - CDG - BCF) \left. \right\}, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u_3^2 \rangle = & \frac{1}{\Delta} \left\{ A^5 \bar{C} + AFG \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^4 (AEH + BCF - CDG - 2CEF) + \right. \\
& + AFG \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^4 (ADH + BCF - CDF) + AG \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 (2BCDF + CEF^2 + \\
& + CDF^2 + CDFG + CE^2F + AD^2H - 2BCF^2 - 2BCEF - ADFH - AEFH - \\
& - CEFG - AE^2H - CD^2F) + A^3 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 (CEG + CEF - CFG - AEH - CDG - \\
& - BCF) + A^3 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 (CDF - BCF - CFG - ADH) \left. \right\}, \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u_1 u_2 \rangle = & \frac{1}{\Delta} \left\{ A^2 FG \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^3 (CG + CF - AH) + A^2 G \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 \times \right. \\
& \times (AFH + AEH + CDG + CDF - ADH - CFG - CF^2 - CGH - CEF) + \\
& + A^4 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} (AH - CG - CF) \left. \right\}, \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u_1 u_3 \rangle = & \frac{1}{\Delta} \left\{ A^2 FG \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^3 (CG + CF - AH) + A^2 G \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \times \right. \\
& \times (AFH + AEH + CDG + CDF - ADH - CFG - CF^2 - CGH - CEF) + \\
& + A^4 \frac{\partial U_1}{\partial x_3} (AH - CG - CF) \left. \right\}, \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u_2 u_3 \rangle = & \frac{1}{\Delta} \left\{ AFG \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 \right] (ADH + CEF + CEG - \right. \\
& - CDF - AEH - CDG) + 2A^3 F \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} (CF + CG - AH) \left. \right\}, \quad (6)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D = & A^6 + A^2 FG \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^4 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^4 \right] (BF + DG) + A^2 G \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right) \times \\ & \times (2BDF - 2EFG - 2BF^2 - 2BEF + D^2G - E^2G) - A^4 \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 \right] (FG + BF - DG), \quad f_s = (1 + 0.1 Re_t)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = & 0,125 \frac{K^{0,5}}{L} - \frac{\varepsilon}{K} (c_1 - f_s), \quad B = \frac{4}{3} \alpha - \frac{2}{3} \gamma - 2 - 0,03 \frac{K^{1,5}}{\varepsilon L}, \\ C = & \frac{2}{3} [\varepsilon (1 - f_s - c_1) + 0,125 \frac{K^{1,5}}{L}], \quad D = \frac{4}{3} \gamma - \frac{2}{3} \alpha + 0,03 \frac{K^{1,5}}{\varepsilon L}, \\ E = & -\frac{2}{3} (\alpha + \gamma), \quad F = \gamma + 0,015 \frac{K^{1,5}}{\varepsilon L}, \quad G = \alpha - 1 - 0,015 \frac{K^{1,5}}{\varepsilon L}, \end{aligned}$$

$$H = \beta K; \quad \alpha = \frac{c_2 + 8}{11}, \quad \beta = \frac{30c_2 - 2}{55}, \quad \gamma = \frac{8c_2 - 2}{11}.$$

2π В уравнениях (1)–(6) L определяется соотношением $1/L = \int_0^{\varphi} d\varphi / \varphi(\varphi)$, где φ – расстояние от данной точки поперечного сечения до точек периметра канала [6]; значения констант модели турбулентности приводятся ниже.

Несмотря на довольно сложную структуру, зависимости (1) – (6), будучи алгебраическими выражениями турбулентных напряжений через градиенты осреднённой осевой скорости U_1 , K и ε , существенно упрощают задачу исследования поля течения, поскольку отпадает необходимость численного решения дифференциальных уравнений в частных производных для каждой из компонент тензора напряжений Рейнольдса. При использовании соотношений (1)–(6) распределение кинетической энергии турбулентности необходимо рассчитывать по уравнению переноса последней (полусумма уравнений баланса нормальных напряжений) [5], позволяющему учесть конвекцию и диффузию K в плоскости сечения канала; эволюция в потоке скорости диссипации энергии турбулентности ε определяется уравнением [1–3]:

$$U_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} P - C_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon}}{K} + C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{K}{\varepsilon} \langle u_k u_\ell \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\ell} \right) + \\ + \gamma \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k^2} + C_{\varepsilon 3} \gamma \frac{K \langle u_j u_k \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_\ell} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_\ell}, \quad (7)$$

где P - скорость генерации энергии турбулентности;

$$f_\varepsilon = 1 - 0.4/1.8 \exp[-(1/6 Re_t)^2];$$

$$Re_t = K^2/\gamma \varepsilon; \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\gamma \left(\partial K^{0.5}/\partial x_\ell \right)^2;$$

значения констант модели следующие: $C_1 = 1.5$; $C_2 = 0.4$; $C_3 = 0.11$; $C_\varepsilon = 0.15$; $C_{\varepsilon 2} = 1.8$; $C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 2} - 3.5 \cdot C_\varepsilon$; $C_{\varepsilon 3} = 2$.

По результатам исследований, описанных в [5, 7], можно заключить, что предлагаемый квазиравновесный подход может оказаться полезным в инженерных приложениях, поскольку, существенно упрощая численную реализацию задачи, он позволяет тем не менее учесть основные особенности течения, в частности достоверно описать взаимосвязь поля вторичных токов с анизотропией нормальных компонент тензора напряжений Рейнольдса.

Литература

1. Hanjalic K., Launder B.E. A Reynolds stress model of turbulence and its applications to thin shear flows. - *Journal of Fluid Mech.*, 1972, v. 52, part 4, p. 609-638.
2. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. - *Journal of Fluid Mech.*, 1975, v. 68, part 3, p. 537-566.
3. Hanjalic K., Launder B.E. Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-number turbulence. - *Journal of Fluid Mech.*, 1976, v. 74, part 4, p. 593-610.

4. Безпрозванных В.А., Шваб В.А. О моделировании установившегося турбулентного течения в квадратном канале с использованием схемы замыкания второго порядка. - Изв.СО АН СССР, 1983, №13. Сер.Техн. науки, вып. 3, с. 27-38.
5. Безпрозванных В.А., Шваб В.А. О моделировании уравнений переноса напряжений Рейнольдса при исследовании турбулентного течения несжимаемой жидкости в каналах сложного профиля / ТГУ.- Томск, 1983. - 48 с. - Рукопись деп. в ВИНТИ 14 марта 1983 г., № 1337 - 83 Деп.
6. Булеев Н.И. Теоретическая модель турбулентного обмена в потоках жидкости. - В кн.: Теплопередача. М.:Изд-во АН СССР, 1962, с. 64-99.
7. Безпрозванных В.А., Шваб В.А. Исследование стабилизированного турбулентного потока несжимаемой жидкости в канале квадратного сечения на основе алгебраической модели напряжений Рейнольдса / ТГУ.- Томск, 1983. - 18 с. - Рукопись деп. в ВИНТИ 14 марта 1983 г., № 1338 - 83 Деп.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ГАЗОВЗВЕСЯХ ПРИ УЧЁТЕ ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ ФАЗАМИ

А.Ф. Вахгельт

При рассмотрении волновых процессов в газовзвесах, состоящих из газа и находящихся в нём твёрдых сферических частиц, имеет место диссипация энергии волн за счёт теплообмена между фазами. Теплообмен между фазами проявляется, когда нет отставания частиц по скоростям от газа, то есть если частицы очень малы и полностью увлекаются газом. Таким образом, мы рассматриваем распространение волны давления в газовзвеси, используя односкоростную двухтемпературную модель. В этом случае распространение и эволюция сигнала будут описываться волновым уравнением в безразмерном виде [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{x^3 - x^2 + 4x - 2}{x(x+1)} u \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{x-1}{x+1} \frac{\rho_p}{\rho_g} \frac{T}{\tau_T} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} \left\{ \vartheta_3 \left[0, e^{-\frac{\tau-y}{\tau_T}} \right] - 1 \right\} dy = 0, \quad (1)$$

где u – безразмерная амплитуда возмущения скорости, отнесённая к скорости звука в чистом газе; x – безразмерная координата, отнесённая к произведению скорости звука в газе на характерное время возмущения; τ – безразмерное время; ρ_p – плотность материала частиц; ρ_g – плотность невозмущённого газа; T – характерный период возмущения; α – коэффициент температуропроводности материала частиц; δ – радиус частиц; ϑ_3 – тхэта-функция [2]; m – число частиц в единице объёма; $\mathcal{X}$ – отношение удельных теплоёмкостей для газа; $\tau_T = (8\mathcal{X}\delta^3 m \alpha / \delta^2 c_v)^{-1}$ – время тепловой релаксации; c_v – удельная теплоёмкость материала частиц.

Уравнение (1) получено при предположении о малом изменении формы профиля волны в сопровождающей системе координат [3]. Здесь предполагается, что $\Delta P / P_0$ – величина первого порядка малости, где $\Delta P = P - P_0$, P_0 – давление в невозмущённом газе, амплитуда давления в волне. Данное уравнение справедливо при малой концентрации частиц, так что их взаимодействием можно пренебречь, а также когда на длине волны содержится достаточное количество частиц, так чтобы выполнялось условие сплошности смеси [4].

В предельном случае, когда $T \gg \tau_T$ (длинноволновый случай), уравнение (1) приводится к уравнению Бюргерса [5]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{x^3 - x^2 + 4x - 2}{x(x+1)} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{x-1}{x+1} A \frac{\rho_p}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{x-1}{x+1} \frac{\tau_T'}{T} \frac{\rho_p}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, \quad (2)$$

где $A = \frac{4}{3} \pi \delta^3 m \frac{C_2}{C_v}$, $\tau_T' = A \frac{\delta^2}{15a}$.

Этот случай соответствует такому тепловому взаимодействию между фазами, когда частицы успевают прогреваться при прохождении волны через газозвесь.

Были проведены численные исследования уравнения Бюргерса (2) при изменении различных параметров газозвеси и волны. Это уравнение хорошо известно в гидромеханике, газовой динамике, физике плазмы – качественно оно описывает эволюцию ударной волны в диссипативной среде.

Коэффициент, стоящий при второй производной, представляет собой релаксационную вязкость, обусловленную теплообменом между фазами. Численно уравнение (2) решалось методом прогонки по четырёхточечной неявной схеме, которая является абсолютно устойчивой. При численном исследовании уравнения Бюргерса оказалось, что с уменьшением релаксационной вязкости затухающий профиль превращается в решение с увеличивающейся крутизной, идентичное профилю ударной волны слабой интенсивности. Это объясняется тем обстоятельством, что в данном случае диссипация оказывается малой и нелинейность оказывает большее влияние и приводит к опрокидыванию волны.

Расчёты проводились для газозвеси, состоящей из частиц угля радиусом $\delta = 2,5 \cdot 10^{-5}$ м с плотностью $\rho_p = 1600$ кг/м³, находящихся в воздухе при нормальных условиях с плотностью $\rho_0 = 1,29$ кг/м³ при концентрации $m = 0,005$. Такая газозвесь имеет следующие физические характеристики: $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $C_2 = 1320$ Дж/(кг·град), $\chi = 1,4$. Начальный импульс брался треугольной формы при значении максимальной безразмерной амплитуды возмущения, равном 0,3. При этом предполагается с точностью до членов второго порядка малости линейная связь между параметрами возмущения.

Эволюция длинноволнового возмущения представлена на рис. 1, на рис. 2 представлена эволюция возмущения при уменьшенной в два раза релаксационной вязкости. При сравнении этих двух рисунков видно, что уменьшение диссипации приводит к сильному искажению начального волнового импульса, обусловленному преобладанием нелинейности, которая вызывает более быстрое распространение точек

волнового профиля, имеющего большую амплитуду.

Представляет интерес исследование зависимости затухания начального импульса в зависимости от плотности материала частиц, то есть в зависимости от того, какой материал представлен в качестве дисперсной фазы. Проводились исследования для трёх материалов: угля, мела и алюминия с плотностями $\rho_p = 1600, 2000, 2700 \text{ кг/м}^3$ при одинаковой концентрации и параметрах газа и при соответствующих значениях удельной теплоёмкости материала частиц $C_p = 1320, 730, 880 \text{ Дж/(кг·град)}$.

На рис. 3 представлена зависимость максимальной амплитуды начального импульса, взятой через время, равное пяти периодам внешнего возмущения, то есть на расстоянии пяти длин волн. Аналогичным образом исследуются все последующие зависимости. Из рисунка видно, что с увеличением плотности материала затухание усиливается, хотя и незначительно. Как следует из расчётов, это, видимо, можно объяснить тем, что концентрация материала мала и поэтому влияние данного фактора незначительно.

Как следует из расчётов, изменение весовой концентрации в пределах применимости модели, то есть от $m = 0,001$ до $m = 0,005$, практически не меняет картину затухания возмущений.

Было проведено исследование влияния частоты, то есть характерного времени возмущения на величину затухания волны в двухфазной

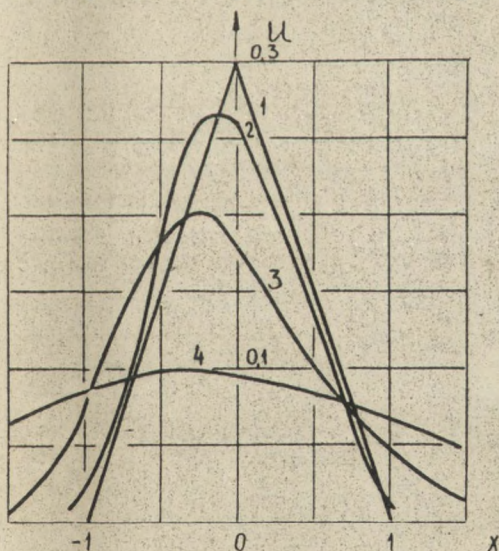


Рис. 1. Эволюция длинноволнового возмущения конечной амплитуды при $\alpha = 1,4$, $\rho_p = 1600 \text{ кг/м}^3$; $\rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3$; $m = 0,005$, $q = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$; $C_p = 1320 \text{ Дж/(кг·град)}$;

Кривая 1 соответствует $\tau=0$;
2 - $\tau=2$; 3 - $\tau=4$;
4 - $\tau=6$



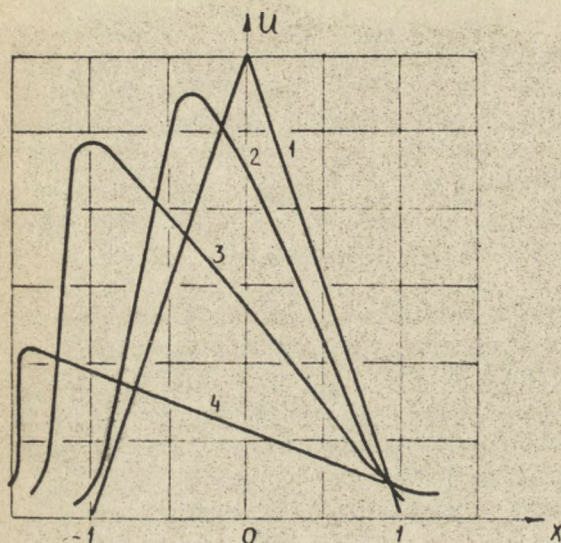


Рис. 2. Эволюция длинноволнового возмущения при уменьшенном в два раза значении коэффициента при второй производной.

Кривые 1, 2, 3, 4 соответственно как и на рис. 1

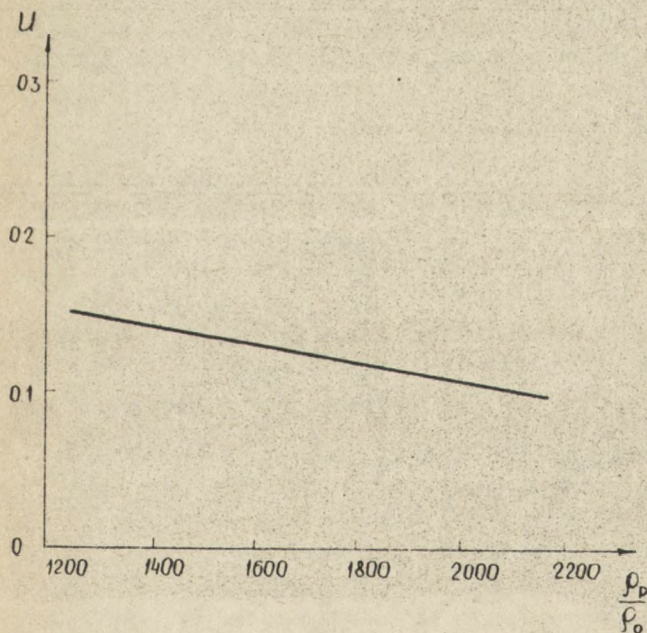


Рис. 3. Зависимость максимальной амплитуды от плотности материала частиц. Значения максимальной амплитуды берутся через время, равное пяти характерным периодам возмущения

среде. Оказалось, что чем выше частота или, что то же самое, короче период возмущения, тем интенсивнее затухание в пределах нашего приближения (рис. 4). Этот результат согласуется с зависимостью коэффициента затухания от частоты, полученной из дисперсионного соотношения [5], соответствующего уравнению (2).

Большой интерес представляет выяснение закономерностей затухания низкочастотных волн в газовзвесах при изменении давления в последних. Были проведены исследования затухания начального возмущения от давления в газовой фазе. При этом рассматривались газовзвеси, содержащие угольные частицы с соответствующими параметрами при давлениях в газовой фазе, равных 1, 5, 100 атм. Эти давлениям соответствуют следующие значения плотностей газа ρ_p : соответственно 1,29, 6,5, 133 кг/м³. На рис. 5 видно, что с ростом давления диссипативные процессы ослабевают. Это объясняется тем обстоятельством, что при повышении давления, а следовательно, и плотности несущей среды влияние частиц на затухание ослабевает.

Таким образом, проведённые исследования показали, что при только тепловом взаимодействии между фазами в газовзвеси, когда относительным движением между фазами можно пренебречь в силу малого размера частиц, на величину затухания волны давления значительно влияют: характерный период возмущения, давление в газовой

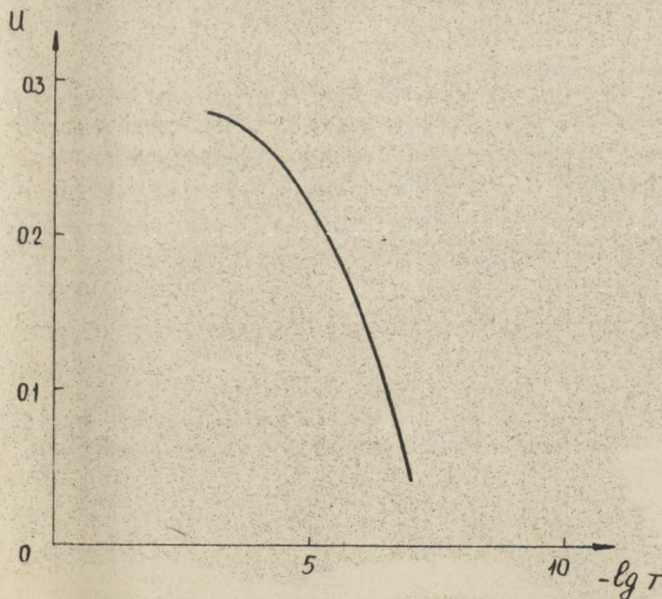


Рис. 4. Зависимость затухания волнового профиля от характерного времени возмущения. Газовзвесь содержит угольные частицы

вой фазе. Слабо выражено влияние плотности материала частиц и практически не влияет в пределах применимости модели изменение объёмной концентрации.

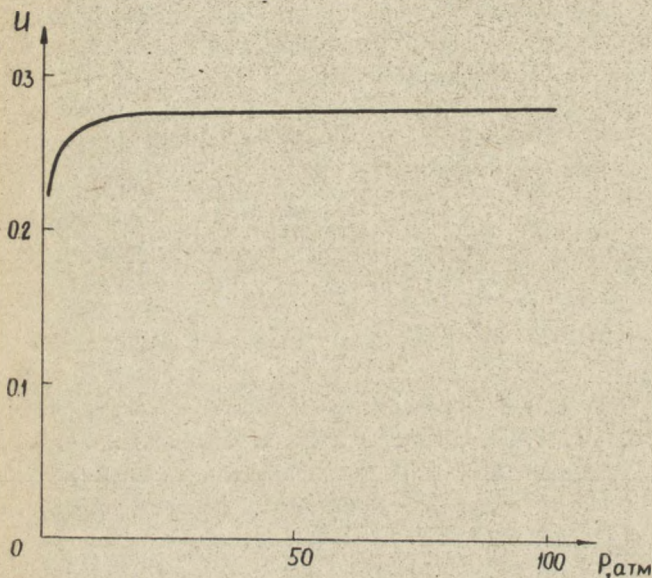


Рис. 5. Зависимость амплитуды волны от плотности давления газа. Зависимость построена для угольных частиц в воздухе

Литература

1. Борисов А.А., Вахгельт А.Ф., Накоряков В.Е. Распространение возмущений конечной амплитуды в газовзвешах. - Акустический журн., 1981, т. XXII, вып. 6, с. 930-932.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971, - 1100 с.
3. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. - М.: Наука, 1975. - 228 с.
4. Marble F.E. Dynamics of dusty gases, - Annual Review of Fluid Mech., 1970, 2, p. 397-446.
5. Борисов А.А., Вахгельт А.Ф., Накоряков В.Е. Распространение длинноволновых возмущений конечной амплитуды в газовзвешах. - ПМТФ, 1980, № 5, с. 33-38.

К ЗАДАЧЕ О ЗАЖИГАНИИ КОНДЕНСИРОВАННОГО ВЕЩЕСТВА ПЕРЕМЕННЫМ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ

И.Г.Дик, А.Б.Зурер

В [1-3] показано, что для граничных условий I рода вида $T_s = T_0 + \beta t^k$ и II рода вида $q_s = \beta t^k$ можно, выбрав соответствующие безразмерные переменные, получить единую, "универсальную" кривую зажигания (в виде отношения двух гамма-функций). Кроме того, на ряде примеров численными расчетами показано, что и для более общих граничных условий связь различных характеристик зажигания можно приближенно уложить на ту же кривую.

В данной работе с помощью приближенного метода интегральных соотношений аналитически показывается существование универсальной кривой для достаточно общих условий нагрева конденсированного вещества, а также получена сама универсальная функция, оказавшаяся простой, квадратичной.

Нагрев вещества без учета гомогенных химических реакций подчиняется балансному соотношению

$$dQ_s/dt = q_s. \quad (I)$$

где запас тепла определяется формулой

$$Q_s = c\varrho \int_0^{\infty} (T - T_0) dx,$$

а поток тепла через граничную поверхность $q_s = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}$ зависит от механизма нагрева.

Введем традиционные [2,4] безразмерные переменные:

$$\theta = E(T - T_*)/(RT_*^2); \quad \theta_0 = E(T_0 - T_*)/(RT_*^2);$$

$$\tau = t/t_*; \quad \xi = x/x_*; \quad x_* = \sqrt{t_* \lambda / c\varrho};$$

$$t_* = (c\varrho R T_*^2 / (Q_0 E)) \exp(E/RT_*).$$

В качестве масштабной температуры T_* выберем пока неопределенную температуру зажигания T_i (точнее, температуру подключения химических реакций).

Теперь предположим, что профиль температуры в конденсированном веществе можно описать формулой вида

$$\theta = (\theta_s(\tau) - \theta_0) \exp(-\xi / f(\tau)) + \theta_0, \quad (2)$$

где связь между θ_s и f легко найти, требуя выполнения соответствующего граничного условия при $\xi = 0$.

Например, пусть задано граничное условие II рода

$$(\partial \theta / \partial \xi) |_{\xi=0} = -\varphi(\theta_s, \tau).$$

Тогда $f = (\theta_s - \theta_0) / \varphi(\tau, \theta_s)$.

Саму функцию f (или θ_s) можно найти, требуя удовлетворения в любой момент времени соотношения (I). Такой подход к решению задач теплопроводности применительно к теории зажигания [5] удовлетворительно оправдался сравнением с известными результатами классических задач зажигания. Кроме того, обоснованность его вытекает также из нижеследующего.

Критерием зажигания, следуя [2, 6, 7], выберем соотношение $[(\lambda \partial T / \partial x) |_{x=0, t=t_i}]^2 = A^2 \lambda Q_0 R T_i^2 E^{-1} \exp(-E / R T_i)$

или в безразмерных переменных

$$-\varphi(\tau_i) = (\partial \theta / \partial \xi) |_{\xi=0, \tau=\tau_i} = -A. \quad (3)$$

Здесь A - некоторая константа, которую авторы [2] выбирают равной единице, а в [6] получено $A = \sqrt{2}$, причем первое значение хорошо оправдалось в ходе численных экспериментов, а второе получило асимптотическое обоснование в теории [8].

Интегрируя (2) по ξ , получим безразмерный запас тепла

$$W(\tau) = (\theta_s - \theta_0) f,$$

причем в момент зажигания $\theta_s(\tau_i) = 0$ и, следовательно,

$$W(\tau_i) = -\theta_0 f(\tau_i).$$

Накладывая условия (3) на профиль (2), получим, что

$$f(\tau_i) = -\theta_0 / A.$$

Теперь легко получить, что между переменными

$$X_i = A \tau_i / W(\tau_i) = t_i q_s(t_i) / Q_s(t_i),$$

$$Y_i = A \sqrt{T_i} / |\theta_0|^{-1} = \sqrt{t_i / \lambda c \vartheta} q_s(t_i) / (T_i - T_0)$$

имеется простая связь

$$\beta Y_i = X_i, \quad (4)$$

где β — поправочный множитель.

Если подобрать (методом наименьших квадратов) значение $\beta = 1,09$, то можно наилучшим образом приблизить функцию (4) к результатам [1-3]. Результаты сравнения приведены в табл. I, где во второй строке даны Y_i из [1-3], в третьей — вычисленные по формуле (4).

Таблица I

X_i	0	1	2	3	4	5
Y_i [1-3]	0	0,89	1,33	1,66	1,94	2,18
Y_i (4)	0	0,95	1,35	1,66	1,92	2,15

Таким образом, характеристики зажигания могут быть вполне удовлетворительно найдены из системы

$$T_i = T_0 + \sqrt{q_s(t_i)} \int_0^{t_i} q_s(\tau) d\tau / \lambda c \vartheta, \quad (5)$$

$$q_s^2(t_i) = A^2 \lambda R T_i^2 E^{-1} Q_0 \exp(-E/R T_i). \quad (6)$$

В задачах, когда q_s не задана явно функцией времени, требуется дополнительно находить $q_s(t)$, решая уравнение теплопроводности.

Сделаем следующие замечания:

1. Возможность применения приближенного решения (полученного методом интегральных соотношений) вместо точного в задачах теории зажигания связана с тем, что процесс зажигания в большинстве случаев — тонкий пограничный слой. Если пробная функция (2) подобрана так, чтобы удовлетворялось граничное условие, есть основание полагать, что состояние теплового пограничного слоя описывается верно [9]. Вместе с тем ясны и ограничения. Например, в (2) предполагается монотонный по ζ профиль. Это предположение заведомо неверно, если тепловой поток на поверхности осциллирует с большой частотой, так что погранслой не успевает релаксировать.

2. Полученный выше вид "универсальной" кривой опирается на определенный критерий зажигания. В ряде случаев, например в режиме с сильным падением теплового потока на поверхности [10], использование критерия (3) дает сильно завышенные результаты.

При этом, естественно, результаты расчетов [10] не укладываются на "универсальную" кривую.

3. Легко получить расчетные формулы, пользуясь адиабатическим критерием зажигания [11], а не квазистационарным (3).

Для этого запишем баланс тепла с использованием пробного профиля (2) в виде

$$\theta_s = \theta_0 + \sqrt{\varphi \int_0^{\tau} \varphi(\tau) d\tau}.$$

Масштабное соотношение $\theta_s(\tau_i) = 0$ и адиабатический критерий зажигания в безразмерном виде

$$(d\theta_s / d\tau) |_{\tau=\tau_i} = 1 \quad (7)$$

дают

$$\theta_0^2 = \varphi(\tau_i) \int_0^{\tau_i} \varphi(\tau) d\tau,$$

$$\varphi^2(\tau_i) = 2 \sqrt{\varphi(\tau_i) \int_0^{\tau_i} \varphi(\tau) d\tau} - \int_0^{\tau_i} \varphi(\tau) d\tau (d\varphi/d\tau) |_{\tau=\tau_i}.$$

Например, если $\varphi = a\tau^k$, то получим

$$\tau_i = (k+0,5) |\theta_0|;$$

$$a = \sqrt{k+1} |\theta_0|^{0,5-k} (k+0,5)^{-k-0,5} \quad (8)$$

(9)

В [4] эта же задача изложена с использованием точного решения линейного уравнения теплопроводности. Решения отличаются лишь коэффициентом в уравнении (9), который в [4] есть комбинация гамма-функций Эйлера.

Отношения $\rho = a |\theta_0|^{k-0,5}$ даны в табл. 2.

Таблица 2

k	- 0,2	0	0,5	1
ρ [4]	2,19	1,77	1,13	0,63
ρ (9)	1,29	1,41	1,22	0,77

Для примера возьмем следующие значения констант:

$$T_0 = 300 \text{ К}, E = 40 \text{ ккал/моль}, c = 0,3 \text{ ккал/(г·К)}, \rho = 1,52 \text{ г/см}^3,$$

$$\lambda = 3 \cdot 10^{-4} \text{ ккал/(см·с·К)}, Q_2 = 6,35 \cdot 10^{21} \text{ ккал/(см}^3 \cdot \text{с)}.$$

Зависимость теплового потока возьмем в виде $\dot{q} = B t^{\alpha}$ и численное значение $B = 1$.

Расчетные формулы получаются из (5), (6) и (8), (9):

$$t_i = [\sqrt{\lambda c_p} (1 + \alpha) (T_i - T_0) B^{-1}] \cdot \frac{2}{2\alpha}$$

независимо от выбранного критерия;

$$t_i^{2\alpha} = A^2 Q_2 \lambda R T_i^2 (B^2 E)^{-1} \exp(-\frac{E}{RT_i})$$

для квазистационарного критерия (3); и

$$t_i = (\alpha + 0,5) c_p (Q_2)^{-1} (T_i - T_0) \exp(-\frac{E}{RT_i})$$

для адиабатического критерия (7).

Полное время зажигания, следуя [4], есть $t_3 = t_i + t_*$.
Результаты расчетов приведены в табл.3.

Таблица 3

L	Критерий (3)			Критерий (7)		
	T_i, K	t_i, c	t_3, c	T_i, K	t_i, c	t_3, c
-0,25	447	1,96	1,97	414,7	1,77	2,36
0	450,4	1,66	1,66	420,5	1,96	2,26
0,25	452,4	1,52	1,52	424,6	1,90	2,12
1	456,3	1,35	1,35	432,6	1,68	1,73

Результаты при использовании различных критериев достаточно близки, но времена зажигания, вычисленные с помощью (7), больше, чем получаются по (3).

Литература

1. Аверсон А.Э., Барзыкин В.В., Мержанов А.Г. Динамические режимы зажигания. - ФГВ, 1968, № 1, с.20-32.
2. Merzhanov A.G., Averson A.E. *Combustion and Flame*, 1971, 16, №1, p. 89.
3. Аверсон А.Э. Теория зажигания. - В кн.: Теплообмен в процессе горения. Чернооголовка: ОИХВ АН СССР, 1980, с. 16 - 35.
4. Вилиюнов В.Н. Теория зажигания конденсированных веществ. - Новосибирск: Наука, 1984. - 187 с.

5. Дик И.Г., Зурер А.В. Применение метода интегральных соотношений в задачах теории зажигания. - ФГВ, 1979, т. 18, с. 16-22.
6. Зельдович Я.В. К теории зажигания. - Докл. АН СССР, 1963, т. 150, №2, с. 131-134.
7. Ковальский А.А., Хлевной С.С., Михеев В.Д. К вопросу о зажигании баллистических порохов. - ФГВ, 1967, т. 3, № 4, с. 547-554.
8. Буркина Р.С., Виллюнов В.Н. Асимптотический анализ зажигания реакционноспособного вещества нагретой поверхностью. - ИМТФ, 1976, № 6, с. 96-101.
9. Коздoba Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. - М.: Наука, 1975, - 227 с.
10. Розенбанд В.И., Аверсон А.Э., Барзыкин В.В., Мержанов А.Г. О некоторых закономерностях динамических режимов зажигания. - ФГВ, 1968, т. 4, № 4, с. 494-500.
11. Виллюнов В.Н. К тепловой теории зажигания - ФГВ, 1966, т. 2, № 2, с. 77-82.

ТЕПЛОВОЙ ВЗРЫВ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТЕПЛООТДАЧИ НА СТЕНКАХ ПЛОСКОГО СЛОЯ

И.Г.Дик

Пусть плоский слой толщины τ , заполненный реагирующим веществом, ограничен от окружающей среды температуры T_0 стенками, имеющими коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 . Точных аналитических формул для критических условий теплового взрыва в такой системе получить не удастся.

Для симметричного случая ($\alpha_1 = \alpha_2$) эффективным оказался метод сложения тепловых сопротивлений, позволяющий решить задачу приближенно, с хорошей точностью [1,2]. Этот метод можно развить и для несимметричных условий теплоотдачи.

Действительно, источник, записываемый [1] в виде $Q_0 e^{-\frac{E}{RT}}$, обеспечивает выпуклый профиль температуры в слое. Следовательно, имеется некоторое сечение, разбивающее всю ширину слоя τ на отрезки τ_1 и τ_2 , в котором достигается максимум температуры. Вследствие этого исходная реагирующая система разбивается на две, не связанные между собой (разделенные адиабатической перегородкой).

Связь параметров в критических условиях для каждой из выделенных таким образом подсистем можно, следуя [2], с хорошей точностью записать в виде

$$\tau_i^2 Q_0 \exp(-E/RT_0) / (\lambda RT_0^2/E) = 0,88 / (1 + 0,88e\lambda / (\alpha_i \tau_i)). \quad (1)$$

В (1) применено правило сложения тепловых сопротивлений стенок α^{-1} и слоя $\sim \tau_i / \lambda$ по закону последовательной цепи.

Меняя i ($i=1,2$), получим из (1) систему уравнений

$$\tau_1^2 + (0,88e\lambda / \alpha_1) \tau_1 = \tau_2^2 + (0,88\lambda / \alpha_2) \tau_2 = \Phi(T_0), \quad (2)$$

$$\Phi = 0,88\lambda (RT_0^2/E) \exp(E/RT_0) / Q_0, \quad (3)$$

позволяющая определить τ_1 и τ_2 и, с учетом равенства

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa, \quad (4)$$

критическую ширину слоя κ_* как функцию температуры среды

$$T_0 : \quad \kappa_* = \sum_{i=1}^2 \sqrt{(0,44\lambda e/\alpha_i)^2 + \Phi(T_0) - (0,44\lambda e/\alpha_i)}. \quad (5)$$

Если нужно при заданной ширине слоя определить критическую температуру T_{0*} , то пользоваться (5) неудобно.

Можно ввести эффективный коэффициент теплоотдачи стенок α и тогда критическое значение параметра Франк-Каменецкого FK_* вычислить по формуле [1,2] :

$$FK_* = \kappa^2 Q_0 \exp(-E/RT_0) / (\kappa RT_0^2/E) = 0,88 / (1 + 0,88e\lambda/\alpha\kappa). \quad (6)$$

Равенства (2),(4),(6) с учетом (3) образуют систему трех уравнений относительно κ_1 , κ_2 и α .

Из этой системы можно получить, что

$$\kappa_2/\kappa_1 = [\kappa/(0,88e\lambda) + \alpha_1^{-1}] / [\kappa/(0,88e\lambda) + \alpha_2^{-1}]. \quad (7)$$

Физический смысл этого соотношения, как нетрудно установить дополнительными вычислениями, в том, что вся толщина слоя κ делится в отношении κ_1 и κ_2 так, чтобы обеспечивался одинаковый разогрев (аналог разности потенциалов в теории электрических цепей) в каждой из этих подсистем.

Другим следствием (2),(4),(6) является выражение для теплового сопротивления слоя

$$[\alpha^{-1} + (\kappa/0,88e\lambda)]^{-1} = \sum_{i=1}^2 [\alpha_i^{-1} + (\kappa/0,88e\lambda)]^{-1}. \quad (8)$$

Квадратная скобка в левой части формулы есть полное тепловое сопротивление, каждая квадратная скобка в правой части дает вклад слоя толщины κ_i и состоит, как легко видеть, из суммы сопротивлений слоя реагента и сопротивления прилегающей к нему стенки.

Общее тепловое сопротивление, как следует из (8), образуется по закону параллельной цепи (складываются проводимости).

Исключив в (8) с помощью (4),(7) κ_i , получим связь α через α_1 и α_2 , которую, введя параметры $N_i = \alpha_i\kappa/(0,88e\lambda)$ и $N = \alpha\kappa/(0,88e\lambda)$, запишем в таком (симметричном) виде:

$$[1 + N^{-1}]^{-1} = \sum_{i=0}^1 N_i [1 + N_i / (1 + (1 + N_i^{-1}) / (1 + N_{i-1}^{-1}))]^{-1}, \quad N_0 = N_2. \quad (9)$$

Теперь из (6) легко вычислить F_{K*} , а затем определить T_{o*} .

В [3] численно решалась задача о критических условиях теплового взрыва в слое, ограниченном стенками с различной теплопроводностью. Результаты этой работы могут быть легко интерпретированы в терминах нашей задачи, если как частный случай чисто кондуктивного теплообмена положить $\alpha_i = \lambda_i / d_i$, где λ_i - коэффициенты теплопроводности; d_i - толщины стенок.

Для примера возьмем $M_1 = \infty$. Зависимость $F_{K*}(N_2)$, вычисленная по формулам (6)(9), приведена в таблице, где указаны также результаты счета на ЭВМ, заимствованные из [3].

N_2	0,084	0,21	0,42	1	2,09	4,18
F_{K*} [3]	1,02	1,21	1,48	2,03	2,51	2,93
F_{K*} (6)(9)	1,02	1,21	1,48	2,01	2,48	2,87

К сожалению, нет численных данных для $N_2 > 4,18$, но правильное асимптотическое значение $F_{K*} = 3,52$ при $N_2 \rightarrow \infty$ дает основание считать, что погрешность формул (6)(9) не более 5 %.

Аналогично получаются и другие известные асимптотические результаты.

Литература

1. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. - М.: Наука, 1967. - 489 с.
2. Барзыкин В.В., Мержанов А.Г. Краевая задача в теории теплового взрыва. - Докл. АН СССР, т. 120, № 6, с.1271-1273.
3. Колесников А.К. Тепловой взрыв в слое реагирующей жидкости, ограниченном массивами разной теплопроводности. - ФГВ, 1984, № 2, с. 91-94.

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ВЫГОРАНИЯ НА ОЧАГОВОЕ ТЕПЛОВОЕ ВОСПЛАМЕНЕНИЕ

Р.С.Буркина, А.Г.Князева

Очаговый тепловой взрыв достаточно полно исследован для П-образного начального разогрева [1-6]. В [2,7] показано, что на критическую зависимость параметра Франк-Каменецкого от температурного напора существенно влияет характер начального распределения температуры в очаге.

В настоящей работе с помощью численного анализа исследуется очаговый тепловой взрыв для четырех вариантов распределения начальной температуры в очаге. Учитывается влияние выгорания реагента.

1. Изменение температуры и величины выгорания в очаге описывается следующей системой уравнений, начальных и граничных условий [1,7]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \delta^{-1} \frac{1}{\xi^m} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^m \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + (1-y)^n \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \delta^{-1} \frac{1}{\xi^m} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^m \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mathcal{L}_e + \gamma (1-y)^n \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right), \quad (2)$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0 [f(\xi) - 1], \quad y(\xi, 0) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial y(0, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta(\infty, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial y(\infty, \tau)}{\partial \xi} = 0. \quad (4)$$

где $\theta = E(T - T_0) / RT_0^2$ - безразмерная температура; y - концентрация реагента; $\xi = x / \tau$; $\tau = t / t_{ad}$ - безразмерные пространственная координата и время; τ - характерный пространственный размер начального распределения температуры; $\beta = RT_0 / E$; $\theta_0 = E(T_n - T_0) / RT_0^2$; $\delta = (\tau^2 E Q_{zp} / \lambda RT_0^2) \exp(-E / RT_0)$; $\mathcal{L}_e = c_p D / \lambda$; $\gamma = c_p R T_0^2 / EQ$; m - показатель формы симметрии очага; n - порядок реакции. Здесь

и ниже использовались обычные для задач зажигания величины и безразмерные комплексы. $\varphi(\xi)$ в (3) определяет начальное распределение температуры, симметричное относительно центра очага. Рассмотрены четыре варианта начальных распределений температуры в очаге $\varphi(\xi)$: линейное - $(1 - \xi)\zeta(1 - \xi)$, экспоненциальное - $\exp(-2\xi/\sqrt{\pi})$, вероятностное - $\exp(-\xi^2)$ и П-образное - $1 - \zeta(1 - \xi)$.

Исследовался сферический очаг $m = 2$. Диапазоны варьирования параметров, определяющих процесс, следующие: $10 \leq \Theta \leq 50$; $0 \leq \xi \leq 5$; $5 \cdot 10^{-4} \leq \gamma < 0,1$; $0 \leq n \leq 3$.

Численная реализация уравнений (I)-(4) проводилась по неявной разностной схеме методом прогонки. Расчетная пространственная область $[0, \infty[$ переводилась в конечную с помощью преобразования $\zeta = 1/(1 + \xi)$. Это позволяет сгущать расчетную сетку в окрестности очага и использовать экономичный алгоритм реализации граничных условий на ∞ . Точность счета $\sim 4\%$ достигалась подбором шага по координате и соответствующего значения числа Куранта.

2. Поведение температуры $\theta(0, \tau)$ и выгорания $\psi(0, \tau)$ в центре очага для линейного начального распределения температуры показано на рис. I. Видно, что рассматриваемый случай, в отличие от П-образного распределения [1], характеризуется двумя критическими значениями параметра Франк-Каменецкого δ_* ' и δ_*'' .

Для $\delta \geq \delta_*'$ температура очага монотонно возрастает в течение всего процесса (кривые 1, 2) и при $\tau \sim 2$ происходит воспламенение. Изменение пространственного распределения температуры на этапе воспламенения происходит только в узкой зоне у центра очага $\xi_1 = 0,05$. Выгорание реагента сказывается лишь в центре очага. Кривые 1', 2' (рис. I) показывают, что в центре очага реагент полностью выгорает к моменту воспламенения.

При $\delta_*'' \leq \delta < \delta_*'$ температура $\theta(0, \tau)$ сначала падает, что связано с радиальным перераспределением начального температурного профиля $\varphi(\xi)$ и недостаточным теплоприходом от химической реакции. Затем температурный профиль стабилизируется, химическая реакция обеспечивает рост температуры в очаге, и происходит воспламенение (кривые 3-6). Такой режим может существовать длительное время. Так, при $\delta \geq \delta_*''$ время воспламенения $\tau_b \sim 12$ (кривые 5, 6). В пределе при $\delta \rightarrow \delta_*''$ $\tau_b \rightarrow \infty$.

Выгорание реагента также зависит от величины δ' . При стремлении $\delta \rightarrow \delta_*''$ выгорание сначала уменьшается (кривые 3, 4), что

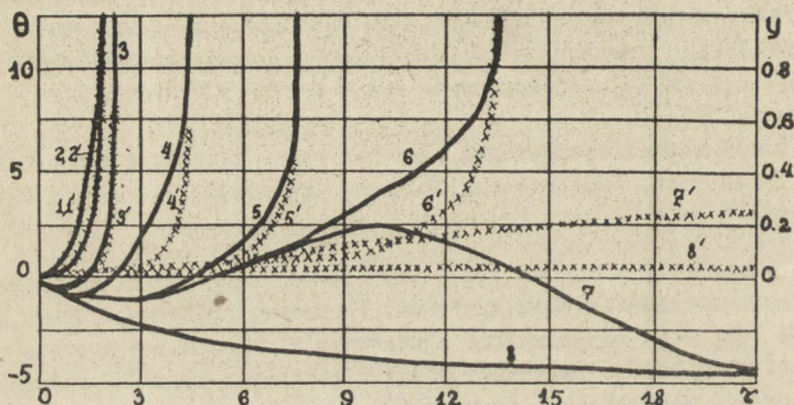


Рис. 1. Поведение температуры $\theta(0, \tau)$ — и концентрации продукта реакции $y(0, \tau)$ $\times \times \times \times$ в центре очага при линейном начальном распределении температуры $\varphi(\xi) = (1-\xi)\varphi(1-\xi)$ и различных δ : $\delta_1 = 23000 > \delta_2 = \delta'_1 = 22925 > \delta_3 = 15425 > \delta_4 = 4220 > \delta_6 = 3000 > \delta_6'' = 2870 > \delta_7 = 2830 > \delta_8 = 1490$; $n = 1$; $\theta_0 = 20$; $\chi_0 = 0$; $\gamma = 10^{-2}$

связано с изменением температурного профиля, а затем возрастает (кривые 5', 6'), что вызвано увеличением времени воспламенения.

Отметим, что область изменения $\delta \in [\delta''_*, \delta'_*]$ в рассмотренном случае распределения $\varphi(\xi)$ достаточно велика, более чем на порядок превосходит δ''_* (см. таблицу).

Значения критических параметров δ'_* , δ''_* для $\varphi(\xi) = (1-\xi)\varphi(1-\xi)$ при различных θ_0 . $n = 1$, $\chi_0 = 0$, $\gamma = 10^{-2}$

θ_0	10	20	30	50
δ'_*	9550	22925	34009	66900
δ''_*	760	2870	5958	16552
$\delta'_* - \delta''_*$	8790	20055	29051	49348

Для $\delta < \delta''_*$ решающую роль на развитие процесса оказывает теплоотдача с границ очага. В результате теплоотдачи происходит уменьшение геометрических размеров очага и его остывание (кривая 7). При малых значениях параметра Франк-Каменецкого

температура в центре очага монотонно падает (кривая 8). Выгорание в этом режиме остается незначительным.

Аналогично процесс воспламенения

развивается в случае экспоненциальной зависимости $\varphi(\xi)$. δ'_*

Для вероятностного и П-образного распределений $\varphi(\xi)$ δ'_* и δ''_* совпадают и, следовательно, режим воспламенения, соответствующий интервалу $[\delta''_*, \delta'_*]$, отсутствует. Это следует из анализа начального этапа разогрева очага. Гладкие температурные профили уже в начальный момент времени удовлетворяют условию $(\partial\varphi/\partial\xi)|_{\xi \rightarrow +0} = 0$. В результате рассмотренная выше перестройка начального температурного профиля и связанное с этим понижение температуры отсутствуют.

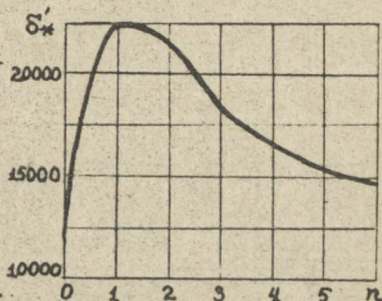


Рис. 2. Зависимость δ'_* от порядка реакции n :
 $\Phi = (1-\xi)\xi(1-\xi)$; $\theta_0 = 20$; $\chi_e = 0$; $\gamma = 10^{-2}$.

Изменение пространственного распределения температуры для этих режимов показывает, что развитие реакции происходит на всем характерном размере начального очага. На δ_* и развитие процесса выгорания влияет не существенно. Подробно картина поведения температуры $\theta(0, \tau)$ для П-образного очага рассмотрена в [1].

Варьирование n , χ_e и γ практически не влияет на величину δ''_* , а δ'_* , как показывают расчеты, зависит лишь от порядка реакции n . Зависимость $\delta'_*(n)$ показана на рис. 2. Ход кривой $\delta'_*(n)$ определяется величиной выгорания реагента. Чем выше выгорание, тем больше δ'_* . При $n \rightarrow 1$ влияние выгорания увеличивается и δ'_* растет. Для $n > 1$ выгорание уменьшается и его влияние на δ'_* ослабевает. Этим обусловлен максимум зависимости $\delta'_*(n)$.

Величина выгорания в центре очага увеличивается с ростом γ и при уменьшении χ_e , n . Характер зависимости выгорания от времени при различных n , χ_e и γ такой же, как и при $n=1$, $\chi_e=0$, $\gamma=10^{-2}$ (см. рис. 1).

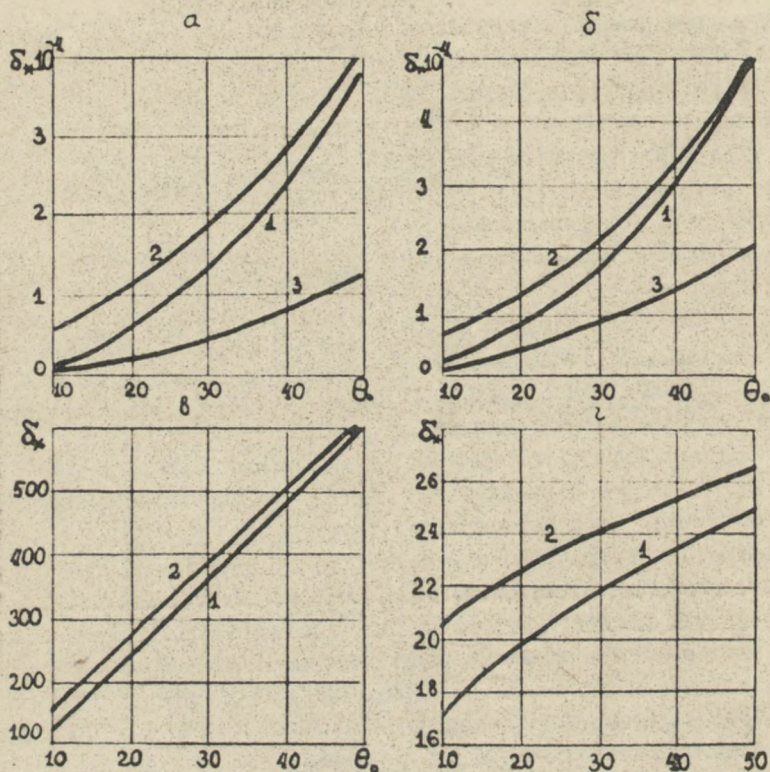


Рис. 3. Зависимость Δ^* от температурного напора Θ_0 при различных распределениях температуры для $n = 0$:
а - $\varphi(\xi) = (1 - \xi)^{1/2} (1 - \xi)$; б - $\varphi(\xi) = \exp(-2\xi/\sqrt{\pi})$;
в - $\varphi(\xi) = \exp(-\xi^2)$; г - $\varphi(\xi) = 1 - \xi (1 - \xi)$;
1 - $\Delta_{ac}(\Theta_0)$ из [7]; 2 - $\Delta'_*(\Theta_0)$; 3 - $\Delta''_*(\Theta_0)$.

Искомые зависимости $\Delta'_*(\Theta_0)$ и $\Delta''_*(\Theta_0)$ для четырех рассмотренных случаев начального распределения температуры $\varphi(\xi)$ приведены на рис. 3. С асимптотическим значением $\Delta_{ac}(\Theta_0)$, полученным в [7], хорошо согласуется первое критическое значение $\Delta'_*(\Theta_0)$.

Литература

1. Мержанов А.Г., Барзыкин В.В., Гонтковская В.Т. Задача об очаговом тепловом взрыве. - Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 2, с. 380-383.
2. Thomas P H *An approximate Theory of "Hot Spot" Criticality Comb and Flame*, 1973, v. 21, № 1, p. 99-109.
3. Zaturka M B *The interaction of Hot Spots - Comb and Flame*, 1974, v. 23, № 3, p. 313-317.
4. Zaturka M B *Thermal explosion of interaction Hot Spots - Comb. and Flame*, 1975, v. 25, № 1, p. 25-30.
5. Буркина Р.С., Виллюнов В.Н. О возбуждении химической реакции в "горячей точке". - Физика горения и взрыва, 1980, т. 16, № 4, с. 75-79.
6. Виллюнов В.Н., Буркина Р.С. К теории очагового теплового взрыва при наличии термического сопротивления. - В кн.: Горение конденсированных и гетерогенных систем: Матер. VI Всесоюз. симп. по горению и взрыву. Черноголовка, 1980, с. 18-21.
7. Буркина Р.С., Виллюнов В.Н. Очаговое тепловое воспламенение при произвольном начальном распределении температуры. - Химич. физика, 1982, № 3, с. 419-422.

О ПОСТАНОВКЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ДАВЛЕНИЯ В ВЕРШИНЕ ВЫПУКЛОГО УГЛА

В.А.Якутенок

При численных расчетах течений вязкой несжимаемой жидкости необходимо определять давление в угловой точке. Наличие особенности в угловой точке приводит к неоднозначности в определении давления.

Аналогичная проблема возникает при нахождении значения вихря в угловой точке при решении задач в переменных функция тока - вихрь. Семь способов определения значений вихря в угловой точке приводятся в [1]. Там же обсуждаются вопросы сходимости и точности, возникающие при расчете течений в окрестности выпуклого угла. Отмечается дискуссионность сравнительных качеств рассмотренных способов определения значений вихря в угловой точке.

В данной работе было использовано восемь различных способов численной реализации постановки граничного условия для давления в угловой точке.

В качестве тестовой была выбрана задача об установившемся ползущем течении вязкой жидкости в круглом канале с внезапным сужением. Течение имеет осевую симметрию и описывается в цилиндрических координатах с началом в плоскости выходного сечения. Система уравнений Стокса, которую следует использовать для ползущего течения (число Рейнольдса равно нулю), имеет вид

$$\nabla^2 U_r - \frac{U_r}{r^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (1)$$

$$\nabla^2 U_z = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2)$$

Здесь r, z - цилиндрические координаты; U_z, U_r - аксиальная и радиальная скорости; p - давление.

В качестве масштабов длины и скорости выбраны радиус большой трубы R и максимальная скорость установившегося течения в малой трубе U .

Давление отнесено к комплексу $\mu U/R$, μ - коэффициент динамической вязкости.

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} = 0. \quad (3)$$

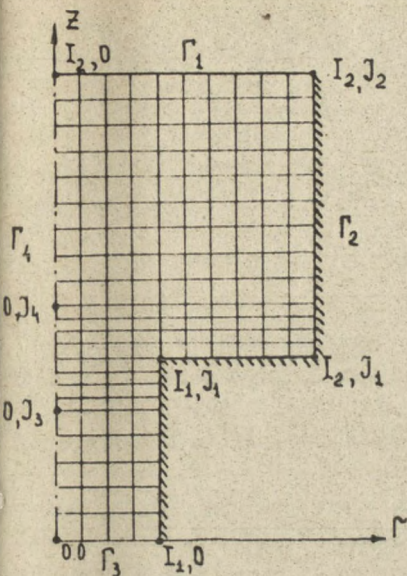


Рис. 1

Область решения представлена на рис. 1: Γ_1 - входная граница; Γ_2 - твердая стенка; Γ_3 - выходная граница; Γ_4 - ось симметрии. Здесь же схематично представлена разностная сетка.

На твердой стенке ставятся условия прилипания:

$$U_r = U_z = 0. \quad (4)$$

На оси симметрии выполняются условия симметрии:

$$U_r = 0, \frac{\partial U_z}{\partial r} = 0, \frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

На входной и выходной границах задается решение Пуазейля, т.е. имеем соответственно

$$U_r = 0, U_z = \frac{1}{\beta^2} (r^2 - 1), \quad (5)$$

$$U_r = 0, U_z = ((\beta r)^2 - 1),$$

где β - отношение радиусов большой и малой труб.

Из уравнений (1), (2) с учетом уравнения неразрывности (3) получаем для давления уравнение Лапласа

$$\nabla^2 p = 0. \quad (6)$$

Решение поставленной задачи находится при помощи системы уравнений (1), (2), (6). Эквивалентность решению исходной системы (1) - (3) обеспечивается выполнением уравнения неразрывности на границах, что гарантирует соленоидальность поля скоростей [2].

Область решения покрывается разностной сеткой (рис. 1), измельченной в окрестности изменения сечения, для повышения точности расчетов.

Индекс i изменяется вдоль координаты Γ от 0 до I_2 , индекс j - вдоль координаты z от 0 до J_2 .

Уравнения (1), (2), (6) решаются с помощью итерационного метода Либмана.

Для давления на входе и выходе имеем с помощью (2), (3), (5)

$$p_{i,j_2} = p_{i,j_2-1} + \frac{4h_z}{\beta^2} + 2 \frac{U_{z,i,j_2-1} - U_{z,i,j_2}}{h_z},$$

$$p_{i,0} = p_{i,1} - \frac{2(U_{zi,1} - U_{zi,0})}{h_z} - 4h_z\beta^2,$$

где h_z - шаг сетки по z .

На вертикальных и горизонтальной стенках из (1) - (4) получаем следующие значения давления:

$$p_{i,j} = p_{i-1,j} + 2 \frac{U_{r,i-1,j}}{h_r}, \quad i = I_1, I_2,$$

$$p_{i,j_1} = p_{i,j_1+1} - 2 \frac{U_{zi,i,j_1+1}}{h_z},$$

где h_r - шаг сетки по r .

Все нижеизложенные результаты получены при решении задачи со следующими параметрами: $\beta = 2,5$; длина малой трубы равна 1; длина большой трубы - 2; $I_1 = 8$; $I_2 = 20$; $J_1 = 8$; $J_2 = 21$; $J_3 = 4$; $J_4 = 21$; итерационный процесс прерывался при относительном изменении расчетных функций менее 0,01%.

Точность получаемых численных результатов оценивалась по максимальному значению ошибки в выполнении сохранения расхода по сечениям канала.

Выпишем граничные условия, имеющие место для давления в точке I_1, J_1 . С одной стороны, если рассматривать эту точку как лежащую на горизонтальной стенке, то согласно (2) - (4) получаем

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Если же считать точку I_1, J_1 принадлежащей вертикальной стенке, то имеем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial U_r}{\partial r} = 0. \quad (8)$$

Способ I. Как отмечается в [1], нет причин предполагать непрерывность и однозначность величины вихря в угловой точке, где имеет место геометрическая особенность. На основании этого предлагается метод, заключающийся в использовании двух значений вихря в угловой точке. Подобным образом рекомендуется поступать и при расчете давления.

Таким образом, для разностного уравнения, записанного в точке I_1, J_1+1 , используется значение давления, полученное согласно (7):

$$p_{I_1, J_1} = p_{I_1, J_1+1} - 2 \frac{U_{zi, I_1, J_1+1}}{h_z}, \quad (9)$$

а для разностного уравнения, записанного в точке I_{i-1,j_1} , используется значение давления, полученное согласно (8):

$$P_{I_1,j_1} = P_{I_{i-1},j_1} + \frac{U_{r,I_{i-1},j_1}}{h_r} \quad (10)$$

Сходимость достигается за 352 итерации, максимальная ошибка в выполнении сохранения расхода 4,75%.

Способ 2. В угловой точке берется среднее значение давлений, вычисленных по формулам (9) и (10). В результате 330 итераций получаем максимальную ошибку 4,86%.

Способ 3. Давление в угловой точке определено однозначно согласно (9). Сходимость достигается за 319 итераций, максимальная ошибка - 15,84%.

Способ 4. То же, что и в способе 3, но используется формула (10). Число итераций 352, максимальная ошибка 30,82%.

Способ 5. Предполагается, что стенка в точке I_1, j_1 имеет наклон 45° . Независимо от ориентации стенки можно записать

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial^2 U_n}{\partial n^2}, \quad \frac{\partial U_n}{\partial n} = 0,$$

n - нормаль к стенке. При условии $h_z = h_r = h$ реализация с фиктивной точкой (при этом $\frac{\partial^2 U_n}{\partial n^2}$ аппроксимируется со вторым порядком) дает

$$P_{I_1,j_1} = P_{I_{i-1},j_{i+1}} - \frac{(U_{z,I_{i-1},j_{i+1}} - U_{r,I_{i-1},j_{i+1}})}{h}.$$

Число итераций 319, максимальная ошибка - 8,12%.

Способ 6. Точка I_1, j_1 считается внутренней точкой потока. Давление в ней определяется из разностного уравнения. В результате 330 итераций было получено решение с максимальной ошибкой 9,35%.

Идея следующих двух способов высказана в работе [3] и заключается в объединении условий (7) и (8):

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} = A, \quad \frac{\partial U_r}{\partial r} = \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0.$$

Численно реализовать это условие устойчивым образом можно двумя следующими способами.

Способ 7. В данном варианте применяется для аппроксимации производной $\frac{\partial P}{\partial z}$ разность вверх по потоку, а для $\frac{\partial P}{\partial r}$ правая разность

$$P_{I_1,j_1} = \frac{h_z}{h_r + h_z} P_{I_{i+1},j_1} + \frac{h_r}{h_r + h_z} P_{I_i,j_{i+1}} - A \frac{h_z h_r}{h_r + h_z},$$

$$A = 2 \left(\frac{U_{\alpha, j_1, j_1+1}}{h_z^2} + \frac{U_{r, j_1-1, j_1}}{h_r^2} \right).$$

В таком случае за 308 итераций получается поле скоростей с максимальной ошибкой в расходе -22,92%.

Способ 8. Производная $\frac{\partial p}{\partial z}$ аппроксимируется разностью вниз по потоку, $\frac{\partial p}{\partial r}$ - левой разностью. Тогда в угловой точке имеем для давления

$$p_{I, j_1} = p_{I, j_1-1} \frac{h_r}{h_r + h_z} + p_{I, j_1-1, j_1} \frac{h_z}{h_r + h_z} + A \frac{h_r h_z}{h_r + h_z}.$$

С таким условием для давления сходимость достигается за 363 итерации, максимальная ошибка 56,94%.

Таким образом, способ реализации граничного условия для давления в угловой точке слабо влияет на скорость сходимости итерационного процесса, но в то же время значительно сказывается на точности расчетов как локально в окрестности угловой точки, так и глобально на точности расчета всего потока. Наименьшую ошибку дает первый способ, который, видимо, следует признать самым точным и надежным. Это следует также из того, что при проведении параметрических расчетов задачи о течении в суживающемся канале с применением данного способа были получены хорошие результаты ($\beta = 1,25 \div 5; Re = 0 \div 40$).

Проведенное исследование показывает первостепенную важность постановки вычислительных граничных условий в угловой точке, возможность путем выбора оптимального варианта существенно повысить точность вычислений.

Литература

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. - М. : Мир, 1980. - 616 с.
2. Васенин И.М., Сидонский О.Б., Шрагер Г.Р. Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью. - ДАН СССР, 1974, т. 217, №2, с. 295-298.
3. Тейлор Т.Д., Ндефо Э. Расчет течения вязкой жидкости в канале при помощи метода расщепления. - В кн.: Численные методы в механике жидкостей. М.: Мир, 1973, с. 218-229.

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К РАСЧЕТУ РЕЗЬБОВОГО СОЕ- ДИНЕНИЯ ОБОЛОЧЕК

В.А.Колдунов, О.Б.Чекаев

В настоящей работе в осесимметричной постановке приводятся результаты расчета вариационно-разностным методом НДС металлической и ортотропной цилиндрических оболочек в области их резьбового соединения. В основу реализации метода положена одна из модификаций конечно-разностных аппроксимаций, предложенных [1] для расчета достаточно тонких и протяженных оболочек на основании исходных соотношений анизотропной теории упругости без допущений, свойственных построению тех или иных оболочечных схем. Это позволило провести совместный расчет оболочек с учетом особенности композиционных материалов, проявляющейся в существенной разнице их жесткостных свойств в направлениях армирования и ортогональных к ним направлениях. Расчет резьбового соединения оболочек по предлагаемой схеме обусловлен тем, что это соединение носит ленточный характер – длина витков резьбы имеет значительную протяженность в осевом направлении – и, кроме того, оболочки находятся под действием как внутреннего давления, так и растягивающего усилия со стороны предполагаемого днища.

Схема рассчитываемой оболочечной конструкции изображена на рис. 1. На рис. 2 представлены условия контакта и нагружения оболочек. На поверхностях оболочек, соответствующих отрезкам $BA_1, D_1A_2, \dots, D_{i-1}A_i, D_iC, B_iC_1, \dots, B_iC_i$, предполагается скользящий контакт, т.е. перемещения w для оболочек могут быть различными в каждой из точек этих поверхностей, а перемещения u равны; $-C_1D_1, \dots, C_iD_i$ – равенство перемещений;

$-A, B, \dots, A; B;$ - отсутствие контакта. Конец металлической оболочки со стороны точки C жестко заделан, а со стороны точки A на достаточном удалении от точки B (конца металлической оболочки) прилагается растягивающее усилие, соответствующее рас-
пределенному давлению, которое деуствует на предполагаемое
дноще.

Ниже приводятся результаты расчетов, основанные на исход-
ных соотношениях и алгоритме, реализованных [2] на случай
расчета НДС круговой подкрепленной ребрами ортотропной цилин-
дрической оболочки. Результаты представлены для следующих ги-
потетических геометрических и упругих характеристик системы:
 $3 \times 10^{-3}, 7 \times 10^{-3}$ м - толщины металлической и ортотропной обо-
лочек соответственно; $A, B, \dots = A; B; C, D, \dots = C; D; \dots =$
 $= B, C, \dots = B, C = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot BA, D, \dots = D, A, \dots = D, C =$
 $= 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; i = 10$ - число витков резьбы; $2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$,
0,3 - модуль Юнга и коэффициент Пуассона металлической оболоч-
ки; $E_z = 5,88 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$; $E_y = 4,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $E_x = 7,84 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$;
 $G_{yz} = 3,92 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$; $\nu_{yz} = \nu_{xz} = 0,48$; $\nu_{xy} = 0,4$ - упругие характе-
ристики ортотропной оболочки. На предлагаемых рисунках пунктир-
ными линиями нанесены результаты, полученные в предположении
недеформируемости металлической оболочки, т.е. на случай жест-
кой массивной законцовки. Сплошными линиями показаны результа-
ты, полученные при совместном расчете НДС ортотропной и метал-
лической оболочек.

На рис. 3 представлены перемещения в сечениях I-I...I0-I0
между линиями CD и EF в направлении растягивающей нагрузки.
На рис. 4 изображены те же перемещения: 1 - в точках пересе-
чения сечений I-I... I0-I0 с линией AB ; 2 - в точках пересече-
ния сечений I-I...I0-I0 с линией CD ; 3 - разница этих перемеще-
ний. На рис.5 изображены соответствующие радиальные перемещения
1 - по линии CD ; 2 - по линии EF ; 3 - по линии EF на случай не-
деформируемой оболочки - законцовки. На рис. 6 нанесены эпюры
сжимающих в сечениях I-I...I0-I0 между линиями CD и AB .
На рис. 7 - эпюры растягивающих напряжений в тех же сече-
ниях между EF и AB . На рис. 8 - эпюры сдвиговых напря-
жений в тех же сечениях между CD и AB . На рис. 9-II -
эпюры максимальных сжимающих, растягивающих, сдвиговых напря-
жений по виткам резьбы соответственно (штрихпунктирной лини-
ей нанесены максимальные напряжений при отсутствии внутреннего

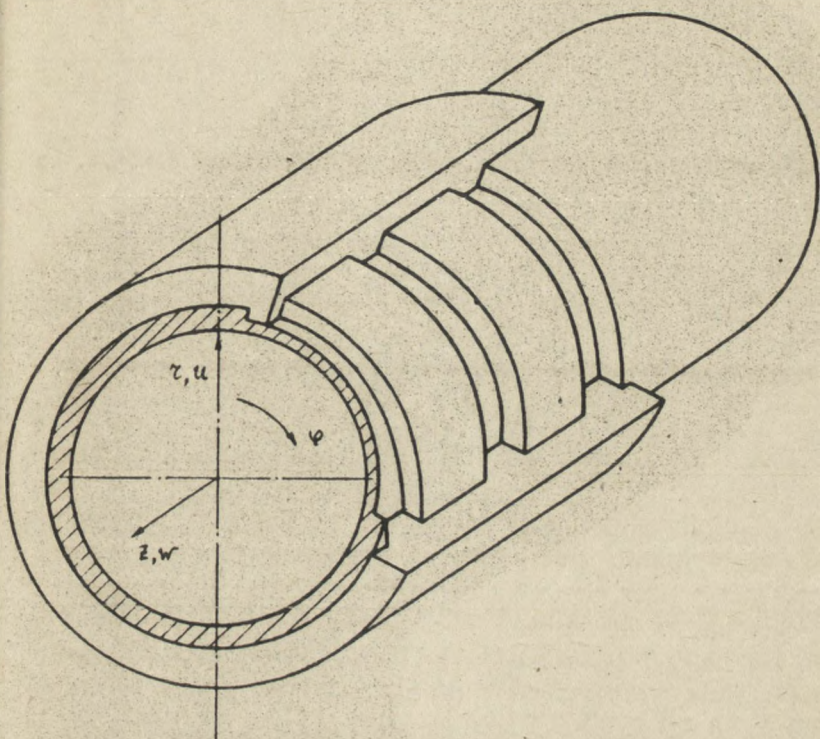


Рис. 1

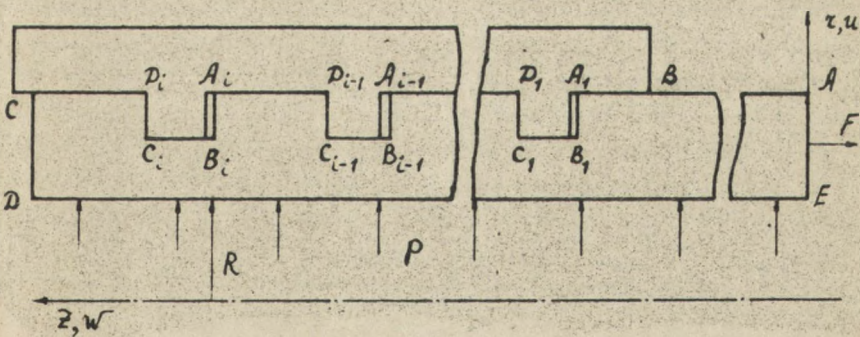


Рис. 2

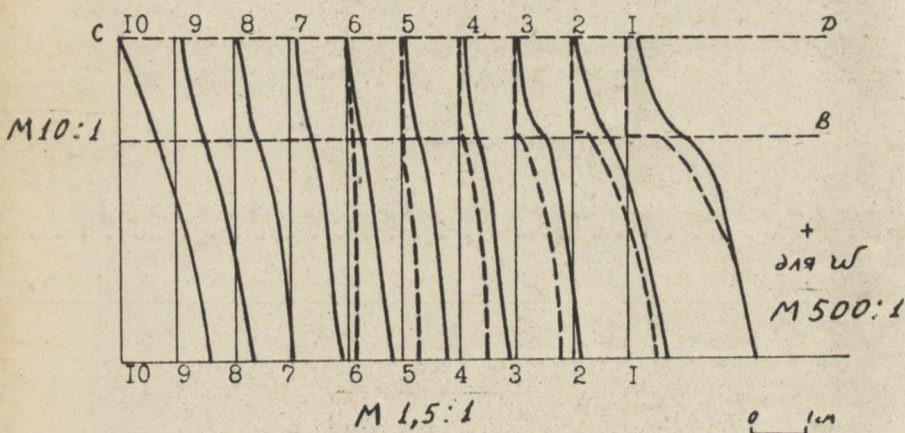
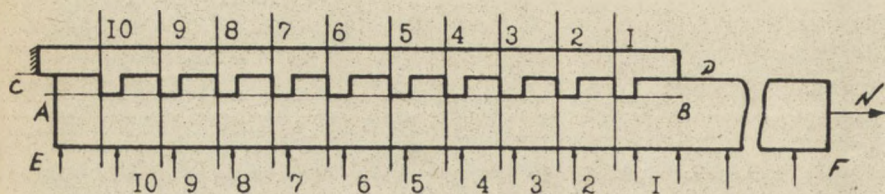


Рис. 3

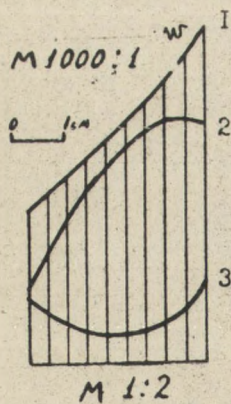


Рис. 4

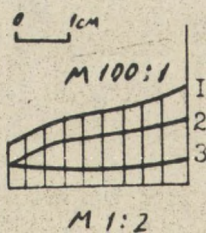


Рис. 5

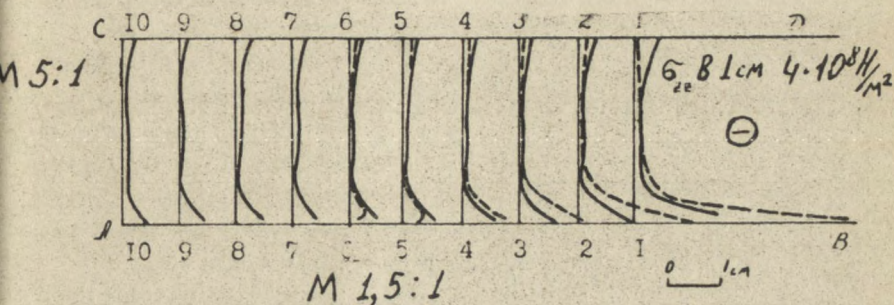


Рис. 6

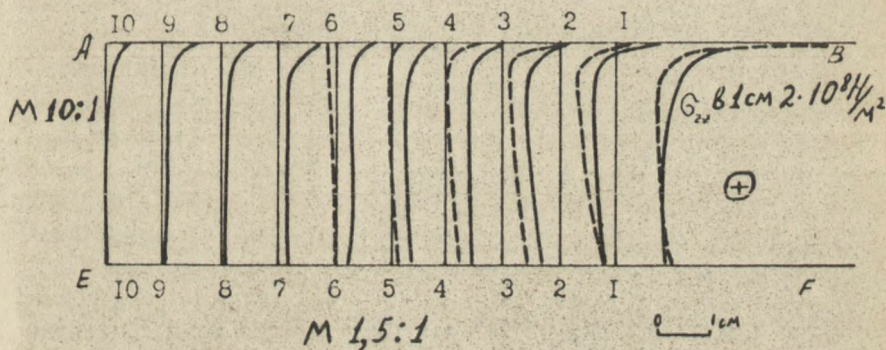


Рис. 7

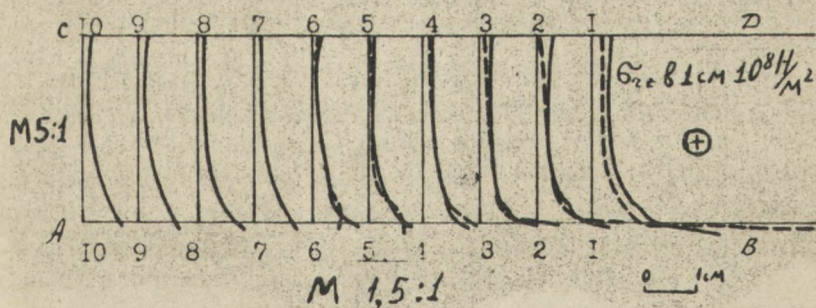


Рис. 8

давления). На рис. 12 нанесены эпюры растягивающих усилий по сечениям ортотропной оболочки, расположенным до, после и между сечениями I-I...IO-IO. Как показали проверочные расчеты, разница между этими усилиями и растягивающим усилием F , приложенным к ортотропной оболочке, по величине с высокой степенью

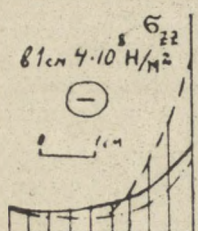
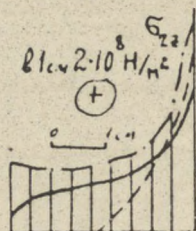


Рис. 9 M1:2



M1:2 Рис. 10

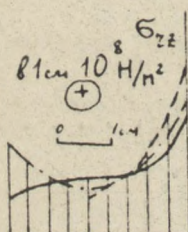
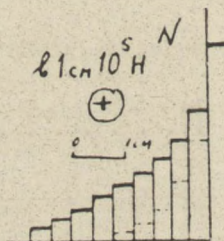


Рис. 11 M1:2



M1:2 Рис. 12

точности совпадает с растягивающими усилиями, приходящимися на соответствующие сечения металлической оболочки, что подтверждает достоверность полученных результатов.

Из приведенных результатов видно, что распределение НДС в области рубцового соединения в значительной степени определяется деформативными свойствами и условиями нагружения рассматриваемых оболочек. Реализованный алгоритм в известной мере позволяет для каждого конкретного

случая подобрать наиболее оптимальный вариант рубцового соединения с учетом влияния геометрических и физико-механических параметров на распределение НДС в подобных оболочечных конструкциях.

Литература

1. Колдунов В.А., Кудинов А.Н., Люшкин П.А., Мударисов Ш.Ш., Черепанов О.И.. Анализ напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций с учетом анизотропии на основании пространственной численной схемы расчета. - В кн.: XIII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек, ч.3. Таллин, 1983, с.55-60.
2. Колдунов В.А., Мударисов Ш.Ш., Черепанов О.И. Расчет круговой подкрепленной ребрами цилиндрической оболочки на основании общих соотношений теории упругости. - В кн.: Механика сплошных сред. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983, с. 59-68.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОГРУЖЕННОЙ В ГРУНТ

А.Н.Кудинов, С.Х.Якубов

Изучение устойчивости цилиндрической оболочки, взаимодействующей с грунтовой средой, сводится к решению контактной задачи для системы оболочка-заполнитель (внешний или внутренний). В работах [1-4], посвященных этому вопросу, в основном рассматриваются задачи, относящиеся к поведению трубопроводов при их продольном и поперечном перемещении в грунтовой массе.

В настоящей работе рассматривается устойчивость тонкой упругой цилиндрической оболочки, погруженной в грунт, при осевом сжатии. Задача решается на основе линеаризованной системы уравнений пологих оболочек. Приводятся также результаты экспериментальных исследований о влиянии внешнего (внутреннего) заполнения на величины критических нагрузок.

I. Рассматривается достаточно длинная тонкая цилиндрическая оболочка с заполнителем (внешним или внутренним), который моделируется упругим телом. Предполагается, что модуль упругости материала оболочки значительно больше модуля упругости материала заполнителя. Заполнитель считается достаточно массивным, и для описания его деформированного состояния можно использовать одно уравнение теории упругости относительно радиального перемещения, так как остальные перемещения считаются малыми по сравнению с прогибом W и ими можно пренебречь.

В качестве исходного уравнения задачи используется линеаризованное уравнение теории пологих оболочек без учета моментности докритического состояния [6] :

(1)

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 W + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \sigma_x^0 \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma_y^0 \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\alpha}{h} \nabla^2 \nabla^2 W = 0. \quad (1)$$

Здесь W - прогиб; σ_x^0, σ_y^0 - соответственно осевое и окружное сжимающие напряжения основного состояния; ∇^2 - оператор Лапласа; D - цилиндрическая жесткость; E - модуль упругости материала оболочки; h, R - соответственно толщина и радиус оболочки; α - коэффициент "постели" заполнителя в послекритическом состоянии; x, y - оси координат соответственно вдоль образующей цилиндра и по окружности (рис. 1).

Оболочка сжимается осевыми силами, равномерно распределенными по ее торцам. Основное деформированное состояние оболочки считается осесимметричным, и для его определения воспользуемся уравнением [7]:

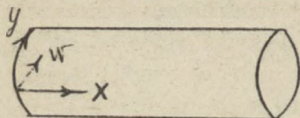


Рис. 1

$$\frac{d^4 W^0}{dx^4} + 4\beta^4 W^0 = \frac{\gamma N^0}{2R} + \frac{q_n}{2}, \quad (2)$$

где $\beta^4 = \frac{Eh}{4R^2D}$; N^0 - сжимающее усилие, действующее на торцы оболочки; γ - коэффициент Пуассона материала оболочки; q_n - нормальное давление со стороны грунта.

Для описания деформированного состояния заполнителя воспользуемся решением осесимметричной задачи о нагружении бесконечной цилиндрической полости в упругом пространстве [6].

При этом будем учитывать лишь радиальные перемещения W' , считая остальные равными нулю:

$$W' = \frac{1+\nu'}{E'} K \left[C_3 \mathcal{I}_0 - C_4 K_0 \right] + \left[C_1 \mathcal{I}_1 - C_2 K_1 \right] i_n Kx, \quad (3)$$

где $\mathcal{I}_i$ ($i=1,2,3,4$) - постоянные интегрирования; $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, K_0, K_1$ - функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно I и II рода аргумента.

Обозначения без индекса здесь и далее относятся к оболочке, с индексом "I" к заполнителю.

Учитывая, что $K(kz) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 0$, в задачах для сплошного цилиндра следует брать $C_2 = C_4 = 0$. Моделируя внешний заполнитель как полый цилиндр с бесконечно большим

внешним радиусом и учитывая, что $J(kr) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, необходимо в решении (3) принять $C_1' = C_3' = 0$.

Определив W' по формуле (3), нормальное напряжение σ_{zz}' , действующее в заполнителе, найдем из следующего выражения:

$$\sigma_{zz}' = \lambda' \left(\frac{\partial W'}{\partial z} + \frac{W'}{r} \right) + 2\mu' \frac{\partial W'}{\partial z}, \quad (4)$$

где λ' и μ' - константы Ламе.

Условия сопряжения заполнителя и оболочки в рассматриваемой приближенной модели возьмем в виде

$$W' = W, \quad q_n = -\sigma_{zz}' \quad (r=a), \quad (5)$$

где a - внутренний (внешний) радиус оболочки;

q_n - реакция со стороны оболочки на заполнитель.

Найдя постоянные интегрирования из граничных условий, напряжения основного состояния определим по формулам

$$\sigma_x^0 = \frac{N_x^0}{h}; \quad \sigma_y^0 = \frac{\nu N_x^0}{h} - \frac{F}{R} W. \quad (6)$$

Решение уравнения (1) проводим на основе приближенного подхода, предложенного в работе [5]. Аппроксимирующее выражение для функции прогиба W задаем в виде

$$W = f \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{R}, \quad (7)$$

удовлетворяющем шарнирным граничным условиям.

Здесь n - число волн в окружном направлении; m - число полуволн вдоль образующей. Подставляя (7) в уравнение (1), получим

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{(1+\nu^2)^2}{\nu^2} \eta + \frac{\nu^2}{(1+\nu^2)} \frac{1}{\eta} - \frac{\bar{\sigma}_y}{\nu^2} + \frac{\omega}{\nu^2} \eta. \quad (8)$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x^0 \cdot R}{Eh}; \quad \bar{\sigma}_y = \frac{(\sigma_y^0)_{\max} \cdot R}{Eh}; \quad (9)$$

$$\nu = \frac{m\pi L}{n\pi R}; \quad \eta = \frac{\nu^2 R^2}{L^2}; \quad \omega = \frac{\nu^2 R^2}{Eh}.$$

Критическое напряжение найдем путем численной минимизации выражения (8) по параметрам ν и η .

2. Экспериментальное исследование проводилось на цилиндрических оболочках, изготовленных из ацетатной пленки следующих размеров: $L = 161$, $R = 52$, $h = 0,22$ мм.

Физико-механические характеристики материала оболочек: $E = 1,5 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2$, $\mu = 0,3$. Испытания проводились на установке (рис. 2), состоящей из камеры с поршнем 1, направляющих стержней 2, металлических плит 3, полого цилиндра 4, который наполнялся грунтом 5, верхнего 6 и нижнего 7

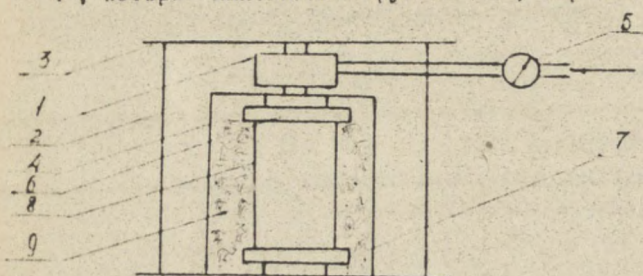


Рис. 2

дисков с кольцами для крепления торцов цилиндрического образца 8, образцового манометра 5. Полый цилиндр 4 имел следующие размеры: $\varnothing = 200 \text{ мм}$, $h = 265 \text{ мм}$. Давление внутри камеры 1 создавалось с помощью баллона с воздухом и контролировалось манометром класса 0,6. При подаче воздуха в камеру 1 поршень, двигаясь вниз, давит на верхний диск 6 и, следовательно, оболочка находится под действием сжимающих усилий. Закрепление краев оболочки соответствовало шарнирному опиранию. За экспериментальное значение критической нагрузки принималось давление, при котором происходила потеря устойчивости оболочек хлопком. Все опыты были разделены на следующие серии: I - испытание гладких оболочек, II - оболочки с внутренним наполнителем разной плотности, III - оболочки с внутренним наполнителем, погруженные в грунт разной плотности, IV - оболочки, погруженные в грунт (только внешний наполнитель). В таблице приведены результаты испытаний. Здесь γ - удельный вес заполнителя, кн/м^3 , $\bar{\sigma}^* = 10^4 \frac{\sigma^* R}{E \delta}$ - безразмерный параметр критического напряжения сжатия.

Серия	I		II		III		IV	
№ п.п	$\bar{\sigma}^*$	δ	$\bar{\sigma}^*$	δ	$\bar{\sigma}^*$	δ	$\bar{\sigma}^*$	δ
1	47,2	13,7	78,5	9,7	39,2	8,6	66,0	
2	62,5	13,7	75,3	9,8	44,0	8,5	47,1	
3	50,4	13,7	65,0	9,9	36,1	8,6	59,7	
4	56,7	14,4	56,5	11,5	75,4	10,6	90,0	
5	-	14,5	51,8	11,1	86,4	11,0	83,0	
6	-	14,7	59,7	11,3	91,0	11,4	81,6	

Из анализа данных таблицы следует, что с увеличением плотности грунта - внешнего наполнителя (и внешнего и внутреннего наполнителя) - критические нагрузки возрастают. В известной мере та же картина наблюдается и при наличии внутреннего наполнителя. Можно сделать вывод о существенном влиянии наполнителя (в данном случае грунтовой среды) на величину критической нагрузки.

Литература

1. Баженов В.А. Изгиб цилиндрических оболочек в упругой среде. - Львов: Вища шк., 1975. - 166с.
2. Клейн Г.К. Расчет подземных трубопроводов. - М.: Гостехиздат, 1969. - 240с.
3. Ясин Э.М., Черников В.И. Устойчивость подземных трубопроводов. - М.: Недра, 1968. - 120с.
4. Ормонбеков Т. Взаимодействие конструкций со средой. - Фрунзе: Илим, 1983. - 152 с.
5. Кудинов А.Н. Об одном методе решения устойчивости оболочек при неоднородном напряженном состоянии. - В кн.: Тез. докл. Всесоюз. симпози. по устойчивости в МДТТ. - Калинин, 1981, с. 33-34.
6. Колтунов М.А., Васильев Д.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. - М.: Высш.шк., 1975. - 524с.
7. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967. - 984с.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК В ЗОНЕ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СХЕМЕ

В.А. Колдунов, Ш.Ш. Мударисов, О.И. Черепанов

Малая сдвиговая жесткость композитных материалов обуславливает актуальность расчета композитных оболочек с позиций трехмерной теории упругости, особенно в зоне краевого эффекта, где даже уточненные теории оболочек не дают достоверных сведений о параметрах НДС [1]. Численное решение этой задачи на примере расчета НДС круговой цилиндрической оболочки строится на основании принципа минимума полной потенциальной энергии деформации упругой системы с позиций трехмерной теории упругости, алгоритм расчета которых достаточно подробно описан в [2,3].

Ниже приводятся разностные схемы аппроксимации функций и их производных. Геометрические характеристики оболочки приведены на рис. 1.

Численный алгоритм, разработанный на основании предлагаемых разностных аппроксимаций, позволяет проводить расчет достаточно тонких оболочек, для которых простое перенесение разностных схем (рис. 2), пригодных для массивов, не приводит к положительному результату.

Рассмотрим конечно-разностные соотношения для производных по направлению оси z , которые предлагаются для решения поставленной задачи. Шаблон, изображенный на рис. 3, соответствует следующим конечно-разностным соотношениям:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{3} \left[\frac{u_{21} + u_{34} + u_{25} + u_{35}}{2(z_{21} - z_{24})} + \frac{u_{23} + u_{33} + u_{25} + u_{35}}{2(z_{25} - z_{23})} + \frac{u_{24} + u_{34} + u_{26} + u_{36}}{2(z_{26} - z_{24})} \right] \quad (I)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{3} \left[\frac{u_{24} + u_{34} - u_{25} - u_{35}}{2(r_{25} - r_{24})} + \frac{u_{24} + u_{34} - u_{26} - u_{36}}{2(r_{26} - r_{24})} + \frac{u_{23} + u_{33} - u_{26} - u_{36}}{2(r_{26} - r_{23})} \right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} \left[\frac{u_{24} + u_{34} - u_{25} - u_{35}}{2(r_{25} - r_{24})} + \frac{u_{23} + u_{33} - u_{26} - u_{36}}{2(r_{26} - r_{23})} \right]. \quad (3)$$

На рис. 2 - 4 штриховкой отмечены ячейки, в формировании упругого потенциала которых участвуют варьируемые перемещения (в узле 2,4 на рис. 3). Двойной штриховкой отмечена ячейка, для которой выписаны аппроксимирующие соотношения (1) - (3). Рис. 4 соответствует аппроксимации следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} \left[\frac{u_{23} + u_{33} - u_{24} - u_{34}}{2(r_{24} - r_{23})} + \frac{u_{23} + u_{33} - u_{25} - u_{35}}{2(r_{25} - r_{23})} \right], \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{(u_{23} + u_{33} + u_{24} + u_{34})/4 - (u_{25} + u_{35})/2}{r_{25} - (r_{23} + r_{24})/2}. \quad (5)$$

В направлении оси z использовалась внутриячеечная аппроксимация, описанная в [3].

На рис. 5,6 приведены примеры расчета оболочек с физико-механическими характеристиками: $E = 2 \cdot 10^6$, $\nu = 0,3$ - для изотропной; $E_r = 1,63 \cdot 10^5$, $E_\varphi = 1,74 \cdot 10^5$, $E_z = 5,7 \cdot 10^5$, $G_{rz} = 5,7 \cdot 10^4$, $\nu_{rz} = 0,3$, $\nu_{z\varphi} = 0,1$, $\nu_{zr} = 0,35$ и $E_r = 1,1 \cdot 10^5$, $E_\varphi = 5 \cdot 10^5$, $E_z = 8 \cdot 10^5$, $G_{rz} = 2 \cdot 10^5$, $\nu_{rz} = 0,4$, $\nu_{z\varphi} = \nu_{zr} = 0,48$ - для ортотропных. $[E, E_r, E_\varphi, E_z, G_{rz}] = [\text{кг/см}^2]$. Индексами 1ℓ , 2ℓ , 3ℓ отмечены напряжения на наружной поверхности изотропной и ортотропных оболочек соответственно, 1_n , 2_n , 3_n - на внутренней поверхности.

В процессе реализации алгоритма оболочка разбивалась по толщине на 10 и по длине на 100 ячеек координатными линиями $r = \text{const}$, $z = \text{const}$ соответственно с измельчением сетки в области заделки.

Расчеты, проведенные на основании аппроксимаций (1) - (5), совпадали с высокой степенью точности. Результаты удовлетворительно согласуются с оценками зон краевого эффекта, приведенными в [1, 4] для анизотропных цилиндрических оболочек.

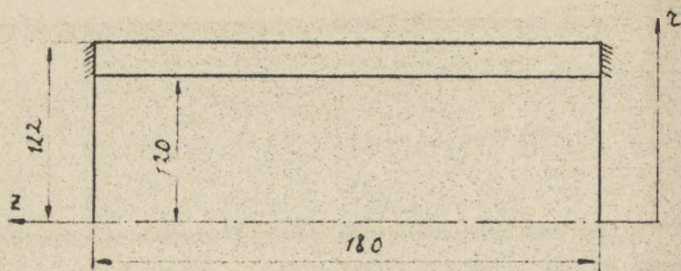


Рис. 1

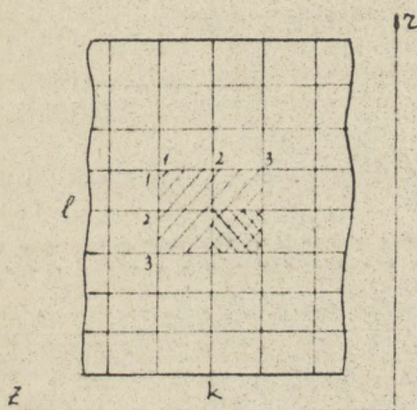


Рис. 2

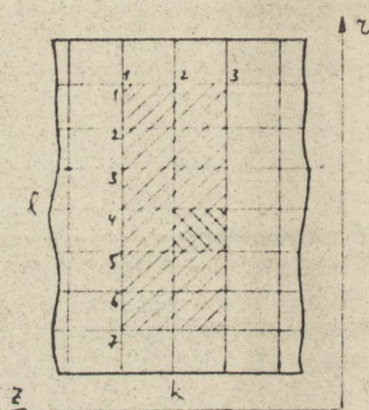


Рис. 3

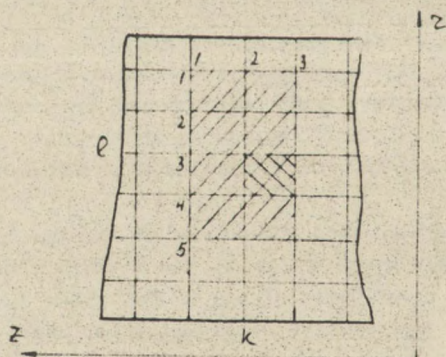


Рис. 4

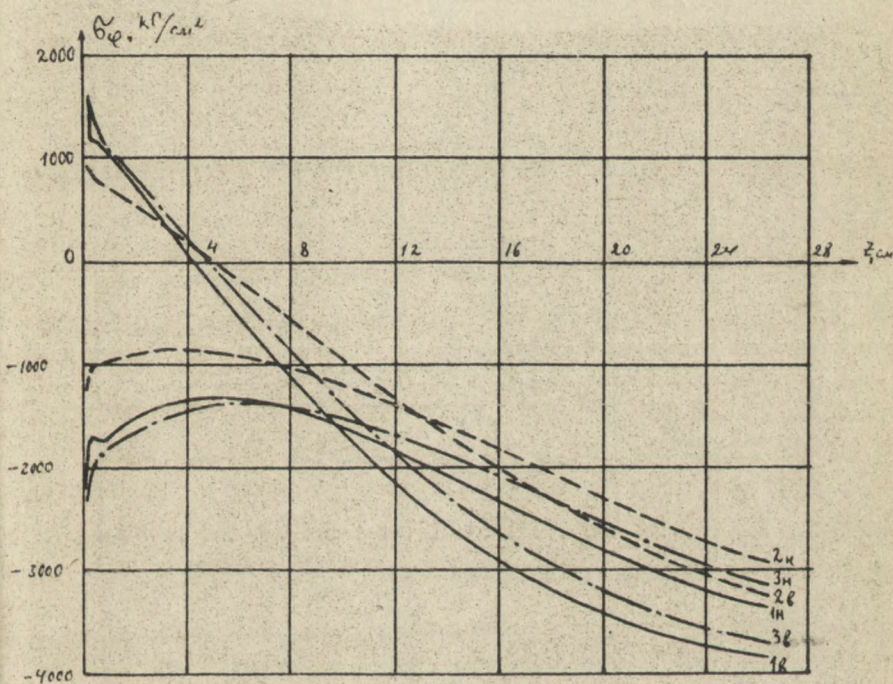


Рис. 5

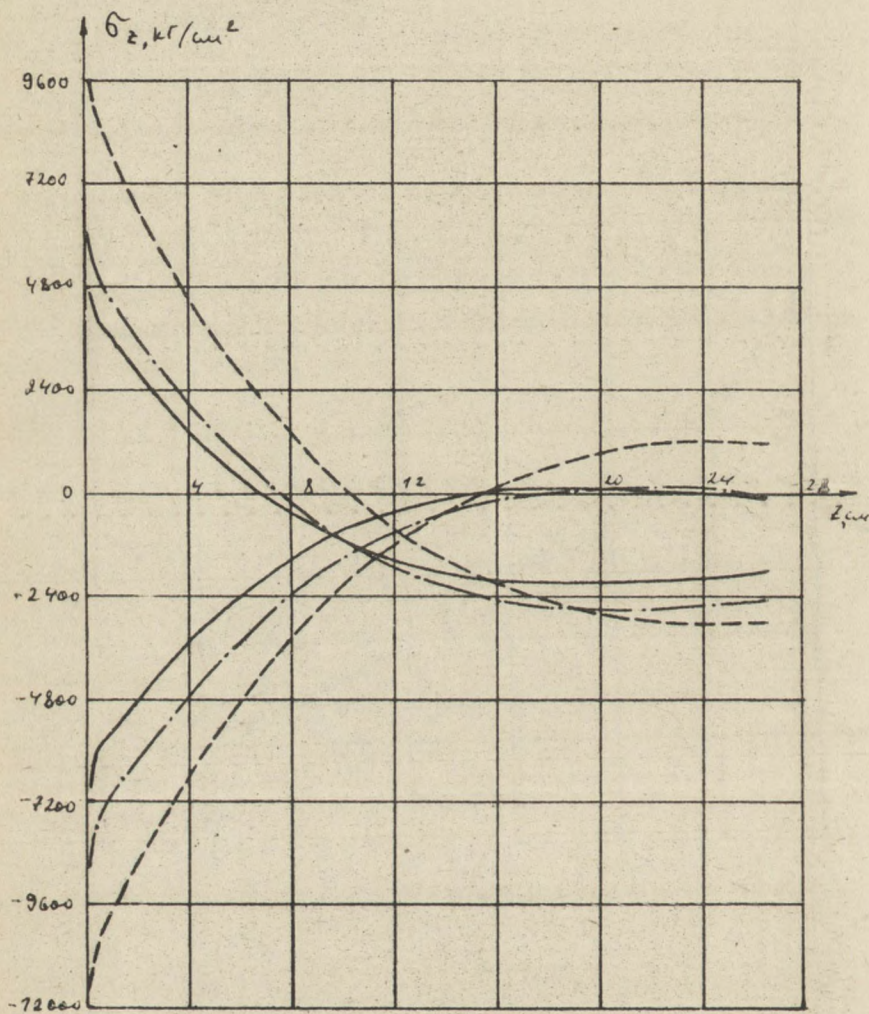


Рис. 6

Литература

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек.- М.: Наука, 1974.- 446 с.
2. Колдунов В.А., Кудинов А.Н., Люкшин П.А., Мударисов Ш.Ш., Черепанов О.И. Анализ напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций с учетом анизотропии на основании пространственной численной схемы расчета.- В кн.: XII Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек, ч.3. Таллин, 1983, с.55-60.
3. Колдунов В.А., Мударисов Ш.Ш., Черепанов О.И. Расчет круговой подкрепленной ребрами цилиндрической оболочки на основании общих соотношений теории упругости.- В кн.: Механика сплошных сред. Томск: Изд-во ТГУ, 1983, с.59-67.
4. Федорова Н.А., Шкутин Л.И. Асимптотика осесимметричной задачи упругости для анизотропной цилиндрической оболочки.- ПМТФ, 1981, № 5, с.156-162.

О ВЛИЯНИИ ЧИСЛА ЧАСТИЦ НА ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДВУХФАЗНОГО ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

В.П.Волков, Л.А.Линник

Вопросу взаимодействия капель конденсированной фазы в соплах различных устройств, включая их дробление, коагуляцию, механическое столкновение, возникновение вращения частиц при таких столкновениях, посвящены работы [1, 2]. Выяснено влияние указанных процессов на важнейшие параметры и характеристики ускорителей газового потока. Однако во всех этих работах не рассматривался процесс фазового превращения и горения капель в нагретом газовом потоке. Естественно ожидать, что многие явления, имеющие место при течении двухфазной смеси в случае отсутствия горения, будут наблюдаться и при наличии последнего. Попытки построить теоретическую модель горения совокупности частиц с учетом их взаимодействия и взаимовлияния были единичны, и предлагаемые модели, базирующиеся на представлениях о закономерностях горения отдельной капли при рассмотрении двух, трех и более частиц, находящихся достаточно близко друг к другу, оказались не очень удачными.

В данной работе сделана попытка оценить влияние горения большого числа частиц на характеристики газового потока в двухфазном химическом реакторе на основе экспериментальных данных, полученных авторами, и сравнения с теоретической моделью горения двухфазного потока, которая включает в себя современные представления об указанном процессе такие, как дробление частиц газовым потоком, горение крупных капель в рамках модели приведенной пленки и его переход в горение турбулентного газового потока по мажкапельному пространству в кинетическом режиме при дроблении частиц и при достижении ими размеров меньших критического, когда формирование зоны горения вокруг капель просто невоз-

можно в силу их малости [3]. Турбулентность потока учитывается посредством эмпирических зависимостей для критерия Нуссельта Nu , используемых при описании процесса испарения капель, и дает возможность сделать предположение об интенсивном перемешивании паров горючего, газообразного окислителя и продуктов сгорания в рассматриваемом поперечном сечении реактора, так что скорость химического превращения топлива определяется кинетикой протекающих реакций в межкапельном пространстве, а не скоростью диффузии газообразных компонентов.

Суть метода заключается в следующем. Если взаимодействие частиц оказывает существенное влияние на характер протекающего процесса в одном из режимов горения, то между экспериментальными данными и теоретическими результатами, полученными именно для аналогичных условий (характеристики распыла частиц, величины расходов компонентов, геометрические размеры реактора, температура в зоне рециркуляции в месте воспламенения смеси), должна быть достаточно большая разница. Если же в рассматриваемом диапазоне расходов жидкости и изменения коэффициента избытка окислителя (изменение доли жидких капель в единице объема) вычисленная характеристика, например давление и температура, лежит в пределах ошибки опыта, то в этом случае необходимо признать, что при данных значениях расхода напряженности жидкого компонента взаимодействие частиц не оказывает существенного влияния на основные параметры химического реактора.

На рис. I представлены данные обработки большого числа экспериментальных данных для реактора с длиной трубчатой части $L_K = 0,5 \text{ м}$, полученные при горении керосина в воздушном потоке. Кривая 1 есть зависимость давления в реакторе от α , а 2 – зависимость числа частиц, поступающих в реактор за единицу времени, также от α . Следует заметить, что число капель N является расчетным параметром. Оно показывает, сколько частиц поступило бы в реактор при заданном секундном расходе жидкости, если бы все капли имели одинаковый размер, равный среднему объемно-поверхностному диаметру капель d_{32} , определяемому геометрическими размерами распылителя, свойствами жидкости и условиями впрыска. Диаметр d_{32} рассчитывался по эмпирическим зависимостям [4], записанным для конкретного распылителя в случае впрыска керосина [5]. Из сравнения поведения кривых на рис. I следует следующий вывод, отражающий качественную зависимость давления от при различных значе-

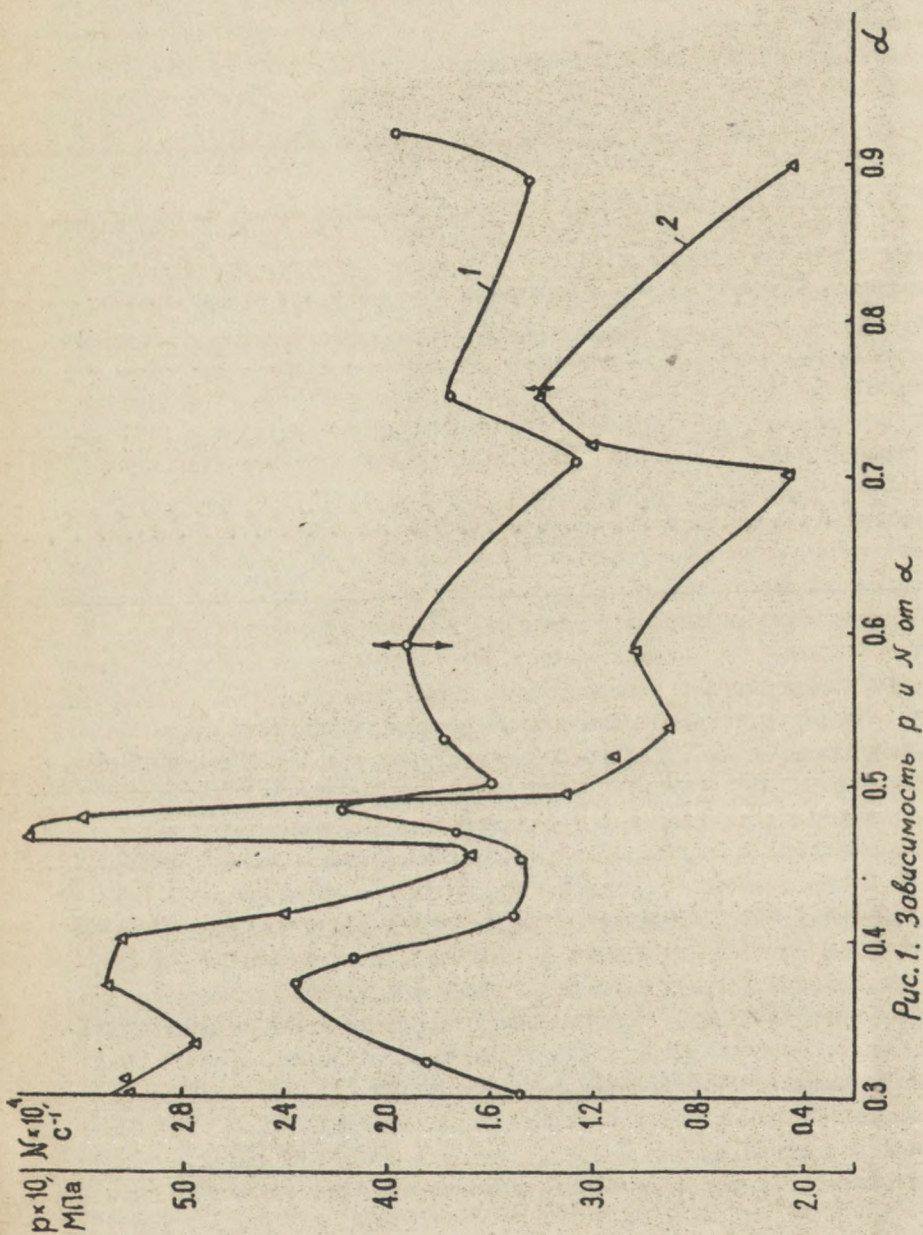


Рис. 1. Зависимость p и N от α

ниях α : чем больше число частиц, поступающих в реактор, тем выше величина давления при фиксированной величине α , и эта зависимость тем сильнее, чем меньше α , т.е. чем богаче топливная смесь. Величина расходонапряженности при этом менялась в пределах $q_r = (1,14 + 4,16) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2}$, что соответствует потоку капель за единицу времени $q_w = (0,577 + 4,62) \cdot 10^6 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$.

Для сравнения представленных зависимостей с аналогичными, полученными при решении задачи о горении капель керосина в потоке воздуха, сформулированной с указанными выше представлениями о горении распыленного топлива, была решена следующая система дифференциальных уравнений для стационарного случая в одномерной постановке [6]:

$$\begin{aligned} dC_{ок}/dx &= -(\alpha_c + C_{ок})J_{(21)}/\rho u, \\ d(\rho u)/dx &= J_{(21)}, \\ d(\rho u^2 + p)/dx &= -nf_{(12),2} + J_{(21)}w, \\ d\sigma/dx &= (1/c_v p T)(Q_1 - Q_2), \\ dr_k/dx &= -J_{(21),2}/4\pi r_k^2 \rho_k w, \\ dw/dx &= f_{(12),2}/m_k w, \\ dT_k/dx &= (Q_1 - Q_2)/m_k C_k w, \\ d(nw)/dx &= 0, \end{aligned} \quad (I)$$

где $C_{ок}$ - концентрация окислителя; α_c - стехиометрическое соотношение компонентов; ρ , ρ_k - плотность газа и жидкости соответственно; u , w - скорость газа и капель соответственно; $J_{(21)}$, $J_{(20),2}$ - приток вещества в газовую фазу в результате испарения совокупности частиц и отдельной частицы соответственно; $f_{(12),2} = \frac{1}{2} C_x \times (u-w)|u-w| F_m$ - сила сопротивления, возникающая при движении капли в газе; $\sigma = \ln p / \rho^k$ - энтропия; p , T - давление и температура в реакторе; r_k - радиус капли; T_k - температура капли; m_k - масса капли; $Q_1 = n J_{(21)} (1 + \alpha_c) Q_0$ - теплота, выделяющаяся при сгорании паров горючего в зоне реакции в случае модели приведенной пленки; Q_2 - теплотери; Q_1 - тепловой поток к капле; Q_2 - теплота, идущая на нагрев капли и испарение вещества капли; n - число капель в единице объема; Q_0 - теплота, выделяющаяся при сгорании 1 кг топливной смеси; C_k - теплоемкость вещества капли; C_x - коэф-

эффициент сопротивления при движении частицы в газе; F_m - площадь миделева сечения.

В качестве граничных условий брались значения параметров на входе в реактор, где строго соблюдались полученные и используемые эмпирические зависимости для характеристик распыла жидкости, условий ввода компонентов и значений основных параметров на входе, которые имели место в опытах.

Для определения давления в реакторе использовалось уравнение, выражающее закон сохранения вещества при установившемся течении смеси.

При переходе к кинетическому режиму горения по межкапельному пространству величина Q_I , описанная выше, определялась выражением

$$Q_I = Q_0 K_0 \rho^2 C_r C_{ок} \sqrt{T} \exp(-E/RT) = Q_0 \Phi, \quad (2)$$

в котором предполагается, что химическая реакция по окислителю и горючему имеет первый порядок. Для определения концентрации горючего C_r к системе (I) необходимо присоединить уравнение

$$dC_r/dx = [(1-C_r)/(\rho u)] J_{(2)} - \frac{1}{1+x_c} \Phi/(\rho u), \quad (3)$$

а первое уравнение в (I) заменяется уравнением

$$dC_{ок}/dx = -\frac{x_c}{1+x_c} \Phi/(\rho u). \quad (4)$$

В результате решения системы уравнений (I), а при переходе к кинетическому режиму горения, который, как предполагалось, реализуется при дроблении капель (условие дробления формировалось по величине числа Вебера $We = \rho(u-w)^2 d_k / 2\sigma_k$) и при достижении ими размера $2\Gamma_k < 0,5$ мм [3] решения этой системы с учетом выражения (2) и уравнений (3) и (4), можно получить зависимости, аналогичные представленным на рис.1. Однако такое простое сопоставление оказалось невозможным по следующей причине. Число частиц N , поступающих в реактор за единицу времени, для эксперимента рассчитывалось по данным на входе в реактор, процесс дробления при этом не мог быть учтен, в то время как при решении системы уравнений (I) этот процесс принимался во внимание, причем дробление частиц очень сильно зави-

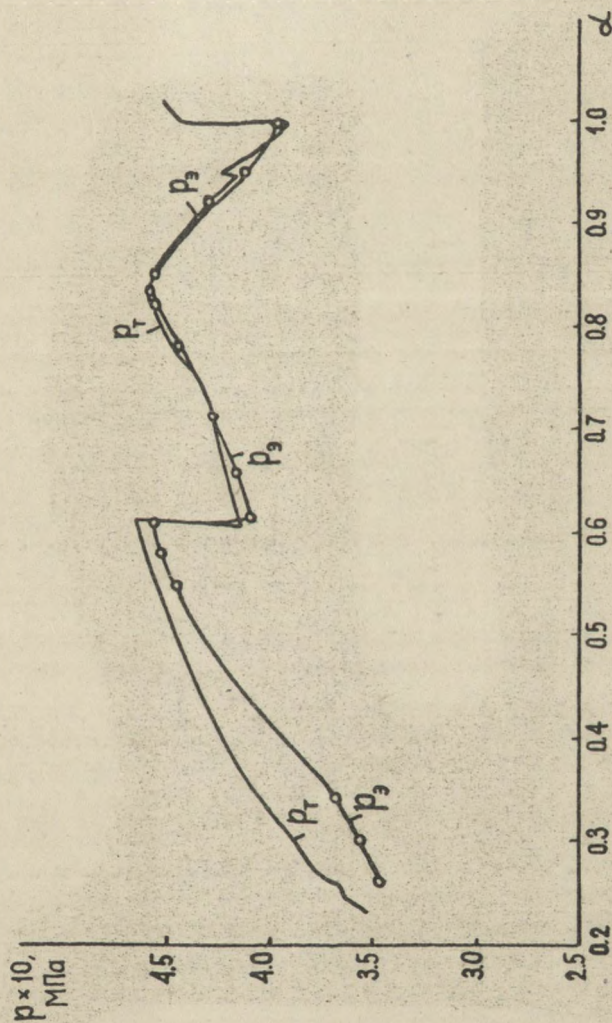


Рис. 2. Зависимость давления P на выходе из реактора от α

сит от температуры поверхности капли через коэффициент поверхностного натяжения σ_k . Поэтому зависимости типа $N(\alpha)$ и $P(\alpha)$ лишь качественно подтверждали выводы, сделанные на основании рис. 1. В связи с этим для количественного анализа брали конкретные данные по изменению давления в реакторе в течение одного запуска при непрерывном изменении (уменьшении) расхода воздуха, так что коэффициент избытка окислителя α непрерывно уменьшался от некоторого значения $\alpha_{нач}$ до α , соответствующего моменту прекращения опыта. Затем решалась указанная система уравнений при том же самом законе изменения расхода окислителя. В результате рассчитывалась кривая давления и сравнивалась с экспериментальной. Результат такого сравнения представлен на рис. 2. Из сопоставления экспериментальной и теоретической зависимостей давления видно, что при указанных выше значениях расхода напряженности жидкого компонента, что соответствует следующим оценкам по расстоянию между центрами частиц $\Gamma_1 = (1,60 \cdot 10^{-2} + 1,12 \cdot 10^{-2})$ м в случае крупных капель и $\Gamma_1 = (8,0 + 5,6) 10^{-3}$ м после дробления, влияние числа частиц оказывается несущественным. Кроме этого, можно сделать еще один очень важный вывод: дробление частиц приводит не только к увеличению поверхности горения капель, но и к замене диффузионного режима горения отдельной частицы кинетическим режимом горения паров горючего в атмосфере окислителя в капельном пространстве. На рис. 2 этот вывод хорошо иллюстрируется при $\alpha = 0,606$, где наблюдается скачкообразный переход с одного уровня давления на другой, что имело место при аналогичных исходных параметрах и в эксперименте.

Литература

1. Архипов В.А., Ратанов Г.С., Трофимов В.Ф. Экспериментальное исследование взаимодействия капель при столкновениях. - ПИТФ, 1978, №2, с. 73 - 76.
2. Подвысоцкий А.М., Шрайбер А.А. Расчет неравновесного двухфазного течения с коагуляцией и дроблением частиц конденсата при произвольном распределении вторичных капель по массам и скоростям. - МБГ, Изв. АН СССР, 1975, №2, с. 71-79.
3. Сборник задач по теории горения / Под ред. В.В. Померанцева. М.-Л.: Энергоатомиздат, 1983. - 152с.

4. Битман Л.Н. и др. О распыливании жидкости форсунками. - Л.: Госэнергоиздат, 1962. - 264 с.

5. Болков В.П. О распыливании жидкости центробежной форсункой при низких перепадах давления. - В кн.: Газодинамика. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1964, с. 79-84.

6. Дорохов И.Н., Кафаров В.В., Нигматулин Р.И. и др. Общие уравнения движения многофазных многокомпонентных монодисперсных систем с химическими реакциями и процессами тепло- и массопереноса. - ТОХТ, 1977, т. XI, № 12, с.163-173.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ОБЩИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ В ПОВЕДЕНИИ ЗАМКНУТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК И ПАНЕЛЕЙ

Е.И.Тарновский

Теоретическое и экспериментальное исследования по устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки и цилиндрической панели под действием одного и того же вида нагрузок рассматриваются, как правило, разобщенно. Работы, посвященные установлению общих закономерностей в поведении деформируемых систем для широкого класса родственных задач, нам неизвестны.

В настоящей работе экспериментально исследуется поведение круговой цилиндрической оболочки под действием неравномерного внешнего давления, распределенного по полосе вдоль образующей (рис. I, а), и цилиндрической панели, прямоугольной в плане, нагруженной по всей или по части выгнутой поверхности (рис. I, б).

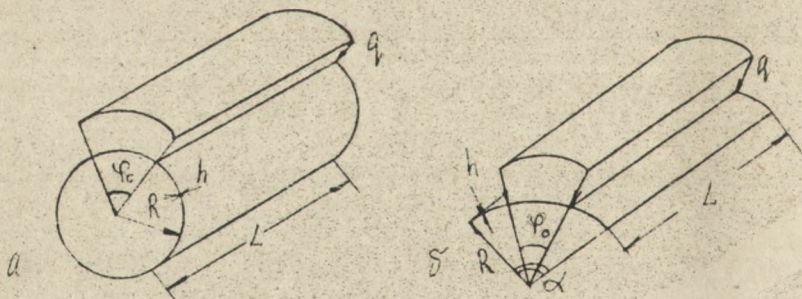


Рис. I. Схемы нагружения

Проводится сравнительный анализ характера потери устойчивости этих систем, выполненных как из изотропных, так и ортотропного материалов.

1. Методика эксперимента. Экспериментальные исследования проводились на цилиндрических образцах, геометрические и механические характеристики которых приведены в таблице.

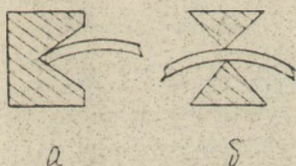
Оболочки изготавливались по технологии, описанной в работе [1]. Эксперименты по нагружению оболочек равномерным давлением по полосе, характеризующейся центральным углом φ_0 (рис. 1) в диапазоне $10^\circ \leq \varphi_0 \leq 360^\circ$ с шагом $4\varphi_0 = 10^\circ$ проводились на установке [2]. Способ крепления торцов оболочки и узлы крепления для панели изображены на рис. 2.

Эксперимент. образцы (материал, геометрич. параметры)	Механические характеристики материала	
Д16Т сплав $\frac{L}{R} = 3.1; \frac{R}{h} = 200;$	$E, \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$	$0.775 \cdot 10^4$
	$\sigma_{\text{Текст}}, \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$	33
	μ	0.32
Текстолит ПТ $\frac{L}{R} = 3.1; \frac{R}{h} = 65$	$E_1, \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$	14
	$E_2, \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$	10
	$G, \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$	2.1
	μ_1	0.14
	μ_2	0.10

Нагружение конструкций осуществлялось воздухом по методике [3]. За критическое значение нагрузки принималось давление, при котором происходила потеря устойчивости либо хлопком, либо по достижении характерного прогиба величиной, большей 3-4 толщин оболочки.

Регистрация критической нагрузки производилась с помощью самописца

Рис. 2. Способ крепления Н-327-3 с одновременной записью нагрузки и прогиба в центре площадки нагружения. Процесс нагружения протекал за 2-3 минуты до момента потери устойчивости (квазистатическое нагружение). После потери устойчивости поверхности оболочек на участке приложения нагрузки обследовались, что позволяло установить вид поверхности выпучивания в зависимости от угла нагружения φ_0 или угла раствора панели α . Результаты



испытания, проведенные для панели и круговой оболочки из материала Д16Т, текстолита ПТ (проведено 86 и 92 опыта соответственно) для большей наглядности изображены в форме графиков $\psi(\varphi_0) = \frac{q}{q^*}$, т.е. зависимости параметра критической нагрузки, определяющей отношение критического неоднородного давления к критическому при равномерном загрузении по всей поверхности для цилиндрической оболочки и панели от угла нагружения φ_0 . Графики проведены через среднее значение доверительного интервала с коэффициентом надежности 0,95 для каждого угла φ_0 .

2. Анализ результатов. На основании сравнения полученных данных испытаний на оболочках и панелях (рис. 3, 4)

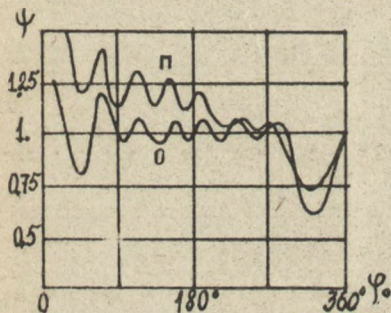


Рис. 3. Результаты испытаний для цилиндрической оболочки (о) и панели (п), выполненных из материала Д16Т

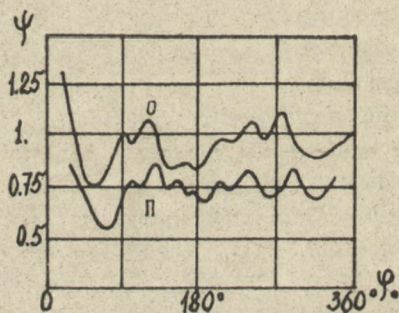


Рис. 4. Результаты испытаний для цилиндрической оболочки (о) и панели (п), выполненных из материала ПТ

можно сделать следующие выводы:

- наблюдается некоторая аналогия в поведении круговой цилиндрической оболочки и цилиндрической панели при одном виде нагружения, которая проявляется как в характере изменения критических нагрузок от угла загрузения, так и в форме волнообразования;
- для замкнутой цилиндрической оболочки (рис. 3, 4) неравномерность нагружения указанного вида приводит к своеобразной зависимости критической нагрузки ψ от угла φ_0 . Эта

зависимость носит характер условно-периодический, что есть следствие взаимодействия всех докритических факторов и собственной формы потери устойчивости. Так, для образцов из Д16Т по мере увеличения полосы нагружения значение критической нагрузки изменяется с периодом $\frac{T}{2n}$ (где n - число полуволн потери устойчивости оболочки при осесимметричном внешнем давлении);

- критическая нагрузка для круговой оболочки при углах $60^\circ \leq \varphi_c \leq 270^\circ$ и для панели при $10^\circ \leq \varphi_c \leq 270^\circ$ выше по сравнению с равномерно-нагруженной цилиндрической оболочкой;
- минимальное значение критической нагрузки достигается при угле φ_c , совпадающем с собственной формой потери устойчивости [4];
- форма волнообразования зависит от угла нагружения. Наблюдаются несимметричные формы потери устойчивости относительно центра приложения полосовой нагрузки для $\varphi_c = 90, 115, 160, 210, 240^\circ$ (рис. 3) и $\varphi_c = 90, 120, 150, 210, 240^\circ$ (рис. 4).

Литература

1. Кудинов А.Н. Экспериментальное исследование устойчивости оболочек при совместном действии осевого сжатия, внутреннего давления и нагрева. - В кн.: Тепловые нагружения в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1966, вып. 6, с. 213-218.
2. А.с. № 896449 (СССР). Установка для испытания устойчивости оболочек /А.Н.Кудинов, Е.И.Тарновский. - Оpubл. в Б.И., 1982, № 1.
3. Кудинов А.Н. Устойчивость оболочек в пределах и за пределами упругости при действии неравномерного внешнего давления. - В кн.: Теория оболочек и пластин. М.: Наука, 1973, с. 139-143.
4. Кабанов В.В., Михайлов В.Д. Устойчивость цилиндрической оболочки при несимметричном нагружении. - В кн.: Тр. 12 Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван, 1980, с. 184-189.

К ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ С ЭФФЕКТОМ ДИЛАТАНСИИ

Г.И.Белоусова, В.З.Милуков

В теории пластического течения пористых металлов наибольшее распространение в настоящее время получил ассоциированный закон течения в форме

$$d\epsilon'_{ij} = d\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma'_{ij}}, \quad (1)$$

где $d\lambda \geq 0$, а

$$\Phi(\sigma'_{ij}) = \Phi(\gamma'_{2\sigma}, \gamma'_{1\sigma}, \theta) = f(\gamma'_{2\sigma}, \gamma'_{1\sigma}, \theta) \quad (2)$$

— пластический потенциал, в качестве которого обычно принимается условие пластичности

$$f(\gamma'_{2\sigma}, \gamma'_{1\sigma}, \theta) = 0. \quad (3)$$

где θ — параметр пористости. Согласно современным представлениям пластическое формоизменение идеального изотропного, жестко-пластического сжимаемого тела происходит при достижении напряжениями некоторой комбинации, удовлетворяющей условию пластичности (3). Однако использование ассоциированного закона течения (1) с критерием пластичности (3), несмотря на зависимость критерия (3) от первого инварианта тензора напряжений, дает значительное расхождение между теоретическими и экспериментальными данными по объемной пластической деформации в области "жестких" путей нагружения. Изменение объема при сдвиге известно для многих материалов как свойство дилатансии. В большей степени это явление изучено и представлено рядом моделей для гранулированных материалов. Для описания дилатансии грунтов В.Н.Николаевским предложено устанавливать зависимость между приращениями объемной и сдвиговой деформации

$$d\epsilon^p = \Gamma(\rho, \tau) d\gamma^p, \quad (4)$$

где τ — интенсивность касательных напряжений;

$\Gamma(\tau, \rho)$ — некоторая функция; $d\gamma^p$ — приращение интенсивности деформации сдвига. В деформационном варианте [1] для оценки дилатансии использовались экспериментальные зависимости

$\epsilon^p = \Gamma(\rho, \tau) \gamma^p$ которые позволили получить конечные зависимости между напряжениями и деформациями для простых путей нагружения. В данной работе для описания явления дилатансии при пластическом деформировании пористых металлов в условиях действия сдвига и давления используется понятие дилатансионного объема

$cl\epsilon^p$, аддитивно накладываемое на приращение средней деформации $d\epsilon^p$. В качестве условия пластичности используется

наиболее экспериментально подтвержденная функция, определяющая поверхность эллипсоидального типа в пространстве ρ - τ , сдвинутая по оси гидростатического напряжения на величину

$$\alpha \gamma(\theta) (\rho - c(\theta))^2 + \tau^2 = \beta^2(\theta) \sigma_T^2, \quad (5)$$

где σ_T - предел текучести компактного материала; $c(\theta)$ функция, характеризующая сдвиг поверхности в зависимости от пористости и устанавливаемая из экспериментальных данных. Далее примем предположение о том, что дополнительная составляющая $d\epsilon_y^p$ возникает за счет "особенностей" течения пористого материала на структурном уровне и связана с наблюдаемым экспериментально отклонением приращения вектора скорости пластической деформации от нормали к поверхности пластичности (5). При этом считаем, что изменение интенсивности приращений деформации сдвига не происходит. На рис. 1 дана геометрическая интерпретация этого положения.

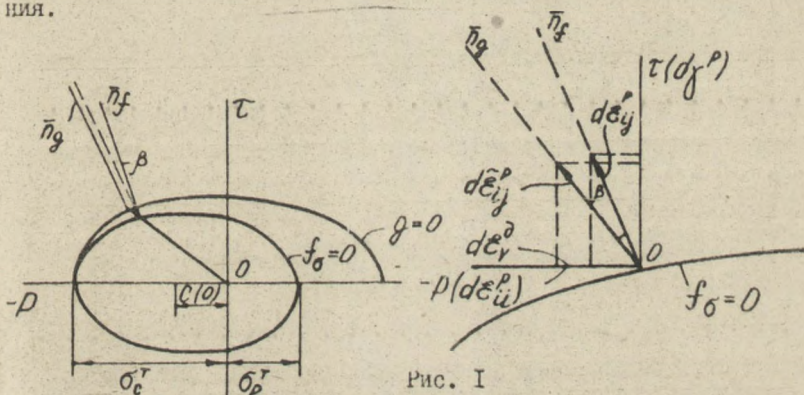


Рис. 1

Поверхность пластичности и геометрическая интерполяция дополнительной сжимаемости для пористых дилатирующих материалов

Обработанные экспериментальные данные в виде графических зависимостей, характеризующих величину угла отклонения β от параметра нагружения κ_σ ($\mu_\sigma = 1$, $\mu_\sigma = -1$ - растяжение и сжатие в условиях гидростатического давления), представлены на рис. 2. Вводя аналогично (4) дилатансионное соотношение

$$d\epsilon^p = d\gamma^p \operatorname{tg}(\arctg c \cdot \kappa_\sigma + \beta) \quad (6)$$

и используя закон течения в виде

$$d\epsilon_y^p = d\gamma \cdot \rho \cdot \delta_y + d\lambda (\delta_y - \rho \delta_y), \quad (7)$$

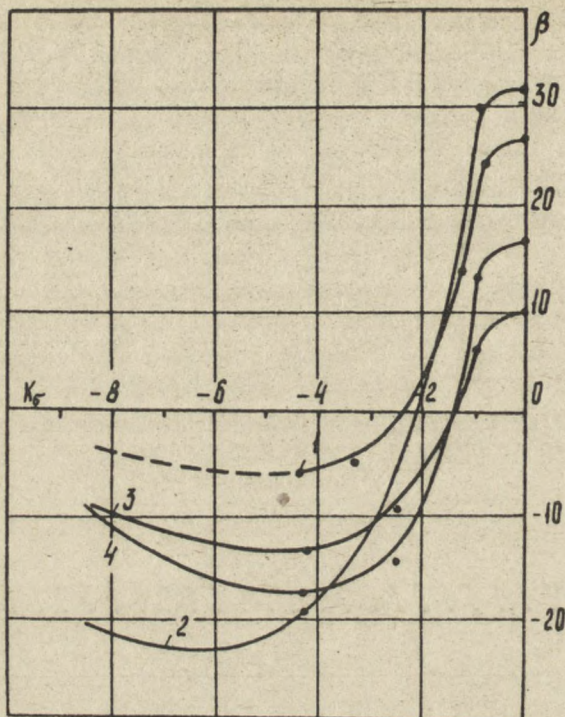


Рис. 2 Зависимость величины угла β от параметра K_s
 $M_s = -1$; 1 $\theta_0 = 0,16$; 2 $\theta_0 = 0,24$;
 $M_s = 1$; 3 $\theta_0 = 0,16$; 4 $\theta_0 = 0,24$

можно получить связь между скалярными множителями $d\lambda$ и $d\gamma$:

$$d\gamma = \frac{2}{3} d\lambda \operatorname{tg}(\arctg \operatorname{ctg} K_s + \beta) / K_s, \quad -\infty < K_s < 0, \quad (8)$$

которая позволяет записать определяющие соотношения следующим образом:

$$d\dot{\epsilon}_{ij}^p = d\lambda (\delta_{ij} - \rho \delta_{ij} (1 - \frac{2}{3} \operatorname{tg}(\arctg \operatorname{ctg} K_s + \beta) / K_s)) \quad (9)$$

При $\beta = 0$ закон течения (3) переходит в ассоциированный.

Литература

1. Николаевский В.Н. О связи объёмных и сдвиговых пластических деформаций и ударных волн в мягких грунтах. - ДАН СССР, 1982, т. 177, №3, с. 34-42.
2. Мидуков В.З., Белоусова Г.И. Соотношения деформационной теории пластичности. - В кн.: Тез. докл. Всесоюз. семинара "Пластическая деформация и актуальные проблемы прочности сплавов и порошковых материалов". Томск, 1982, с. 216.

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ПОГИБИ НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ И НЕУПРУГУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

А.Н. Кудинов, С.В. Дмитриев

В реальных конструкциях используются стержни малой гибкости, выпучивание которых происходит за пределом упругости. Процесс неупругой потери устойчивости центрально-сжатой стойки изучался многими авторами [1-4]. Исследованию влияния начальных несовершенств посвящены работы [5, 6].

В предлагаемой статье численно и экспериментально определяется предельная нагрузка для неупругого центрально-сжатого стержня, имеющего начальные несовершенства формы. Изучение процесса деформирования проводилось с использованием метода конечных элементов (МКЭ) в рамках деформационной теории пластичности.

1. При решении задачи о продольном изгибе стержня в своей плоскости решалась задача о плоском напряженном состоянии. В основу численной реализации по МКЭ положен четырехугольный восьмиузловой изопараметрический элемент. Распределение перемещений по элементу и границы элемента аппроксимировались одинаковыми полиномами второго порядка

$$x = \sum_8 h_i x_i, \quad y = \sum_8 h_i y_i, \quad (1)$$

$$u = \sum_8 h_i u_i, \quad v = \sum_8 h_i v_i, \quad (2)$$

где x, y, u, v – координаты и перемещения произвольной точки элемента, а x_i, y_i, u_i, v_i – координаты и перемещения узловых точек; h_i – функции формы; 8 – число узлов элемента.

Деформации элемента для плоской задачи связаны с перемещениями в виде

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [u, v]. \quad (3)$$

Учитывая, что

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

и подставляя (2) в (3), можно выразить деформации элемента через перемещения:

$$\varepsilon_{ij} = B_{ij} u. \quad (5)$$

Здесь через J обозначена матрица Якоби; B_{ij} – матрица связи деформаций и перемещений; индексы i и j указывают на то, что выражение (5) получено в точке с координатами r_i и s_j . Общее выражение для матрицы жесткости можно представить в виде

$$K = h \int B^T C B \det J dr ds. \quad (6)$$

Здесь через C обозначена матрица упругости, а через $\det J$ – определитель матрицы Якоби. Точное интегрирование (6) невозможно, поэтому используем квадратуру Гаусса порядка 4x4, и тогда матрица жесткости вычисляется по приближенной формуле

$$K = \sum \sum h_{ij} \alpha_{ij} F_{ij},$$

где $F_{ij} = B_{ij}^T C_{ij} B_{ij} \det J_{ij}$; α_{ij} – весовые коэффициенты; h_{ij} – толщина элемента в точке (r_i, s_j) .

Учет геометрической нелинейности осуществлялся по методу последовательных нагружений, когда на каждом шаге решаются линейные уравнения для стержня, форма которого изменена в соответствии с накопившимися перемещениями. Стержень разбивался на 40 одинаковых элементов, расположенных в два слоя по ширине. При использовании квадратуры Гаусса численное интегрирование проводилось по шестнадцати точкам элемента, в каждой из которых вычислялся модуль упругости, соответствующий достигнутому уровню напряжений. В расчеты заложена реальная диаграмма растяжения сплава А5М, которая аппроксимировалась подобно тому, как это сделано в [7]. Начальная погиб задавалась в виде половинной синусоиды. На конце стержня при $X = 0$ приравнивались нулю перемещения u и v , а при $X = l$ перемещения v .

2. Эксперименты проводились на образцах из алюминиевого

сплава А5М со следующими геометрическими параметрами: длина 150 мм, сечение прямоугольное 12х4,9 мм, образцы подвергались отжигу при температуре 500°C.

Экспериментальная установка (рис.1) позволяла контролировать соосность нагружения и измерять прогибы стержня при различных значениях сжимающей силы. Концы стержня I размещались в специальных стаканах 2, и после установки оси стержня параллельно оси сжимающего устройства в стаканы заливался легкоплавкий припой, чем обеспечивалась жесткая заделка. Стаканы 2 жестко скреплялись с кольцами 3, которые свободно, но без люфта могут скользить по направляющей трубе 4. В стенке трубы имеются два окна, необходимые для замера прогибов индикатором часового типа 5, укрепленного на кольце 6, которое имеет возможность перемещаться вдоль стержня.

На рис.2 приводится процесс выпучивания стержня с начальной амплитудой погиби $W_0 = 0,015$ см ($P = 500, 580$ кг), а на рис.3 то же для $W_0 = 0,22$ см ($P = 250, 330$ кг), определенный из эксперимента. Сплошной линией показана начальная погибь.

На рис.4 приведено распределение зон пластичности, полученное из расчета для стержня с $W_0 = 0,015$ см, а на рис.5 для $W_0 = 0,22$ см ($0 \leq X \leq l/2$). Большей цифре соответствует большая интенсивность деформаций. Из рис. 4 и 5 следует, что при малых амплитудах начальной погиби в стержне реализуется более однородное НДС.

На рис.6 приводятся расчетные и экспериментальные кривые зависимости максимального прогиба от нагрузки. Сплошными линиями показаны расчетные данные. Кривые 1,2,3 соответствуют амплитудам начальной погиби $W_0 = 0,015; 0,074; 0,22$ см соответственно, а кривые 1а, 2а, 3а - $W_0 = 0,015; 0,074; 0,22$ см.

Из рис.6 видно, что расчетные кривые лежат несколько выше экспериментальных и не имеют участка понижения. Последнее объясняется тем, что в расчете полагалось недостижение предела текучести при разгрузке. Расхождение теоретических и экспериментальных данных вызвано наличием некоторого эксцентриситета сжимающей силы, неточностью аппроксимации начальных прогибов и диаграммы сплава А5М.

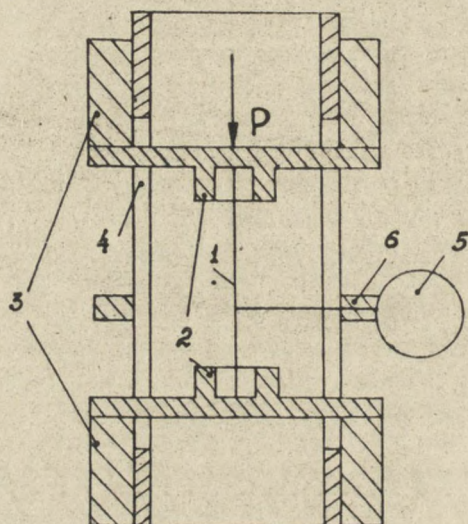


Рис. 1

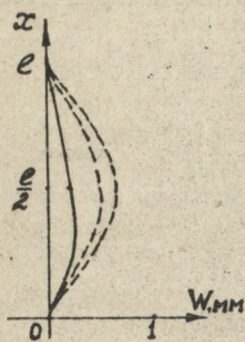


Рис. 2

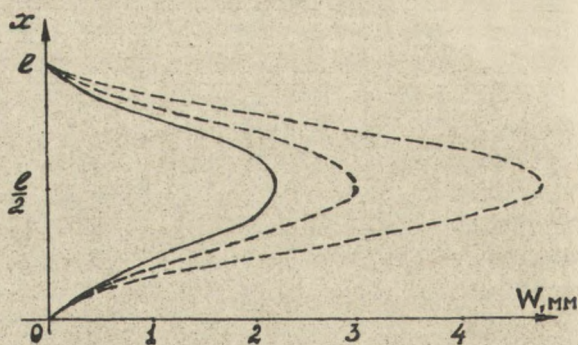


Рис. 3



Рис. 4

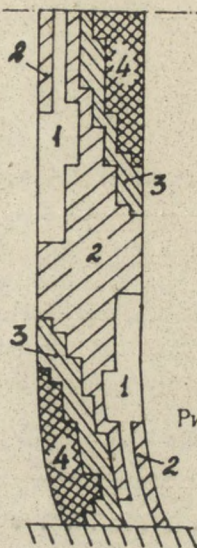


Рис. 5

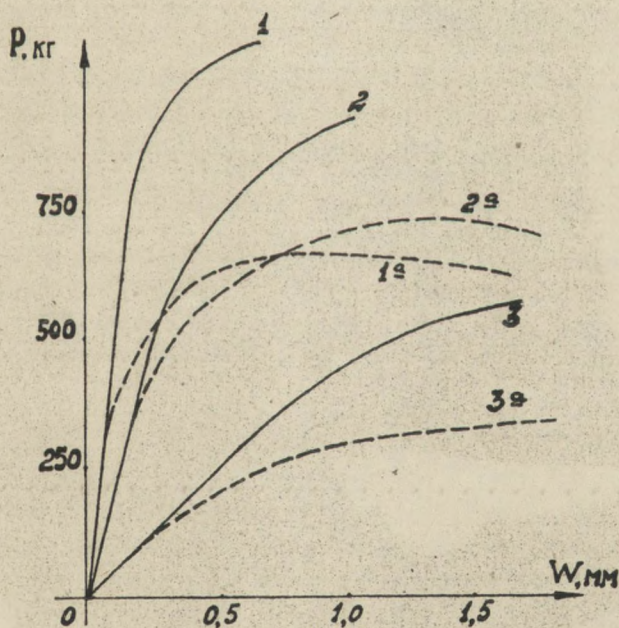


Рис. 6

Литература

1. Ключников В.Д. Устойчивость упруго-пластических систем. - М.: Наука, 1980. - 240с.
2. Давыдов В.С. К вопросу об определении критической нагрузки для стержня из линейно упрочняющегося материала. - Вестн. Моск. ун-та. Сер.3, 1977, № 3, с. 68-72.
3. Ершов В.И. О процессе выпучивания стойки Шенли. - Исслед. по расчету строит. конструкций, 1977, №2, с. 99-102.
4. Ключников В.Д., Купавцев В.В. Двусторонние оценки критических нагрузок неоднородно сжатых стержней. - ДАН, 1977, 236, № 3, с. 561-564.
5. Воронцов А.П., Зубчанинов В.Г. Экспериментальное исследование влияния упругопластической тренировки сжатия стержней на их несущую способность. Устойчивость в мех. деформир. тверд. тела. - Матер. Всесоюзн. симпоз., Калинин, 1982, с. 19-26.
6. Зубович В.Ф. Экспериментальное исследование выпучивания стержней с локальными несовершенствами. - В кн.: Работы по мех. деформируем. тверд. тела. Тула, 1981, с. 67-71.
7. Tomita Yoshihiro, Shindo Aki. On the bifurcation and post-bifurcation behaviour of thick circular elastic-plastic tubes under lateral pressure. - Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng., 1982, v.35, n2, p. 207-219.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ МНОГОЭТАПНОМ НАГРУЖЕНИИ НЕРАВНОМЕРНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

В. И. Масловский

Рассмотрение нагрузок в классе неравномерных по одной или двум координатам приводит в общем случае к существенно неравномерному напряженному состоянию оболочек и к бесконечному многообразию траекторий, посредством перехода по которым может быть достигнуто заданное состояние нагружения. Значительное место среди этого многообразия занимают те, которые характеризуются на отдельных своих этапах уменьшением или возрастанием интенсивности нагрузки относительно ранее достигнутой на части поверхности или контура оболочки. Переход по таким траекториям в ряде случаев может повлечь за собой разрушение по прочности или потерю устойчивости конструкции.

1. Пусть шарнирно опертая цилиндрическая оболочка находится в состоянии устойчивого равновесия под действием начального, в общем случае переменного в окружном направлении давления вида

$$Q_2 = \{_2 Q_n Q_2(\theta). \quad (1)$$

Рассмотрим устойчивость оболочки, обусловленную действием давления:

$$Q_1 = \{_1 Q_n Q_1(\theta), \quad (2)$$

$$Q_{1n} = \frac{\pi \sqrt{6}}{9(1-\mu^2)^{3/4}} E \frac{R}{L} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \quad (3)$$

— величина критического внешнего давления осесимметрично нагруженной оболочки, определяемая по формуле Саумуэлла-Пап-

ковича; γ_j ($j = 1, 2$) - коэффициенты пропорциональности; $\bar{Q}_j(\theta)$ - функции, характеризующие изменяемость давления в окружном направлении и имеющие единичную амплитуду.

Оценим решение задачи устойчивости оболочки под действием нагрузок (1), (2) с позиций теории локальной устойчивости [1] исходя из уравнений безразличного равновесия теории пологих оболочек [2]:

$$D\nabla^4 w - RF_{33} - R^2(T_1^0 \omega_{33} + T_2^0 \omega_{\theta\theta} + 2S^0 \omega_{3\theta}) - (\omega_{33}^0 F_{\theta\theta} + \omega_{\theta\theta}^0 F_{33} - 2\omega_{3\theta}^0 F_{3\theta}) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 F + R\omega_{33} + (\omega_{33}^0 \omega_{\theta\theta} + \omega_{\theta\theta}^0 \omega_{33} - 2\omega_{3\theta}^0 \omega_{3\theta}) = 0.$$

Применяя положения теории локальной устойчивости, исследуем возможность образования единичной локальной вмятины угла раствора π/n в области, характеризуемой угловой координатой θ :

$$w = w_0 \cos v \zeta \cos n(\theta - \theta_0); \quad F = F_0 \cos v \zeta \cos n(\theta - \theta_0). \quad (5)$$

Интегрируя (4) с учетом (5) по методу Бубнова-Галеркина в области локальной устойчивости Ω , получим характеристическое уравнение

$$a^2 - [(v^2 + n^2)^2 B + 2v^2 a] + \varepsilon (n^2 + v^2)^4 + v^4 = 0, \quad (6)$$

где при определении докритического состояния в рамках линейной теории [3] результирующее напряженно-деформированное состояние в силу принципа суперпозиции находится в виде суммы соответствующих для каждого силового воздействия и

$$a = \sum_{j=1}^2 \gamma_j Q(\bar{x}_{ij}^0 n^2 + \bar{x}_{2j}^0 v^2 - 2\bar{x}_j^0 vn),$$

$$B = \sum_{j=1}^2 \gamma_j Q(\bar{T}_{ij}^0 v^2 + \bar{T}_{2j}^0 n^2 + 2\bar{S}_j^0 vn), \quad (7)$$

$$Q = \frac{4\pi\sqrt{6}}{9(1-\mu^2)^{3/4}} \left(\frac{R}{L}\right)^2 \left(\frac{h}{R}\right)^{3/2}, \quad v = \frac{\pi R}{L}, \quad \varepsilon = \frac{h^2}{12R^2(1-\mu^2)},$$

а параметры докритического состояния $\bar{T}_{ij}^0, \dots, \bar{x}_j^0$ ($j = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \gamma_j \bar{x}_{ij}^0 &= -\frac{4nR}{\pi L} \int \bar{x}_{ij}^0 R \cos^2 v \zeta \cos^2 n(\theta - \theta_0) d\Omega, \\ \gamma_j \bar{x}_{2j}^0 &= -\frac{4nR}{\pi L} \int \bar{x}_{2j}^0 R \cos^2 v \zeta \cos^2 n(\theta - \theta_0) d\Omega, \\ \gamma_j \bar{x}_j^0 &= -\frac{nR}{\pi L} \int \bar{x}_j^0 R \sin 2v \zeta \sin 2n(\theta - \theta_0) d\Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\{Q\bar{T}_{1j} = - \frac{4nR}{\pi L} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{1j}}{Eh} \cos^2 \nu \zeta \cos^2 n(\theta - \theta_i) d\Omega,$$

$$\{Q\bar{T}_{2j} = - \frac{4nR}{\pi L} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{2j}}{Eh} \cos^2 \nu \zeta \cos^2 n(\theta - \theta_i) d\Omega,$$

$$\{Q\bar{S}_j = - \frac{nR}{\pi L} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{S_j}{Eh} \sin 2\nu \zeta \sin 2n(\theta - \theta_i) d\Omega.$$

Критическое значение γ_1^* находится посредством минимизации корня (6) по n и θ_i .

2. Пусть оболочка нагружена равномерным внешним давлением до уровня γ_2 и происходит её догружение секториальным внешним давлением на части боковой поверхности, ограниченной центральным углом φ_0 . Этот случай соответствует

$$\bar{Q}_2(\theta) = 1, \quad |\theta| \leq \pi, \quad (9)$$

$$\bar{Q}_1(\theta) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sgn} \left(\frac{\varphi_0}{2} - |\theta| \right) \right], \quad |\theta| \leq \pi. \quad (10)$$

Проведенные расчеты показывают, что повышение уровня предварительного нагружения оболочки средней длины равномерным внешним давлением γ_2 повышает её устойчивость при догружении $\Psi = \gamma_1^* + \gamma_2$ и уменьшает степень осцилляции зависимости $\Psi(\varphi_0)$. Угол раствора полуволны потери устойчивости в окружном направлении с ростом γ_2 уменьшается и приближается к размеру полу-волны потери устойчивости осесимметрично загруженной оболочки.

3. Пусть оболочка нагружена равномерным внешним давлением до уровня γ_2 и происходит её разгрузка на части боковой поверхности, ограниченной центральным углом φ_0 [4], т.е.

$$\bar{Q}_1(\theta) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sgn} \left(|\theta| - \frac{\varphi_0}{2} \right) - 1 \right], \quad |\theta| \leq \pi. \quad (11)$$

Расчеты для оболочки с $L/R = 5,83$, $R/h = 788$ показали, что существует предельный уровень предварительного нагружения оболочки равномерным внешним давлением, приводящий к потере устойчивости при уменьшении интенсивности нагружения на части боковой поверхности, а $\gamma_1^*(\varphi_0)$ имеет осциллирующий характер и существенно зависит от величины γ_2 .

4. Пусть оболочка нагружена на части боковой поверхности равномерным внутренним давлением и происходит её догружение рав-

номерным внешним давлением, т.е.

$$\bar{Q}_2(\theta) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sgn}(|\theta| - \frac{\varphi_0}{2}) - 1 \right], \quad |\theta| \leq \pi, \quad (12)$$

$$\bar{Q}_1(\theta) = 1, \quad |\theta| \leq \pi.$$

Расчеты для оболочки с $L/R = 3,1$, $R/h = 530$ показали, что при увеличении интенсивности неравномерного внутреннего давления γ_2 величина критического внешнего давления γ_1^* убывает, а потеря устойчивости оболочки происходит за пределами сектора, на котором действует внутреннее давление. Результаты расчета находятся в удовлетворительном соответствии с данными экспериментального исследования устойчивости цилиндрических оболочек указанных геометрических характеристик, изготовленных из листовой стали IX18H9T (рис. 1).

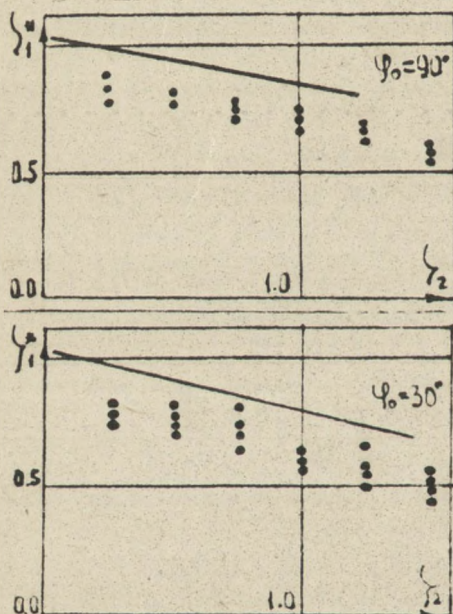


Рис. 1.

Расчетные и экспериментальные значения относительного критического равномерного внешнего давления γ_1^* предварительно нагруженной секторiallyльным внутренним давлением γ_2 оболочки

Литература

1. Масловский В.И., Кудинов А.Н. Локальная устойчивость цилиндрической оболочки при секториальном нагружении /ТГУ - Томск, 1979.-8с. - Рукопись деп. в ВИНТИ 13 авг. 1979, № 3007-79.
2. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек.- М.:Наука, 1978.- 360с.
3. Гольденвейзер А.П. Теория упругих тонких оболочек.- М.:Наука, 1976.- 512с.
4. Масловский В.И. Об устойчивости оболочек при разгрузке /ТГУ - Томск, 1981.- 9с.- Рукопись деп. в ВИНТИ 7 янв. 1981, №108-81.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРУТОГО АНТИПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

И.А. Лев, С.Л. Павлов

В случае антиплоского деформированного состояния (когда цилиндрическое тело нагружено по боковой поверхности равномерно распределенными усилиями вдоль образующих и направленных вдоль них) вектор смещения будет иметь только одну ненулевую компоненту U по оси цилиндра z , а из компонент тензора напряжений ненулевыми являются только касательные напряжения в плоскости поперечного сечения x, y [1]:

$$\sigma_{zx} = \mu U_{,x}, \quad \sigma_{zy} = \mu U_{,y},$$

где μ — модуль сдвига.

Уравнение равновесия в этом случае имеет вид

$$U_{,xx} + U_{,yy} = 0. \quad (1)$$

Граничное условие в общем случае можно записать как

$$h_1 U + h_2 U_{,n} = h. \quad (2)$$

Здесь h_1, h_2, h — кусочно-гладкие функции.

Алгоритм решения антиплоской задачи строится на основе метода граничных вариационных уравнений (ГВУ) [2]. В соответствии с этим методом от уравнений равновесия (1) осуществляется переход к эквивалентной системе уравнения Коши-Римана

$$\varphi_{1,x} = \varphi_{2,y}, \quad \varphi_{1,y} = -\varphi_{2,x}, \quad U = \varphi_1. \quad (3)$$

Граничные условия в общем виде для системы (3) имеют вид

$$a\varphi_1 + b\varphi_{2,s} = h(s), \quad s \in \gamma, \quad (4)$$

где a, b – произвольные, кусочно-непрерывные функции, $ab \geq 0$;
 $a^2 + b^2 = 1$; s – дуга контура поперечного сечения тела γ .

С использованием свойств интеграла типа Коши в работе [2] был получен функционал

$$\begin{aligned} J &= \oint_{\gamma} (\varphi_{1,s} P_{1,y}(\varphi_c) + \varphi_{2,s} P_{2,y}(\varphi_c)) ds = \\ &= \oint_{\gamma} \sum_{i=1}^2 (\varphi_{i,y} - \frac{1}{\ell} \oint_{\gamma} \varphi_{i,y} d\lambda) ds, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\ell = \oint_{\gamma} ds$;

$$\varphi_j(s) = -\frac{1}{2} \varphi_j(s) + \oint_{\gamma} \varphi_i H_{ij}(s, \lambda) d\lambda;$$

$$B_1(s) = -\oint_{\gamma} \varphi_{1,y}(s) ds + \frac{s}{\ell} \oint_{\gamma} \varphi_{2,y}(s) ds;$$

$$B_2(s) = -\oint_{\gamma} \varphi_{2,y}(s) ds + \frac{s}{\ell} \oint_{\gamma} \varphi_{1,y}(s) ds;$$

$$P_j(\varphi_c) = \frac{1}{2} B_j(s) + \oint_{\gamma} B_i H_{ij}(s, \lambda) d\lambda;$$

H_{ij} – элементы ядра Коши, записанного в действительной матричной форме

$$H_{11} = \delta_{c,n}, \quad H_{12} = -\delta_{o,s},$$

$$H_{21} = \delta_{o,s}, \quad H_{22} = -\delta_{c,n},$$

n, s – нормаль и дуга контура.

Было показано [2], что решение краевой задачи с граничными условиями (4) эквивалентно решению задачи о минимизации функционала (5) с ограничениями (3), причем функционал имеет единственный минимум, равный нулю. Минимизация осуществилась методом наискорейшего спуска.

Приращение функционала (5) записывалось следующим образом:

$$\Delta J = \oint_{\gamma} [\Delta \varphi_{1,s} P_{1,y}(\varphi_c + \frac{1}{2} \Delta \varphi_c) + \Delta \varphi_{2,s} P_{2,y}(\varphi_c + \frac{1}{2} \Delta \varphi_c)] ds. \quad (6)$$

Для построения минимизирующей последовательности при ограничениях (4) вектор φ_j представляется в виде

$$\varphi_j = \varphi_j^0 + \phi_j, \quad (7)$$

где φ_j^0 - произвольный, фиксированный вектор, удовлетворяющий условиям

$$\varphi_{j,s}^0 \in L_p, \quad \int_0^1 \varphi_{j,s}^0 ds = 0, \quad a\varphi_{1,s}^0 + b\varphi_{2,s}^0 = h;$$

φ_j - варьируемый вектор, удовлетворяющий условиям

$$\varphi_{j,s} \in L_p, \quad \int_0^1 \varphi_{j,s} ds = 0, \quad a\varphi_{1,s} + b\varphi_{2,s} = 0. \quad (8)$$

Приращение вектора решения имеет вид

$$\Delta\varphi_j = \Delta\varphi_j. \quad (9)$$

Вводится функция ξ :

$$a\varphi_{1,s} + b\varphi_{2,s} = 0, \quad b\varphi_{1,s} - a\varphi_{2,s} = \xi. \quad (10)$$

Из соотношений (10) находится

$$\varphi_{1,s} = b\xi, \quad \varphi_{2,s} = -a\xi, \quad (11)$$

$$\Delta\varphi_{1,s} = b\Delta\xi, \quad \Delta\varphi_{2,s} = -a\Delta\xi; \quad (12)$$

$$\varphi_1 = \int_0^1 b\xi ds, \quad \varphi_2 = -\int_0^1 a\xi ds, \quad (13)$$

т.е. приращения решения $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ выражаются соотношением (12) через одну варьируемую функцию ξ . Полное решение на $k+1$ шаге спуска имеет вид

$$\xi^{k+1} = \xi^k + \Delta\xi^k, \quad \xi^0 = 0;$$

$$\varphi_1 = \varphi_1^0 + \int_0^1 b\xi^{k+1} ds; \quad (14)$$

$$\varphi_2 = \varphi_2^0 - \int_0^1 a\xi^{k+1} ds$$

Приращение функционала ΔJ с учетом (12) записывается

$$\Delta J = \int_0^1 \Delta\xi [bP_{2,y}(\varphi_1 + \frac{1}{2}\Delta\varphi_1) - aP_{1,y}(\varphi_2 + \frac{1}{2}\Delta\varphi_2)] ds. \quad (15)$$

Вводится линейный оператор

$$K(\varphi_j) = bP_{2,y}(\varphi_j) - aP_{1,y}(\varphi_j). \quad (16)$$

Тогда

$$K(\varphi_j + \frac{1}{2}\Delta\varphi_j) = K(\varphi_j^0 + \varphi_j + \frac{1}{2}\Delta\varphi_j) = \quad (17)$$

$$= K(\varphi_j^0) + K(\varphi_j) + \frac{1}{2}K(\Delta\varphi_j) = K(\varphi_j^0) + K(\varphi_j) + \frac{1}{2}T(a\xi)$$

Приращение варьируемой функции полагается равным

$$\Delta \xi = -\sigma [K(\varphi_j^0) + K(\varphi_j^1)], \quad (18)$$

где σ - шаг спуска.

С учетом (18) соотношение (15) перепишется

$$\Delta J = -\sigma \int_0^1 [K(\varphi_j^0) + K(\varphi_j^1)] [K(\varphi_j^0) + K(\varphi_j^1) - \frac{\sigma}{2} T[K(\varphi_j^0) + K(\varphi_j^1)]] ds.$$

Из условия $\frac{d\Delta J}{d\sigma} = 0$ выбирался шаг σ , который обеспечи-
вал максимальный спуск. На $k+1$ шаге спуска значения реше-
ний в узлах на контуре тела вычисляются по следующему алго-
ритму:

$$\begin{aligned} \varphi_j^{k+1} &= \varphi_j^k + \Delta \varphi_j^k, \quad \Delta \varphi_j^k = \Delta \varphi_j^k, \\ \Delta \varphi_1^k &= \int_0^1 \sigma \Delta \xi^k ds, \quad \Delta \varphi_2^k = - \int_0^1 \sigma \Delta \xi^k ds, \\ \xi^{k+1} &= \xi^k + \Delta \xi^k, \quad \xi^0 = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Delta \xi^{k+1} = \frac{\int_0^1 [K(\varphi_j^0) + K(\varphi_j^1)]^2 ds \cdot [K(\varphi_j^0) + K(\varphi_j^1)]}{\int_0^1 [K(\varphi_j^0) + K(\varphi_j^1)] [T[K(\varphi_j^0) + K(\varphi_j^1)]] ds}.$$

На дуге контура S между узлами функция φ_j аппроксимировалась
линейно:

$$\varphi_j(s) = \frac{s_{i+1} - s}{s_{i+1} - s_i} \varphi_j(s_i) + \frac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i} \varphi_j(s_{i+1}). \quad (20)$$

Алгоритм вычисления интегралов Коши в соотношениях (5)
с учетом (20) имеет вид

$$\int \varphi H(x, s) dx = \sum_{i=1}^n \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left[\frac{s_{i+1} - s}{s_{i+1} - s_i} \varphi_j(s_i) + \frac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i} \varphi_j(s_{i+1}) \right] H(x, s) ds = \quad (21)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\frac{s_{i+1} \varphi(s_i) - s_i \varphi(s_{i+1})}{s_{i+1} - s_i} \int_{s_i}^{s_{i+1}} H ds + \frac{\varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i)}{s_{i+1} - s_i} \int_{s_i}^{s_{i+1}} s H ds \right],$$

т.е. матрицы интегралов $\int_{s_i}^{s_{i+1}} H ds$ и $\int_{s_i}^{s_{i+1}} s H ds$ вычис-
ляются один раз по схеме Гаусса и запоминаются, а счет ин-
тегралов типа Коши сводится к матричному умножению столбца
 $\varphi_j(s_i)$ на заполненную матрицу.

Для иллюстрации приведенного алгоритма решалась задача

антиплоского деформирования цилиндрического тела, поперечное сечение которого приведено на рис. I.

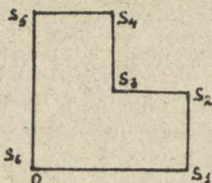


Рис. I. Поперечное сечение цилиндрического тела

Граница области:

- 1) $0 \leq s \leq s_1$, $y = 0$, $x = s$,
 $\cos(sx) = -\cos(ny) = 1$, $\cos(sy) = \cos(nx) = 0$;
- 2) $s_1 \leq s \leq s_2$, $x = s_1$, $y = s - s_1$,
 $\cos(sx) = -\cos(ny) = 0$, $\cos(sy) = \cos(nx) = 1$;
- 3) $s_2 \leq s \leq s_3$, $x = s_1 + s_2 - s$, $y = s_2 - s_1$,
 $\cos(sx) = -\cos(ny) = -1$; $\cos(sy) = \cos(nx) = 0$;
- 4) $s_3 \leq s \leq s_4$, $x = s_1 + s_2 - s_3$, $y = s_2 - s_1 + s - s_3$,
 $\cos(sx) = -\cos(ny) = 0$, $\cos(sy) = \cos(nx) = 1$;
- 5) $s_4 \leq s \leq s_5$, $x = s_5 - s$, $y = s_4 - s_3$,
 $\cos(sx) = -\cos(ny) = -1$, $\cos(sy) = \cos(nx) = 0$;
- 6) $s_5 \leq s \leq s_6$, $x = 0$, $y = s_4 - s$,
 $\cos(sx) = -\cos(ny) = 0$, $\cos(sy) = \cos(nx) = -1$.

Тело по границе $[OS_1]$ жестко заделано, а по $[S_2S_4]$ придано вдоль оси Z смещение, равное 1, т.е. граничное условие можно записать

$$a \varphi_{1,s} + b \varphi_{2,s} = 0,$$

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(s_2) = 1,$$

$$a = \begin{cases} 1, & s \in [0, s_1], [s_2, s_4] \\ 0, & s \in [s_1, s_2], [s_4, s_6] \end{cases}$$

$$\theta = \sum_{k=1}^n \theta_k(s),$$

$$\theta_1(s) = \begin{cases} 1, & s \in S_1 S_4 \\ 0, & s \notin S_1 S_4 \end{cases}$$

$$\theta_2(s) = \begin{cases} 1, & s \in S_4 S_6 \\ 0, & s \notin S_4 S_6 \end{cases}$$

Для значений $S_1=1$, $S_2=1,5$, $S_3=2$, $S_4=2,5$, $S_5=3$, $S_6=4$ просчитан вариант. При 80 узлах после 20 шагов спуска значение функционалов уменьшалось в 65 раз. На рис.2 приведены эпюры интенсивности касательных напряжений.

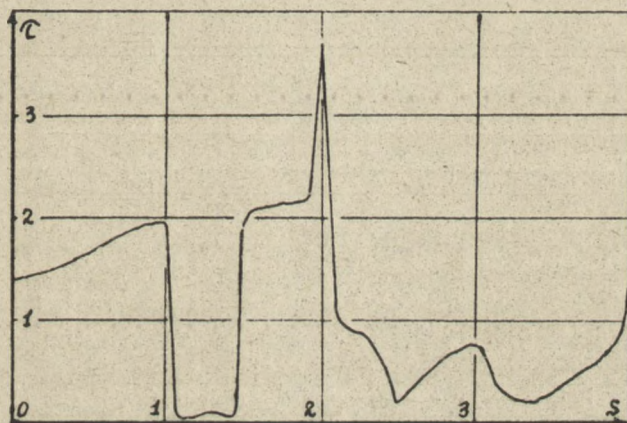


Рис.2. Эпюры интенсивности касательных напряжений

Литература

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела.-М: Наука, 1979.-744с.
2. Тараканов В.И. Граничные вариационные уравнения в краевых задачах теории упругости. -Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982.-141с.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Н. А. Стахин

В настоящей работе в рамках теории упругости конечных деформаций рассмотрена электростатика твердых кристаллических диэлектриков, введен термодинамический потенциал, записаны соответствующие термодинамические соотношения. В основополагающих работах [1,2] электростатика и электродинамика упругих диэлектриков строятся на использовании теории упругости конечных деформаций и законов сохранения энергии, массы, импульса и момента количества движения. Авторы множества других теорий, появившихся вслед за работой [1], использовали в своих разработках различные формальные математические конструкции. Проанализировав на открытии III Всесоюзного съезда по механике (1968 год, январь) создавшееся положение, Л.И.Седов предложил в качестве основы для построения различных макроскопических теорий использовать вариационное уравнение Лагранжа [3]. Достаточно совершенная, основанная на лагранжиане макроскопическая электродинамика упругих диэлектриков была развита в [4]; в работе [5] эта теория была модифицирована путем введения более удобных переменных.

Следуя работам [4,5], будем рассматривать диэлектрик как сложный континуум, составленный из N взаимопроникающих континуумов вида α ($\alpha=1,2,\dots,N$) с плотностью массы ρ^α и плотностью электрического заряда q^α . Будем различать три типа состояний среды. "Исходное" - естественное состояние среды, в котором напряжения отсутствуют; "начальное" - это некоторое текущее конечно деформированное состояние поляризованной среды; "конечное" - состояние, достигаемое за счет непрерывной малой деформации среды из начального состояния. Пусть соответственно каждому типу состояний X_α^A , x_α^A , z_α^A - координаты некоторой материальной точки континуума вида α ; X_A , x_A , z_A - координаты материальной точки, а ρ_0^α , ρ^α , ρ'^α - плотность сложного континуума; S_α^μ , s_α^μ , t_α^μ (где $\mu=1,2,\dots,N-1$) - компоненты векторных функций, описывающих внутренние степени свободы сложного континуума. Прочие величины, относящиеся к конечному состоянию, будем помечать

штрихом. Примем для определенности

$$x_i = \sum_{j=1}^N \delta^j x_i^j / \delta, \quad \delta_i^m = x_i^{m+1} - x_i^1, \quad (I)$$

где $\delta = \sum_{j=1}^N \delta^j$. Переменные x_i , δ_i^m и производные $x_{i,A} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A}$, $X_{A,i} = \frac{\partial X_A}{\partial x_i}$ будем рассматривать как непрерывные функции времени и координаты X_A , предполагая, что определитель $J = \det(x_{i,A})$ отличен от нуля. Для описания произвольной конечной деформации сложного континуума будем использовать тензор конечной деформации Грина

$$\eta_{AB} = \frac{1}{2} (x_{i,A} x_{j,B} - \delta_{AB}) \quad (2)$$

и векторы

$$\Pi_A^m = X_{A,i} \delta_i^m - \delta_A^m, \quad (3)$$

предполагая, что эти параметры полностью определяют удельную (рассчитанную на единицу массы) энергию деформации сложного континуума Σ .

Пусть конечно-деформированный диэлектрик за счет дополнительной малой деформации выведен из начального состояния. Приращения параметров деформации (2), (3), полученные за счет дополнительной деформации, составят

$$\Delta \eta_{AB} = x_{i,A} x_{j,B} \varepsilon_{ij}, \quad \Delta \Pi_A^m = X_{A,m} \kappa_m^m, \quad (4)$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z_n}{\partial x_i} \frac{\partial Z_n}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right), \quad \kappa_m^m = \frac{\partial x_m}{\partial Z_i} t_i^m - \delta_m^m. \quad (5)$$

Записывая плотность энергии деформации

$$W = \delta \left\{ \sum (\eta_{AB} + \Delta \eta_{AB}, \Pi_A^m + \Delta \Pi_A^m) - \sum (\eta_{AB}, \Pi_A^m) \right\} \quad (6)$$

в виде ряда по степеням параметров дополнительной деформации ε_{ij} κ_m^m , получим

$$W = [ij] \varepsilon_{ij} + \sum_{m=1}^{N-1} [m] \kappa_m^m + \frac{1}{2} [ij, pq] \varepsilon_{ij} \varepsilon_{pq} + \\ + \sum_{m=1}^{N-1} [m, ij] \kappa_m^m \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{N-1} [m \ n] \kappa_m^m \kappa_n^n + \dots, \quad (7)$$

где скобочными символами обозначены коэффициенты ряда

$$[ij] = \delta \frac{\partial \Sigma}{\partial \eta_{AB}} x_{i,A} x_{j,B}, \quad [m] = \delta \frac{\partial \Sigma}{\partial \Pi_A^m} X_{A,m}, \quad (8)$$

$$[ij, pq] = \oint \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \eta_{AB} \partial \eta_{CD}} X_{i,A} X_{j,B} X_{p,C} X_{q,D},$$

$$[\pi_m, ij] = \oint \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Pi_A^m \partial \eta_{BC}} \chi_{A,m} x_{i,B} x_{j,C}, \quad [\pi_m^v] = \oint \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Pi_A^m \partial \Pi_B} \chi_{A,m} \chi_{B,n}. \quad (9)$$

Известно из [4], что для получения уравнений статики и динамики упругих диэлектриков достаточно записать лагранжиан физической системы, состоящей из диэлектрика и взаимодействующего с ним электромагнитного поля, и рассмотреть уравнения Лагранжа 2-го рода. В настоящей работе мы рассмотрим электростатику диэлектриков. Согласно [5] напряжения χ_{ij} в диэлектрике, помещенном в однородное электрическое поле, составят

$$\chi_{ij} = [ij] + m_{ij}, \quad m_{ij} = \epsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E_n E_n), \quad (10)$$

где ϵ_0 - абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума; m_{ij} - напряжения Максвелла. Измененная за счет присутствия диэлектрика напряженность макроскопического электрического поля E_n удовлетворяет условиям статического равновесия

$$q^{n+1} E_n = [\pi_n^q], \quad q = 1, 2, \dots, N-1. \quad (11)$$

Плотность энергии деформации физической системы электростатическое поле - диэлектрик

$$U = \oint \Sigma + \frac{1}{2} \epsilon_0 E_n E_n \quad (12)$$

включает энергию деформации диэлектрика и энергию поля. При дополнительной деформации диэлектрика в электростатическом поле изменение плотности энергии (12) запишется в виде

$$\Delta U = W + \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} E_n' E_n' - E_n E_n \right), \quad (13)$$

где функция W представлена рядом (7). Воспользуемся уравнениями (11) для того, чтобы упростить запись функции (13), предполагая, что внутренние смещения адиабатически подстраиваются вслед за изменением компонент тензора деформации и характеристик электростатического поля.

Известно из [6], что элементарная работа, производимая над теплоизолированным диэлектриком при бесконечно малом изменении электрического поля в нем, равна $\delta R = E_n d D_n$, где D_n - элек -

трическая индукция поля; $D_n = \epsilon_0 E_n + P_n$, P_n - плотность поляризации. Используя при вычислении работы δR теорию упругости конечных деформаций, получим

$$\delta R = \epsilon_A d D_A, \quad \text{где } \epsilon_A = x_{i,A} E_i; \quad D_A = J \chi_{A,i} D_i. \quad (I4)$$

Вид формулы (I4) подсказывает нам, что электрическое состояние диэлектрика характеризует вектор материальной индукции $\tilde{D}$, поэтому аргументами функции плотности энергии (I2) следует считать компоненты η_{AB} и D_A , аргументами функции ΔU тогда будут компоненты тензора дополнительной деформации ϵ_{ij} и составляющие вектора $\tilde{\delta}$, удовлетворяющего соотношениям

$$D'_A - D_A = J \chi_{A,n} \delta_n, \quad \delta_n = \frac{\rho}{J} \frac{\partial x_n}{\partial z_i} D'_i - D_n. \quad (I5)$$

Заменив в уравнениях (II) напряженность E_n на материальную индукцию D_A , приводим их к виду

$$q^{N+1} D_A = J \chi_{A,m} (\epsilon_0 [m] + q^{N+1} \sum_{j=1}^{N-1} q^{j+1} g_m^j). \quad (I6)$$

Записав уравнения (I6) для конечного состояния диэлектрика и разрешив их относительно переменных π_m^N , получим с точностью до линейных членов по δ_n и ϵ_{ij}

$$\pi_m^N = \sum_{j=1}^{N-1} A_{mn}^{Nj} \{ q^{j+1} \delta_n - \epsilon_0 R_{nij} \epsilon_{ij} \} + \dots, \quad (I7)$$

где

$$R_{nij}^N = [m, ij] + \delta_{ij} [m] - \delta_{mi} [j] - \delta_{mj} [i],$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} A_{mn}^{Nj} \{ q^{j+1} \delta_{nr} q^{r+1} + \epsilon_0 [n_r] \} = \delta_{mr} \delta_{n\pi}. \quad (I8)$$

Подставив значения (I7) в разложение (7), находим для плотности энергии дополнительной деформации

$$\begin{aligned} \Delta U = & \chi_{ij} \epsilon_{ij} + E_n \delta_n + \frac{1}{2} C_{ijpq} \epsilon_{ij} \delta_{pq} + \\ & + h_{nij} \delta_n \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \epsilon_0^{-1} \eta_{nm} \delta_n \delta_m + \dots \end{aligned} \quad (I9)$$

Выражение (I9) можно рассматривать как адиабатическое изменение термодинамического потенциала внутренней энергии или как изотермическое изменение термодинамического потенциала свободная энергия. Коэффициенты

$$C_{ijpq} = [ij, pq] - \varepsilon_0 \left\{ \sum_{n, \nu=1}^{N-1} R_{mn}^{\nu} A_{mn}^{\nu} R_{n\nu}^{\nu} + \right. \\ \left. + E_i E_j \delta_{pq} + E_p E_q \delta_{ij} - \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{pq} + \delta_{ip} \delta_{qj} + \delta_{jp} \delta_{qi}) E_n E_n \right\} \quad (20)$$

представляют собой упругие постоянные при фиксированной материальной индукции. Коэффициенты

$$h_{mij} = \sum_{n, \nu=1}^{N-1} q^{\nu+1} A_{mn}^{\nu} R_{n\nu}^{\nu} + E_i \delta_{jm} + E_j \delta_{im} - E_m \delta_{ij} \quad (21)$$

характеризуют пьезоэлектрические свойства диэлектрика, а коэффициенты

$$\eta_{nm} = \delta_{nm} - \sum_{n, \nu=1}^{N-1} q^{\nu+1} A_{nm}^{\nu} q^{\nu+1} \quad (22)$$

образуют тензор диэлектрической непроницаемости (обратный тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\chi}^{-1}$, $\chi_{ij} = (\eta^{-1})_{ij}$).

Рассчитав с помощью (I0), (II), (I7) приращения компонент тензора напряжений и напряженности макроскопического электрического поля, находим

$$E'_n - E_n = \varepsilon_0^{-1} \eta_{nm} \delta_m + (h_{npq} - E_p \delta_{qn}) e_{pq} - E_m \omega_{mn} + \dots, \quad (23)$$

$$\chi'_{ij} - \chi_{ij} = h_{mij} \delta_m + (C_{ijpq} - \chi_{ij} \delta_{pq} + \chi_{qi} \delta_{jp} + \chi_{qj} \delta_{ip}) e_{pq} + \chi_{in} \omega_{jn} + \chi_{in} \omega_{jn}, \quad (24)$$

откуда следует, что последние зависят от обеих частей тензора градиента дополнительной деформации

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \delta_{ij}. \quad (25)$$

Использование при записи соотношений (23), (24) коэффициенты

$$h^{np}_{mpq} = h_{mpq} - E_m \delta_{qn}, \quad (26)$$

$$C^{np}_{ijpq} = C_{ijpq} - \chi_{ij} \delta_{pq} + \chi_{qi} \delta_{jp} + \chi_{qj} \delta_{ip} \quad (27)$$

принято называть эффективными постоянными [5].

Вполне понятно, что соотношения (23), (24) нельзя рассматривать как термодинамические соотношения, так как тензор напряжений Коши χ_{ij} и напряженность макроскопического электрического поля E_n не являются характеристиками состояния среды. Согласно [7] напряженное состояние среды описывает тензор термодинамических напряжений

$$\tau_{ab} = \int \chi_{a,i} \chi_{b,j} \chi_{ij}.$$

Согласно формуле (14) величиной, сопряженной индукции $\mathcal{D}_A$, служит напряженность $\mathcal{E}_A$. Рассчитав с точностью до линейных членов параметры напряженного состояния среды t_{ij} , ϵ_n , для которых

$$\mathcal{E}'_{AB} - \mathcal{E}_{AB} = \int \chi_{A,i} \chi_{B,j} t_{ij}, \quad \mathcal{E}'_A - \mathcal{E}_A = x_{n,A} \epsilon_n, \quad (28)$$

находим

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \epsilon_0^{-1} \eta_{nm} \delta_m + h_{nij} \mathcal{E}_{ij}, \\ t_{ij} &= h_{mij} \delta_m + c_{ijpq} \mathcal{E}_{pq}. \end{aligned} \quad (29)$$

Соотношения (19), (29) позволяют рассматривать квадратичную форму

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} (c_{ijpq} \mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{pq} + 2 h_{nij} \delta_n \mathcal{E}_{ij} + \epsilon_0^{-1} \eta_{nm} \delta_n \delta_m) \quad (30)$$

как главную, не связанную с изменением энтропии "деформационную" часть термодинамического потенциала внутренняя энергия и по термодинамическим соотношениям

$$t_{ij} = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{E}_{ij}} \right)_{\delta_n} = \text{const}, \quad \epsilon_n = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \delta_n} \right)_{\mathcal{E}_{ij}} = \text{const} \quad (31)$$

рассчитывать термодинамические напряжения t_{ij} и напряженность ϵ_n .

Литература

1. Toupin R.A. The Elastic Dielectric. - J. Rational Mech. Anal., 1956, v.5, N6, p.849-915.
2. Toupin R.A. A Dynamical Theory of Elastic Dielectrics. - Int. J. Engng. Sci., 1963, v.1, N1, p.101-126.
3. Седов Л.И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. - ПММ, 1968, т.32, вып.5, с.771-785.
4. Lax M., Nelson D.F. Electrodynamics of Elastic pyroelectrics. - Phys. Rev. B, 1976, v.13, N4, p.1759-1796.
5. Стахин Н.А. К вопросу о расхождении статических и динамических значений упругих модулей пьезоэлектрика. - В кн.: Механика сплошной среды / Под ред. Т.М.Платовой. Томск: Изд-во ТГУ, 1983, с.143-149.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - 2-е изд., перераб., доп. М.: Наука, 1982. - 620 с.
7. Терстон Р. Распространение волн в жидкостях и твердых телах. - В кн.: Физическая акустика / Под ред. У.Мэзона. Пер. с англ. Т.1, ч.А. М.: Мир, 1966, с.13-139.

УЧЕТ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПОВОРОТОВ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ МЕТАЛЛОВ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

П. В. Макаров

Эксперименты последних лет убедительно показали, что непосредственно за фронтом ударной волны происходит значительное снижение напряжений сдвига. Однако это разупрочнение – кратковременное состояние материала. В волнах разгрузки или догрузки материал восстанавливает свои прочностные характеристики [1].

Объяснение уменьшения напряжений сдвига за счет локального разогрева плоскостей скольжения, а восстановления прочностных свойств их остыванием не является исчерпывающим, так как эти явления не объясняют характера волн разгрузки и догрузки. Так, для поддержания больших амплитуд упругих предвестников в волнах догрузки, зарегистрированных в ряде экспериментов, требуется, чтобы времена релаксации напряжений были приблизительно на порядок больше времен релаксации при первичном нагружении материала. С другой стороны, эти же эксперименты показали незначительное проявление скоростных эффектов [1].

В настоящей работе предлагается модель, позволяющая описать поведение упруговязкопластического материала при ударно-волновом нагружении, в том числе эффект потери и последующего восстановления сопротивления материала сдвигу за ударным фронтом.

По развитым в предлагаемой модели представлениям при ударно-волновом нагружении имеют место следующие механизмы, определяющие величину напряжений сдвига: локальный разогрев плоскостей скольжения и последующее их остывание; распределение подвижных дефектов по величине стартовых напряжений; наличие пластических поворотов.

Наличие пластических поворотов приводит к необходимости рассмотрения наряду с силовыми напряжениями также и моментных напряжений. В основу модели положены уравнения несимметричной упругости [2], которые обобщены на случай упругопластического деформирования. Модель сформулирована в дифференциальной форме, что является принципиальным моментом.

Распределение подвижных дефектов по величине стартовых напряжений может быть учтено введением в кинетику дефектов соответствующих функций распределения. В настоящей работе этот вопрос не рассматривается.

Система дифференциальных уравнений движения с учетом моментных напряжений имеет вид [2]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i = \rho \partial v_i / \partial t, & v_i = \dot{u}_i, \\ \epsilon_{ijk} \sigma_{ik} + \mu_{ji,j} = \rho J \ddot{\omega}_i = \rho J \partial w_i / \partial t, & w_i = \dot{\omega}_i. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь σ_{ij} - компоненты тензора силовых напряжений, причем, $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$;
 μ_{ij} - компоненты тензора моментных напряжений;
 J - момент инерции частиц среды;
 ϵ_{ijk} - тензор Леви-Чивиты.

В среде с поворотами тензор деформаций δ_{ik} несимметричен и выражается через симметричный тензор деформаций e_{ik} и повороты

$$\begin{cases} \delta_{ik} = e_{ik} - (\omega_e - \Omega_e) \epsilon_{ik}, & \delta_{ik} \neq \delta_{ki}, \\ \kappa_{ij} = \omega_{i,j}, \end{cases} \quad (2)$$

где κ_{ij} - компоненты тензора изгиба-кручения (кривизны);

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad \Omega_e = -\frac{1}{2} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^\beta} \epsilon_{\alpha\beta e};$$

ω_e - компоненты вектора поворота материальной частицы относительно окружающей среды.

Запишем определяющие уравнения несимметричной упругости [2]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = (\mu + \alpha) \delta_{ij} + (\mu - \alpha) \delta_{ji} + \lambda \delta_{kk} \delta_{ij}, \\ \mu_{ij} = (\gamma + \epsilon) \kappa_{ij} + (\gamma - \epsilon) \kappa_{ji} + \beta \kappa_{kk} \delta_{ij}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\lambda, \mu, \gamma, \epsilon, \beta, \alpha$ - упругие модули, причем λ и μ - коэффициенты Ляме в симметричной теории.

Для того чтобы описать процесс упругопластической деформации, определяющие уравнения необходимо представить в скоростях.

Будем предполагать, что полные тензоры скоростей деформаций и изгиба-кручения есть суммы тензоров упругой и пластической составляющих;

$$\dot{\delta}_{ij}^T = \dot{\delta}_{ij}^e + \dot{\delta}_{ij}^p, \quad \dot{\kappa}_{ij}^T = \dot{\kappa}_{ij}^e + \dot{\kappa}_{ij}^p. \quad (4)$$

Здесь индексы T, e, p означают: T - компоненты полного тензора; e, p - упругие и пластические составляющие полных тензоров.

Теперь можно записать

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{ij} = (\mu + \alpha)(\dot{\gamma}_{ij}^T - \dot{\gamma}_{ij}^P) + (\mu - \alpha)(\dot{\gamma}_{ji}^T - \dot{\gamma}_{ji}^P) + \lambda(\dot{\gamma}_{kk}^T - \dot{\gamma}_{kk}^P) \delta_{ij}, \\ \dot{\mu}_{ij} = (\gamma + \epsilon)(\dot{\alpha}_{ij}^T - \dot{\alpha}_{ij}^P) + (\gamma - \epsilon)(\dot{\alpha}_{ji}^T - \dot{\alpha}_{ji}^P) + \beta(\dot{\alpha}_{kk}^T - \dot{\alpha}_{kk}^P) \delta_{ij}. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, приращения силовых и моментных напряжений согласно уравнениям (5) пропорциональны приращениям полных тензоров деформаций и изгиба-кручения, а релаксируют в соответствии с развитием их пластических составляющих.

Для замыкания полной системы уравнений необходимо задать каким-либо образом скорости пластических сдвигов $\dot{\gamma}_{ij}^P$ и скорости пластических поворотов согласно уравнениям (2,4,5). Это можно сделать разными способами. Например, можно задать пластические составляющие скоростей деформаций и изгиба-кручения в соответствии с некоторой феноменологической теорией. Такой подход будет ниже обсужден для одного частного случая.

На микроскопическом уровне пластическую деформацию с поворотами необходимо рассматривать в рамках дислокационно-дисклинационных представлений [3,4].

В рассмотрение вводятся тензоры плотности дислокаций α_{ij} и дисклинаций θ_{ij} , которые должны удовлетворять определенным условиям совместности:

$$\begin{cases} \alpha_{ij} = \epsilon_{imn} \dot{\gamma}_{nj, m}^P + \delta_{ij} \dot{\alpha}_{mn}^P - \dot{\alpha}_{ji}^P, \\ \theta_{ij} = \epsilon_{imn} \dot{\alpha}_{nj, m}^P, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \theta_{ij, i} = 0, \\ \alpha_{ij, j} = -\epsilon_{jmn} \theta_{mn}. \end{cases} \quad (6a)$$

Последнее уравнение в (6a) означает наличие дисклинационных стоков (источников) дислокаций.

Так как модель сформулирована в приращениях, т.е. заданы скорости пластических поворотов и сдвигов, то от тензоров плотностей дислокаций и дисклинаций необходимо перейти к тензорам потоков дислокаций и дисклинаций.

Для частного случая непрерывно распределенных петель дефектов введем тензоры плотности петель дислокаций ξ_{ij} и дисклинаций ζ_{ij} и соответственно тензоры потока дислокаций S_{ke} и дисклинаций I_{ke} . Тогда согласно [3,4] можно записать

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_{ke}^P = -\frac{1}{2} \xi_{ke}, \\ \dot{\alpha}_{ke}^P = -\zeta_{ke} - \frac{1}{2} \epsilon_{pqe} \xi_{pq, k}. \end{cases} \quad (7)$$

Уравнения (7) необходимо продифференцировать по времени и перейти к потокам. Введем обозначение $\partial/\partial t \xi_{kl} = \dot{\xi}_{kl,0}$:

$$\dot{\gamma}_{kl}^p = -\frac{1}{2} \dot{\xi}_{kl,0}, \quad (8)$$

$$\dot{\dot{\gamma}}_{kl}^p = -\dot{\xi}_{kl,0} - \frac{1}{2} \epsilon_{pqe} \dot{\xi}_{pq,ko}.$$

Здесь $\dot{\xi}_{kl,0} = \epsilon_{krq} S_{qe,p}$; $\dot{\xi}_{kl,0} = \epsilon_{krq} I_{qe,p}$.

Таким образом, скорости тензоров пластического сдвига и изгиба-кручения выражены через потоки дислокаций и дисклинаций.

Строгое рассмотрение кинетики дислокационно-дисклинационного континуума в настоящее время не представляется возможным. Однако изложенный подход позволяет качественно объяснить известный факт значительного разупрочнения поликристаллических металлов за ударным фронтом [1].

Введем в модель два времени релаксации, связанных с трансляционным скольжением и с пластическими поворотами. Согласно уравнениям (2) полная скорость пластического сдвига $\dot{\gamma}^p$ равна

$$\dot{\gamma}^p = \dot{\gamma}_{пов}^p + \dot{\gamma}_{тр}^p, \quad (9)$$

где $\dot{\gamma}^p = \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_2^p)$, $\dot{\epsilon}_2^p = \dot{\epsilon}_3^p = 0$ (случай плоской одномерной симметрии); $\dot{\epsilon}_{2,3}^p = -\dot{\epsilon}_{2,3}^p$ (рассмотрение здесь ведется в главных осях, введены обозначения $\dot{\epsilon}_{ii} = \dot{\epsilon}_i$, по i нет суммы).

Определяющее уравнение для главного сдвига $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ примет вид

$$\dot{\tau} = \mu (\dot{\epsilon}_1^p - 2\dot{\gamma}^p). \quad (10)$$

Пусть скорость трансляционной составляющей пластического сдвига $\dot{\gamma}_{тр}^p$ пропорциональна напряжению сдвига τ , а скорость поворотной $\dot{\gamma}_{пов}^p$ составляющей - моментному напряжению M с некоторыми характерными временами релаксации t_1 и t_2 соответственно:

$$\dot{\gamma}_{тр}^p = \frac{\tau - \tau_0'}{2\mu t_1}, \quad \dot{\gamma}_{пов}^p = \frac{M - M_0'}{2\delta t_2}. \quad (11)$$

Подстановка (11) в (10) с учетом (9) дает

$$\dot{\tau} = \mu \left(\dot{\epsilon}_1^p - \frac{\tau - \tau_0'}{\mu t_1} - \frac{M - M_0'}{\delta t_2} \right) = \mu \left(\dot{\epsilon}_1^p - \frac{\tau - [\tau_0' - t_1/t_2 (M - M_0')]}{t_1} \right), \quad (12)$$

где τ'_0 и M'_0 - величины силовых и моментных напряжений деформированного металла, учитывающие упрочнение (разупрочнение). Силовые и моментные напряжения релаксируют до значений τ'_0 и M'_0 . В общем случае $t_1 = f_1(\tau, \varepsilon^p)$, а $t_2 = f_2(M, \alpha^p)$. Легко видеть из (12), что сдвиговое напряжение τ при учете пластических поворотов будет релаксировать за ударным фронтом до значений, определенных выражением в квадратных скобках в (12) $[\tau'_0 - t_1/t_2(M - M'_0)]$, меньших τ'_0 .

Этот дополнительный механизм позволяет объяснить значительное снижение напряжений сдвига за ударным фронтом при сравнительно невысоких ударных напряжениях в несколько десятков килобар, когда локальный разогрев плоскостей скольжения не приводит к разупрочнению материала, так как тепло в этом случае успевает отводиться от плоскостей скольжения. В этом случае временное разупрочнение материала обусловлено наличием пластических поворотов и более медленной релаксацией моментных напряжений. При достижении моментными напряжениями в процессе релаксации величины M'_0 (12) материал может проявлять упругую реакцию при последующем нагружении.

Литература

1. Asay J.R., Chavildas L.C. Determination of the shear strength of shock compressed 6061-T6 aluminium. - New York: Plenum publish. corpor., 1981, p. 417-428.
2. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. - 872 с.
3. Лихачев В.А., Хайров Р.Ю. Введение в теорию дисклиний. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. - 183 с.
4. Де Вит Р. Континуальная теория дисклиний. - М.: Мир, 1977. - 206 с.

ВЯЗКИЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛОВ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

В.П.Глазырин, Т.М.Платова

В настоящее время для описания ударно-волнового нагружения материала имеется несколько вариантов определяющих уравнений дислокационного типа [1,2], в основу которых положены представления о движении и размножении дислокаций в условиях квазистатического нагружения. Вопрос о реальном поведении дефектной структуры при ударном нагружении является довольно сложным и вряд ли будет решен в ближайшее время.

В данной работе предпринята попытка построения на основе анализа данных квазистатического нагружения и моделирования плоского ударно-волнового нагружения определяющего уравнения металлов, учитывающего вязкие, релаксационные свойства в широком диапазоне скорости деформации и для давления до 10 ГПа.

Моделирование плоского ударно-волнового нагружения проводится численным решением [3] с соответствующими начальными и граничными условиями основной системы уравнений в лагранжевых координатах, которая выводится из общих законов сохранения массы, импульса и энергии. Уравнение состояния применяется в форме Ми-Грюнайзена.

При построении определяющего уравнения рассматриваются области термической активации и вязкого торможения дислокаций, так как в других областях скорость пластической деформации $\dot{\epsilon}_p$ практически не влияет на сдвиговое напряжение τ . Далее области термической активации и вязкого торможения дислокаций будем называть соответственно область II и IV, как принято в литературе [4].

Известно, что в области II $\dot{\epsilon}_p$ определяется следующим образом:

$$\dot{\epsilon}_p = \nu \exp(-U_a / K T), \quad (1)$$

где U_a — энергия активации дислокаций; K — постоянная Больцмана; ν — частотный коэффициент.

В области IV τ еще более чувствительно к $\dot{\epsilon}_p$, которая здесь определяется линейным соотношением

$$\dot{\epsilon}_p = (\tau - \tau_0) / \eta_0, \quad (2)$$

где τ_* - напряжение, соответствующее нижней границе области IV; η_* - коэффициент вязкости.

Анализ данных квазистатических испытаний [4-6] показывает, что в области II при изменении температуры на десятки градусов $\dot{\epsilon}_*$ можно определить так:

$$\dot{\epsilon}_* = \dot{\epsilon}_{*0} \exp[\mathcal{L}_* (\tau - \tau_*)], \quad (3)$$

где τ_* - напряжение, соответствующее нижней границе области II (статический предел текучести). В (3) постоянная $\mathcal{L}_* = a/kT$, если $\mathcal{U}_* = f[a(\tau - \tau_*)]$, где a - структурная постоянная; $\dot{\epsilon}_{*0}$ соответствует нижней границе области II и может быть принята равной 10^{-2} - 10^{-1} с^{-1} или вычислена теоретически, так как фактически $\dot{\epsilon}_{*0} = \nu$.

Выражение (2) справедливо при $\dot{\epsilon}_* \geq 10^3 \text{ с}^{-1}$, однако в литературе имеются надежные данные, подтверждающие (2) лишь до $\dot{\epsilon}_* \approx 10^4 \text{ с}^{-1}$. При ударном нагружении материала $\dot{\epsilon}_*$ достигает гораздо больших величин. Получение больших скоростей деформаций, более 10^4 с^{-1} , возможно только при взрывном или ударном нагружении. Поэтому реальной основой построения определяющего уравнения для больших скоростей деформаций является моделирование ударно-волновых процессов.

Проведенные расчеты профиля плоской волны нагружения (ВН) в алюминии, армко-железе, бериллии и меди с учетом (2) и (3) не дали удовлетворительного результата при сравнении с экспериментально записанными профилями ВН. Константы η_* и $\mathcal{L}_*$ взяты из различных экспериментальных работ. Рассчитанные профили ВН получились сильно "размазанными" по сравнению с экспериментальными, что говорит о наличии неоправданно больших сил вязкости.

Анализируя данные расчеты, можно сделать вывод, что при $\dot{\epsilon}_* \approx 10^4 \text{ с}^{-1}$ кривая $\eta(\dot{\epsilon}_*)$ является нелинейной, а производная $\partial \eta / \partial \dot{\epsilon}_*$ уменьшается. Этот вывод находится в согласии с экспериментальной работой [7]. Таким образом, в зоне вязкого торможения дислокаций можно выделить подобласти линейной и нелинейной вязкости. Величины, относящиеся к границе этих подобластей, будем обозначать индексом "2".

В общем случае зависимость $\eta(\dot{\epsilon}_*)$ при больших $\dot{\epsilon}_*$ представим в виде экспоненты от полинома, т.е.

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_{p_2} \exp \left[\sum_{n=1}^N K_n (\tau - \tau_2)^n \right], \quad (4)$$

где K_n - коэффициенты полинома.

Потребуем непрерывности первой производной от $\dot{\epsilon}_p$ по τ .

Отсюда получим соответственно в точках 1 и 2 следующую связь параметров:

$$\eta_0 = (\alpha_0 \dot{\epsilon}_{p1})^{-1}, \quad K_1 = (\eta_0 \dot{\epsilon}_{p2})^{-1} \quad (5)$$

Таким образом, определяющее уравнение можно записать в таком виде:

$$\dot{\epsilon}_p = \left[\mathcal{F}_0(\Delta\tau_0) + \mathcal{F}_1(\Delta\tau_1) \right] \mathcal{F}_2(\Delta\tau_2) \quad (6)$$

Здесь введено обозначение $\Delta\tau_i = \tau - \tau_i$.

В соответствии с вышеизложенным функции $\mathcal{F}_i$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(\Delta\tau_0) &= \dot{\epsilon}_{p0} \exp \left[\alpha_0 \Delta\tau_0 H(\Delta\tau_0) \right], \\ \mathcal{F}_1(\Delta\tau_1) &= \Delta\tau_1 H(\Delta\tau_1) / \eta_0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathcal{F}_2(\Delta\tau_2) = \exp \sum_{n=1}^N K_n \Delta\tau_2^n H(\Delta\tau_2),$$

где H - единичная функция Хевисайда. Принято, что функции $\mathcal{F}_i$ обладают таким свойством: $\mathcal{F}_i(\tau - \tau_i) = \mathcal{F}_i(\tau_{i+1} - \tau_i)$, если $\tau > \tau_{i+1}$. Вообще говоря, для ударно-нагруженного материала τ_0 зависит от ϵ_p , давления, температуры. Разделить влияние данных факторов далеко не просто, поэтому в целях упрощения формально считаем, что $\tau_0 = \tau_0(\epsilon_p)$. Численный эксперимент показал, что это будет функция вида

$$\tau_0(\epsilon_p) = \tau_0(0) \exp(-\beta \epsilon_p), \quad (8)$$

где β - константа.

Принято, что τ_1 и τ_2 изменяются на такую же величину, как и τ_0 с ростом ϵ_p .

Построенное определяющее уравнение относится к одномерным

моделям. При его построении использована элементарная функция - экспонента, вычисление которой на ЭВМ не требует больших затрат машинного времени.

Константы τ_0 , α , $\dot{\epsilon}_p$ определены по известным данным статических и квазистатических испытаний. Например, для алюминиевого сплава 6061-T6 $\tau_0 = 0,12$ ГПа, $\alpha = 10^3 \text{ ГПа}^{-1}$, $\dot{\epsilon}_p = 10^{-8} \text{ мкс}^{-1}$.

Константы τ_1 , τ_2 , K_n и β определяются из условия совпадения расчетных и экспериментальных ВН по способу, предложенному в работе [8]. Для всех рассматриваемых материалов было достаточно в (7) ограничиться $N = 2$. Так, для алюминиевого сплава 6061-T6 получено, что $\tau_1 = 0,13035$ ГПа, $\tau_2 = 0,161$ ГПа, $K_n = 10^3 \text{ ГПа}^{-2}$ и $\beta = 28$.

Одним из основных носителей пластической деформации в металлах являются дислокации, поэтому будет целесообразно рассмотреть построенное определяющее уравнение с точки зрения дислокационной теории. Путем сопоставления соотношения (6) с соотношением Орована при условии, что скорость дислокаций $v(\tau) \ll C_t$, можно определить зависимости $v(\tau)$, $N_m(\tau, \epsilon_p)$ - плотность подвижных дислокаций, $B(v)$ - коэффициент динамического торможения дислокаций. На рис. 1 приведены рассчитанные кривые $N_m(\tau, \epsilon_p)$.

На рис. 2 приведены кривые $\tau(\dot{\epsilon}_p)$ для алюминиевого сплава 6061-T6 (кривая а) и бериллия $S-200$ (кривая б). Видно, что характерным для них является линейный участок, а при больших $\dot{\epsilon}_p$ имеет место перегиб в сторону уменьшения производной $\partial \tau / \partial \dot{\epsilon}_p$. При $\dot{\epsilon}_p \propto 10^7 - 10^8 \text{ с}^{-1}$, которая наблюдается в ударных волнах средней интенсивности, напряжение сдвига приблизительно на порядок меньше теоретической прочности.

Расчет профилей массовой скорости ВН в бериллии для различных толщин преград представлен на рис. 3. Скорость соударения в этом случае $U_c = 164$ м/с. Расчет профилей продольного и сдвигового напряжения в ВН в бериллии приведен на рис. 4 в моменты времени t_i . Скорость соударения 310 м/с.

Проведенные расчеты показали, что массовая скорость достигает $U_c/2$ не сразу за фронтом волны, а спустя несколько десятых долей микросекунды. Это явление вызвано релаксацией τ благодаря специфическому поведению кривой релаксации. С точки зрения физики процесса, в этом случае терется динамический характер преодоления дислокациями препятствий вследствие уменьшения

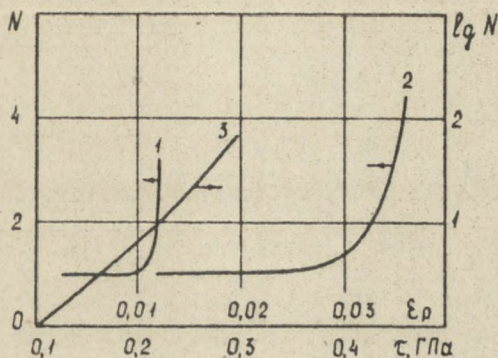


Рис. 1. $N_m(\tau, \epsilon_p)$, $N = N_m / N_{m0}$:
1 - $N_m(\tau, 0)$ для Al; 2 - $N_m(\tau, 0)$ для Be;
3 - $N_m(0, 16 \text{ ГПа}; \epsilon_p)$ для Al

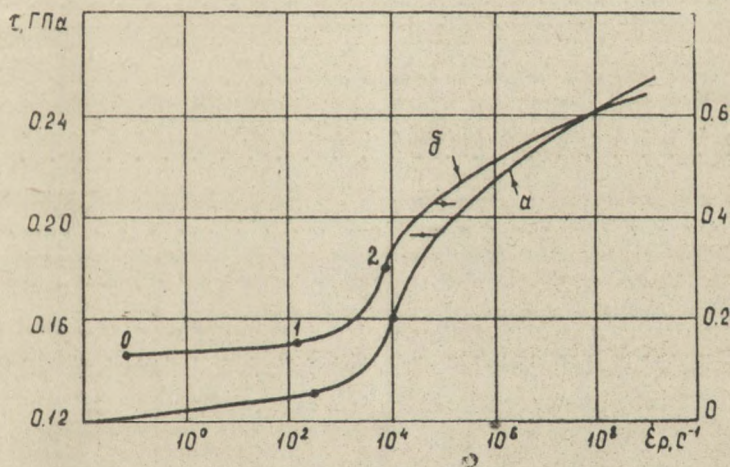


Рис. 2. Зависимость $\tau(\epsilon_p)$: а - для алюминия,
б - для бериллия

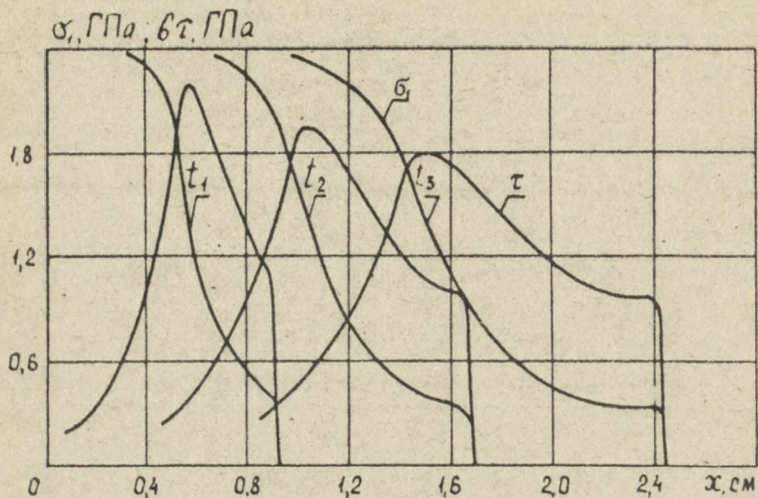


Рис. 3. Рассчитанные профили σ и τ для бериллия:
 $t_1 = 0,714$ мкс; $t_2 = 1,307$ мкс; $t_3 = 1,899$ мкс

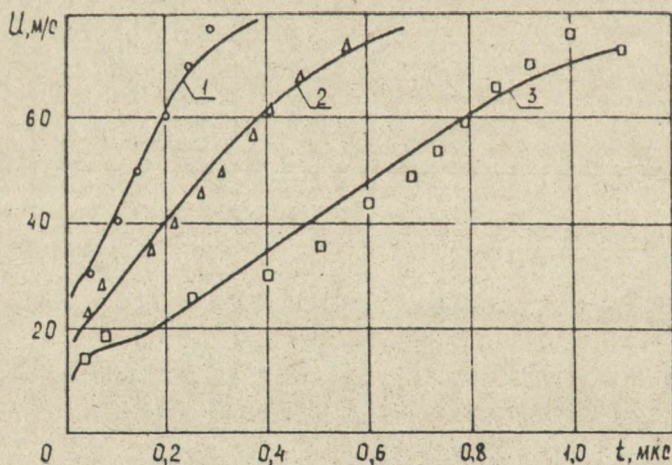


Рис. 4. Волновые профили в бериллии $S-200$ соответственно для толщин: 1 - 0,323 см; 2 - 0,617 см; 3 - 1,228 см;
— расчет; $\circ$, Δ , $\square$ - данные [5]

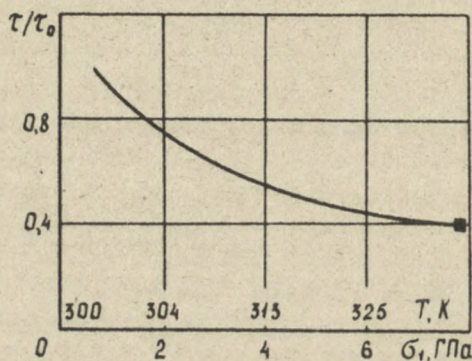
скорости нагружения материала и увеличения плотности дефектов. Рассчитанные кривые затухания амплитуды упругого предвестника хорошо согласуются с экспериментальными данными. В расчетах установлено, что волны вторичного и последующих нагружений имеют упругий предвестник, т.е. за фронтом ударной волны наблюдается квазиупругое поведение материала.

Величина сдвигового напряжения или напряжения течения в ВН (рис.4) определяется общим уровнем деформаций, а также скоростью нагружения материала и скоростью релаксации напряжений. В упругой волне τ быстро возрастает, $\dot{\epsilon}_p$ отсутствует. За фронтом упругой волны вследствие возрастания скорости нагружения происходит увеличение τ до значения, соответствующего максимуму в объемной ВН, после чего наблюдается спад напряжений. Причем напряжение течения за фронтом ВН получается меньше статического предела. По мере распространения импульса максимальные значения τ в упругой и объемной ВН уменьшаются с разной скоростью, так как механизмы деформации в том и другом случае неодинаковы.

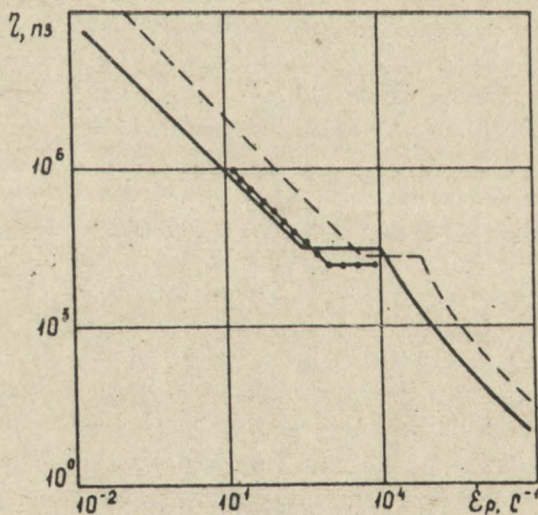
На рис.5 представлена кривая зависимости τ от продольного напряжения σ , для алюминиевого сплава 6061-T6 за фронтом ВН. Здесь же указана температура, соответствующая данному состоянию, а также приведена экспериментальная оценка из работы [9]. Видно, что при увеличении амплитуды ударной волны τ за её фронтом уменьшается. Так, например, состояние, при котором напряжение течения уменьшается в два раза, соответствует давлению 3,5 ГПа и изменению температуры на 11 градусов. Объяснить этот факт только возрастанием температуры нельзя, так как повышение её на 11 градусов не может снизить в два раза напряжение течения. По всей видимости объяснение данного явления следует искать в специфике механизмов ударного деформирования металлов.

Предложенное определяющее уравнение (6) позволяет легко получить зависимость коэффициента вязкости η от $\dot{\epsilon}_p$ и определить его в любой точке ВН. Коэффициент вязкости определяется как $\partial\tau / \partial\dot{\epsilon}_p$. Расчет зависимости $\eta(\dot{\epsilon}_p)$ представлен на рис.6 для алюминия и железа армо. В области линейной вязкости $\eta = const$. При больших $\dot{\epsilon}_p$ коэффициент вязкости уменьшается.

Приведенные результаты показывают, что предложенное определяющее уравнение достаточно хорошо описывает эффекты ударно-волнового нагружения металлов, связанные с релаксационными свойствами.



Фиг. 5. Рассчитанная зависимость $\tau(\sigma_1)$ за фронтом ударной волны для алюминия; $T(0)=300\text{К}$, ■ - данные [9]



Фиг. 6. Зависимость $\eta(\dot{\epsilon}_p)$: --- для армко-железа; — для алюминия; •— данные [10]

Л и т е р а т у р а

1. Гилман Дж. Дж. Динамика дислокаций и поведение материалов при ударном воздействии.- Механика, 1970, №2, с.96-124.
2. Нигматулин Ф.И., Холин Н.Н. К модели упругопластической среды с дислокационной кинетикой пластического деформирования.- МТТ, 1974, №4, с.131-145.
3. Платова Т.М., Глазырин В.П., Макаров П.В. Структура ударных волн первичного и вторичного сжатия.- В кн.: Детонация. Критические явления. Физ.хим. превращ. в ударных волнах. Черноголовка: Изд-во ОИХФ АН СССР, 1978, с.84-87.
4. Пэжина П. Физическая теория вязкопластичности.- В кн.: Проблемы теории пластичности. М.: Мир, 1976, с.91-III.
5. Read H.E. A microdynamical approach to constitutive modeling of shock induced deformation - In: Metallurgical Effects at high strain rates New York - London, 1973, p 335-348.
6. Степанов Г.В. Упруго-пластическое деформирование материалов под действием импульсных нагрузок.- Киев: Наук. думка, 1979.- 268с.
7. Dhawan C.K.H., Hauser F.E. High-velocity dislocation damping in aluminum - J Appl Phys. 1943, 14, V.1, p 1468-1474.
8. Глазырин В.П., Саженов А.П. Об одном способе определения параметров дислокационной модели.- В кн.: Механика сплошных сред. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982, с.136-142.
9. Asay J.R., Chabildas L.C. Determination of the shear strength of shock compressed 6061-T6 aluminum New York: Plenum publish corpor 1981, p 417-428.
10. Kumar A., Kumble R.C., Dorn J.E. Viscous drag on dislocations in aluminum at high strain rates.- Acta met., 1968, 16, p 1189-1191.

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН НАГРУЖЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИИ

Т.В. Жукова, П.В. Макаров, В.А. Скрипняк,
Е.Г. Скороспелова, Г.Н. Фондеркина

Эксперименты по плоскому соударению пластин несут ценную информацию о реакции материалов при высокоскоростном деформировании. Схема экспериментов удобна для численного моделирования, поскольку не возникает необходимости расчёта сложного взаимодействия волн нагружения с волнами разгрузки. Расчёты распространения и эволюции фронтов плоских волн широко используются как для определения деформационных и прочностных характеристик материалов в ударных волнах, так и для оценки адекватности моделей сред, предлагаемых для описания высокоскоростного деформирования.

Применение релаксационных моделей для описания пластического течения в волнах напряжения сопряжено с решением ряда проблем вычислительного характера, связанных с необходимостью исключения из расчётной схемы искусственной вязкости. В настоящей работе предлагается вариант модифицированной разностной схемы второго порядка точности без искусственной вязкости и обсуждаются некоторые особенности её применения для расчётов распространения нестационарных плоских волн напряжения.

Расчёты пластического течения в релаксирующей среде в двумерной постановке значительно ограничены возможностями современных вычислительных машин. В работе обсуждается такая задача для осесимметричного случая. Определяющее уравнение релаксационного типа имеет более простой вид, чем в одномерном случае, причём предполагается, что компоненты девиатора напряжений релаксируют про-

порционально интенсивности сдвиговых напряжений. Численно задача решена методом конечных элементов; в расчётную схему включён итерационный процесс для решения определяющего уравнения.

Система уравнений, описывающих распространение плоской волны напряжения в переменных Лагранжа, включает уравнения сохранения (1) и определяющее уравнение релаксационного типа (2):

$$\frac{\rho_0}{V_1} \frac{\partial U_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{V_1} \frac{\partial V_1}{\partial t}, \quad (1)$$

где X - пространственная координата в направлении распространения волны; U_1 - массовая скорость; ρ - плотность; $V_1 = \rho_0/\rho$; σ_1 - напряжение;

$$\dot{\epsilon} = \mu (\dot{\epsilon}_1 - 2\dot{\gamma}^p), \quad \epsilon_1 = \ln V_1, \quad \theta_1 = \frac{V_1}{V_0} - 1,$$

$$\sigma_1 = -\rho + \frac{4}{3}\tau, \quad \tau = A_1\theta_1 + A_2\theta_1^2 + A_3\theta_1^3, \quad (2)$$

где μ - модуль сдвига; $\dot{\gamma}^p$ - скорость сдвиговой пластической деформации. В данной работе использовалась релаксационная модель с дислокационной кинетикой пластического сдвига [1]:

$$\dot{\gamma}^p = g b N v,$$

$$N = N^* + (N_0 - N^*) \exp\left(-\frac{A}{g b} \gamma^p\right), \quad \gamma^p = \int_0^t |\dot{\gamma}^p| dt,$$

$$N' = 0 \text{ при } |\tau| \leq \tau^*, \quad N' = (|\tau| - \tau^*)/\beta_1 \text{ при } |\tau| > \tau^*,$$

$$v = v^* ST^2 / (1 + ST^2), \quad ST = 0 \text{ при } |\tau| < \tau_0', \quad \tau_0' = \tau_0 + \Delta \mu b N^{1/2},$$

$$ST = (|\tau| - \tau_0')/\beta_2 \text{ при } |\tau| \geq \tau_0', \quad (3)$$

где $g = 0,5$ - ориентационный коэффициент; b - модуль вектора Бюргерса; N - плотность дислокаций; v - средняя скорость перемещения дислокаций; $N_0, N^*, A, \tau^*, \beta_1, \tau_0, \Delta, \beta_2, v^*$ - параметры кинетических соотношений, конкретизирующие материал. Общий вид кинетического уравнения $\dot{\gamma}^p = \dot{\gamma}^p(\tau, \gamma^p)$ такой же, как и в ряде других микродинамических моделей.

Система уравнений (1)-(3) относится к системам гиперболического типа и решается численно [2,3]. Для её решения была выбрана разностная схема сквозного счёта второго порядка точности типа крест [2]. Привлекательность выбранной схемы заключается в том, что она позволяет рассчитывать нестационарные течения в сжимаемой среде, не требует специального алгоритма для выделения скачка и

обладает той (третьего порядка) аппроксимационной вязкостью [3].

Система уравнений (1)-(2) в разностном аналоге имеет вид

$$\begin{aligned} U_j^{n+1/2} &= U_j^{n-1/2} + \Delta t^n (\sigma_{j+1/2}^n - \sigma_{j-1/2}^n) / \varphi_j^n, \\ \varphi_j^n &= \frac{1}{2} \left[\rho_{j+1/2}^0 \left(\frac{x_{j+1}^n - x_j^n}{V_{j+1/2}^n} \right) + \rho_{j-1/2}^0 \left(\frac{x_j^n - x_{j-1}^n}{V_{j-1/2}^n} \right) \right]; \\ V_{j+1/2}^{n+1} &= V_{j+1/2}^n + \Delta t^{n+1/2} (U_{j+1}^{n+1/2} - U_{j-1}^{n+1/2}) / (x_{j+1}^0 - x_j^0); \\ x_j^{n+1} &= x_j^n + U_j^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}; \quad x_j^{n+1/2} = \frac{1}{2} (x_j^{n+1} + x_j^n); \quad \theta_{j+1/2}^n = V_{j+1/2}^n - 1, \\ \sigma_{j+1/2}^n &= -\rho_{j+1/2}^n + \frac{4}{3} \tau_{j+1/2}^n; \quad \rho_{j+1/2}^n = A_1 \theta_{j+1/2}^n + A_2 [\theta_{j+1/2}^n]^2 + A_3 [\theta_{j+1/2}^n]^3, \\ \tau_{j+1/2}^{n+1} &= \tau_{j+1/2}^n + \mu (\dot{\epsilon}_{j+1/2}^{n+1/2} - 2 \dot{\gamma}_{j+1/2}^{n+1/2}) \Delta t^{n+1/2}, \\ \dot{\epsilon}_{j+1/2}^{n+1/2} &= (U_{j+1}^{n+1/2} - U_j^{n+1/2}) / (x_{j+1}^{n+1/2} - x_j^{n+1/2}), \\ \dot{\gamma}_{j+1/2}^{n+1/2} &= \dot{\gamma}^P(\tau_{j+1/2}^{n+1/2}, \gamma_{j+1/2}^{n+1/2}). \end{aligned}$$

Поскольку значения $\tau_{j+1/2}^{n+1/2}$ и $\dot{\gamma}_{j+1/2}^{n+1/2}$ неизвестны, $\dot{\gamma}_{j+1/2}^{P, n+1/2}$ не может быть вычислена. Предлагается определить $\tau_{j+1/2}^{n+1/2}$ и $\dot{\gamma}_{j+1/2}^{P, n+1/2}$ в ходе совместного решения кинетического (3) и релаксационного определяющего уравнения (2) методом простых итераций. Вариант итеративного процесса, обладающий высокой скоростью сходимости, приведён ниже:

$$\begin{aligned} [\tau_{j+1/2}^{n+1}]^M &= \tau_{j+1/2}^n + \mu \Delta t^{n+1/2} (\dot{\epsilon}_{j+1/2}^{n+1/2} - 2 [\dot{\gamma}_{j+1/2}^{P, n+1/2}]^{n-1}), \\ [\tau_{j+1/2}^{n+1/2}]^M &= \frac{1}{2} ([\tau_{j+1/2}^{n+1}]^M + \tau_{j+1/2}^n); \quad [\dot{\gamma}_{j+1/2}^{P, n+1}]^M = \dot{\gamma}^P([\tau_{j+1/2}^{n+1/2}]^M, [\gamma_{j+1/2}^{P, n+1/2}]^{M-1}), \\ [\gamma_{j+1/2}^{P, n+1}]^M &= \gamma_{j+1/2}^n + [\dot{\gamma}_{j+1/2}^{P, n+1/2}]^M \Delta t^n; \quad [\gamma_{j+1/2}^{P, n+1/2}]^M = \frac{1}{2} (\gamma_{j+1/2}^n + [\gamma_{j+1/2}^{P, n+1}]^M); \\ [\dot{\gamma}_{j+1/2}^{P, n+1/2}]^M &= \dot{\gamma}^P([\tau_{j+1/2}^{n+1/2}]^M, [\gamma_{j+1/2}^{P, n+1/2}]^M), \end{aligned}$$

где M - номер итерации. В качестве первого приближения выбираются значения параметров на предыдущем временном слое.

Условие сходимости предлагаемого итерационного процесса имеет вид [4]:

$$\left| \mu \Delta t^{n+1/2} \cdot 2 \frac{\partial \delta}{\partial t} \right| < 1. \quad (4)$$

Из (4) следует, что скорость сходимости будет зависеть от вида функций, входящих в (3), и численных значений параметров модели. Исследование сходимости итерационного процесса при использовании кинетического уравнения (3) показало, что приближение итераций к решению не является монотонным. Поэтому для выхода из итерационного процесса можно использовать критерий $([\tau_{j+1/2}^{n+1}]^{n+1} - [\tau_{j+1/2}^{n+1}]^n) / [\tau_{j+1/2}^{n+1}]^n < \delta$. В этом случае решение будет находиться в интервале δ около $[\tau_{j+1/2}^{n+1}]^n$.

Наибольшее количество итераций, как следует из практики расчётов, требуется во фронте пластической волны. В приведённом на рис. I расчёте для достижения $\delta = 0,005$ на участке фронта волны АВ в момент времени $t = 0,1$ мкс требовалось 15-20 итераций. Расчёт проведён со следующими значениями характеристик материала и расчётной сетки: $\rho_0 = 2,7$ г/см³; $\mu = 0,27$ Мбар; $A_1 = 0,765$ Мбар; $A_2 = 1,659$ Мбар; $A_3 = 0,428$ Мбар; $\ell = 2,86 \cdot 10^{-6}$ см; $N^* = 10^{11}$ см⁻²; $N_0 = 10^6$ см⁻²; $A/|q| \ell = 0,02$; $\tau^* = 0,00101$ Мбар; $\beta_1 = 0,1 \cdot 10^{11}$ Мбар/см⁻²; $\tau_0 = 0,001$ Мбар; $\beta_2 = 0,002$ Мбар; $v^* = 0,315$ см/мкс; $\chi = 0,05$; $X_{j-1}^0 - X_j^0 = 0,002$ см; $\Delta t^n = 0,002$ мкс; $\Delta t^{n+1/2} = 0,0002$ мкс; $K = 1/4$.

На участках ВС и АД профиля, соответствующего $t = 0,1$, на рис. I для сходимости было достаточно 2-4 итераций. Таким образом, простого пересчёта для определения $\tau_{j+1/2}^{n+1}$ и $\chi_{j+1/2}^{n+1/2}$ во фронте пластической волны недостаточно.

При расчёте нестационарных волновых фронтов по мере увеличения ширины ударного перехода наблюдается снижение наибольшего числа итераций. Так, для момента времени $t = 0,9$ мкс в том же расчёте (см. рис. I) и того же $\delta = 0,005$ число итераций на участке фронта АВ не превышало 5-7, а на участках АД и ВС - 1-3.

Применение определяющего уравнения релаксационного типа позволяет использовать разностную схему без введения искусственной вязкости. При этом возможность сквозного счета обеспечивается формированием высокоградиентного перехода в области фронта ударной волны за счёт физической вязкости.

Исключение из расчётной схемы искусственной вязкости накладывает ряд требований на выбор временного и пространственного шага расчёта. Так как ширина ударного перехода формируется за счёт механизмов физической вязкости, величина расчётного временного ша-

га должна быть выбрана меньше характерного времени реального процесса. Практика расчётов показывает, что результат практически не будет зависеть от параметров расчётной сетки, если фронт пластической волны сжатия (участок АВ на рис. I) составляет не менее 10-15 расчётных интервалов. Поскольку с увеличением интенсивности волны ширина ударного перехода уменьшается, в расчётах следует использовать более мелкий шаг.

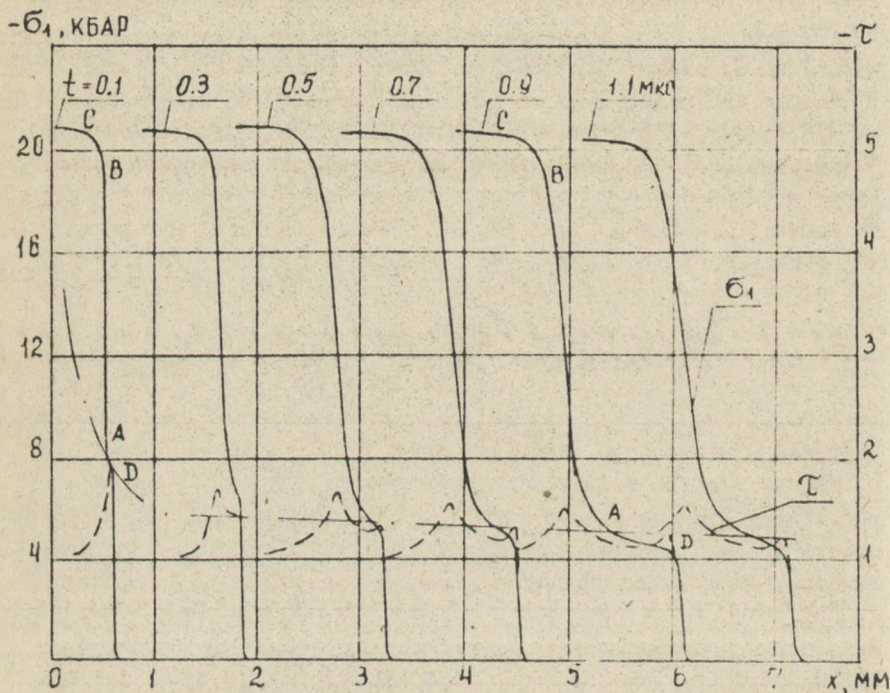


Рис. I. Расчёт распространения волны в алюминии $Al-6061-T6$ при соударении пластин со скоростью 270 м/с

Величина шага пространственной сетки в расчёте выбирается с учётом условия устойчивости Куранта $x_{j+1}^0 - x_j^0 \leq D \cdot \Delta t / K$. Здесь D - скорость распространения волны; K - число Куранта ($K < 1$). При расчёте распространения волн напряжения с двухволновой структурой фронта за D следует принимать скорость упругого предвестника.

При использовании схемы без искусственной вязкости возникает сложность проведения начальных этапов расчёта, на которых происходит распад разрыва, возникшего в момент удара. Высокие градиенты

массовой скорости $\Delta U / \Delta X$ приводят не только к увеличению числа итераций, но и к возникновению за фронтом волны осцилляций большой амплитуды. Механизма искусственной вязкости, который обычно гасит осцилляции, в предлагаемой схеме нет. Сглаживание осцилляций недопустимо, так как в процессе пересчёта искажается скорость распространения волны и форма самого фронта [3]. Для уменьшения амплитуды осцилляций могут быть рекомендованы следующие приёмы, влияние которых на результат расчёта ощущается практически только на его первых этапах.

1. Задание начальных условий соударения в виде $U_j^0 = V_0, j < L$, $U_j^0 = V_0/2, j = L$; $U_j^0 = 0, j > L$; L - узел, соответствующий контактной поверхности боёк-преграда; V_0 - скорость удара. Такое задание начальных условий в 2 раза уменьшает начальный градиент массовой скорости.

2. При интенсивности удара более 100 кбар на первых шагах возможно введение в схему искусственной вязкости, которая затем отключается. Отключение осуществляется, когда фронт волны переместится на 4-5 счётных интервалов.

При численном решении осесимметричных задач скорость пластического сдвига $\dot{\gamma}^p$ в определяющем уравнении (2) полагалась равной

$$\dot{\gamma}^p = \tau / 2 \eta(\tau). \quad (5)$$

Зависимость $\eta(\tau)$ для ряда материалов была получена путём численного моделирования эволюции плоских волновых фронтов.

С целью обобщения модели на двумерный случай вводятся в рассмотрение эквивалентное сдвиговое напряжение и эквивалентная скорость деформации: $\tau_s = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\mathcal{J}_2}$, $\dot{\epsilon}_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\mathcal{D}_2}$, где $\mathcal{J}_2 = S_{ij} S_{ij}$ - второй инвариант тензора напряжений; $\mathcal{D}_2 = e_{ij} e_{ij}$ - второй инвариант тензора напряжений, деформаций. Они отличаются от традиционно используемых в теории пластичности интенсивности напряжений $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathcal{J}_2}$ и интенсивности скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mathcal{D}_2}$ только числовыми коэффициентами, которые выбираются с тем расчётом, чтобы в случае одноосного деформированного состояния τ_s совпадало с максимальным сдвиговым напряжением τ , а $\dot{\epsilon}_s$ - со скоростью деформации $\dot{\epsilon}_i$ в осевом направлении.

Постулируется, что при любом способе нагружения справедливо соотношение $\dot{\tau}_s = \mu(\dot{\epsilon}_s - \tau / 2 \eta(\tau_s))$, которое в случае одноосевого деформации сводится к уравнению (2) с $\dot{\gamma}^p$, заданной согласно (5).

В расчётной схеме модель реализуется следующим образом. Для момента времени t^{n+1} вычисляются S_{ij}^{n+1} по закону Гука, затем рассчитываются $\tau_{ij}^{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{S_{ij}^{n+1} S_{ij}^{n+1}}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^{n+1} \dot{\epsilon}_{ij}^{n+1}}$. Если $\tau_{ij}^{n+1} > \tau_0$, то начинает работать итерационный процесс, аналогичный приведённому выше, с помощью которого определяется величина $\tau^{n+1} = \tau_0 + \mu (\dot{\epsilon}_0^{n+1/2} - \tau^{n+1/2} / \eta (\tau^{n+1/2}))$, играющая роль мгновенного значения предела текучести, после чего компоненты девиатора напряжений корректируются: $S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^{n+1} \cdot \tau^{n+1} / \tau_0$.

По описанной методике была решена задача о соударении диска с жёсткой преградой. Расчёты проводились для АС-6061-T6 с коэффициентом вязкости $\eta(\tau) = 0,1 \exp(5,2 - 2050 \cdot 2 \tau) + 0,005$.

Параметры расчётной сетки выбирались таким образом, чтобы при числе Куранта $K=1/4$ допустимый шаг по времени оказывался по крайней мере в 5-6 раз меньше минимального времени релаксации, определяемого по формуле $t_{релак} = \eta_{мин} / \mu$.

Описанный подход даёт возможность решать прикладные двумерные задачи с характерными временами релаксации порядка 10^{-2} мкс, при этом расчёт до времён порядка 1 мкс с сеткой 50×100 требует 7-8 часов машинного времени на ЭВМ ЕС-1045.

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами расчётов для одномерных задач в области плоской волны нагружения.

Решение задачи о распространении волн напряжения без введения в расчётную схему искусственной вязкости позволяет численно исследовать формирование и эволюцию волновых фронтов.

Литература

1. Макаров П.В., Платова Т.М., Скрипняк В.А. О пластическом деформировании и микроструктурных превращениях металлов в ударных волнах. - ФГВ, 1983, №5, с.123-126.
2. Уилкинс М.Ш. Расчёт упруго-пластических течений. - В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. - М.: Мир, 1967, с.212-263.
3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. - М.: Мир, 1980. - 616 с.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. - 512 с.

ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ АВТОСКРЕПЛЕННОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Г.А.Аржанников

Одним из приемов упрочнения толстостенных цилиндров является метод автоскрепления (автофреттирования). Если цилиндр, у внутренней поверхности которого возникли пластические деформации, разгрузить, то вследствие остаточных деформаций его стенка будет находиться в напряженном состоянии. Такой цилиндр называется автоскрепленным.

В настоящее время имеет практическое значение расчет напряженного состояния автоскрепления и оценка прочности цилиндра при импульсном нагружении.

Постановка задачи. В момент времени $t = 0$ на внутреннюю поверхность цилиндра, у которого длина намного больше внешнего диаметра, действует осесимметрично импульс давления $P(t)$.

Обозначим внутренний и внешний радиусы цилиндра через α и β , а напряжения, возникающие на площадках элементарного кристаллического шестигранника в направлении осей цилиндрической системы координат, через σ_r , σ_θ , σ_z . По условиям задачи эти напряжения являются главными.

Поставленная задача решается разностным методом Уилкинса [1] в рамках идеальной упругопластической модели среды при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i = \dot{S}_i = \dot{\varepsilon}_i = 0, \quad i = r, \theta, z; \quad P = E = U = 0, \quad \rho = \rho_0, \\ P = P(t) \text{ при } R = \alpha, \quad P = 0 \text{ при } R = \beta, \quad \text{где} \end{aligned}$$

$\dot{S}_i$ – главные компоненты девиатора напряжений; $\dot{\varepsilon}_i$ – скорости деформаций; P – гидростатическое давление, E – внутренняя энергия на единицу начального объема; U – массовая скорость в направлении радиуса; ρ_0 – начальная плотность.

В общем случае цилиндр может состоять из нескольких слоев различного материала.

Расчет автоскрепления цилиндров. Расчет напряженного состояния автоскрепления проведем для цилиндра с радиусами $a = 4$ см, $b = 11$ см, материал которого имеет предел текучести $\sigma_T = 1,04$ ГПа, предел прочности $\sigma_B = 1,18$ ГПа.

Рассмотрим динамику упругопластического деформирования цилиндра и установление остаточного напряженного состояния автоскрепления при действии импульсов давления, в которых время нарастания и спада одинаковое. Будем считать, что допустимое предельное давление в импульсе достигнуто, если несущая способность цилиндра исчерпана, т.е. весь материал цилиндра находится в пластическом состоянии, а растягивающее напряжение превышает предел прочности.

На рис. I в различные моменты времени (t , мкс) приведена динамика волн напряжений σ_r и σ_θ при действии импульса $p_{1,0}^{qb}(t)$ с максимальным давлением $p_m = 1,0$ ГПа, время нарастания максимального давления $t_m = 0,6$ мс. Временные обозначения в нижней полуплоскости относятся к σ_θ , в верхней к σ_r .

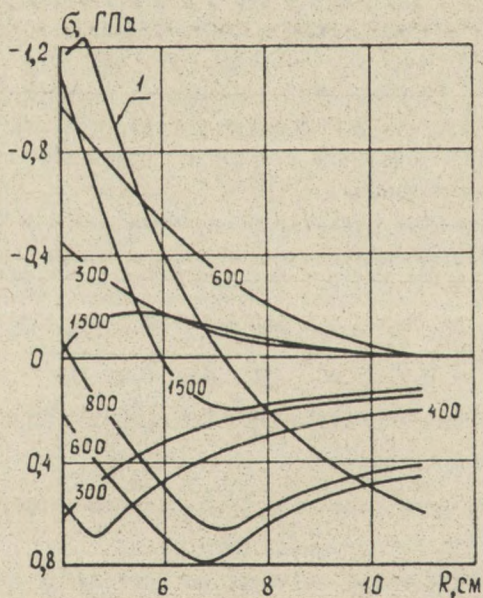


Рис. I. Расчет остаточного окружного напряжения при автоскреплении

Из рис.1 видно, что максимальное давление в импульсе не является предельным, так как растягивающие напряжения не достигают σ_8 , а максимальный радиус пластической деформации $R_* = 7,4$ см. Судя по величине радиуса пластической деформации в цилиндре произошел динамический автофретаж (автоскрепление) средней степени ($t = 1500$ мкс).

При расчете напряженного состояния динамического автоскрепления в цилиндре возникают незатухающие периодические упругие колебания (рис.2, кривая 4 - σ_8 , $R = 4,1$ см, $P_{1,0}^{0,6}(t)$). Причем амплитуда колебаний зависит от радиуса цилиндра. На рис.2 приведены зависимости удвоенной амплитуды колебаний $2A_8$ (диапазон колебаний) от радиуса цилиндра при действии импульсов $P_{1,0}^{0,3}(t)$, $P_{1,0}^{0,6}(t)$, $P_{1,0}^{1,5}(t)$ (кривые 1-3 соответственно).

Возникновение незатухающих упругих колебаний в цилиндре после действия импульса давления является следствием использования линейного закона Гука в модели среды.

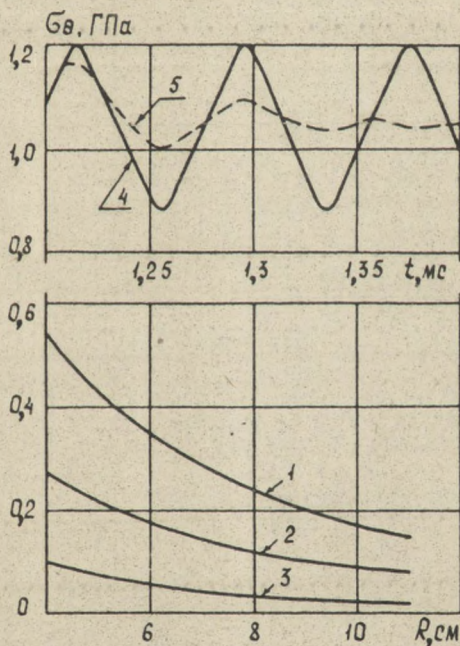


Рис.2. Колебания окружного напряжения в зависимости от радиуса цилиндра

Это приводит к неучету рассеяния энергии упругих волн в материале за счет гистерезисных потерь [2]. Основываясь на том, что после затухания свободных колебаний массовая скорость должна равняться нулю, в уравнение движения вводится демпфирующая функция малого параметра при условии окончания действия импульса давления и отсутствия пластических деформаций в цилиндре

$$\varphi = -\gamma U, \quad \text{где} \quad \gamma = 10^{-3} + 10^{-2}.$$

Введение в расчетную схему демпфирующей функции позволяет избавиться от упругих колебаний (кривая 5, $\gamma = 10^{-2}$, $\rho_{1,0}^{0,6}(t)$, см. рис.2) и рассчитать напряженное состояние цилиндра после динамического автоскрепления.

На рис.1 приведен расчет остаточного окружного напряжения ($I - \sigma_\theta$) полного автоскрепления цилиндра при действии импульса $\rho_{1,2}^{0,6}(t)$.

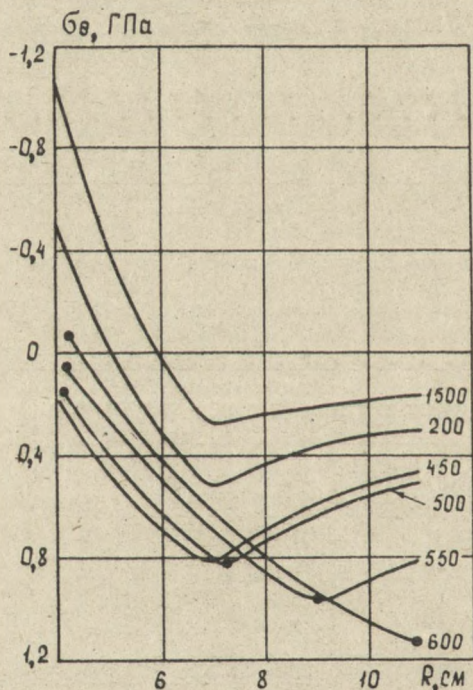


Рис.3. Окружные напряжения в автоскрепленном цилиндре

При этом у внутренней поверхности цилиндра появляются обратные пластические деформации. В настоящее время практически нет аналитических решений, позволяющих рассчитывать автоскрепление цилиндров с учетом обратных пластических деформаций [3]. Расчеты показывают, что автоскрепление цилиндра, материал которого не обладает деформационным упрочнением, не приводит к увеличению его несущей способности, однако намного повышает максимальное давление в импульсе, при действии которого цилиндр работает только в упругом режиме. На рис.3 представлены окружные напряжения в автоскрепленном цилиндре (I500 - начальное окружное напряжение автоскрепления средней степени) при действии импульса давления $P_{4,3}^{0,6}(t)$, приводящего к потере его несущей способности (разрушению). Области материала цилиндра, заключенные между точками, находятся в указанные моменты времени в пластическом состоянии.

Оценка прочности цилиндров. Проведем статическую и динамическую оценку прочности цилиндров различной толщины. При этом динамическую оценку прочности цилиндров (учет времени нагружения) получим для импульсов, в которых время нарастания максимального давления D_* равно 0,6 мс. Для статической оценки прочности воспользуемся формулой, полученной для закрытых цилиндров и с удовлетворительной точностью описывающей эксперимент [3]:

$$P_c = 2 \sigma_b \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right),$$

где P_c - давление разрыва; $\kappa = b/a$.

Размеры цилиндра, мм					Давление раз- рыва, МПа		Занижение ст. оценки
N n/n	2a	2b	b-a	b/a	P_c	P_*	$\frac{P_* - P_c}{P_*} \cdot 100\%$
1	80	190	55	2,375	0,944	1,08	12,6
2	80	240	80	3,0	1,18	1,37	13,9
3	80	270	95	3,375	1,28	1,54	16,9
4	80	400	160	5,0	1,57	2,0	21,5

В таблице приведены прочностные оценки цилиндров, отношение радиусов которых меняется от 2 до 5.

Расчеты показывают, что при длительности действия импульса $2 t_n = 1,2$ мс занижение статической оценки прочности по сравнению с динамической может превышать 20%. Для цилиндров, материал которых обладает деформационным упрочнением, это занижение будет значительно большим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уилкинс М.Л. Расчет упруго-пластических течений. - В кн. Вычислительные методы в гидродинамике. - М.: Мир, 1967. - 383с.
2. Писаренко Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. - Киев: Наук. думка, 1970. - 379с.
3. Механические свойства материалов под высоким давлением / Под ред. Х.Л.Пью. - М.: Мир, 1973, вып.1. - 296с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ НАБОРА ПЛАСТИН ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ С УЧЕТОМ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В.А.Горельский, Т.М.Платова, А.В.Радченко, И.Е.Хорев

Динамическое взаимодействие твердых тел сопровождается, как правило, их разрушением. Большой интерес представляет изучение механизмов и типов разрушения, реализующихся в зависимости от кинематических условий удара, геометрических параметров и механических свойств контактирующих тел. Данная работа посвящена исследованию кинетических механизмов разрушения конструкции из двух взаимодействующих пластин, в начальный момент разделенных воздушным промежутком, в условиях динамического нагружения. Задача решается в осесимметричной постановке в рамках модели сжимаемого прочного материала, характеризующегося модулем сдвига, динамическим пределом текучести и константами разрушения. Процесс разрушения описывается кинетической моделью зарождения и развития микроповреждений активного типа [1].

Система уравнений, описывающая адиабатное движение твердой сжимаемой среды в декартовой системе координат, имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_i}{dt} &= \sigma_{ij,j} \quad (i,j=1,2,3), \\ \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \rho v_i &= 0, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (I)$$

Здесь ρ - плотность; v_i - компоненты скорости;
 σ_{ij} - компоненты тензора напряжения; E - удельная внутренняя энергия;
 $\varepsilon_{ij} = 1/2 (v_{i,j} + v_{j,i})$ - компоненты тензора скоростей деформации.

Девизорная компонента напряжения S_{ij} и скорости деформаций связаны соотношениями Прандтля-Рейса

$$\begin{aligned} G(\varepsilon_{ij} - 1/3 \varepsilon_{kk} \delta_{ij}) &= D S_{ij} / Dt + \lambda S_{ij}, \quad (\lambda \geq 0), \\ S_{ij} &= \sigma_{ij} + \rho \delta_{ij}, \quad \frac{D S_{ij}}{Dt} = \frac{d S_{ij}}{dt} - S_{ik} \omega_{jk} - S_{jk} \omega_{ik}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{v}_{ij} + \dot{v}_{ji}).$$

Здесь G - модуль сдвига; D/Dt - производная по Рундману;
 P - давление. Условие пластичности задается в форме Мизеса

$$S_{ij} S_{ij} \leq \frac{2}{3} \sigma_0^2, \quad (3)$$

где σ_0 - динамический предел текучести.

Скорость разрушения - скорость роста удаленного объема трещин задается как функция действующего давления и достигнутого объема трещин:

$$\dot{V}_T = \begin{cases} 0, & \text{если } |P| \leq P^* \frac{V_T^*}{V_T^* + V_T}, \\ -\text{sign}(P) K (|P| - P^* \frac{V_T^*}{V_T^* + V_T}) (V_T^0 + V_T), & \\ \text{если } |P| > P^* \frac{V_T^*}{V_T^* + V_T}. \end{cases} \quad (4)$$

По мере разрушения модуль сдвига и динамический предел текучести рассчитываются по формулам

$$G = G_0 \frac{V_{T1}}{V_{T1} + V_T},$$

$$G_0 = \begin{cases} G_{00} \left(1 - \frac{V_T}{V_{T2}}\right), & \text{если } V_T < V_{T2}, \\ 0, & \text{если } V_T \geq V_{T2}. \end{cases}$$

Уравнение состояния берется в виде

$$P = K_1 \gamma + K_2 \gamma^2 + K_3 \gamma^3 + \Gamma (\gamma + 1) E, \quad (5)$$

$$\gamma = \frac{V_0}{V_0} - 1, \quad V_0 = V - V_T.$$

Здесь P^* , V_T^* , K , V_T^0 , V_{T1} , V_{T2} , K_1 , K_2 , K_3 , Γ - константы материала; V_0 - удельный объем неразрушенного материала; V - общий удельный объем; V_T - удельный объем трещин.

Система уравнений (1)-(5) решалась численно, методом конечных элементов [2-3]. В численных экспериментах ударником являлся компактный стальной цилиндр размером 6х8 мм; толщина пластин -

5 мм, расстояние между ними - 1 мм, материал пластин - сталь. Скорость взаимодействия составляла $\sim 0,5$ скорости звука в исследуемом материале. На контактных поверхностях задавались условия скольжения.

На рис.1 представлены хронограммы внедрения цилиндра (рис.1а) и распределение изолиний удельного объема трещин (рис.1б) в моменты времени 1,2 и 3 мкс. Как видно из рис.1а, в 2 мкс вследствие деформации первой пластины начинается взаимодействие ее тыльной поверхности с лицевой поверхностью второй пластины. К 3 мкс в результате взаимодействия плит и ударника толщина первой пластины вблизи оси симметрии уменьшается вдвое по сравнению с начальной.

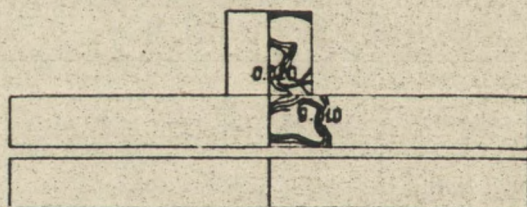
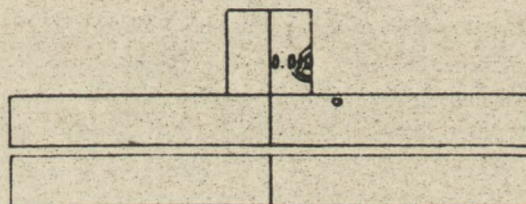
За формированием и развитием зон разрушения можно проследить по рис.1б. К моменту времени 1 мкс в верхней пластине формируется первая зона разрушения - зона лицевого откола, которая образуется в результате интерференции волн разгрузки, распространяющихся от лицевой поверхности пластины. Эта зона расположена вблизи лицевой поверхности на расстоянии 1,5 радиуса цилиндра от оси симметрии. Ко времени 2 мкс после взаимодействия формируется вторая зона разрушения - зона тыльного откола, расположенная на расстоянии 1 мм от тыльной поверхности пластины. Уровень разрушений в зоне тыльного откола выше, чем в зоне лицевого откола, но не успевает достигнуть критического значения, так как в результате взаимодействия пластин происходит закрытие образовавшихся трещин. Ко времени 3 мкс формируется зона тыльных разрушений во второй пластине. Так как взаимодействие пластин происходит с меньшей скоростью, чем начальная скорость цилиндра, ударная волна, инициируемая во второй пластине, имеет меньшую интенсивность, что обуславливает низкий уровень тыльных разрушений во второй пластине.

На рис.2 приведены хронограммы распределения изолиний удельной энергии сдвиговых деформаций в моменты времени 1,2 и 3 мкс. Хронограммы позволяют проследить за формированием и эволюцией зоны сдвиговых деформаций. Как видно из рисунка, зона максимальных сдвиговых деформаций зарождается на лицевой поверхности пластины и расположена на расстоянии радиуса цилиндра от оси симметрии. С течением времени эта зона распространяется по толщине пластины. Зона больших сдвиговых деформаций локализована в узкой кольцевой зоне. В результате адиабатического разогрева происходит

a



3



падение прочности материала в этой зоне, что приводит к образованию еще одной зоны разрушения.

Рис. 3 иллюстрирует радиальное распределение удельного объема трещин (кривая 1) и удельной энергии сдвиговых деформаций (кривая 2) в зоне тыльного откола в момент времени 2 мкс. Максимальное значение объема трещин достигается на оси симметрии. Значения энергии сдвиговых деформаций в этом сечении ($Z = -0,4$ см) еще невелики, хотя наблюдается слабо выраженный максимум на расстоянии радиуса цилиндра от оси.

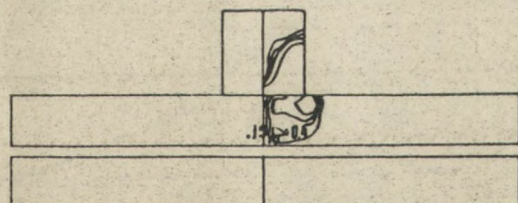
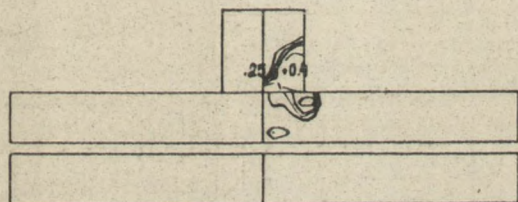
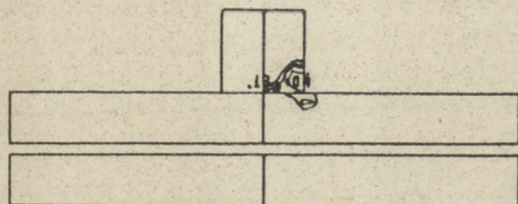


Рис. 2

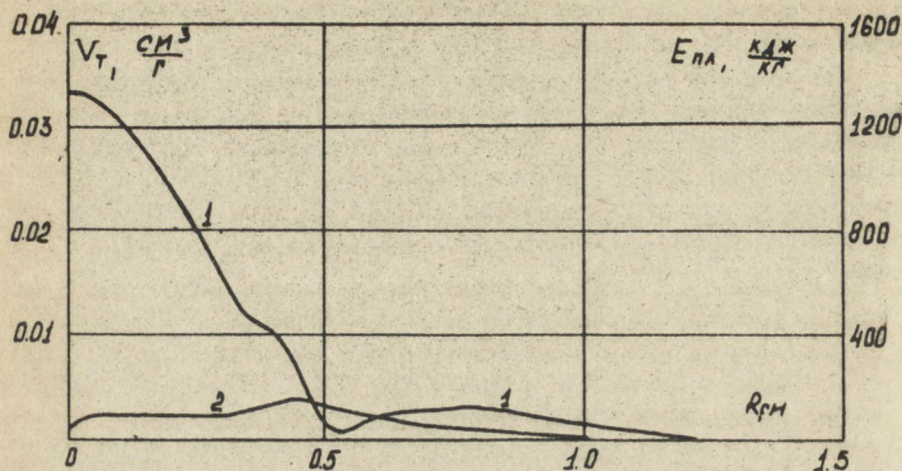


Рис. 3

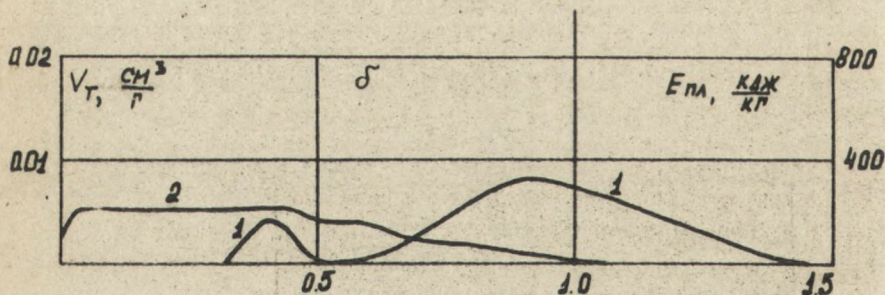
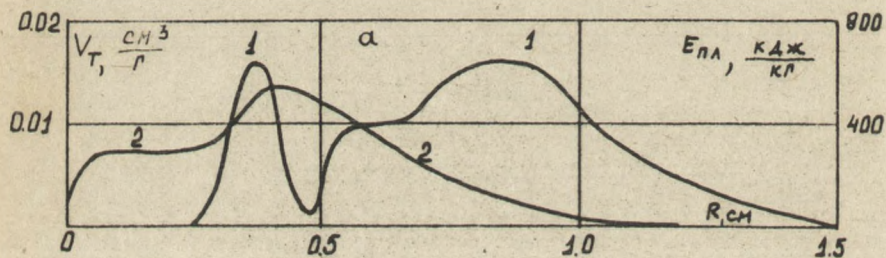


Рис. 4

На рис.4 представлены аналогичные зависимости, что и на рис.3 в момент времени 3 мкс в сечениях $Z = -0,1$ см (зона лицевого откола, рис.4а) и $Z = -0,4$ см (зона тыльного откола, рис.4б). Из рисунка видно, что в результате взаимодействия пластин произошло закрытие трещин в зоне тыльного откола. Кривая распределения объема трещин имеет два максимума. Первый максимум характеризует уровень разрушений в зоне максимальных сдвиговых деформаций, второй-уровень разрушений в зоне лицевого откола. Таким образом, проведенные исследования показали, что используемая модель повреждаемой среды позволяет описывать зарождение и развитие зон разрушений в конструкции, состоящей из двух пластин с учетом их взаимодействия в условиях динамического нагружения. Выявлено, что в первой пластине наряду с откольными повреждениями (лицевой и тыльный откол) разрушение характеризуется отделением диска за счет значительных сдвиговых деформаций. Причем если расстояние между пластинами такое, что уровень разрушений в зоне тыльного откола в первой пластине не достигает критического и в результате взаимодействия пластин трещины закрываются, то определяющим фактором разрушения становятся сдвиговые деформации.

Литература

1. Канель Г.И., Дремин А.Н. Экспериментальное исследование и численное моделирование эволюции импульса сжатия и явления откола в железе.- В кн.: Тез. докл. III Всесоюз. симпоз. по импульсным давлениям. М., 1979, с.60-61.
2. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. - М.: Мир, 1976. - 464 с.
3. Горельский В.А., Хорев И.Е. О применении метода конечных элементов для расчета больших деформаций и разрушения твердых тел при динамических нагрузках.- В кн.: Тр. I Всесоюз. школы-семинара по многомерным задачам механики сплошной среды. ВНИИ 4623-83, с.103-114.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТВЕРДЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

В.А.Горельский, И.Е.Хорев, Н.Т.Югов

Исследование полей деформаций и напряжений, а также интегральных характеристик процесса динамического нагружения пространственных тел является важной и актуальной задачей механики сплошной среды. Экспериментальные работы в этом направлении не позволяют к настоящему времени получить полную информацию о процессе, теоретические же исследования приводят к необходимости решения трехмерных задач, численная реализация которых существенным образом затруднена в силу различных, в том числе чисто технических, причин. В данной работе проведено численное моделирование трехмерного процесса несимметричного динамического взаимодействия твердых деформируемых тел.

Ударник, представляющий собой тело вращения, ударяется со скоростью V_0 по пластине конечной толщины. Вектор скорости ударника совпадает с его осью симметрии и образует с нормалью к препятствию угол α . Предполагается, что в процессе взаимодействия материалы соударяющихся тел следуют модели упругопластической среды. Система уравнений, описывающих пространственные адиабатные движения сжимаемой упругопластической среды, имеет вид

закон сохранения массы

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0, \quad (1)$$

закон сохранения количества движения

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \bar{v} dV = \int_S \bar{\sigma}_n dS + \int_V \rho \bar{F} dV, \quad (2)$$

уравнение энергии

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho E dV = \int_V \bar{\sigma}_{ij} e_{ij} dV, \quad (3)$$

где ρ - плотность среды; $\bar{\sigma}_{ij} = S_{ij} - P \delta_{ij}$ - компоненты тензора напряжений; $e_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$ - компоненты тензора скоростей деформаций; v_i - компоненты вектора скорости; E - удель-

ная внутренняя энергия; $\vec{F}$ - вектор внешних массовых сил;

δ_{ij} - символ Кронекера.

Для замыкания системы уравнений необходимо добавить определяющие соотношения теории пластического течения Прандтля-Рейса и уравнение состояния. Компоненты девиатора тензора скоростей деформаций связаны с компонентами девиатора тензора напряжений следующими соотношениями [1]:

$$2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{kk}) = \frac{dS_{ij}^o}{dt} + \lambda S_{ij}. \quad (4)$$

Здесь μ - модуль сдвига; $\frac{dS_{ij}^o}{dt}$ - производная по Яуману, которая определяется формулой

$$\frac{dS_{ij}^o}{dt} = \frac{dS_{ij}}{dt} - S_{ik}w_{jk} - S_{jk}w_{ik}, \quad 2w_{ij} = v_i v_j - v_j v_i. \quad (5)$$

Параметр $\lambda \equiv 0$ при упругой деформации и определяется с помощью условия текучести Мизеса [2]:

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \sigma_s^2/3 \quad (6)$$

при пластической деформации. J_2 - второй инвариант девиатора тензора напряжений, σ_s - динамический предел текучести. Уравнение состояния выбирается в форме Ми-Грюнайзена, в котором давление является функцией плотности и удельной внутренней энергии:

$$P(\rho, E) = \sum_{n=1}^3 K_n \left(\frac{P}{P_0} - 1 \right)^n + K_0 \rho E, \quad (7)$$

где K_0, K_n - константы, характеризующие материал.

Для уравнений (1)-(7) ставится краевая задача с начальными при $t = 0$ и граничными на поверхностях условиями.

Начальные условия:

$$\sigma_{ij}(x, 0) = E(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2, \quad (8)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0, \quad v_1(x, 0) = -v_0 \sin \alpha, \quad v_2(x, 0) = 0, \quad v_3(x, 0) = -v_0 \cos \alpha$$

при $x \in \mathcal{R}_1$,

$$\rho(x, 0) = \rho_0, \quad v_1(x, 0) = v_2(x, 0) = v_3(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \mathcal{R}_2.$$

Граничные условия: на свободных поверхностях

$$\sigma_{NN}(x, t) = \sigma_{N\tilde{x}_1}(x, t) = \sigma_{N\tilde{x}_2}(x, t) = 0 \quad \text{при } x \in S_1 \cup S_2, \quad (9)$$

на контактной поверхности взаимодействующих тел при реализации условия скольжения без трения

$$\sigma_{NN}^+(x, t) = \sigma_{NN}^-(x, t), \quad \sigma_{N\tilde{x}_1}^+(x, t) = \sigma_{N\tilde{x}_1}^-(x, t) = \sigma_{N\tilde{x}_2}^+(x, t) = \sigma_{N\tilde{x}_2}^-(x, t) = 0 \quad (10)$$

$$v_N^+(x, t) = v_N^-(x, t) \quad \text{при } x \in S_3,$$

на боковой поверхности жесткого закрепления пластины

$$v_1(x, t) = v_2(x, t) = v_3(x, t) = 0 \quad \text{при } x \in S_4. \quad (11)$$

Здесь D_1, D_2 - области, занятые ударником и пластиной; S_1, S_2 - свободные поверхности ударника и пластины; S_3 - контактная поверхность ударника и пластины; S_4 - поверхность жесткого закрепления пластины; N - единичный вектор нормали к поверхности в рассматриваемой точке; $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ - взаимоперпендикулярные единичные векторы в плоскости, касательной к поверхности в рассматриваемой точке. Индекс означает проекцию на соответствующий базисный вектор, значок "плюс" характеризует значение величины при подходе к границе со стороны ударника, "минус" - со стороны пластины.

Сформулированная задача решается численным методом конечных элементов, основные соотношения которого приведены в работах [3-4]. В расчетах соударяющиеся тела были из одинакового материала и имели следующие константы: $\rho_0 = 7850 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 79 \text{ ГПа}$, $G_s = 1,01 \text{ ГПа}$, $K_0 = 1,91$, $K_1 = 153 \text{ ГПа}$, $K_2 = 176 \text{ ГПа}$, $K_3 = 53 \text{ ГПа}$. Скорость соударения составляла 800 м/с , угол встречи 30° . Ударник представлял собой цилиндр высотой $0,06 \text{ м}$, диаметром $0,018 \text{ м}$ и имел конусообразную переднюю часть с углом раствора при вершине 120° . Пластина имела толщину $0,01 \text{ м}$.

На рис.1 приведены полученные на графопостроителе конфигурации взаимодействующих тел в моменты времени $6,8$ и 10 мкс , из которых виден характер процесса деформации ударника и пластины.

На рис.2-3 приведены графики изменения составляющих скоростей ударника и пластины во времени на оси симметрии. В силу граничных условий скольжения без трения вертикальные скорости контактирующих узлов ударника и пластины совпадают, что нельзя ска-

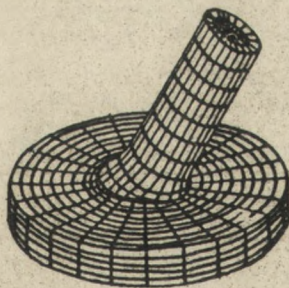
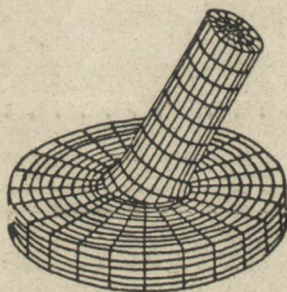
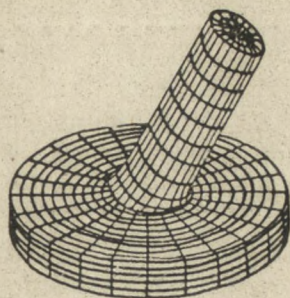
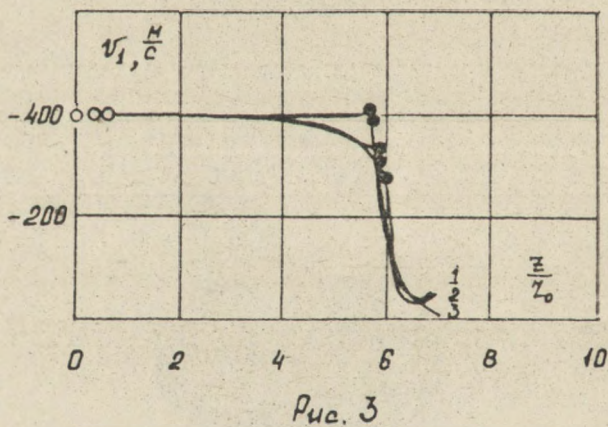
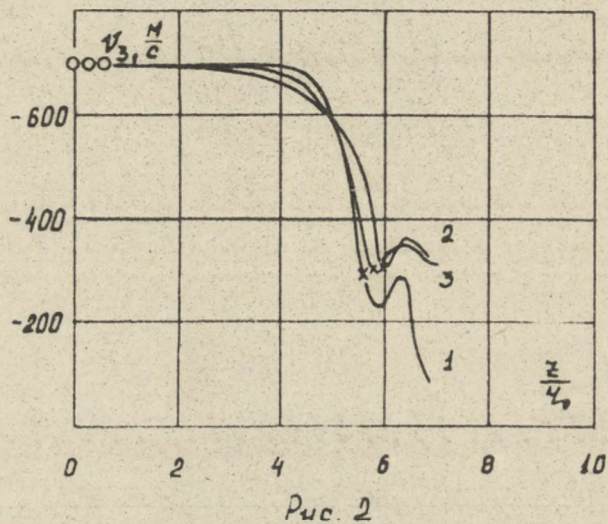


Рис. 1



зять о горизонтальных составляющих. Однако в дальнейшем, по мере деформации материала, находящегося справа от осевого узла пластины, происходит увеличение его горизонтальной скорости, которая к моменту времени 10 мкс становится практически равной горизонтальной скорости осевого узла ударника.

Таким образом, проведенный численный расчет трехмерной задачи несимметричного динамического взаимодействия тел показал возможность описания пространственного деформирования и оценки прочности конструкции в практически важных случаях. В программе реализован алгоритм расчета контактных поверхностей, работающих в режиме скольжения, который позволяет решать широкий класс трехмерных задач динамического взаимодействия твердых тел.

Литература

1. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов. - ИММ, 1960, т.24, вып.6, с.1057-1072.
2. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений. - В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967, с.212-263.
3. Johnson G.R. *High velocity impact calculations in three dimensions.* - *J. Appl. Mech.*, 1977, v. 44, n1, p. 95-100.
4. Горельский В.А., Хорев И.Е. О применении метода конечных элементов для расчета больших деформаций и разрушения твердых тел при динамических нагрузках. - В кн.: Тр. I Всесоюз. школы-семинара по многомерным задачам механики сплошной среды. ВИНТИ 4623-83, с.103-114.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛЕТАЮЩЕЙ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ МОДЕЛИ С ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ ПРИ ВСТРЕЧЕ ПОД УГЛОМ

С.А.Афанасьева, Н.А.Пучкова

Вопросам взаимодействия летящей сверхзвуковой модели (ЛСМ) с ударными волнами (УВ) при встрече в нормаль посвящены как экспериментальные работы [1,2], так и численные исследования [3-5].

В настоящей работе предлагается методика численного исследования взаимодействия УВ произвольной интенсивности с ЛСМ при встрече под углом в плоской постановке на базе численного метода крупных частиц, успешно применяемого для нестационарных задач [6,7]. В эйлеровом представлении система уравнений для газовой динамики имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho W) &= 0, \\ \frac{d\rho u}{dt} + \operatorname{div}(\rho u W) + \frac{dP}{dx} &= 0, \\ \frac{d\rho v}{dt} + \operatorname{div}(\rho v W) + \frac{dP}{dy} &= 0, \\ \frac{d\rho E}{dt} + \operatorname{div}(\rho E W) + \operatorname{div}(\rho W) &= 0\end{aligned}\tag{I}$$

и содержит пять искомых функций: ρ - плотность; u , v - составляющие вектора скорости W ; E - полная удельная энергия; P - давление. Система (I) представлена в безразмерном виде, характерными величинами являются параметры начального потока газа ρ_0 , W_0 и характерный линейный размер ЛСМ. Система (I) замыкается уравнением состояния идеального газа $P = (\gamma - 1)\rho[E - 0.5(u^2 + v^2)]$; γ - показатель поли-

тропы. Задача об определении параметров течения при взаимодействии с ЛСМ решается в два этапа. На первом этапе вычисляются параметры обтекания ЛСМ начальным потоком газа при заданном числе Маха M_0 . На втором этапе вычисляют непосредственно параметры течения при взаимодействии УВ с ЛСМ при заданной интенсивности УВ,

используя параметры обтекания в качестве начальных данных.

Система уравнений (1) заменяется конечно-разностными уравнениями по методу крупных частиц. Решение проводится на прямоугольном расчетном поле. ЛСМ интерпретируется бесконечной пластиной с прямоугольным сечением и расположена в середине расчетной области.

На первом этапе решения ставятся следующие начальные и граничные условия:

$$t = 0, \rho = 1, u = 1, v = 0, E = 1/[\gamma(\gamma-1)M_0^2] + 0,5. \quad (2)$$

На поверхности ЛСМ ставится условие непротекания

$$W_s = 0, \quad \frac{dF}{dt} = 0, \quad (3)$$

где $F = (\rho, E)$; s - направление, перпендикулярное поверхности ЛСМ.

Во входных ячейках расчетного поля (слева) ставится условие набегания невозмущенного потока, аналогичное (2).

Путем многократного повторения расчетного цикла при неизменных граничных условиях до установления потока определяются параметры обтекания ρ_u, u_u, v_u, E_u и P_u при $t = t_u$. На втором этапе условие (3) сохраняется,

а во входных ячейках задаются параметры ударной волны:

$$u = u_{im} \cos \beta + 1; \quad v = u_{im} \sin \beta; \quad E = P_{im} / [\gamma P_{im} (\gamma-1) + 0,5(u^2 + v^2)]$$

β - угол подхода УВ к ЛСМ (отсчитывается от оси начального движения);

P_{im}, u_{im} - параметры газа во фронте УВ, определяемые из уравнений Гюгоньо;

P_{im} - давление во фронте УВ, задается через интенсивность УВ

$$I = \frac{P_{im}}{\rho_0}.$$

В результате проведения второго этапа определяются параметры течения около ЛСМ при взаимодействии с УВ в нестационарном режиме. По распределению давления на поверхности ЛСМ определяются интегральные силовые характеристики при использовании зависимостей, приведенных в [8]: коэффициент нормальной силы C_{np} , коэффициент продольной силы C_{xp} и коэффициент момента тангажа M_{xp} . Для определения угла отклонения оси ЛСМ от первоначального направления движения α решается уравнение

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{M_Z}{J_Z}, \quad \text{где } M_Z = m_{\text{пр}} \rho_0 \omega_0^2 b^2 / 2, \quad (4)$$

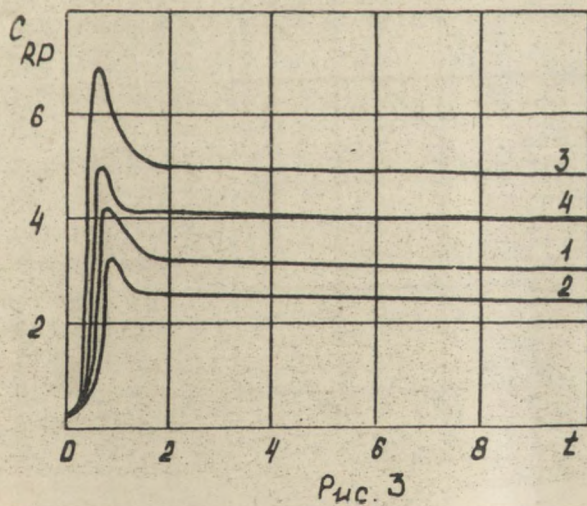
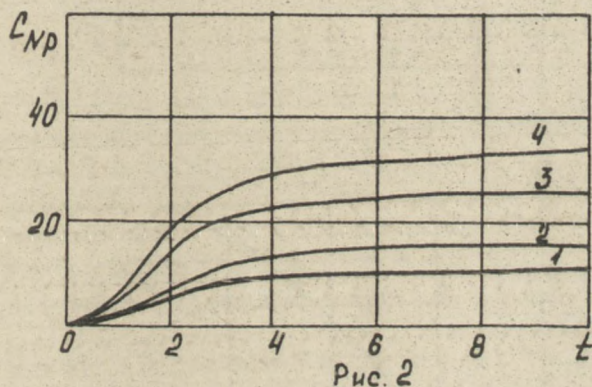
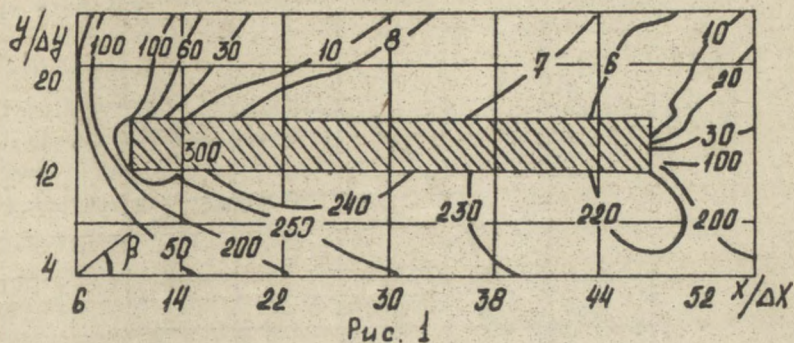
J_Z - момент инерции ЛСМ; b - продольный размер ЛСМ.

По изложенной методике выполнены модельные расчеты по определению реакции ЛСМ на воздействие УВ при следующих исходных данных: $M_0 = 5$, $I = 50+200$, $\beta = 45+60^\circ$. ЛСМ интерпретировала стержень длиной 20 радиусов, массой 0,08 кг.

На рис.1 изображено расчетное поле в координатах $x/\Delta x$ и $y/\Delta y$, Δx и Δy - размеры расчетных ячеек, где представлено распределение давления в виде изолиний p/p_0 , характеризующее силовое воздействие на ЛСМ со стороны потока УВ в квазистационарном режиме.

На рис.2 представлена зависимость коэффициента нормальной силы $C_{\text{нр}}$ от времени взаимодействия в следующем диапазоне изменения начальных параметров: $\beta = 45^\circ, 60^\circ$ - кривые 1 и 2 при $I = 50$ и кривые 3 и 4 при $I = 100$ соответственно. С увеличением времени взаимодействия $C_{\text{нр}}$ изменяется от нулевого значения, соответствующего обтеканию начальным потоком газа, который рассчитан на первом этапе решения, до квазистационарного режима при обтекании потоком газа в УВ. На рис.3 в зависимости от времени показано изменение коэффициента осевой силы $C_{\text{ор}}$ в том же диапазоне начальных параметров (кривые пронумерованы аналогично рис.3). В начальный период взаимодействия ЛСМ с УВ коэффициент $C_{\text{ор}}$ растет от значения, соответствующего обтеканию начальным потоком газа, до максимального значения при взаимодействии баллистической УВ со встречной УВ, после чего выходит на квазистационарный режим, как и коэффициент $C_{\text{нр}}$. На рис.4 представлена зависимость коэффициента момента тангажа от времени взаимодействия при $I = 50$ и $\beta = 45^\circ, 60^\circ$ (кривые 1 и 2 соответственно). Эта зависимость характеризует сложную нестационарную картину силового воздействия на ЛСМ со стороны УВ. Здесь, как и на рис.2 и 3, характерен выход на квазистационарный режим.

Для определения угла атаки α уравнение (4) интегрировалось на промежутке времени, соответствующем прохождению УВ вдоль ЛСМ на ее длину в квазистационарном режиме. На рис.5 изображено интегральное значение угла α в зависимости от интенсивности I УВ и угла встречи $\beta = 45^\circ, 60^\circ$ (кривые 1 и 2 соответственно). Видно, что с возрастанием интенсивности УВ отклонение ЛСМ относительно центра масс увеличивается. Это же происходит и при увели-



- 140 -

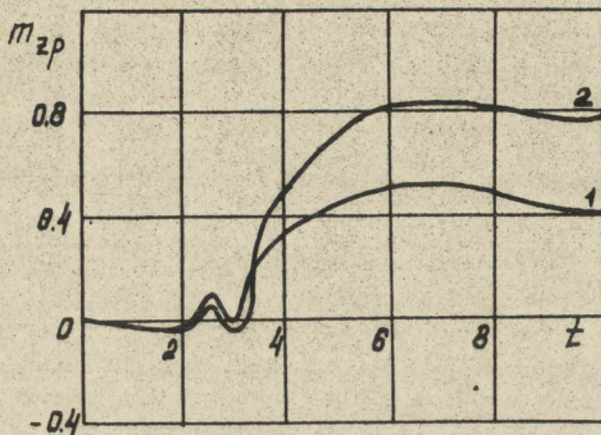


Рис. 4

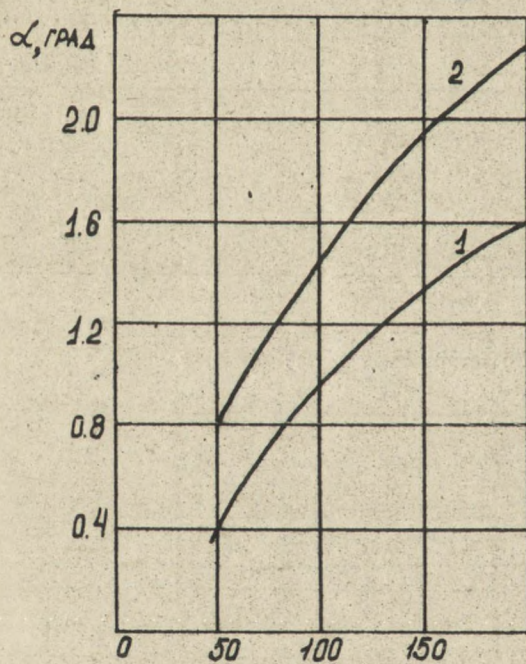


Рис. 5

чении угла встречи (возможно, до некоторого критического значения).

Представленные результаты модельных расчетов позволяют сделать следующие выводы:

Математическая постановка и ее численная реализация соответствуют сложному нестационарному явлению взаимодействия ЛСМ с УВ при встрече под углом.

Полученные характеристики позволяют оценить влияние исходных параметров на реакцию ЛСМ в потоке УВ в различные этапы взаимодействия. Модельность проведенных расчетов не снижает их практической ценности, позволяя прогнозировать поведение ЛСМ на более длительном периоде взаимодействия с УВ.

Литература

1. Акимов А.И., Лисин Ю.Г., Шугаев Ф.В., Маковский Ю.Ф. Картина течения при набегании ударной волны на тело, обтекаемое сверхзвуковым потоком. - Уч.зап. ЦАГИ, 1971, т.2, № 2, с.106-111.
2. Бужинский О.И., Василенко А.М., Жеребцов М.М., Ткаченко А.Н. Взаимодействие плоской ударной волны с моделью, летящей со сверхзвуковой скоростью. - Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 6, с.90-97.
3. Балакин В.Б., Буланов В.В. Численное решение задачи о взаимодействии ударной волны с цилиндром в сверхзвуковом потоке. - ИЖ, т.21, № 6, 1971, с.1033-1039.
4. Грудницкий В.Г., Прохорчук Ю.А. Расчет взаимодействия ударной волны с затупленным телом. - Численные методы механики сплошной среды, 1975, т.6, № 4, с.42-55.
5. Ляхов В.Н. Нестационарное взаимодействие ударной волны с затупленным телом в сверхзвуковом потоке. - Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 6, с.70-76.
6. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. - М.: Наука, 1982. - 391с.
7. Шевирев С.П. Численное исследование некоторых ударно-волновых процессов в газе: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов: СГУ, 1979, 151с.
8. Прикладная аэродинамика /Под ред. Н.Ф.Краснова. - М.: Высш.шк., 1974. - 733с.

ВИХРЕВОЙ ХАРАКТЕР ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В.Е.Панин, Ю.В.Гриняев, И.А.Гриняева

Ранее отмечалось, что взаимодействие структурного элемента с соседями можно свести к главному вектору сил и главному моменту, приложенным к центру масс (инерции) данного элемента $[1]$. В моментных теориях учитывается только этот аспект. Но кроме того на элемент действует система уравновешенных сил и моментов, которые вызывают деформацию внутри него. В теории деформации не рассматриваются причины, породившие поля перемещений и поворотов. В теории напряжений выясняется, что поля перемещений и поворотов определяются совокупностью уравновешенной системы сил и моментов, а также главным вектором силы и главным моментом.

При континуальном описании имеет смысл ввести градиенты сил и моментов, поскольку деформация определяется градиентами, а не самими величинами. Дальнейшее изложение проводится аналогично таковому в теории деформации $[2]$. Поэтому вполне понятен дуализм между геометрией дефектов и статикой напряжений, отмеченный в работе $[2]$.

Рассмотрим объем V , занятый сплошной средой. Мысленно разделим его на две части V' и V'' . Для того чтобы обе части находились в равновесии так же, как и объем V в целом, необходимо на поверхности раздела рассмотреть силы, действующие со стороны отброшенной части (например, V''). В классической теории упругости делается предположение, что распределение сил по элементарной площадке границы раздела статически эквивалентно одной силе и не создает момента. Принимается гипотеза близкогодействия, согласно которой воздействие отброшенной части может быть заменено только системой сил распределений на границе раздела.

Если ввести тензор напряжений σ , то общую силу, действующую на площадку, можно выразить как

$$\vec{F} = \int_S dS \cdot \sigma. \quad (1)$$

Рассмотрим объем, ограниченный поверхностью S , которая замкнута, при отсутствии массовых сил. Условие равновесия объема в данном случае заключается в равенстве главного вектора сил и мо-

ментов нулю:

$$\int_V dS \cdot \mathcal{G} = \int_V dV \nabla \cdot \mathcal{G} = 0. \quad (2)$$

Поскольку это выполняется для любого объема, то можно заключить, что

$$\mathcal{G} = \nabla \times \Phi. \quad (3)$$

Следовательно, в (1) от интеграла по поверхности можно перейти к интегралу по контуру, на который опирается поверхность

$$\int_S dS \cdot \mathcal{G} = \int_C d\ell \cdot \Phi. \quad (4)$$

Гипотеза о равенстве нулю момента приводит к симметричности тензора силовых напряжений $\mathcal{G}$. Полагаем, что взаимодействие V' и V'' сводится к возникновению не только силовых напряжений, но и моментных (то есть отбросим гипотезу о равенстве нулю момента). В этом случае для поверхности S можно записать

$$\vec{M} = \int_S dS \cdot \mu - \int_S dS \cdot (\mathcal{G} \times r).$$

Условие равновесия для статического случая произвольного объема относительно его поворотов можно представить в виде

$$\int_S dS (\mu - \mathcal{G} \times r) = \int_V dV \nabla \cdot (\mu - \mathcal{G} \times r) = 0. \quad (5)$$

Поскольку объем произволен, получим (с учетом (2))

$$\nabla \cdot \mu + \langle \mathcal{G} \rangle = 0. \quad (6)$$

Взяв векторную свертку от соотношения (3), получим

$$\langle \mathcal{G} \rangle = \nabla \cdot [\Phi^\wedge - (S_p \Phi)I].$$

Тензор моментных напряжений можно представить в виде

$$\mu = \nabla \chi I + (S_p \Phi)I - \Phi^\wedge. \quad (7)$$

При таком рассмотрении легко установить дуализм между статикой моментных напряжений и геометрической теорией дефектов. При этом уравнения теории дефектов получаются непосредственно из уравнений статики моментных напряжений и наоборот при замене

$$\mu \leftrightarrow \chi, \mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{Q}, \beta \leftarrow \mathcal{G}, \alpha \leftrightarrow \Phi. \quad (8)$$

(Здесь $\mathcal{Q}$ и χ - тензоры плотности дефектов поворотного и

трансляционного типов; β и χ - тензоры дисторсии и изгиба-
кручения соответственно). Тензоры G и Φ называются тензо-
рами функций напряжения Гюнтера.

При выводе уравнения равновесия можно было бы исходить из
такой записи:

$$\int_S dS \cdot \mu + \int_V dV \langle G \rangle = 0, \quad (9)$$

то есть рассматривать асимметричную часть тензора силовых напря-
жений как "объемные моменты", действующие на каждую частицу рас-
сматриваемого объема. В этом случае гипотеза близкодействия не вы-
полняется, поскольку отброшенная часть V'' действует не только
на поверхность, но и на внутренние точки среды. Следовательно, мо-
ментная теория упругости и геометрическая теория дефектов являют-
ся слабо-нелокальными теориями, поскольку не определен параметр
дальнодействия - "масштабный фактор".

Опираясь на дуализм, можно формально записать в теории напря-
жений соотношения, подобные соотношениям в теории дефектов, описы-
вающим два канала деформации материала со структурой

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \left[\frac{1}{2} (S_p \mu_1) \right] - \mu_1^* &= 0, \\ l^2 \nabla \times \left[\frac{1}{2} (S_p G) \right] - G^* &= -\mu_1. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \left[\frac{1}{2} (S_p G_1) \right] - G_1^* &= 0, \\ \nabla \times \left[\frac{1}{2} (S_p \mu) \right] - \mu^* &= G_1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Динамические переменные, помеченные индексом 1, относятся
к верхнему структурному уровню, а без индекса - к нижнему. Верхняя
система уравнений относительно G и μ_1 и нижняя - относи-
тельно G_1 и μ - являются статически определенными, то есть
можно рассчитать напряженное состояние среды, не используя ма-
териальные соотношения, но при условии, что известны граничные зна-
чения всех компонент и их производных тензоров силовых и момент-
ных напряжений (G и μ соответственно). При задании гра-
ничных условий в перемещениях от систем (10) и (11) следует
векторной сверткой перейти к новым соотношениям. При этом систе-
ма (11) перейдет в уравнения статики моментной теории упругости

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{G}_1 &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{M} + \langle \mathbf{G}_1 \rangle &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

а система (10) даст новые соотношения, в которые явно входит масштабный фактор

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{M}_1 &= 0, \\ \ell^2 \nabla \cdot \mathbf{G} - \langle \mathbf{M}_1 \rangle &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из уравнений (12) и (13) видно, что следует разделять условия нагружения на силовые и моментные (имеется в виду макронагружение). При силовом нагружении следует использовать уравнения (12), а при нагружении моментами - (13). Во втором случае существенно - в отличие от первого - сказывается структура материала.

В предельном случае при $\ell \rightarrow \infty$ получаем две независимые системы:

$$\nabla \cdot \mathbf{M}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{G} = 0.$$

При этом на границе должны быть заданы силовые нагружения на тело структурного элемента (микронагружение или закон распределения макромоментов).

При $\ell \rightarrow 0$ приходим к уравнениям

$$\nabla \cdot \mathbf{M}_1 = 0, \quad \langle \mathbf{M}_1 \rangle = 0.$$

относительно симметричного тензора моментных напряжений.

Динамические уравнения моментной теории упругости имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{G}_1 &= \rho_1 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \\ \nabla \cdot \mathbf{M} + \langle \mathbf{G}_1 \rangle &= \gamma \frac{\partial^2 \vec{\omega}}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где ρ_1 - плотность макроматериала; γ - момент инерции структурного элемента; $\vec{u}$ и $\vec{\omega}$ - векторы смещения и поворотов.

По аналогии запишем (не выясняя физического смысла) для системы (13) динамический вариант

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{M}_1 &= \gamma_1 \frac{\partial^2 \vec{\omega}_1}{\partial t^2}, \\ \ell^2 (\nabla \cdot \mathbf{G}) - \langle \mathbf{M}_1 \rangle &= \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \ell^2. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Здесь ρ - микроплотность (плотность структурного элемента);
 I_1 - момент инерции макросреды. Обобщим системы (I0) и (II) таким образом, чтобы из них векторной сверткой получились системы (I5) и (I4) соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \left[\frac{1}{2} (\rho \mu_1) I - \mu_1^* \right] &= \gamma \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}, \\ \rho^2 \nabla \times \left[\frac{1}{2} (\rho \sigma_1) I - \sigma_1^* \right] + \mu_1 &= \rho \ell^2 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (I6)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \left[\frac{1}{2} (\rho \sigma_1) I - \sigma_1^* \right] &= \rho_1 \ell^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}, \\ \nabla \times \left[\frac{1}{2} (\rho \mu) I - \mu^* \right] - \sigma_1 &= \gamma \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (I7)$$

Исходя из дуализма между теориями дефектов и напряжений, можно крайне осторожно предположить, что соотношения, подобные (I6) и (I7), можно записать и в теории дефектов, где в правых частях должны фигурировать тензорные функции напряжений то есть можно ожидать, что и в теории дефектов возможно записать "динамические" уравнения.

Литература

1. Миндлин Р.Д. Микроструктура в линейной упругости. - В кн. : Механика, 1964, вып. 86, №4, с. 129-160.
2. Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В. Структурные уровни деформации твердых тел. - М.: Наука, 1985. - 226 с.

СОДЕРЖАНИЕ

А.Т.Севостьянов. Исследование напряженного состояния сыпучей среды в условиях пневмотранспорта сплошным потоком	3
В.А.Безпрозванных. Алгебраическая модель турбулентности для расчета потоков в каналах сложной конфигурации	9
А.Ф.Бахгельт. Распространение волн в газовзвесах при учете теплообмена между фазами	15
И.Г.Дик, А.Б.Зурер. К задаче о зажигании конденсированного вещества переменным тепловым потоком	21
И.Г.Дик. Тепловой взрыв при несимметричных условиях теплоотдачи на стенках плоского слоя	27
Р.С.Буркина, А.Г.Князева. Влияние начального распределения температуры и выгорания на очаговое тепловое воспламенение.....	30
В.А.Якутенок. О постановке граничных условий для давления в вершине выпуклого угла	36
В.А.Колдунов, О.Б.Чекаев. Применение вариационно-разностного метода теории упругости к расчету резьбового соединения оболочек	41
А.Н.Кудинов, С.Х.Якубов. Исследование устойчивости круговой цилиндрической оболочки, погруженной в грунт	47
В.А.Колдунов, Ш.Ш.Мударисов, О.И.Черепанов. Численный расчет цилиндрических анизотропных оболочек в зоне краевого эффекта по пространственной схеме	52
В.П.Болков, Л.Я.Линник. О влиянии числа частиц на основные параметры двухфазного химического реактора	58
Е.И.Тарновский. Экспериментальное изучение общих закономерностей в поведении замкнутых цилиндрических оболочек и панелей	66
Г.И.Белоусова, В.З.Мидуков, К теории пластичности порошковых материалов с эффектом дилатансии	70
А.Н.Кудинов, С.В.Дмитриев. Влияние начальной погиби на деформирование и неупругую устойчивость стержней	73
Б.И.Масловский. Устойчивость цилиндрической оболочки при многоэтапном нагружении неравномерным давлением	79
И.А.Лев, С.Л.Павлов. Решение задачи упругого антиплоского деформирования методом граничных вариационных уравнений	84
Н.А.Стахин. Термодинамические соотношения для диэлектриков в электрическом поле	90

П.В.Макуров. Учет пластических поворотов при деформировании металлов ударными волнами	96
В.П.Глазырин, Т.М.Платова. Вязкие свойства металлов при импульсном нагружении	101
Т.В.Жукова, П.В.Макаров, В.А.Скрипняк, Е.Г.Скороспелова, Г.Н.Фондеркина. Особенности численного решения задачи о распространении волн нагружения в металлах с учетом релаксации	110
Г.А.Аржанников. Оценка прочности автоскрепленного цилиндра при импульсном нагружении.....	117
В.А.Горельский, Т.М.Платова, А.В.Радченко, И.Е.Хорев. Моделирование разрушения набора пластин при динамическом нагружении с учетом их взаимодействия.....	123
В.А.Горельский, И.Е.Хорев, Н.Т.Югов. Численное моделирование трехмерных задач динамики твердых деформируемых тел	130
С.А.Афанасьева, Н.А.Пучкова. Численное исследование взаимодействия летящей со сверхзвуковой скоростью модели с плоской ударной волной при встрече под углом	136
В.Е.Панин, Ю.В.Гриняев, И.А.Гриняева. Бихревой характер пластического течения твердых тел	142

Рефераты на опубликованные статьи

УДК 621.867.8

Севостьянов А.Т. Исследование напряженного состояния сыпучей среды в условиях пневмотранспорта сплошным потоком. - В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 3-8.

Исследуется горизонтальный пневмотранспорт сыпучей среды с концентрациями, близкими к насыпной. Использование закона Дарси для фильтрации газа сквозь пористые среды и эмпирических данных о сопротивлении трубопровода потоку, хорошо обобщающихся законом Кулона, позволило построить математическую модель, объясняющую разрушение структуры потока и поршнеобразование возникновением растягивающих усилий в сыпучей среде.

Библ. 5, ил. 1.

УДК 532.517.4

Безпрозванных В.А. Алгебраическая модель турбулентности для расчета потоков в каналах сложной конфигурации. - В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 9-14.

В работе на основе схемы замыкания второго порядка предлагается алгебраическая модель напряжений Рейнольдса, учитывающая анизотропию полей компонент тензора турбулентных напряжений. Предлагаемое приближение позволяет избежать необходимости решения системы дифференциальных уравнений для турбулентных напряжений.

Библ. 7.

УДК 534.222.2

Вахгельт А.Ф. Распространение волн в газозвесах при учете теплообмена между фазами. - В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 15-20.

Численно исследуются нелинейные волновые уравнения, описывающие эволюцию волны давления в газозвесе. Это уравнение получено из газодинамической системы уравнений при учете только теплообмена между частицами и несущей средой. Изучено поведение волны при изменении плотности и концентрации частиц, а также при изменении характерного периода возмущения в рамках принятого приближения. Анализ полученных решений позволяет предсказать поведение волн в технологических процессах.

Библ. 5, ил. 5.

УДК 536.46

Дик И.Р., Зурер А.Б. К задаче о зажигании конденсированного вещества переменным тепловым потоком. — В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 21-26.

С помощью приближенного метода интегральных соотношений аналитически показывается существование универсальной кривой для достаточно общих условий нагрева конденсированного вещества, а также получена сама универсальная функция, оказавшаяся простой, квадратичной. Имеются сравнения с литературными данными; обсуждаются пределы применимости формул. Проведено количественное сравнение расчета характеристик зажигания при использовании различных критериев.

Биол. II, табл. 3.

УДК 536.46

Дик И.Р. Тепловой взрыв при несимметричных условиях теплоотдачи на стенках плоского слоя. — В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 27-29.

Найдены критические условия теплового взрыва слоя при несимметричных условиях теплоотдачи. Найден эффективный коэффициент теплоотдачи в этом случае. Показана аналогия между термическим сопротивлением цепи с параллельно-последовательным подключением. Приведено сравнение с численным расчетом.

Биол. 3, табл. 1.

УДК 536.46

Буркина Р.С., Князева А.Г. Влияние начального распределения температуры и выгорания на очаговое тепловое воспламенение. — В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 30-33.

В работе приводится численный анализ очагового теплового воспламенения для четырех случаев начального распределения температуры в среде. Исследуется влияние выгорания на критические характеристики процесса. Установлено, что температурный режим очага в зависимости от начального распределения температуры определяют одну или два критических значения параметра Франк-Каменецкого.

Биол. 7, ил. 3, табл. 1.

УДК 532.516

Якутенок В.А. О постановке граничных условий для давления в вершине выпуклого угла. — В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 36-40.

В работе рассматривается вопрос о постановке вычислительных граничных условий в вершине выпуклого угла. В качестве тестовой была выбрана задача об установившемся ползущем течении вязкой жидкости в круглом канале с внезапным сужением. Рассмотрено восемь способов определения давления в угловой точке. На основании проведенного численного эксперимента рекомендуется использовать способ, в котором давление в угловой точке считается неоднозначным.

Библ.3, ил.1.

УДК 539.3

Колдунов В.А., Чекаев О.Б. Применение вариационно-разностного метода теории упругости к расчету резьбового соединения оболочек. — В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 41-46.

В осесимметричной постановке вариационно-разностным методом реализуется совместный расчет напряженно-деформированного состояния изотропной (металлической) и ортотропной цилиндрических оболочек, когда витки резьбы имеют достаточную протяженность по сравнению с толщиной ортотропной оболочки, обладающей существенной анизотропией упругих свойств. Введенная модификация позволила провести расчет без допущений, свойственных оболочечным расчетным схемам.

Библ.2, ил.12.

УДК 539.3

Кудинов А.Н., Якубов С.Х. Исследование устойчивости круговой цилиндрической оболочки, погруженной в грунт. — В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 47-51.

В линейной постановке решается задача о влиянии грунта на устойчивость круговой цилиндрической оболочки. Разработана экспериментальная установка для исследования устойчивости цилиндрических оболочек, погруженных в грунт, при осевом сжатии. Приводятся результаты экспериментов и расчетов.

Библ. 7, ил. 2, табл. 1.

УДК 539.3

Колдунов В.А., Мударисов Ш.Ш., Черепанов О.И. Численный расчет цилиндрических анизотропных оболочек в зоне краевого эффекта по пространственной схеме. — В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 52-57.

Реализуется вариационно-разностный метод расчета напряженно-деформированного состояния ортотропных оболочек в краевой зоне. Исследуется влияние упругих и геометрических характеристик на параметры НДС. Используются различные модификации исходных конечно-разностных соотношений, позволяющие проводить расчет достаточно тонких и протяженных оболочек с позиций анизотропной теории упругости. Результаты расчетов представлены в виде графиков.

Библ. 4, ил. 6.

УДК 66.021.21

Волков В.П., Линник Л.Я. О влиянии числа частиц на основные параметры двухфазного химического реактора. — В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 58-65.

В работе излагаются экспериментальные данные по влиянию числа впрыскиваемых в горящий факел жидких капель на давление в химическом реакторе. Представлены графические зависимости указанных параметров от количества этих частиц для различных значений коэффициента избытка окислителя и диаметров капель. Делается попытка учесть взаимодействие частиц в горящем факеле в излагаемой математической модели процесса.

Библ. 6, ил. 2.

УДК 539.3

Тарновский Е.И. Экспериментальное изучение общих закономерностей в поведении замкнутых цилиндрических оболочек и панелей. — В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 66-69.

Экспериментально исследуется устойчивость круговой цилиндрической оболочки и панели, прямоугольной в плане, при воздействии неравномерного внешнего давления. Устанавливается аналогия в поведении этих элементов конструкций как в характере изменения критических нагрузок от величины площадки нагружения, так и в форме потери устойчивости. Исследования проводились на образцах из алюминиевого сплава Д16Т и текстолита ПТ.

Библ. 4, ил. 4, табл. I.

УДК 539.374

Белоусова Г.И., Мидуков В.З. К теории пластичности порошковых материалов с эффектом дилатансии.- В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 70-72.

Как обобщение результатов опытов над пористыми заготовками в работе приводятся соотношения, связывающие приращения деформации с напряжениями. Соотношения построены на основе ассоциативного закона течения, но учитывают отклонение вектора приращения деформации от нормали к поверхности пластичности. Наблюдаемое экспериментально отклонение связано с появлением дополнительной сжимаемости, появляющейся при критическом значении параметра, который характеризует вид напряженного состояния.

Библи. 2, ил. 2.

УДК 539.214 : 539.374

Кудинов А.Н., Дмитриев С.В. Влияние начальной погиби на деформирование и неупругую устойчивость стержней.- В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 73-78.

В работе численно и экспериментально исследуется процесс деформирования и выпучивания стержней малой гибкости. Задача о плоском напряженном состоянии решалась методом конечных элементов с учетом физической и геометрической нелинейности. Экспериментально определялись предельные нагрузки стержней и кривые "максимальный прогиб - нагрузка". Делается вывод о значительном влиянии погиби на устойчивость стержней.

Библи. 7, ил. 6.

УДК 539.3 : 534.1

Масловский В.И. Устойчивость цилиндрической оболочки при многоэтапном нагружении неравномерным давлением.- В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 79-86.

С позиций локальной теории устойчивости рассматривается устойчивость шарнирно-опертой цилиндрической оболочки при многоэтапном нагружении секторными внешним и внутренним давлением. Докритическое состояние рассчитывается в рамках линейной теории оболочек. Результаты представлены в виде графиков, проводится сравнение с данными экспериментов.

Библи. 4, ил. 1.

УДК 539.3

Лев И.А., Павлов С.Л. Решение задачи упругого антиплоского деформирования методом граничных вариационных уравнений. - В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 84-89.

Рассмотрен алгоритм решения смешанной задачи упругого антиплоского деформирования методом граничных вариационных уравнений. Проведен численный расчет для тела, имеющего на контуре поперечного сечения угловые точки. Приведена эпюра интенсивности касательных напряжений на контуре.

Биол. 2, ил. 2.

УДК 539.37 : 537.2 : 536.7

Стахин И.А. Термодинамические соотношения для диэлектриков в электрическом поле. - В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 90-95.

В рамках теории упругости конечных деформаций рассмотрена электростатика твердых анизотропных диэлектриков, записана адiabатическая часть термодинамического потенциала, внутренняя энергия, производными которого являются компоненты тензора термодинамических напряжений и составляющие вектора напряженности макроскопического электрического поля.

Биол. 7.

УДК 539.374

Макаров П.В. Учет пластических поворотов при деформировании металлов ударными волнами. - В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 96-100.

Предлагается модель, позволяющая описать поведение упруговязкопластического материала при высокоскоростной деформации. Полная скорость пластического сдвига представлена как сумма трансляционной и поворотной составляющих. На микроскопическом уровне пластическая деформация с поворотами рассматривается в рамках дислокационно-дисклинационных представлений.

Биол. 4.

УДК 539.374

Глазырин В.П., Платова Т.М. Вязкие свойства металлов при импульсном нагружении. — В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 101-109.

На основе известных экспериментальных данных квазистатических испытаний и моделирования плоских ударно-волновых профилей построено определяющее соотношение, связывающее скорость пластической деформации, пластическую деформацию и сдвиговое напряжение. Проведен расчет плоских волн первичного и последующих ударных нагружений. Рассчитаны профили напряжения течения и коэффициент вязкости.

Библ. 10, ил. 6.

УДК 539.374 : 534.16

Лукова Т.В., Макаров П.В., Скрипняк В.А., Скороспелова Е.Г., Фондеркина Г.Н. Особенности численного решения задачи о распространении волн нагружения в металлах с учетом релаксации. — В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 110-116.

В работе обсуждаются особенности численного решения задач высокоскоростного удара с определяющими уравнениями релаксационного типа в одномерной и двумерной постановке. Приведена модификация разностной схемы второго порядка точности типа крест для расчета одномерных течений. В двумерной постановке задача решена методом конечных элементов. Предполагается, что компоненты девиатора напряжений релаксируют пропорционально интенсивности сдвиговых напряжений.

Библ. 4, ил. 1.

УДК 539.3

Аржанников Г.А. Оценка прочности автоскрепленного цилиндра при импульсном нагружении. — В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 117-122.

Рассчитывается остаточное напряженное состояние автоскрепленного цилиндра при импульсном нагружении. Оценивается прочность автоскрепленного цилиндра. Получена статическая и динамическая оценка прочности цилиндров различной толщины.

Библ. 3, ил. 3, табл. 1.

УДК 539.4.019

Горельский В.А., Платова Т.М., Радченко А.В., Хорев И.Е. Моделирование разрушения набора пластин при динамическом нагружении с учетом их взаимодействия. — В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 123–130.

В работе приведены результаты численного моделирования процесса разрушения набора пластин с учетом их взаимодействия. Задача решалась в осесимметричной постановке в рамках сжимаемого прочного материала, характеризующегося модулем сдвига, динамическим пределом текучести и константами разрушения. Процесс разрушения описывался кинетической моделью зарождения и развития микроповреждений активного типа. Приведены хронограммы внедрения с изолиниями удельного объема трещин и энергией пластических деформаций.

Библ. 3, ил. 4.

УДК 539.3

Горельский В.А., Хорев И.Е., Югов Н.Т. Численное моделирование трехмерных задач динамики твердых деформируемых тел. — В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 131 – 135 .

В рамках модели сжимаемой упругопластической среды в трехмерной постановке проведено численное моделирование процесса несимметричного динамического взаимодействия твердых деформируемых тел. Рассмотрено соударение под углом 30° цилиндрического ударника диаметром 18 мм, длиной 60 мм, который имел конусообразную переднюю часть с углом раствора при вершине 120° с пластиной толщиной 10 мм. Материал соударяющихся пар – сталь, скорость взаимодействия 800 м/с. Приведены конфигурации соударяющихся тел в различные моменты времени, а также графики изменения составляющих скоростей на оси симметрии ударника и пластины.

Библ. 4, ил. 3.

УДК 533.6.011

Афанасьева С.А., Пучкова Н.А. Численное исследование взаимодействия летящей со сверхзвуковой скоростью модели с плоской ударной волной при встрече под углом. - В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 136 - 141 .

Рассмотрена двумерная задача о взаимодействии летящей со сверхзвуковой скоростью модели с плоской ударной волной при встрече под углом. В численных расчетах использовался метод крупных частиц в рамках модели идеального газа. Исследовано влияние интенсивности ударных волн, угла встречи модели с ударной волной при заданном числе Маха начального потока газа на отклонение модели относительно центра масс за период времени, соответствующий прохождению ударной волны вдоль летящей модели, на её длину .

Библ. 8, ил. 5.

УДК 539.3

Панин В.Е., Гриняев Ю.В. , Гриняева И.А. Вихревой характер пластического течения твердых тел. - В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 142 - 146 .

Рассматривается обоснование вихревого характера пластической деформации твердых тел на основе континуальной теории дефектов. Получены динамические уравнения, включающие масштабный фактор.

Библ. 2.

ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Редактор Г.Г. Иванова
ИБ 1694

Подписано в печать 15.01.87г. КЗ 06034

Формат 60 x 84 1/16. Бумага типографская № 3.

Печать офсетная. Печ.л. 10,0. Усл.печ.л. 9,3. Уч.-изд.л. 7,2.

Тираж 300 экз. Заказ 201

Цена I р. 10 к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4
Ротапринт ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4

1-650968
Digital Library (repository)
of Tomsk State University
<http://vitalib.tsb.ru>

Томский государственный университет 1878



Научная библиотека 01013596



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТОМСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА