Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

КОНТРОЛЬНЫЙ ЛИСТОК
СРОКОВ ВОЗВРАТА

КНИГА ДОЛЖНА БЫТЬ
ВОЗВРАЩЕНА НЕ ПОЗЖЕ
УКАЗАННОГО ЗДЕСЬ СРОКА

КОЛИЧ. ПРЕДЫД. ВЫДАЧ

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ПРИ ТОМСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Под редакцией кандидата физико-математических
наук А. В. Жукова

1-788993

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА ТГУ
ДЛЯ КНИГ

ТГУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1991

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Механика деформируемого твердого тела: Сборник статей/Под **ред.** А. В. Жукова.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991.— 140 с.— 1 р. 60 **к.** 500 экз. 1603040000.

В сборник включены экспериментальные и теоретические работы по различным разделам механики деформируемого твердого тела: теории упругости, теории оболочек, деформирования и разрушения тел при высокоскоростном взаимодействии, динамическому нагружению конструкций, определению физико-механических характеристик материалов.

Для научных сотрудников, инженеров и аспирантов, занимающихся вопросами механики деформируемого твердого тела.

Рецензент — Л. В. Комаровский

$$\text{М}\,\frac{1603040000}{177(012)-91}\,53-89$$

© НИИПММ при Томском университете, 1991

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ УДАРНОМ, ДИНАМИЧЕСКОМ И КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

В. Н. Барашков, А. В. Герасимов, Б. А. Люкшин

Рассмотрим вопросы расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) осесимметричных оболочечных упругопластических конструкций при нестационарном нагружении. Поскольку интенсивность нагрузок принимается достаточно высокой, процессы деформирования протекают с проявлением физической и геометрической нелинейностей, реализация соответствующих математических моделей проводится с ориентацией на использование численных методов.

Обычно оценки получаемых численными методами результатов выполняются в рамках реализуемых ими моделей сопоставлением с решением тестовых задач, путем исследования внутренней сходимости алгоритма при изменении конечно-разностных сеток, по точности выполнения граничных условий и т. д. Как правило, этим обосновывается достоверность получаемых результатов, хотя следовало бы говорить о правильности реализации предложенной модели.

В настоящей работе на примере решения конкретной задачи о НДС конструкции с помощью физического и математического моделирования рассмотрен подход к проблеме с позиций системного анализа, когда для одной и той же конструкции создается не одна модель, а целый ряд, семейство моделей различного уровня сложности. Сопоставление получаемых с их использованием результатов позволяет без привлечения ограниченных экспериментальных данных сделать достаточно обоснованные оценки границ применимости и точности различных моделей, а также разработать наиболее экономичную схему расчета.

Конструкция в виде оболочки вращения переменной толщины при нагружении нестационарным внутренним давлением рассматривается следующим образом:

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

— по теории оболочек в динамической постановке;

— с позиций пространственной теории упругости и пластичности с привлечением соотношений деформационной теории пластичности А. А. Ильюшина в квазистатической постановке;

— согласно теории течения упругоидеальнопластических тел по методу Уилкинса [1].

1. В основу определения НДС конструкции согласно теории оболочек положены два уравнения осесимметричного движения оболочки вращения, записанные с учетом гипотез Кирхгоффа—Лява [2]:

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N_1}{\partial s} + (N_2 - N_1)\frac{\sin\alpha}{R} - \frac{1}{R_1}\left[\frac{\partial M_1}{\partial s} + (M_2 - M_1)\frac{\sin\alpha}{R}\right] + q_1(s, t);$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_1}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}\left[(M_2 - M_1)\frac{\sin\alpha}{R}\right] + \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} + q_3(s, t) - \left[\frac{\partial M_1}{\partial s} + (M_2 - M_1)\frac{\sin\alpha}{R}\right]\frac{\sin\alpha}{R}. \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность материала оболочки; h — толщина; u, w — перемещения вдоль меридиана s и по нормали к срединной поверхности, причем положительное направление нормали принято в сторону оси вращения; N_1, N_2 — усилия; M_1, M_2 — моменты; R — текущий радиус; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности; α — угол, составляемый касательной к меридиану с осью вращения, причем $\alpha > 0$, если при движении вдоль оси радиус $R(s)$ убывает; t — физическое время; q_1, q_3 — составляющие внешней нагрузки вдоль меридиана и нормали к срединной поверхности соответственно.

Дополняя эти уравнения геометрическими соотношениями, а также записав усилия и моменты через деформации и кривизны с использованием соотношений деформационной теории пластичности, учитывая начальные и граничные условия, получаем математическую модель, исследование которой позволяет оценить параметры НДС оболочечной конструкции при заданном нагружении.

Ниже принимается, что скорость приложения и длительность действия нагрузки таковы, что можно пренебречь инерционными эффектами в срединной поверхности оболочки, но

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

нельзя не учитывать инерцию элемента оболочки вдоль нормали к срединной поверхности. В этом случае в первом из уравнений движения в меридиональном направлении левой частью можно пренебречь, и оно становится квазистатическим, содержащим время как параметр, входящий в нагрузку. Второе уравнение вида не меняет.

Предлагается следующая схема численной реализации получаемой системы уравнений. После введения пространственной разностной сетки $s_i = \{i\Delta s,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ I,\ \Delta s = l/I\}$ и соответствующих сеточных функций вида $u_i(t) = u(s_i,\ t)$ и т. п., во втором уравнении все пространственные дифференциальные операторы заменяются разностными. Относительно сеточных функций прогибов можно построить систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2 w_i(t)}{dt^2} - \overline{f}_i(u_j,\ w_k\ t),\ (i,\ j,\ k=0,1,\ldots I),$$

которая после приведения к нормальной форме Коши решается методом типа Рунге—Кутта второго порядка точности [3]. Первое из уравнений движения (1) после перехода к деформации и кривизнам и далее к перемещениям принимает вид

$$a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + a_1 \frac{\partial u}{\partial s} + a_0 u = f(w,\ t), \qquad (2)$$

а после перехода к сеточным функциям и разностным аппроксимациям дифференциальных выражений приводится к системе трехточечных уравнений, решаемой при известной правой части методом прогонки. Коэффициенты этой системы a_1, a_2, a_0 включают в себя геометрические и физико-механические характеристики конструкции.

В целом так называемая явно-неявная, или полуявная, схема представляет собой следующий алгоритм. На очередном шаге по времени решается второе уравнение при известной из решения на предыдущем шаге или начальных условий правой части. Полученные в конце этого шага значения прогибов w_i используются для построения правой части в разностном аналоге уравнения (2), решаемом прогонкой. После расчета деформаций, кривизн, усилий и моментов процесс вычислений можно циклически продолжать для перехода на следующие временные слои. Опыт проведения расчетов показывает хорошую устойчивость этой схемы и применимость ее для решения задач определения НДС оболочек при дина-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

мическом нагружении, причем затраты времени на проведение расчетов значительно сокращаются по сравнению с временем реализации неупрощенных уравнений (1). Сравнительно легко решаются задачи с учетом геометрической и физической нелинейностей. В последнем случае параметры нелинейности принимаются определенными из решения на предыдущем временном слое.

При расчете составной оболочки возможны следующие варианты. В первом из них составная конструкция представляется единой оболочкой с переменным радиусом $R(s)$. Погрешность возникает за счет того, что бесконечно малый радиус кривизны в зоне углового стыка заменяется конечной величиной в результате кусочно-линейной аппроксимации меридиана и далее определения радиуса или кривизны путем численного дифференцирования. Второй вариант заключается в представлении секций отдельными оболочками и использовании в зоне стыка условий непрерывности кинематических и статических (динамических) величин. При численной реализации этот подход более сложен, и в работе использован первый вариант, когда не выделяется специальным образом зона стыка, т. е. используется своего рода схема «сквозного счета». Возникающая при этом погрешность оценивается по влиянию параметров конечно-разностной сетки в зоне стыка на численные результаты.

2. Описанный выше подход позволяет получить оценки параметров напряженного состояния конструкции в виде усилий и моментов, при этом конкретный закон распределения напряжений по толщине связан с используемыми гипотезами теории оболочек.

В свободной от этого недостатка пространственной постановке решение задачи об упругопластическом НДС осесимметричной конструкции при квазистатическом нагружении исследуется при помощи вариационно-разностного метода (ВРМ). Он базируется на принципе Лагранжа

$$\delta Э=0, \tag{3}$$

где Э — полная потенциальная энергия системы деформируемое тело — внешние нагрузки. Решение задачи заключается в нахождении поля радиальных и осевых перемещений, доставляющих минимум функционалу Э, при этом уравнения равновесия и статические граничные условия выполняются как следствие (3), а геометрические и физические соотношения закладываются в формулировку функционала. В целом в таком виде вариационная задача эквивалентна дифференци-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

альной постановке задачи теории упругости и пластичности. После введения конечно-разностной сетки, покрывающей всю расчетную область, в силу осевой симметрии, представляющей собой половину осевого сечения конструкции, и аппроксимации дифференциальных операторов разностями, а интегралов — суммами, проблема сводится к определению минимума получаемой функции многих переменных. Дискретизация расчетной области четырехугольными ячейками достаточно произвольной формы проводится таким образом, чтобы в пределах одной ячейки физико-механические характеристики материалов не терпели разрывов. Сами по себе эти ячейки должны быть достаточно малыми, тогда в пределах каждой из них все функции и их производные можно считать постоянными. Аппроксимация производных проводится с помощью соотношений вида [1]:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_j \cong -\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (u_{i+1}+u_i)(z_{i+1}-z_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} (z_{i+1}+z_i)(r_{i+1}-r_i)}; \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j \cong \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (u_{i+1}+u_i)(r_{i+1}-r_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} (z_{i+1}+z_i)(r_{i+1}-r_i)},$$

где n — число вершин ячейки (в рассматриваемом случае $n=4$), i — номер вершины; j — номер самой ячейки. Искомыми переменными являются, таким образом, компоненты вектора перемещений в узлах сетки.

Существуют два главных пути реализации задач с применением ВРМ в описываемом его варианте. Первый из них связан с минимизацией функции прямым путем с помощью методов, разработанных, в частности, применительно к проблемам многопараметрической оптимизации, среди которых наибольшее распространение получили метод локальных вариаций, сопряженных градиентов и наискорейшего спуска. Второй путь заключается в использовании необходимого условия экстремума функции многих переменных (потенциальной энергии системы Э) в положении равновесия

$$\frac{\partial Э}{\partial u_3}=0;\ \frac{\partial Э}{\partial w_p}=0\ (s=s1,\ s1+1,\dots,\ S,\ p=p1,\ p1+1,\dots,P). \tag{5}$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Тем самым задача минимизации функции многих переменных сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно искомых компонент вектора перемещений в узлах конечно-разностной сетки. Опыт показывает, что наименьшие затраты времени ЭВМ на минимизацию функции на каждой итерации требуются во втором варианте — при использовании необходимого условия экстремума функции и решении получаемых систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Использование ВРМ позволяет получить оценки параметров НДС в любой точке конструкции (с точностью до шага сетки) в виде компонент тензоров напряжений и деформаций [4]. Объем вычислений определяется в основном параметрами конечно-разностной сетки и задаваемой точностью решения упругопластической задачи. Что касается линейной упругой задачи, то для сетки с 250 узлами (500 неизвестных) ее решение на БЭСМ-6 требует около 6 с времени центрального процессора.

3. В описанной выше оболочечной расчетной схеме учитывается, хотя и не в полном объеме, волновой характер деформирования конструкции. В пространственной схеме, реализуемой с помощью ВРМ, более детальные оценки НДС получаются без учета волновых эффектов. Объединение достоинств этих подходов, когда в пространственной постановке учитывается волновой характер деформирования, возможно в рамках метода расчета упругопластических течений [1]. В соответствии с этим методом деформирование рассматривается в лагранжевой сетке, движущейся вместе со средой, в то время как зависимые переменные в этом методе соответствуют эйлеровой системе координат. Для расчета течения при пластической деформации используется процедура приведения компонент девиатора напряжений на круг текучести. Метод широко используется при расчете высокоскоростных процессов, как правило, длительностью не более десятков микросекунд. Это связано с тем, что условия устойчивости вычислительного алгоритма накладывают достаточно жесткие ограничения на величину шага по времени и для относительно длительных процессов требуется большой объем вычислений.

4. Пример расчета оболочечной конструкции при действии нестационарного внутреннего давления приведен для случая, когда оболочка состоит из двух состыкованных секций — цилиндрической и конической. Длина каждой составляет $l/2=0{,}45$ м; радиус цилиндрической части $R=0{,}26$ м; радиус меньшего основания конической секции $R_k=0{,}12$ м; толщина

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

оболочки постоянна $h=0{,}004$ м. Материал моделируется упругопластическим телом с линейным упрочнением. Модуль упругости $E=2\cdot 10^{11}$ Па, модуль упрочнения в конкретных случаях менялся от $E/10$ до 0, в последнем случае, по существу рассматривается упругоидеальнопластическое тело; предел текучести $e_s=0{,}002$; коэффициент Пуассона $\nu=0{,}35$; плотность $\rho=7860$ кг/м³.

Сопоставление результатов расчетов проводится по величинам, получающимся во всех трех описанных схемах. К таким, в частности, можно отнести радиальные перемещения.

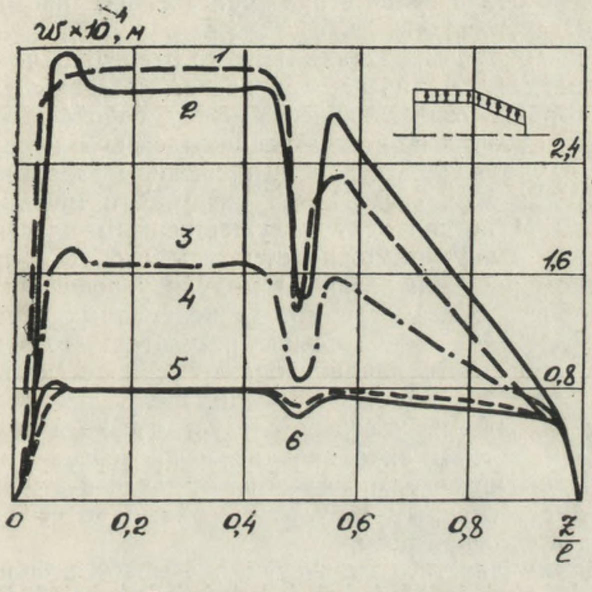


Рис. 1. Радиальные перемещения оболочки при внутреннем давлении 3 МПа: *1* — теория оболочек, 168 мкс; *2* — пространственный подход, 168 мкс; *3* — статическое решение; *4* — аналитическое решение, задача Ламе; *5* — теория оболочек, 84 мкс; *6* — пространственный подход, 84 мкс

На рис. 1 приведены зависимости этих перемещений от осевой координаты z и (в случае исследования нестационарного переходного процесса) для различных моментов времени t. Внутреннее давление нарастало по линейному закону до момента времени 100 мкс и далее оставалось постоянным при решении задач в динамической постановке. Статическая задача решалась при амплитудном значении этого давления,

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

равном 3 МПа. Этот уровень нагрузки соответствует упругой области работы материала. Пространственная динамическая задача дает эпюру перемещений *2*, которые являются максимальными за все время переходного процесса, далее начинаются уменьшение прогибов и колебания около некоторого равновесного положения. Это положение хорошо определяется статическим решением, полученным в пространственной постановке с помощью ВРМ (кривая *3*). Для цилиндрической части оболочки кривой *4* показано решение, полученное аналитическим путем. Кривые *5*, *6* показывают величины перемещений по оболочечной и пространственной динамическим схемам соответственно.

Как и следовало ожидать, в области относительно небольших упругих деформаций все три расчетные схемы дают достаточно хорошо согласующиеся между собой результаты. Однако эта ситуация не всегда реализуется в более сложных расчетных случаях. Так, на рис. 2 приведены радиальные перемещения для всех схем, когда нагрузка с максимальной величиной 9 МПа приводит к существенным пластическим деформациям. Попутно можно отметить, что если при квазистатическом решении величина модуля упрочнения влияет как на скорость сходимости метода переменных параметров упругости, так и на окончательные результаты, то в динамической постановке это влияние практически не сказывается, по крайней мере в рассмотренном примере.

Из приведенных результатов следует, что хотя каждая из представленных схем апробирована и проверена на достаточно большом круге разнообразных задач и в этом смысле приводит к достоверным результатам, сами по себе модели могут давать большой разброс.

Учет динамичности нагружения оказывается более важным, нежели учет пространственного характера НДС конструкции: при хорошем качественном согласовании количественные различия в результатах по оболочечной и пространственной динамической схемам относительно невелики. Разумеется, этот вывод справедлив для тонкостенных конструкций.

Как уже отмечалось, расчетная схема, основанная на использовании соотношений теории оболочек, может дать лишь приближенное представление о характере распределения параметров НДС по толщине конструкции, причем этот характер в значительной мере определяется заложенными в схему гипотезами теории оболочек, пространственные же подходы дают возможность определить параметры НДС в любой точке конструкции. Характерный в этом смысле пример приведен

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

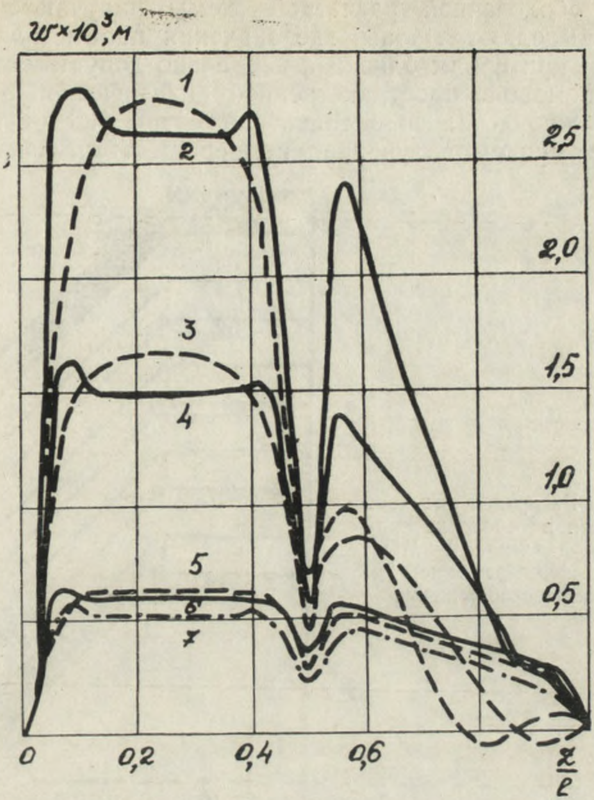


Рис. 2. Радиальные перемещения оболочки при внутреннем давлении 9 МПа: *1, 2,* — оболочечная и пространственная схемы, 295 мкс; *3, 4* — 211 мкс; *5, 6* — 127 мкс; *7* — статическое решение

на рис. 3, где штриховкой выделены ячейки конечно-разностной сетки, материал в которых работает за пределами упругости.

Влияние нестационарности нагружения на параметры НДС в этом примере оказывается довольно значительным. В остальных частях оболочечной конструкции, не показанных на рисунке, возникающие деформации не превышают предела упругости, этот результат получается по оболочечной и пространственной схемам.

Итак, расчет сложной конструкции можно проводить следующим образом. На первом этапе с помощью относительно

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

простой оболочечной расчетной схемы получаются оценки НДС и выделяются зоны, где значения параметров по тем или иным критериям близки к предельно допустимым. После этого с помощью пространственной динамической расчетной схемы можно детально оценить параметры НДС в выделенной зоне, причем полученная на первом этапе информация

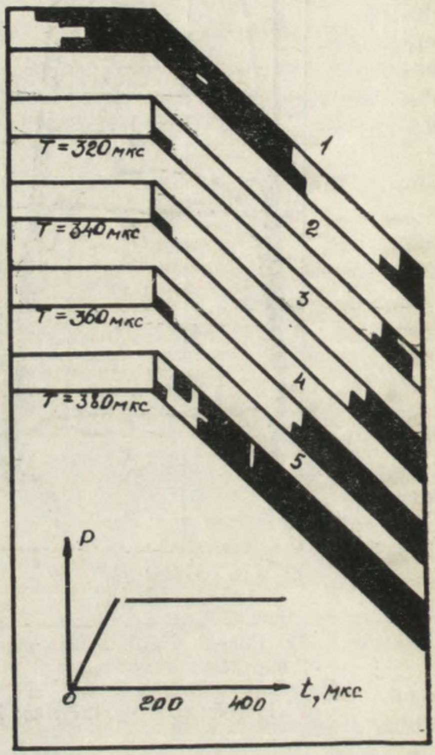


Рис. 3. Распределение зон пластичности в оболочке при внутреннем давлении 9 МПа: *1* — статическое решение; *2*—*5* — динамическое решение

может служить для постановки в интегральном виде граничных условий для выделенной расчетной области. Объем вычислительных работ резко уменьшается по сравнению с вариантом, когда конструкция полностью рассчитывается по пространственной схеме, т. к. использование простой схемы позволяет сузить область, требующую анализа на основе более полной расчетной модели. Что касается решения задачи в статической постановке, оно может, с одной стороны, давать оценки влияния динамичности нагружения, с другой — служить эталоном, к которому должно стремиться решение динамической задачи при уменьшении скорости нагружения.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ЛИТЕРАТУРА

1. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений//Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212—263.

2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963.

3. Уорминг, Кутлер, Ломакс. Нецентральные разностные схемы II и III порядков точности для решения нелинейных уравнений гиперболического типа//Ракетн. техн. и космонавт. 1973. Т. 11. № 2. С. 76—86.

4. Барашков В. Н. К расчету упругопластических осесимметричных деформаций//Теория упругости и пластичности. Томск: Изд-во ТГУ, 1978. С. 3—10.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Н. П. Бекетов, А. П. Варочкин, В. Н. Лихачев, Б. А. Люкшин

Несимметричное выпучивание цилиндрических оболочек и оболочек вращения более общего вида рассмотрено в относительно небольшом количестве работ, среди которых в качестве примера можно отметить [1—5]. Проблема эта при всей ее очевидной практической значимости исследована недостаточно.

В данной работе проводится физическое и математическое моделирование процессов упругопластического деформирования оболочек вращения при нестационарном несимметричном нагружении. В основу теоретического исследования положена модель оболочки, основанная на гипотезах Кирхгоффа — Лява. Предварительные исследования [5] показали, что для рассматриваемого ниже вида нагружения и параметров конструкции использование, например, более точной модели типа Тимошенко не приводит к существенному изменению результатов. Уравнения движения, учитывающие инерцию элемента оболочки в направлениях вдоль срединной поверхности и по нормали, принимаются в виде [6]:

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N_{12}}{\partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial s} + (N_2 - N_1)\frac{\sin\alpha}{R} - \frac{1}{R_1}\left[\frac{\partial M_1}{\partial s} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} + (M_2 - M_1)\frac{\sin\alpha}{R}\right] + q_1;$$

$$\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial N_{12}}{\partial s} + 2\cdot N_{12}\frac{\sin\alpha}{R} - \frac{1}{R_2}\left[\frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial M_{12}}{\partial s} + 2M_{12}\frac{\sin\alpha}{R}\right] + q_2;$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_1}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial s \partial y} + \frac{\partial}{\partial s}\left[(M_2 - M_1)\frac{\sin\alpha}{R}\right] -$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[2M_{12}\frac{\sin\alpha}{R}\right] - \frac{\sin\alpha}{R}\left[\frac{\partial M_1}{\partial s} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} + \frac{\sin\alpha}{R}(M_2 - M_1)\right] +$$
$$+\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} + q_3. \qquad (1)$$

Здесь u, v, w — перемещения вдоль меридиана, окружной координаты и нормали к срединной поверхности оболочки соответственно; s, y, z — оси системы координат; ρ — плотность материала; h — толщина оболочки; N_1, N_2, N_{12} — усилия; M_1, M_2, M_{12} — моменты; R — текущий радиус срединной поверхности; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны; α — угол, составляемый меридианом с осью вращения, причем $\alpha > 0$, если при движении вдоль оси радиус R убывает; t — время; q_1, q_2, q_3 — составляющие внешней нагрузки вдоль осей.

Дополняя выписанные соотношения нулевыми начальными условиями, граничными условиями для конкретных случаев заделки и нагружения торцов, а также геометрическими соотношениями, которые при численном решении могут приниматься нелинейными, и выражениями для усилий и моментов с учетом возможности упругопластического деформирования материала по теории малых упругопластических деформаций А. А. Ильюшина, получаем замкнутую математическую постановку задачи. При этом необходимо принимать во внимание условия периодичности решения в окружном направлении, а также зависимость компонент вектора внешней нагрузки в общем случае от пространственных координат и времени.

Решение сформулированной существенно нелинейной задачи проводится с помощью численного алгоритма, который кратко может быть описан следующим образом. После введения пространственной сетки и соответствующих сеточных функций дифференциальные операторы в правых частях уравнений (1) заменяются разностными аппроксимациями, и получаемая система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно сеточных функций приводится к нормальной форме Коши. Далее решение ведется по схеме типа предиктор — корректор, причем использование уравнений движения в смешанной форме (1) позволяет относительно просто учесть историю нагружения материала.

Условия устойчивости вычислительного алгоритма налагают достаточно жесткие ограничения на шаг по времени, и

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

расчет даже небольшого временного интервала требует большого объема вычислений. В случае, когда длительность нагружения позволяет рассматривать нагрузку как динамическую [8], можно на основе очевидных физических представлений внести изменения в систему (1), связанные с пренебрежением волновым характером деформирования в срединной поверхности или с инерцией элемента оболочки. Так, в первых двух уравнениях (1) будем пренебрегать членами $\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$. Движение оболочки тогда описывается системой трех уравнений, два из которых квазистатические, содержащие время как параметр, и лишь третье, остающееся без изменений, является динамическим. Соответственно трансформируется и вычислительный алгоритм.

Расчет проводится по так называемой явно-неявной схеме: принимая величины u, v известными во всех узлах сеточной области из начальных условий, решаем третье уравнение по упомянутой выше схеме предиктор — корректор, получая значения w на следующем временном слое. После этого матричной прогонкой определяются величины u, v, и далее процесс вычислений повторяется для перехода на следующий временной слой. Такая схема позволяет вести расчет со значительно большим временным шагом и рассматривать процессы динамического нагружения оболочек в смысле [8].

При наличии плоскости симметрии в нагружении и процессе деформирования объем вычислений уменьшается практически вдвое за счет уменьшения расчетной области и соответственно числа узлов.

Экспериментальные исследования проводились на точеных оболочках (длина 0,1 м; толщина 0,002 м; радиус 0,027 м). Нагружение в осевом направлении проводилось в ударной установке, представляющей собой манометрическую бомбу с подвижным поршнем [9]. Осевой удар наносился по жесткой крышке, закрывающей торец оболочки, при этом заранее задан эксцентриситет приложения нагрузки, что позволяет для любого момента времени определить осесимметричную составляющую нагрузки и изгибающий момент, приложенные к торцу. Второй торец оболочки неподвижно опирается на жесткое основание.

Особое внимание уделялось разработке средств регистрации, применяемых для исследования процессов в элементах конструкций при ударных и динамических нагрузках. Поскольку серийно выпускаемые отечественные ЭВМ не имеют

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

аппаратных средств, позволяющих использовать тензометрическую аппаратуру, непосредственно состыкованную с ЭВМ. были проведены соответствующие исследования. Акцент сделан на повышение быстродействия и помехоустойчивости, т. к. протяженность соединительных линий, большая энерговооруженность ударных установок приводят к возникновению помех, сравнимых по уровню с информативным сигналом и даже превышающим его.

Разработанный вариант информационно-измерительной системы (ИИС) представляет собой двухканальное автоматизированное устройство для тензометрии импульсных испытаний, предназначенное для сбора, обработки и регистрации измерительной информации о динамике деформаций и напряжений, поступающих от тензодатчиков. Приведем технические характеристики системы: число каналов — 2; быстродействие от 10^6 до $\frac{1}{n} \cdot 10^6$ измерений/с, где $n=2, 4, 8, 16$; длительность измеряемого процесса — 2, 4, 8, 16 мс; число разрядов АЦП измерительно-преобразовательного блока — 6; число записываемых точек измеренных значений параметра в каждом канале — 2048; тип датчиков — тензорезисторы с $R=100$ Ом; динамическая погрешность измерительного канала не более 2%.

Принцип действия устройства описан в [10]. Разработана методика оценки случайной составляющей динамической погрешности, которая позволяет выполнять метрологическую аттестацию измерительных каналов с привлечением ЭВМ измерительно-вычислительного комплекса. Прежде всего находятся усредненные значения, закономерности случайных отклонений в виде средних результатов, т. е. случайная составляющая динамической погрешности измерительных каналов. Необходимость определения именно этой существенной части общей динамической погрешности измерений вызвана тем, что систематическую составляющую можно оценить уже известными экспериментальными или расчетными методами, а все усилия сосредоточить только на случайной составляющей, т. к. она обусловлена различными факторами на входе измерительного устройства и скоростью изменения входного информативного параметра, что наиболее важно при импульсных процессах.

Определение случайной составляющей динамической погрешности основано на сравнении результата преобразования с априорно известным входным периодическим сигналом. При этом измеряются значения ошибок преобразования в не-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

скольких точках периода через равные промежутки времени. При сравнении сигналов необходимо их совмещение по фазе для определения начального отсчета. В разработанной методике совмещение фаз расчетного (эталонного) и входного сигналов производится по первой отсчетной точке каждого периода и не зависит от количества отсчетов, что позволяет повысить частотный диапазон. Суть такого метода состоит в следующем. На вход измерительного канала подается контрольный гармонический сигнал вида

$$u_x(t)=u_m\cdot\sin\omega t,$$

откуда находим $\sin\omega t=u_x(t)/u_m$, $\omega t=\arcsin(u_x(t)/u_m)$.

Поэтому начальный отсчет в каждом периоде находится из соотношения

$$t=\frac{1}{\omega}\arcsin(u_x(t)/u_m),$$

а промежуток времени между отсчетами определяется

$$t_0=\frac{N}{f\cdot n},$$

где n — количество всех отсчетов; N — число периодов; $f=\dfrac{\omega}{2\pi}$.

Определение расчетных точек шкалы преобразования с использованием синусоидальной функции предъявляет жесткие требования к калибратору, который должен обеспечить закон изменения эталонного сигнала для проверяемой полосы частот с высокой точностью, что не всегда возможно из-за его сложности, дороговизны и уникальности. Поэтому целесообразно сначала рассчитать закон изменения входного сигнала, т. к. для этого имеется достаточное количество экспериментальных точек, а затем выявить отклонения показаний АЦП от этого закона в моменты отсчета. В этом случае возможно применять в качестве контрольного сигнал от обычной аппаратуры (не прецизионной). Так как запись контрольного периодического сигнала осуществляется в течение короткого промежутка времени (несколько миллисекунд), то за это время форма сигнала во всех периодах повторяется, имеющиеся отличия несущественны (сотые доли процента).

В разработанной методике закон изменения входного сигнала определяется тремя способами:

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

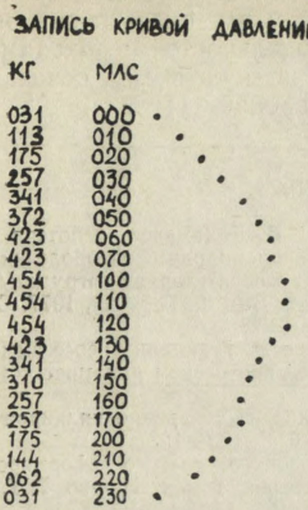


Рис. 1. Экспериментальная кривая давления

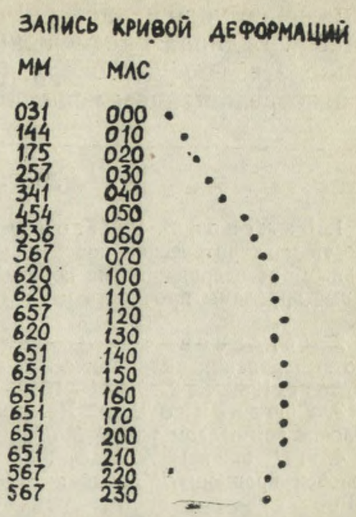


Рис. 2. Экспериментальная кривая деформаций

— нелинейным сглаживанием многочленом третьей степени по 7, 9, 11 очкам;

— регрессионным анализом;

— применением ортогональной системы полиномов Чебышева.

Для предложенной методики разработаны алгоритм и программа на языке БЕЙСИК, проведены метрологические исследования разработанной аппаратуры. На рис. 1 представлена полученная на ЭПМ «Консул» таблица чисел в восьмеричном коде и кривая давления, характеризующие зависимость давления в манометрической бомбе от времени. Аналогичные данные о деформации в точке оболочки на ее наружной поверхности в месте образования складки приведены на рис. 2.

Серии расчетов и экспериментов, выполненные по описанным методикам, показывают хорошее качественное согласование результатов вычислений с натурным экспериментом и возможность получения количественных оценок.

Для математических моделей различного уровня сложности, представленных выше, сделаны оценки их применимости в зависимости от временных характеристик процессов нагружения: для импульса, длительность которого на порядок

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

больше периода пробега упругой волны по длине оболочки, применение упрощенной расчетной схемы оказывается оправданным. В диапазоне меньших длительностей необходимо использовать, вообще говоря, более полную схему, основанную на непосредственном решении уравнений (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов В. Г., Игоничева Е. В. Динамическая потеря устойчивости и закритическое поведение тонкой цилиндрической оболочки с начальными несовершенствами под действием осевой ударной нагрузки//Прикладные проблемы прочности и пластичности. Вып. 6. Горький, 1977. С. 98—106.

2. Богданович А. Е., Фелдмане Э. Г. Анализ неосесимметричного выпучивания цилиндрических оболочек при осевом динамическом сжатии//МТТ. 1982. № 2. С. 144—154.

3. Гордиенко В. А. Несимметричное выпучивание цилиндрических оболочек при осевом ударе//МТТ. 1979. № 6. С. 120—123.

4. Люкшин Б. А. Расчет несимметричного упругого деформирования оболочек вращения//Механика сплошных сред. Томск: Изд-во ТГУ, 1983. С. 3—9.

5. Лихачев В. Н., Люкшин Б. А. Численное исследование неосесимметричного НДС упругопластических оболочек вращения переменной толщины при ударном нагружении//Тез. докл. VIII Всес. конф. по прочн. и пластичн. Пермь, 1983. С. 102.

6. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

7. Уорминг, Кутлер, Ломакс. Нецентральные разностные схемы II и III порядка точности для решения нелинейных уравнений гиперболического типа//Ракетн. техн. и космонавт. 1973. Т. 11. № 2. С. 76—85.

8. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.

9. Барашков В. Н., Люкшин Б. А., Потейко В. Г. Статический расчет оболочек вращения с заполнителем//Труды XII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 1. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1980. С. 131—137.

10. Бекетов Н. П., Боровко Ф. В. Двухканальное автоматизированное устройство для тензометрии импульсных испытаний//Измерительная техника. 1985. № 2. С. 37—38.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

К ВОПРОСУ ОБ ОТКОЛАХ В МЯГКИХ СТАЛЯХ С УЧЕТОМ ПОЛИМОРФНОГО ПЕРЕХОДА

Н. Н. Белов, В. Г. Симоненко

Как показывают экспериментальные данные, полученные при исследовании откольных явлений в металлах, в опытах на железных и из мягких сталей образцах вследствие фазового $\alpha \rightleftarrows \varepsilon$ перехода может произойти два откола, один из которых имеет гладкую откольную поверхность.

Целью данной работы является теоретическое исследование развивающейся в образце картины взаимодействия ударных волн и волн разгрузки, приводящей к двойному отколу в железе при ударном нагружении. Разрушение в материале трактуется как рост сферических пор, при достижении которыми предельной пористости $^*\alpha$ происходит нарушение сплошности.

Модель среды с заданными свойствами взята из работы [1], кинетическое уравнение для роста пор — из [2]. Константы уравнений состояния и железа приведены в [1]. Расчеты проводились для одноосного нагружения, толщина ударника $l_{уд}=0{,}2$ см, толщина преграды $l_п=0{,}4$ см.

Особенности распространения ударных волн в железе с учетом фазового перехода подробно обсуждались в [1], поэтому в данной статье они не будут подробно анализироваться. Волновая картина, приводящая к двойному отколу, прослежена на одном варианте расчета, скорость соударения $u_0=1500$ м/с.

На рис. 1, 2, 3 показана эволюция ударных волн (здесь и далее по тексту приняты следующие сокращения: УВ — ударная волна, ВР — волна разрежения, УВР — ударная волна разрежения). На рис. 4 проиллюстрирована динамика роста пор в областях с концентрацией растягивающих напряжений. Кривые получены в различные моменты времени. Стрелками

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

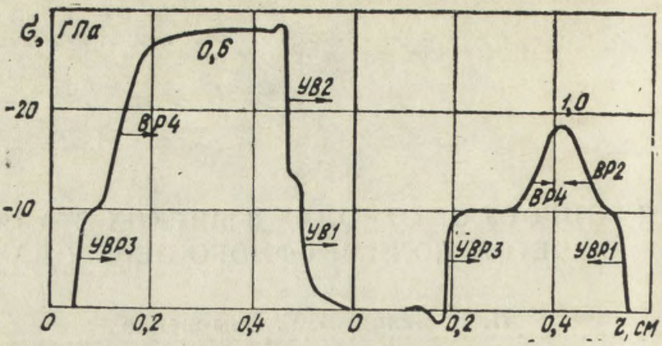


Рис. 1

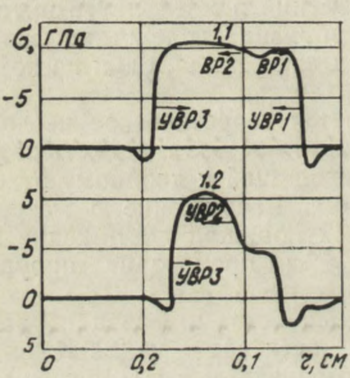


Рис. 2

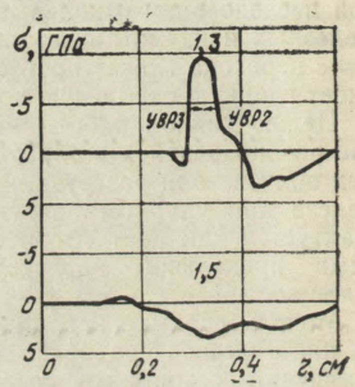


Рис. 3

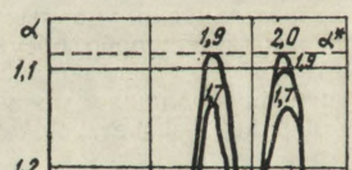


Рис. 4

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

на профилях напряжения обозначены направления распространения УВ и волн, ими порожденных.

В результате удара по бойку и преграде начали распространяться трехступенчатые УВ. К моменту времени $t=0{,}6$ мкс (см. рис. 1) волна, распространявшаяся по ударнику, достигнув свободной поверхности, отразилась в ней волной разрежения ВР4 и ударной волной разрежения УВР3, переводящей материал в исходную α-фазу. В это время УВ, движущаяся по мишени, уже отчетливо приняла свой характерный вид. Она, достигнув свободной поверхности преграды, к моменту времени $t=1{,}0$ мкс, также перешла в две волны — ВР2 и УВР1. Взаимодействие ВР4 с УВР1 (рис. 2) приводит к образованию первой зоны растягивающих напряжений, в которой начинается рост пор с момента времени $t=1{,}2$ мкс. Время роста пор t_1^* в этой области от начального до предельного значения пористости $\alpha^*=1{,}43$ в данном варианте расчета имеет величину $t_1^*=(2{,}0-1{,}2)$ мкс$=0{,}8$ мкс (см. рис. 4). На рис. 3 видно, что к моменту времени $t=1{,}3$ мкс ВР2, переводя ε-фазу в α-фазу, перерождается в УВР2, которая через 0,1 мкс, встретившись с УВР3, образует еще одну зону, где интенсивно активизируется процесс разрыхления материала, причем более интенсивно, чем в первой области, о чем говорит время, затраченное на процесс разрушения. На рис. 4 порообразование в этих двух зонах показано подробно ($t_2^*=(1{,}9-1{,}4)$ мск$=0{,}5$ мкс). Именно в этой области откольная тарелка имеет гладкую поверхность.

Таким образом, можно сделать вывод, что встреча обычных ВР или ВР с УВР приводит к образованию обычного откола, который дает в эксперименте неровную, рваную откольную поверхность. В то же время встреча двух УВР вызывает более интенсивный рост пор в зоне растягивающих напряжений, перепад напряжений имеет более высокую амплитуду, а время t_2^* разрушения в 1,5—2 раза меньше t_1^*, чем объясняется появление гладкой откольной поверхности. Необходимо отметить, что образование ударных волн разрежения, ответственных за принципиальные отличия в картине разрушения, возможно для материалов, испытывающих полиморфные фазовые переходы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков А. В., Корнеев А. И., Симоненко В. Г. Численное моделирование фазовых переходов ударных волнах//Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 4. С. 138—143.

2. Johnson I. N. Dynamic fracture and spallavion in ductile solids// I. Appl. Phys. 1981. Vol. 52. № 4. P. 2812—2825.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ НА ПОДВИЖНЫХ СЕТКАХ

В. А. Гриднева, Н. Н. Меркулова

Актуальность применения подвижных разностных сеток при численном решении на ЭВМ задач механики сплошной среды не вызывает сомнения. Использование подвижных разностных сеток обусловлено неоднородностью областей изменения рассчитываемых величин и необходимостью повышения точности решения при заданном числе узлов сетки. Проведение расчетов на подвижных сетках сопряжено с рядом трудностей. Прежде всего требуется иметь такую разностную схему, которая бы учитывала движение узлов сетки, аппроксимировала исходную дифференциальную задачу и была устойчива. Необходимо также иметь закон движения узлов сетки. При этом желательно, чтобы сетка сама подстраивалась к особенностям рассчитываемых течений.

В данной работе обсуждаются результаты численных расчетов одномерных задач газовой динамики, полученные с использованием подвижных разностных сеток. Расчеты проводились по схеме «распада разрывов» [1]. Подвижные разностные сетки строились с использованием уравнения для управления движением сетки, выведенного в [2] на основе вариационного принципа Остроградского — Гамильтона.

Весь вычислительный алгоритм распадается на несколько этапов: построение разностной схемы на подвижных сетках, исследование ее на аппроксимацию и устойчивость; реализация граничных условий в разностном виде. Коротко охарактеризуем каждый из этапов на примере системы нестационарных уравнений газовой динамики.

По аналогии с [1] разностная схема строится на основе интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии. К ним добавляется уравнение состояния $\varepsilon=\varepsilon(p\rho)$ и уравне-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ние для управления движением сетки [2], записанное в виде интегрального тождества

$$\oint_{\Gamma} \rho w dx - [p - \rho(u-w)(0{,}25\,u - 1{,}25\,w)]dt = 0,$$

где u — скорость среды; p — давление; ρ — плотность; w — скорость сетки.

Разностная схема строится при следующих предположениях:

1) в начальный момент времени $t=0$ газ разбит на слой узлами сетки xc_j;

2) внутри каждого слоя, заключенного между xc_j и xc_{j-1}, величины скорости среды, плотности, давления, энергии и скорости сетки постоянны и равны соответственно

$$u_{j-1/2},\ \rho_{j-1/2},\ p_{j-1/2},\ \varepsilon_{j-1/2},\ w_{j-1/2};$$

3) новые значения этих величин на момент времени $t=\tau$, где τ выбирается из условия устойчивости, обозначим через

$$u^{j-1/2},\ \rho^{j-1/2},\ p^{j-1/2},\ \varepsilon^{j-1/2},\ w^{j-1/2}.$$

Применяя интегральные законы сохранения к ячейке сетки с номером $j-\dfrac{1}{2}$ в течение времени от $t=0$ до $t=\tau$, получаем явные разностные формулы, описывающие приближенно состояние газа в момент времени $t=\tau$:

$$\rho^{j-1/2}(xн_j - xн_{j-1}) - \rho_{j-1/2}(xc_j - xc_{j-1}) + \tau[m_j - m_{j-1}] = 0;$$

$$(\rho u)^{j-2/1}(xн_j - xн_{j-1}) - (\rho u)_{j-1/2}(xc_j - xc_{j-1}) + \tau[n_j - n_{j-1}] = 0,$$

$$m_j = [R(U-W)]_j;\quad n_j = [P + mU]_j;$$

$$\left[\rho\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right)\right]^{j-1/2}(xн_j - xн_{j-1}) - \left[\rho\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right)\right]_{j-1/2}(xc_j - xc_{j-1}) +$$

$$+\tau[k_j - k_{j-1}] = 0,\ k_j = \left(E + \frac{U^2}{2}\right)_j m_j + P_j U_j;$$

$$(\rho w)^{j-1/2}(xн_j - xн_{j-1}) - (\rho w)_{j-1/2}(xc_j - xc_{j-1}) + \tau(l_j - l_{j-1}] = 0,$$

$$l_j = P_j - m_j(0{,}25\,U_j - 1{,}25\,W_j);$$

$$p^{j-1/2} = p(\varepsilon^{j-1/2},\ \rho^{j-1/2}).$$

Здесь U, R, P, E — «большие» величины, значения которых определяются из вспомогательной задачи «распада разрывов» [1]; $xн_j$, xc_j — соответственно новые и старые значения узлов сетки, причем

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$xн_j = xc_j + \tau W_j$; $W_j = W_{j+1/2}$; τ — шаг сетки по времени. Можно показать, что построенная разностная схема аппроксимирует систему нестационарных уравнений газовой динамики с первым порядком по пространственной и временной координате. Устойчивость исследовалась методом А. А. Самарского [3] для линеаризованной модели разностной схемы. Было получено условие, аналогичное приведенному в [1], которое затем обобщалось на случай подвижных разностных сеток. Для каждого интервала сетки сначала определялись величины

$$\tau_{j-1/2} = \frac{xc_j - xc_{j-1}}{\max(c_0 - W_j, -c_0 - W_{j-1})},$$

а затем полагалось

$\tau = \alpha \min\limits_j \tau_{j-1/2}$, где $0 < \alpha < 1$; c_0 — скорость звука в невозмущенной среде.

В работе были рассмотрены несколько видов граничных условий. Приведем некоторые из них.

Рассматривалась модельная задача о поршне [4] в случае, когда поршень вдвигается с постоянной скоростью $u = a$ в полубесконечную трубу, заполненную газом. Расчеты проводились для воздуха в безразмерных переменных; на поршне ставилось граничное условие $U = W = 0, 02$. На рис. 1 представлено поведение подвижной разностной сетки с течением времени. По мере вдвижения поршня в газ точки сетки пос-

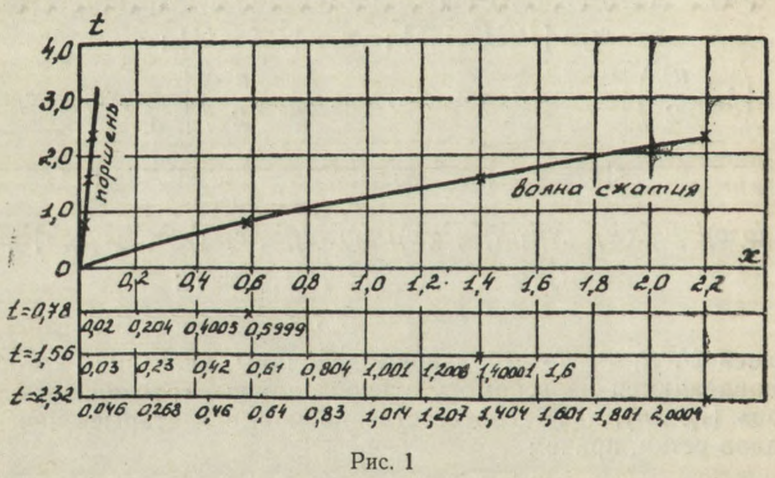


Рис. 1

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

тепенно сгущаются. Полученное на такой сетке численное решение сравнивалось с аналитическим, приведенным в [4]. Относительная погрешность численного решения не превышает 4%. Заметим, что при решении задачи о поршне уравнение состояния выбиралось в виде

$p=\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}}\rho^{\gamma}$, где $\gamma=1{,}4$; $p_0=0{,}7195$; $\rho_0=1$.

Описанный выше вычислительный алгоритм применялся, кроме того, к решению следующей задачи: имеются две массы воздуха с плотностью $\varrho_0=1$, давлением $p_0=0{,}7195$ и скоростью $u_0=0{,}2$ для воздуха слева от точки $x=x^*$ и $u_0=0$ — для воздуха справа от точки $x=x^*$, где x^* — задано. Требуется рассчитать поведение воздуха с течением времени.

В качестве уравнения состояния в этой задаче использовалось уравнение

$$p=(\gamma-1)\rho\varepsilon, \text{ где } \gamma=1{,}4.$$

Ставились следующие граничные условия: на свободной поверхности в газе слева давление $P=p_0$; $W=U$ на свободной поверхности и в точке $x=x^*$ и др.

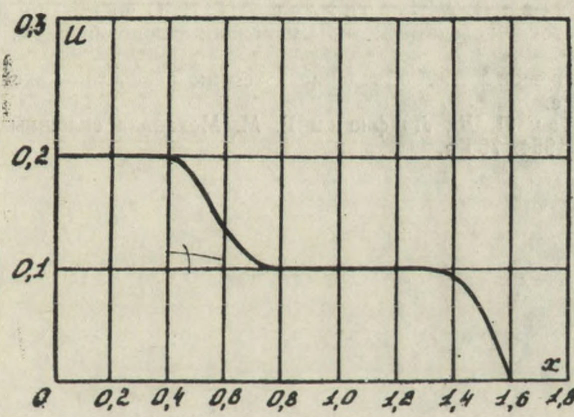


Рис. 2

Как показали расчеты на ЭВМ, граничные условия на скорость сетки существенного влияния на характер численного решения не оказывают. Однако более естественным выглядит поведение сетки в случае, когда во всей области слева в начальный момент времени $W=U=0{,}2$. Тогда сетка с тече-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

нием времени сгущается в окрестности точки $x=x^*$, что приводит к уменьшению шага по времени от $\tau=0{,}08$ до $\tau=0{,}06931$. Затем, когда волна сжатия доходит до свободной поверхности газа слева и отражается от нее, движение сетки постепенно прекращается и шаг по времени устанавливается. При этом давление в газе слева становится равным p_0, а в профиле скорости образуется площадка, значения на которой равны $\frac{u_0}{2}$. Для иллюстрации сказанного на рис. 2 приведен график скорости среды в момент времени $t=0{,}422$.

Полученные результаты обобщены на случай двумерных пространственных задач, в частности, подобные подвижные разностные сетки применены к численному решению задачи о взаимодействии двух металлических тел, одно из которых покоится, а другое ударяется о него с некоторой начальной скоростью u_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука. 1976. 400 с.

2. Гриднева В. А., Меркулова Н. Н. О построении подвижных разностных сеток//Численные методы механики сплошной среды. 1983. Т. 14. № 4. С. 34—44.

3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.

4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ДВУХВОЛНОВОЙ СТРУКТУРЫ УДАРНЫХ ВОЛН И ВОЛН РАЗГРУЗКИ В НЕЛИНЕЙНО-СЖИМАЕМОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В. Н. Демидов

Существуют две причины возникновения сильных разрывов (ударных волн) в полубесконечной невозмущенной упругопластической среде. Если функция $\sigma=\sigma(e)$, характеризующая связь напряжение — деформация для одноосного напряженного состояния, является монотонно возрастающей по e функцией и для всех e производная $d\sigma/de$ — монотонно убывающая функция, т. е. $d^2\sigma/de^2<0$, то единственная причина возникновения ударных волн — это разрыв в краевых условиях (иными словами, импульсное, ударное нагружение). Если же $d^2\sigma/de^2>0$, то ударные волны возникают независимо от начальных и краевых условий (например, при монотонном нагружении). Функция $\sigma=\sigma(e)$ для реальных твердых тел может иметь участки, где производная $d^2\sigma/de^2$ меняет знак. Наличие точек перегиба на диаграмме $\sigma—e$ при определенных условиях приводит к многоволновой структуре ударных волн и волн разгрузки в таких средах.

В настоящей работе анализируется простейший вариант такой ситуации: кривая $\sigma=\sigma(\rho)$, описывающая объемную сжимаемость, состоит из линейного участка и участка с монотонно возрастающей производной $d\sigma/d\rho$, т. е. функция $\sigma=\sigma(\rho)$ имеет точку перегиба. С этой целью рассматривается задача о движении упругопластического полупространства $x_1\geqslant0$, к поверхности которого в момент времени $t=0$ внезапно прикладывается постоянная во времени нормальная нагрузка, действующая до некоторого момента $t=t_*$, которая затем также внезапно снимается (Н-функция Хэвисайда):

$$\sigma_{11}(0, t)=-p_0H(t-t_*). \qquad (1)$$

В рассматриваемой плоской задаче все искомые величины —

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

функции только x_1 и t. Матрицы тензоров напряжений и скоростей деформации будут иметь соответственно вид

$$\|\sigma_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Vmatrix}, \qquad \|\varepsilon_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

где u — компонента скорости в направлении x_1 (в дальнейшем изложении примем $x_1 = x$). Определяющие соотношения, связывающие девиатор тензора напряжений $s_{ij} = \sigma_{ij} + p\,\delta_{ij}$ с девиатором тензора скоростей деформаций $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$, имеют вид [1]:

$$s_{ij}^{\nabla} + \lambda\, s_{ij} = 2\,\mu\, e_{ij}, \tag{3}$$

где s_{ij}^{∇} — производная Яумана

$$s_{ij}^{\nabla} = \frac{ds_{ij}}{dt} - s_{ik}\omega_{jk} - s_{jk}\omega_{ik}, \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right);$$

$\lambda \geqslant 0$ — некоторый скалярный коэффициент, определяемый с использованием конкретного условия пластичности. При условии Мизеса

$$\lambda = \frac{3\,\mu}{\sigma_s^2}\, s_{ij} e_{ij} \tag{4}$$

(μ — модуль сдвига; σ_s — предел текучести при одноосном растяжении), если элемент материала подвергается пластическому нагружению, и $\lambda = 0$ при упругих деформациях. Предполагается известным уравнение состояния материала, связывающее термодинамические параметры: давление p, плотность ρ, внутреннюю энергию ε.

С учетом (2) — (4) полная система уравнений, включающая законы сохранения массы, количества движения, энергии и определяющие уравнения, будет иметь вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, u)}{\partial x} = 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial(\rho\, u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, u^2 - \sigma_{11})}{\partial x} = 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial(\rho(\varepsilon + u^2/2))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, u(\varepsilon + u^2/2) - u\,\sigma_{11})}{\partial x} = 0; \tag{7}$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\frac{\partial s_{11}}{\partial t}+u\frac{\partial s_{11}}{\partial x}-\mu\left(\lambda'\frac{3s_{11}^2}{\sigma_s^2}-\frac{4}{3}\right)\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ s_{22}=s_{33}=-\frac{1}{2}s_{11};\qquad(8)$$

$$p \parallel p(\rho, \varepsilon),\qquad(9)$$

где $\lambda'=0$, если материал находится в упругом состоянии или состоянии упругой разгрузки; $\lambda'=1$ при пластическом нагружении. В качестве конкретного уравнения состояния далее используется зависимость

$$p(\rho, \varepsilon)=(\gamma-1)\rho\varepsilon+c_0^2(\rho-\rho_0),\qquad(10)$$

где γ, ρ_0, c_0 — константы, идентифицирующие материал.

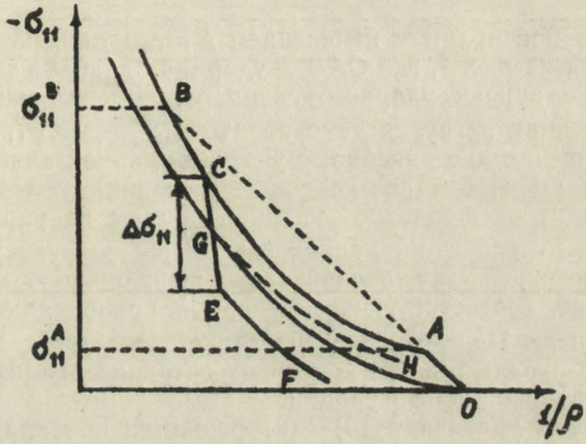


Рис. 1

Таким образом, задача состоит в изучении плоских волн деформаций, характеризуемых трехмерным напряженным и одномерным деформированным состоянием. Задаче распространения плоских упругопластических волн посвящена обширная литература, обзор и библиография по этому вопросу приведены в [2, 3]. Однако в литературе отсутствует решение данной задачи в рамках рассматриваемой здесь модели среды.

Как уже отмечалось, распространение волн в твердых телах сопровождается рядом явлений, не имеющих аналогов в случае газообразных сред. Эти явления обусловлены упругими силами взаимодействия и связаны с наличием точек излома на ударных адиабатах и изэнтропах разгрузки прочных сред. Экспериментальная кривая, связывающая σ_{11} за фрон-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

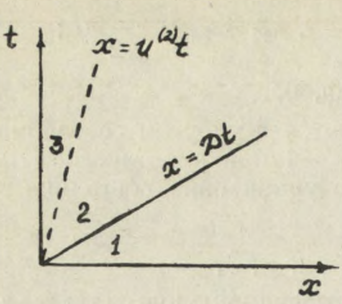


Рис. 2

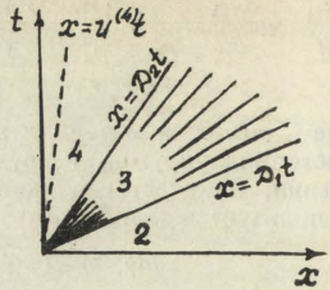


Рис. 3

том ударной волны с изменением плотности вещества, представлена на рис. 1, где OAB — ударная адиабата твердого тела, OG — кривая ударного гидростатического сжатия. Если приложенная нагрузка такова, что $\sigma_{11}^{A} \leqslant -p_0 \leqslant \sigma_{11}^{B}$, то состояния, отвечающие линейному участку ударной адиабаты, распространяются быстрее конечных состояний, вследствие чего происходит расщепление ударной волны на упругий предвестник, переносящий напряжение σ_{11}^{A}, и следующую за ним пластическую волну, окончательно переводящую материал в состояние, соответствующее ударной волне данной интенсивности p_0. При $-p_0 > \sigma_{11}^{B}$ пластическая волна поглощает упругий предвестник, и конечное состояние реализуется уже в одноволновой конфигурации.

Система уравнений (5) — (9) решается при краевом условии (1) и нулевых начальных условиях. Все постоянные, входящие в уравнения, и начальные условия задачи, имеют размерности скорости, плотности или напряжения, поэтому из x и t можно образовать лишь одну безразмерную комбинацию (например, $xt^{-1}(\mu\rho_0^{-1})^{-1/2}$). Следовательно, задача автомодельна. Автомодельная картина течения при $t < t_*$ в плоскости (x, t) схематически показана на рис. 2. Область *1*, соответствующая невозмущенному состоянию, ограничена сверху прямой $x = a_e^{(1)} t$ — траекторией упругого предвестника, пластическая волна $x = Dt$ разграничивает области *2* и *3*. Значения искомых величин в соответствующей области будем обозначать верхним индексом в круглых скобках. В точке A ударной адиабаты материал переходит в пластическое состояние (см. рис. 1). Исключая из (7) с помощью (10) внутреннюю энергию, используя уравнения (5), (8), условие текучести Мизеса и условие $s_{ij}\delta_{ij} = 0$, найдем

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$s_{11}^{A}=\pm\frac{2}{3}\sigma_s,\ s_{22}^{A}=s_{33}^{A}=\pm\frac{1}{3}\sigma_s,\ \sigma_{11}^{A}=\pm\left(\frac{2}{3}+\frac{\rho_0 c_0^2}{2\mu}\right)\sigma_s, \qquad (11)$$

где знак «+» или «—» выбирается в зависимости от типа нагрузки (растягивающей или сжимающей), переводящей материал в пластическое состояние. Подставляя s_{11}^{A} в (8), убеждаемся, что $s_{11}=\pm(2/3)\sigma_s$ не только в точке A, но и для всего участка ударной адиабаты ACB. Из этого следует $(p_0>0)$:

$$\sigma_{11}^{(2)}=-\left(\frac{2}{3}+\frac{\rho_0 c_0^2}{2\mu}\right)\sigma_s;\ \sigma_{11}^{(3)}=-p_0;\ s_{11}^{(i)}=-\frac{2}{3}\sigma_s;\ s_{22}^{(i)}=s_{33}^{(i)}=$$

$$=\frac{1}{3}\sigma_s,\ i=2,3.$$

Используя далее соотношения на разрывах, определяем значения остальных параметров в области *2* и *3:*

$$u^{(2)}=\frac{-\sigma_{11}^{(2)}}{\rho^{(1)}a_e^{(1)}};\ \rho^{(2)}=\frac{\rho^{(1)}a_e^{(1)}}{a_e^{(1)}-u^{(2)}};$$

$$u^{(3)}=u^{(2)}+(\sigma_{11}^{(2)}+p_0)\left\{\rho^{(2)}\left[\frac{\gamma+1}{2}(p^*+p_0)+\frac{\gamma-1}{2}(p^*-\sigma_{11}^{(2)})\right]\right\}^{-1/2};$$

$$\rho^{(3)}=\rho^{(2)}\frac{(\gamma+1)(p^*+p_0)+(\gamma-1)(p^*-\sigma_{11}^{(2)})}{(\gamma-1)(p^*+p_0)+(\gamma+1)(p^*-\sigma_{11}^{(2)})},\ p^*=\frac{\rho_0 c_0{}^2}{\gamma};$$

$$D=u^{(2)}-\frac{1}{\rho^{(2)}}\left\{\rho^{(2)}\left[\frac{\gamma+1}{2}(p^*+p_0)+\frac{\gamma-1}{2}(p^*-\sigma_{11}^{(2)})\right]\right\}^{1/2}.$$

Внутренняя энергия рассчитывается по уравнению состояния.

После снятия нагрузки в момент времени $t=t_*$ от свободной поверхности вглубь полупространства будет распространяться волна разгрузки. Картина течения в плоскости (x, t) показана на рис. 3, где параметры в области *3* известны: они соответствуют значениям за прошедшей ударной волной; в области *6* (см. рис. 5) материал находится в разгруженном состоянии, соответствующем значению $\sigma_{11}^{(6)}=-p_0=0$.

Система уравнений (5) и (9) имеет три вещественных семейства характеристик C^0, $C^{\pm}$, вдоль которых выполнено четыре линейно независимых соотношения:

$$du\pm\frac{d\sigma_{11}}{\rho a}=0; \qquad (12)$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$C^{\mp}: \frac{dx}{dt}=u\pm a;$$

$$\left.\begin{aligned} & a^2 d\rho + d\sigma_{11}=0, \\ & \mu\left(\frac{4}{3}-3\lambda'\frac{s_{11}^2}{\sigma_s^2}\right)\frac{d\rho}{\rho}+ds_{11}=0 \end{aligned}\right\} c^0: \frac{dx}{dt}=u; \qquad (13)$$

$$a=\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\varepsilon-\frac{\sigma_{11}}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right)_\rho+\left(\frac{4}{3}-3\lambda'\frac{s_{11}^2}{\sigma_s^2}\right)\frac{\mu}{\rho}\right]^{1/2}. \qquad (14)$$

Из (14) для скоростей упругих и пластических волн имеем соответственно

$$a_e=\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\varepsilon-\frac{\sigma_{11}}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right)_\rho+\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho}\right]^{1/2}; \qquad (15)$$

$$a_p=\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\varepsilon-\frac{\sigma_{11}}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right)_\rho\right]^{1/2}, \qquad (16)$$

откуда, в частности, для скорости упругого предвестника следует

$$a_e^{(1)}=\left(c_0^2+\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}.$$

Если уравнение состояния имеет вид (10), то вдоль изэнтропы разгрузки EF будет выполнено соотношение

$$\rho^{-\gamma}(\gamma\sigma_{11}-\sigma^*)=\mathrm{const},\ \sigma^*=\frac{2}{3}\sigma_s+\rho_0 c_0^2, \qquad (17)$$

следующее из условия постоянства энтропии. Используя это соотношение и уравнение адиабаты Гюгонио, можно показать, что если $\sigma_{11}' > \sigma_{11}''$, то $a_p(\sigma_{11}', \rho') > a_p(\sigma_{11}'', \rho'')$. Иными словами (учитывая направление процесса от A к C при нагрузке и от E к F при разгрузке), пластическая волна нагружения будет ударной, а пластическая волна разгрузки — центрированной простой волной.

Волна упругой разгрузки CE, распространяющаяся со скоростью $u^{(3)}+a_e^{(3)}$, где $a_e^{(3)}$ вычисляется по (15), снимает напряжение на величину $\Delta\sigma_{11}$; в рассматриваемом здесь приближении идеальнопластического материала $\Delta\sigma_{11}=|2\sigma_{11}^A|$. Параметры среды за волной упругой разгрузки будут иметь следующие значения:

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$u^{(4)}=u^{(3)}-\frac{\Delta\sigma_{11}}{\rho^{(3)}(a_e^{(3)}-u^{(3)})};\ \rho^{(4)}=\frac{\rho^{(3)}(a_e^{(3)}-u^{(3)})}{a_e^{(3)}-u^{(4)}};$$

$$s_{11}^{(i)}=\frac{2}{3}\sigma_s;\ s_{22}^{(i)}=s_{33}^{(i)}=-\frac{1}{3}\sigma_s,\ i=4,5,6.$$

Определим теперь параметры течения в области (6), занятой центрированной волной пластической разгрузки и ограниченной характеристиками

$$x=D_1t;\ x=D_2t,\ \text{где}\ D_1=u^{(4)}+a_p^{(4)};\ D_2=u^{(6)}+a_p^{(6)},$$

а скорость a_p согласно (16), (10) вычисляется по формуле

$$a_p=[(-\gamma\sigma_{11}+\sigma^*)\rho^{-1}]^{1/2}. \qquad (18)$$

Первое уравнение (13) после подстановки в него (18) и умножения на $(\rho_0/\rho)^\gamma$ сводится к уравнению в полных дифференциалах, интегрируя которое, найдем

$$\sigma_{11}=[\sigma_{11}'-\sigma^*/\gamma]\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma+\frac{\sigma^*}{\gamma}, \qquad (19)$$

где σ_{11}' — значение на «фоне», т. е. непосредственно перед волной.

Величина a_p, входящая в (12), является функцией напряженно-деформированного состояния, но, как следует из (17), (19), в области центрированной волны между плотностью и напряжением существует однозначная зависимость, иными словами, a_p можно считать функцией только ρ или только σ_{11} и, следовательно, соотношения

$$u\pm\int_{\rho'}^{\rho}a_p(\rho)\frac{d\rho}{\rho}=0;\quad \frac{dx}{dt}=u\pm a_p \qquad (20)$$

на $C^\pm$ характеристиках могут быть проинтегрированы. Выражая из (17) σ_{11} и подставляя полученное значение в (18), найдем

$$a_p=a_p'\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}, \qquad (21)$$

где штрихи, как и выше, обозначены значения соответствующих параметров на фоне. Используя (19)—(21), получим на произвольной характеристике $\frac{dx}{dt}=w,\ D_2\leqslant w\leqslant D_1$:

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$a_p^{(5)}=\frac{2}{\gamma-1}a_p^{(4)}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(w-u^{(4)});\ u^{(5)}=w-a_p^{(5)};$$

$$\sigma_{11}^{(5)}=\left[\sigma_{11}^{(4)}-\frac{\sigma^*}{\gamma}\right]\left(\frac{a_p^{(5)}}{a_p^{(4)}}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}+\frac{\sigma^*}{\gamma}; \tag{22}$$

$$\rho^{(5)}=\frac{-\gamma\sigma_{11}^{(5)}+\sigma^*}{(a_p^{(5)})^2}.$$

Как видно из (22), параметры течения в области центрированной волны являются функциями автомодельной переменной w. Через крайнюю характеристику $x=D_2t$ решение (22) непрерывно примыкает к области постоянного течения (6). Учитывая краевое условие, т. е. $\sigma_{11}^{(6)}=0$, находим

$$a_p^{(6)}=a_p^{(4)}\left(\frac{\sigma^*}{\sigma^*-\gamma\sigma_{11}^{(4)}}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}};\ \rho^{(4)}=\sigma^*(a_p^{(6)})^{-2};$$

$$u^{(6)}=u^{(4)}+\frac{2}{\gamma-1}(a_p^{(6)}-a_p^{(4)}).$$

Тем самым заканчивается решение поставленной задачи. Это решение справедливо, пока упругая волна разгрузки не догонит распространяющуюся впереди ударную волну.

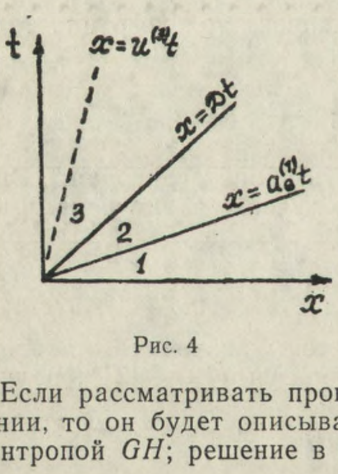


Рис. 4

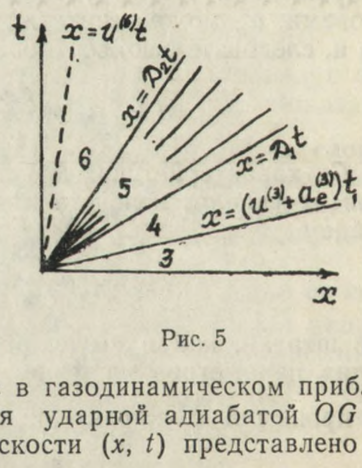


Рис. 5

Если рассматривать процесс в газодинамическом приближении, то он будет описываться ударной адиабатой OG и изэнтропой GH; решение в плоскости (x, t) представлено на

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

рис. 4, 5. Расчетные формулы получаются из приведенных выше для твердого тела, в которых следует положить $\sigma_s=\mu=0$; $\sigma_{11}=-p$ и произвести соответствующую замену верхних индексов.

Полученное решение может служить хорошим тестом при проверке вычислительных программ, моделирующих динамические процессы в твердых деформируемых телах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов//ПММ. 1960. Т. XXIV. Вып. 6. С. 1057—1072.
2. Зволинский Н. В., Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Динамика деформируемых твердых тел//Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1972. Т. 3. С. 291—324.
3. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 308 с.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

МОДЕЛЬ СКАЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ КОМПОЗИТОВ

А. В. Жуков

При решении различных задач физики и механики высокоскоростного соударения необходимы уравнения состояния конкретных конструкционных материалов. В ряде случаев они представляют собой сложное композиционное образование с анизотропной слоистой структурой. Применительно к задачам ударного нагружения принято выделять область ударных волн умеренной интенсивности с тензорным уравнением состояния и область интенсивных ударных волн со скалярным уравнением состояния — гидродинамическая модель. В первом случае весьма существенно влияние неоднородного строения, во втором же первоначальная структура материала нарушена, и его можно рассматривать как гомогенную смесь. Амплитуда давлений такой условной границы составляет, по-видимому, несколько гигапаскаль.

В данной работе предложен метод построения скалярного уравнения состояния в переменных давление (P), энергия (E), плотность (ρ) композиционных материалов на примере асботекстолита. В силу известных причин возможно построение лишь интерполяционного полуэмпирического уравнения. Успех при этом всецело зависит от наличия экспериментального материала для привязки параметров и удачного выбора интерполяционных формул.

Имеющийся эксперимент по композитам типа текстолит очень немногочислен и относится в основном к области малых давлений. Поэтому для получения привязочных точек в области больших давлений приходится прибегать к дополнительным модельным соображениям. Обычно используется модель аддитивности ударной сжимаемости, которая позволяет по ударным адиабатам отдельных компонент рассчитать адиабату смеси

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$v(P)=\sum_i \alpha_i v_i(P), \tag{1}$$

где P — давление ударного сжатия; v — объем; α — массовая концентрация i-й компоненты. Для ударной адиабаты компоненты в виде кинематического соотношения $D=a+bU$ имеем

$$v_i(P)=v_0^i-\frac{U^2}{P},U=\frac{a}{b}\left(\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{bv_0^i}{a^2}P}-\frac{1}{2}\right). \tag{2}$$

Поскольку отдельные компоненты при ударном сжатии претерпевают фазовые превращения, для получения адиабаты смеси необходимо использовать адиабаты фаз высокого давления с начальными условиями для нормальных фаз.

Асботекстолит с начальной плотностью $\rho_0=1{,}6$ ккг/м³ состоит на 60% из асбеста и на 40% из связующей смолы — резола. Экспериментальная адиабата до 30 ГПа аппроксимируется зависимостью вида $P=0{,}9[(\rho/\rho_0)^5-1]$ (ГПа) [1]. Для определения адиабаты асбеста для нужной области давлений пришлось воспользоваться моделью аддитивной сжимаемости, исходя из следующего состава [2]: MgO — 43,5%, SiO_2 — 43,5%, H_2O — 13%. Значения параметров ударных адиабат компонент заимствованы из [3]—[6]. На рис. 1 штриховыми линиями приведены адиабаты резола (*1*) асбеста (*2*), треу-

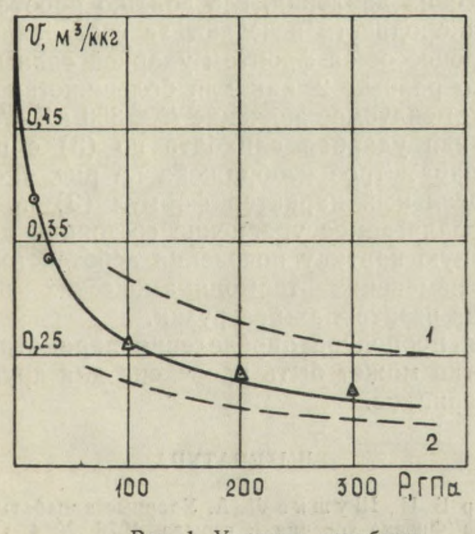


Рис. 1. Ударные адиабаты

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

гольниками отмечены точки, рассчитанные по (1), (2), кружочками — сглаженные данные [1].

Уравнения состояния запишем в виде, аналогичном [7]. Используемые интерполяционные формулы обладают достаточной гибкостью и имеют правильную физическую асимптотику

$$P(\rho, E)=P_s(\rho)+\rho\gamma(\rho, E)[E-E_s(\rho)],\ P_s=\rho^2\frac{dE_s}{d\rho};$$

$$E_s=\frac{B_0}{\rho_0}\frac{9}{2k^2}\left\{e^{k[1-(\rho_0/\rho)^{1/3}]}-1\right\}^2;\ \gamma=\frac{2}{3}+\frac{\left(\gamma_0-\frac{2}{3}\right)\frac{\rho_0}{\rho}}{\frac{E}{E_0}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\rho_0}{\rho}+1}. \quad (3)$$

Значения параметров $B_0=11{,}7$ ГПа, $k=3{,}1$ легко определяются по экспериментальной адиабате [1]. Оставшиеся параметры γ_0, E_0 регулируют положение адиабаты в области высоких давлений. Величина γ_0 является аналогом термодинамического коэффициента Грюнайзена, однако его определение по стандартным теплофизическим характеристикам материала в начальном состоянии, как это делается для кристаллических тел, невозможно. Для композиционных материалов типа текстолит теплофизические свойства существенно определяются неоднородностями начального строения. В области же высоких давлений, где должно работать уравнение (3), эти неоднородности исчезают за счет различных релаксационных процессов за фронтом ударной волны. Значение γ_0 было выбрано равным 2, как для большинства кристаллических тел. Рекомендуемое значение $E_0=300$ кДж/кг.

Рассчитанная ударная адиабата по (3) с приведенными значениями параметров изображена на рис. 1 сплошной линией. Универсальный характер формул (3) позволяет надеяться, что предлагаемое уравнение состояния дает достаточно реалистичную картину поведения асботекстолита в широкой области изменения термодинамических переменных, в том числе и на изэнтропах разгрузки.

Описанная процедура определения параметров уравнения состояния легко может быть проведена для других конструкционных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шехтер Б. И., Шушко Л. А. Ударные адиабаты некоторых слоистых пластиков//Физика горения и взрыва. 1973. № 4. С. 599—601.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

2. Гаврюченков Ф. Г. Химия. Справочное руководство. Л.: Химия, 1975. 428 с.

3 Мак-Куин Р., Марш С. и др. Уравнения состояния твердых тел по результатам исследований ударных волн//Высокоскоростные ударные явления. М.: Мир, 1973. С. 299—427.

4. Вакерли Д. Ударно-волновое сжатие кварца//Динамические исследования твердых тел при высоких давлениях. М.: Мир, 1965. С. 144—193

5. Шарипджанов И. И., Альтшулер Л. В., Брусничкин С. Е. Аномалия ударной и изэнтропической сжимаемости воды//Физика горения и взрыва. 1983. № 5. С. 149—153.

6. Андерсон О., Либерман Р. Скорости звука в горных породах и минералах: экспериментальные методы, экстраполяция к очень высоким давлениям и результаты//Физическая акустика. М.: Мир, 1970. Т. IV. Ч. Б. С. 382—436.

7. Жуков А. В. Интерполяционное широкодиапазонное уравнение состояния металлов в переменных давление, плотность, энергия//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987. С. 70—79.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ОЦЕНКА СОПРОТИВЛЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОМУ ДЕФОРМИРОВАНИЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

В. М. Захаров

Для оценки сопротивления пластическому деформированию цилиндрических образцов при высоких скоростях нагружения широко используется метод Тэйлора [1], основанный на измерении остаточных деформаций в образце после его удара о жесткую стенку. В анализе Тэйлора предполагается одномерное распространение волны по жесткопластическому материалу образца. Механическая характеристика сопротивления образца пластическому деформированию идентифицируется как динамический предел текучести его материала σ_s^{∂} Двумерный численный анализ задачи Тэйлора показал [2], что пластический фронт, характеризующий деформацию образца при ударе, располагается значительно ближе к ударному торцу, чем это следует из геометрии образца после опыта. Исходя из этого, в [2] в качестве допустимого значения пластической деформации при расчете σ_s^{∂} предложено использовать величину $\varepsilon_d=6\%$. Формула Уилкинса — Гуинана имеет вид

$$\sigma_s^{\partial}=\rho V_0^2/2\ln\{[l_0-(l_k-l_\varepsilon)]/l_\varepsilon\}, \tag{1}$$

где l_0 и l_k — начальная (до опыта) и конечная (после опыта) длины образца; l_ε — длина хвостовой части от недеформированного заднего торца до сечения, в котором радиальная деформация равна $\varepsilon_d=(d-d_0)/d_0$; d_0 — начальный диаметр; d — диаметр деформированной части; ρ — исходная плотность образца; V_0 — скорость удара.

Таким образом, в методе Тэйлора производится точечная оценка динамического предела текучести при изменении скорости нагружения V от V_0 до 0. На основе скоростной кино-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

съемки в работе [3] делалась точечная оценка σ_∂^s в более узкой области изменения скорости V из диапазона $[0 \div V_0]$.

В настоящей работе рассматривается характер деформирования образца и изменение динамического предела текучести в процессе всего ударного нагружения по методу Тэйлора; образцы — стальные (Р6М5) цилиндры с размерами $d_0 = 6{,}88$ мм; $l_0 = 20{,}6$ мм; $\rho = 8{,}7$ г/см^3; $V_0 = 542$ м/с. Рассмотрим случай осесимметричного взаимодействия образца с высокопрочным основанием. Результаты эксперимента представлены в работе [4].

Обработкой рентгенограмм процесса соударения была получена зависимость текущей длины образца от времени $\bar{l} = l/l_0 = f(t)$, которую с помощью метода наименьших квадратов можно аппроксимировать следующим полиномом:

$$\bar{l}(t) = 1 - 2{,}66 \cdot 10^{-2} \cdot t + 2{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot t^2 + 3{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 - 2{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot t^4, \quad \text{мкс.} \qquad (2)$$

Дифференцированием формулы (2) можно получить зависимость текущей скорости образца от времени. Но, учитывая начальные условия и физические особенности процесса ($t = 0 \div \sim 4$ мкс, $V = V_0$; $t = 40$ мкс, $V = 0$), целесообразно использовать полином более высокой степени

$$\bar{V}(t) = V/V_0 = 1 - 4{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot t - 6{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot t^2 - 1{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot t^3 + 2{,}4 \cdot 10^{-7} \cdot t^4 + 4{,}0 \cdot 10^{-9} \cdot t^5, \text{ мкс.} \qquad (3)$$

Рассчитанная по (3) зависимость $\bar{V}(t)$ приведена на рис. 1 (кривая *1*). Анализ ее показывает, что при $\sim (12 \leqslant t \leqslant 35)$ мкс образец движется приблизительно с постоянным отрицательным ускорением. Начальный $[(0 \leqslant t \leqslant 12)$ мкс] и конечный $[(35 \leqslant t \leqslant 40)$ мкс] участки кривой $\bar{V}(t)$ характеризуются существенно нелинейной зависимостью от времени, т. е. в процессе ударного пластического деформирования образца на высокопрочном основании, исключая начальную и конечную стадии процесса, можно выделить этап установившегося торможения.

Рентгенографирование различных стадий процесса показывает, что область интенсивных пластических деформаций локализована вблизи ударного торца, причем размеры области растут на начальной стадии процесса, а к моменту $t = (10 \div 15)$ мкс они стабилизируются. Пластический фронт распространяется по образцу на некоторое расстояние, и в дальнейшем положение его остается примерно постоянным в

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

течение процесса. Таким образом, можно считать, что жесткий образец равнозамедленно втекает в пластическую область постоянной геометрии, и характеризовать макродеформацию образца и его сопротивление пластическому растеканию изменением длины, т. е. его срабатыванием (расходованием, укорочением). Экспериментально это регистрируется по движению заднего свободного торца.

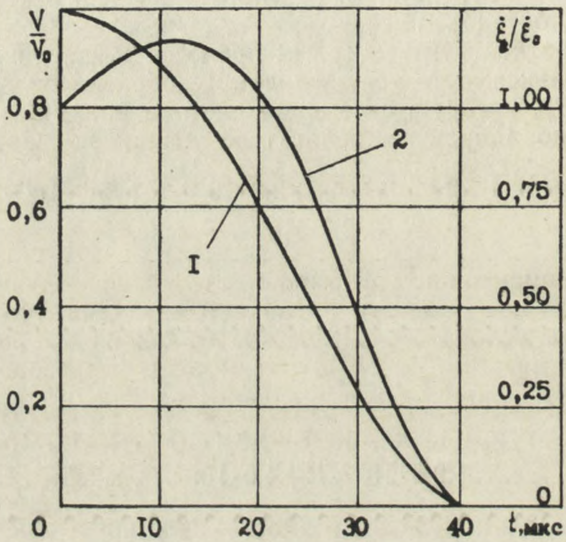


Рис. 1. Зависимость от времени относительной скорости торможения (*1*) и относительной скорости срабатывания (*2*) образца, деформирующегося на высокопрочном основании

По аналогии с деформацией и скоростью деформации при механических испытаниях введем следующие характеристики: относительное срабатывание образца ε_l и скорость срабатывания $\dot{\varepsilon}_l$; для произвольных моментов времени t_1 и t_2 $(t_2 > t_1)$ в течение процесса $\varepsilon_l(t) = 1 - l(t_2)/l(t_1)$. Фиксируя момент t_1, получим для скорости срабатывание $\dot{\varepsilon}_l$ следующую оценку:

$$\dot{\varepsilon}_l = V(t)/l(t) \quad (\dot{\varepsilon}_0 = V_0/l_0 = 2{,}63 \cdot 10^4 \cdot c^{-1}). \qquad (4)$$

Зависимость $\dot{\varepsilon}_l/\dot{\varepsilon}_0(t)$ приведена на рис. 1 (кривая *2*). На начальной неустановившейся стадии процесса $\dot{\varepsilon}_l$ возрастает до

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

максимума $\dot{\varepsilon}_l$ (max), а затем монотонно уменьшается до нуля. Средний участок кривой *2* также можно трактовать как этап установившегося торможения (втекания) образца.

Уравнение втекания жесткой части образца в пластическую область запишем в виде

$$dl/dt = -V. \tag{5}$$

Торможение образца выражается уравнением

$$d^2l/dt^2 = -dV/dt = \sigma_s^\partial/\rho\, l. \tag{6}$$

Из (5) и (6) имеем

$$\rho \cdot \int_{V_2}^{V_1} V \cdot dV = \sigma_s^\partial \cdot \int_{l_2}^{l_1} dl/l.$$

Окончательно

$$\sigma_s^\partial = \rho \cdot (V_1^2 - V_2^2)/2 \cdot \ln(l_1/l_2). \tag{7}$$

Здесь V_1, V_2, l_1, l_2 — текущие значения скорости и длины образца для моментов времени t_1 и t_2, причем $t_2 > t_1$.

Используя аппроксимацию (2) и (3) и оценку (4), по формуле (7) находим значения динамического предела текучести. На рис. 2 представлена зависимость коэффициента упроч-

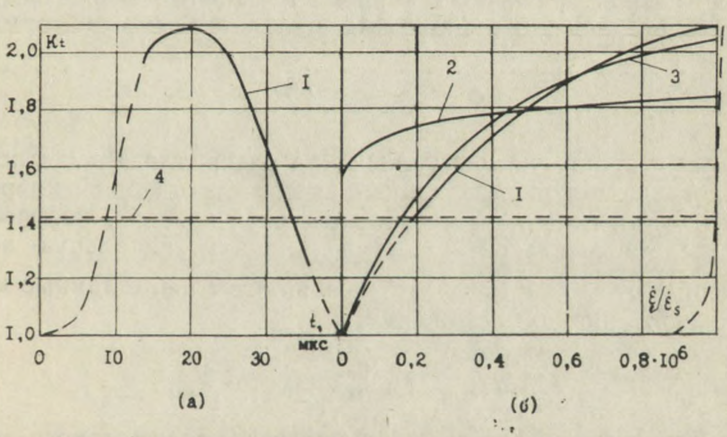


Рис. 2. Зависимость коэффициента упрочнения от времени (*а*) и относительной скорости срабатывания (*б*): *1* — расчет по (2), (3), (4), (7); *2* — аппроксимация (8); *3* — аппроксимация (9); *4* — расчет по (1)

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

нения $K_t = \sigma_s^\partial/\sigma_s$ от времени и скорости срабатывания $(\dot{\varepsilon}_l/\dot{\varepsilon}_s)$; здесь $\sigma_s \cong 1{,}08$ ГПа — статический предел текучести стали Р6М5; $\dot{\varepsilon} \cong 3\cdot 10^{-2}\cdot c^{-1}$ — скорость деформации при определении σ_s. Штриховые участки кривой *1* соответствуют начальной и конечной стадиям процесса, для которых справедливость одномерного анализа (5)$\div$(7) неочевидна; зависимость $K_t(t)$ примерно симметрична относительно момента $t_k/2$, где t_k — время окончания процесса пластического деформирования. На кривой $\bar{V}(t)$ этому моменту соответствует точка перегиба. Штриховая горизонтальная линия *4* на рис. 2 — это расчет по формуле (1). Следовательно, точечные оценки σ_s^∂ по формуле Уилкинса—Гуинана (и Тэйлора [5]) дают среднее значение динамического предела текучести за процесс. Этим и объясняется широкое использование средних значений σ_s^∂ в численных расчетах процесса взаимодействия соударяющихся тел.

Отметим, что сделанные в [3] точечные оценки σ_s^∂ по формуле (7) для более узкого диапазона скоростей, чем $[0\div V_0]$, дали значения, совпадающие со средними значениями σ_s^∂ по формуле Тэйлора. Вероятно, этот диапазон не отличался значимо от $[0\div V_0]$.

При анализе напряжений и деформаций широкое применение находят различные аппроксимационные формулы [6], в частности, степенная аппроксимация диаграммы деформирования

$$K_t = \sigma_s^\partial/\sigma_s = (\dot{\varepsilon}_l/\dot{\varepsilon}_s)^m, \tag{8}$$

где m — характеристика упрочнения материала. Расчет по (8) представлен на рис. 2 (кривая *2*) для $m = 4{,}4\cdot 10^{-2}$; корреляция расчета по (8) с экспериментальной кривой *1* получается неудовлетворительной. Если не учитывать начальную ветвь кривой 1 от $\dot{\varepsilon}_0$ до $\dot{\varepsilon}_l(\max)$, то экспериментальные данные можно описать аппроксимацией вида

$$K_t = K_{\max} - (K_{\max} - 1)e^{-m(\dot{\varepsilon}_l/\dot{\varepsilon}_s)}, \tag{9}$$

где $K_{\max} = (\sigma_s^\partial)_{\max}/\sigma_s$ — коэффициент максимального текущего упрочнения материала образца. В наших условиях (высокопрочная сталь Р6М5, высокие скорости нагружения $\sim 0{,}5$ км/с) достигается значение $K_{\max} = 2{,}1$. Расчет по (9)

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

для $m=3\cdot10^{-6}$ приведен на рис. 2 (кривая 3). Таким образом, зависимость (9) хорошо описывает основную ветвь экспериментальной кривой $K_t(\dot{\varepsilon}_t/\dot{\varepsilon}_s)$, соответствующую стадии установившегося торможения образца при ударном взаимодействии с высокопрочным основанием.

Проведенный анализ показывает, что переменный динамический предел текучести, в том числе и в виде (9), целесообразно использовать при расчете текущих характеристик процесса соударения. Если же целью расчета является получение конечных значений величин, характеризующих ударное взаимодействие, то удовлетворительное приближение дает использование постоянного среднего значения динамического предела текучести, определяемого по формулам работ [1, 2] на основе распределения остаточных деформаций в образце после опыта. Особенности практического использования формул из [1, 2] обсуждались в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress. I. Theoretical considerations//Proc. of the Royal Soc. Series A. 1948. V. 194. № 1038. P. 289—299.

2. Уилкинс М. Л., Гуинан М. У. Удар цилиндра по жесткой преграде//Механика. Сб. переводов. 1973. № 3(139). С. 112—128.

3. Полосаткин Г. Д., Кудрявцева Л. А., Глазков В. М. Изучение динамического предела текучести металлов при скоростях удара до 100 м/с//Изв. АН СССР. Металлы. 1966. № 5. С. 121—124.

4. Захаров В. М., Брагин В. С. Экспериментальное исследование динамики взаимодействия деформируемого образца с высокопрочным основанием//См. настоящий сборник.

5. Брагин В. С., Захаров В. М., Костюченко Е. А. Экспериментальное исследование взаимодействия стальных ударников с твердой преградой//Механика деформируемого твердого тела. Тула, 1985. С. 10—17.

6. Когаев В. П., Махутов Н. А., Гусенков А. П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность (Справочник). М.: Машиностроение, 1985. 224 с.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ОБРАЗЦА С ВЫСОКОПРОЧНЫМ ОСНОВАНИЕМ

В. М. Захаров, В. С. Брагин

Результаты взаимодействия деформирующихся образцов с жесткой стенкой широко используются для определения динамического предела текучести материала образца. В основе метода лежит установленная Тэйлором зависимость геометрии образца после ударного взаимодействия с жесткой стенкой от динамического предела текучести материала [1]. Задача Тэйлора широко используется в численных расчетах процесса соударения, в том числе с целью подбора значения динамического предела текучести [2—5 и др.]. В расчетах обычно используются конечные результаты эксперимента; анализ же динамики взаимодействия рассмотрен лишь в работе [6] для случая нормального удара.

В настоящей работе экспериментально исследуется характер взаимодействия образцов с жесткой стенкой в условиях нормального и косого удара. Динамика процесса регистрировалась с помощью рентгеноимпульсных аппаратов РИНА-2Д, РИНА-3Б/6. Регистрация производилась методом двухэкспозиционной съемки, для расшифровки изображений применялся динамический репер. Подробно методика съемки и схема экспериментальной установки изложены в работе [7]. В качестве жесткой стенки использовалось высокопрочное основание из твердого сплава ВК-8. Угол взаимодействия α образцов с основанием составлял 0° и 30° от нормали к основанию.

Образцы изготавливались из стали Р6М5 в состоянии поставки: твердость по Бринеллю *HB* 255, статический предел текучести $\sim 1{,}08$ ГПа; правильные цилиндры диаметром 6,88 мм, длиной $l_0 = 20{,}6$ мм. Средняя скорость взаимодействия образца с основанием составляла $V_0 = 542$ м/с для $\alpha_в = 0°$ и $V_0 = 557$ м/с для $\alpha_в = 30°$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

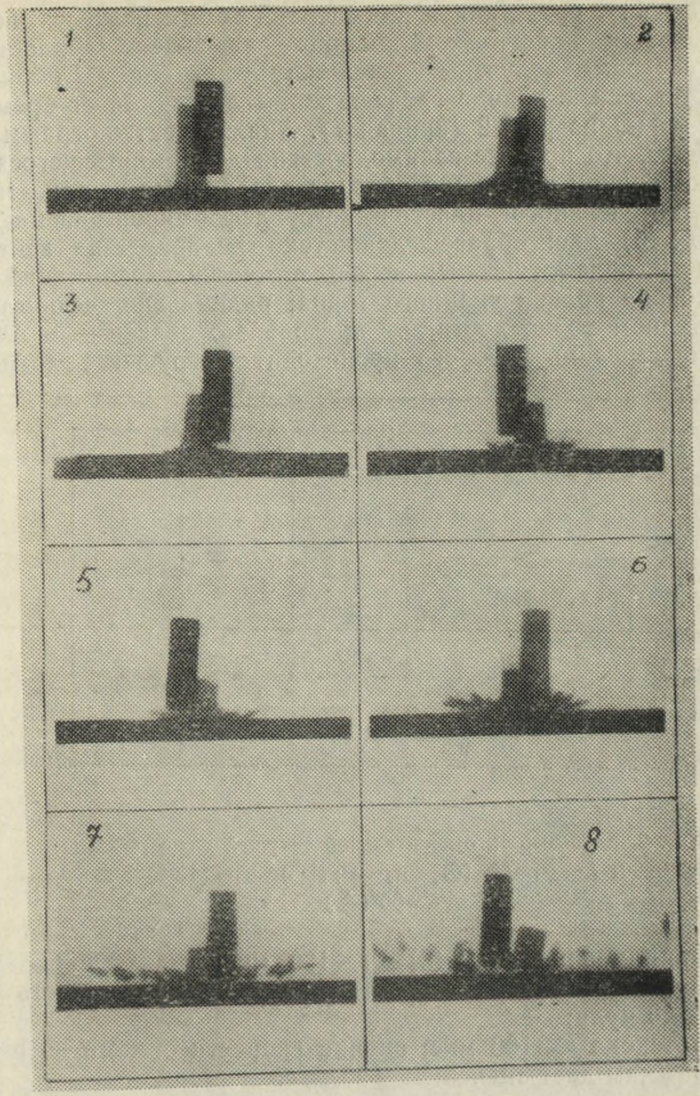


Рис. 1. Двухэкспозиционные рентгенограммы ударного взаимодействия образца с высокопрочным основанием при $\alpha_в = 0°$ для моментов времени от начала удара, мкс: *1* — 4,5; *2* — 10,3; *3* — 14,7; *4* — 23,9; *5* — 35,9; *6* — 45,2; *7* — 69,5; *8* — 146,1

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

На рис. 1 представлен ряд рентгенограмм процесса, полученных для различных временных задержек. Обработкой рентгенограмм получены значения текущей длины l образца, представленные в виде графической зависимости от времени $\bar{l}=l/l_0=f(t)$ на рис. 2 (кривая *1*). Анализ рентгенограмм показывает, что процесс взаимодействия деформирующегося на высокопрочном основании образца разделяется на три этапа:

1) интенсивного пластического деформирования $0\leqslant t\leqslant$ $\leqslant(40\div45)$ мкс: образец движется в направлении вектора скорости, область интенсивных пластических деформаций локализована вблизи ударного торца; радиальная деформация на ударном торце достигает предельного значения $\sim 200\%$, при превышении которого происходит разрушение (отрыв) «лепестков»;

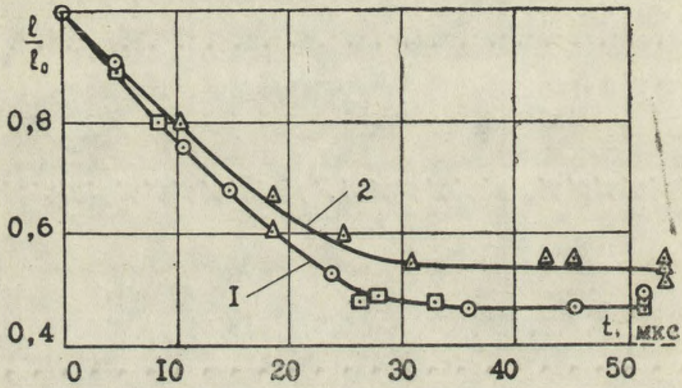


Рис. 2. Зависимость относительной текущей длины образца от времени: *1* — $\alpha_в=0°$; (⊙)—$\alpha_0=0°$; (|□|)—$\alpha_0=(4\div9)°$; *2* — $\alpha_в=$ $=30°$(△)

2) прилипания $(40\div45)\leqslant t\lesssim 100$ мкс: движение образца в направлени вектора скорости прекращается, скорость его падает до нуля;

3) отскока $t\geqslant 100$ мкс; оценка скорости отскока по рентгенограммам дает значение ~ 25 м/с.

На рис. 2 нанесены также результаты опытов, в которых у образца зарегистрирован при подходе к основанию угол атаки α_0 (угол между продольной осью образца и вектором скорости). Эти экспериментальные точки для значений $\alpha_0=(4\div9)°$ группируются также вблизи кривой *1*. Таким образом, небольшие углы атаки (до 10°) не оказывают значи-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

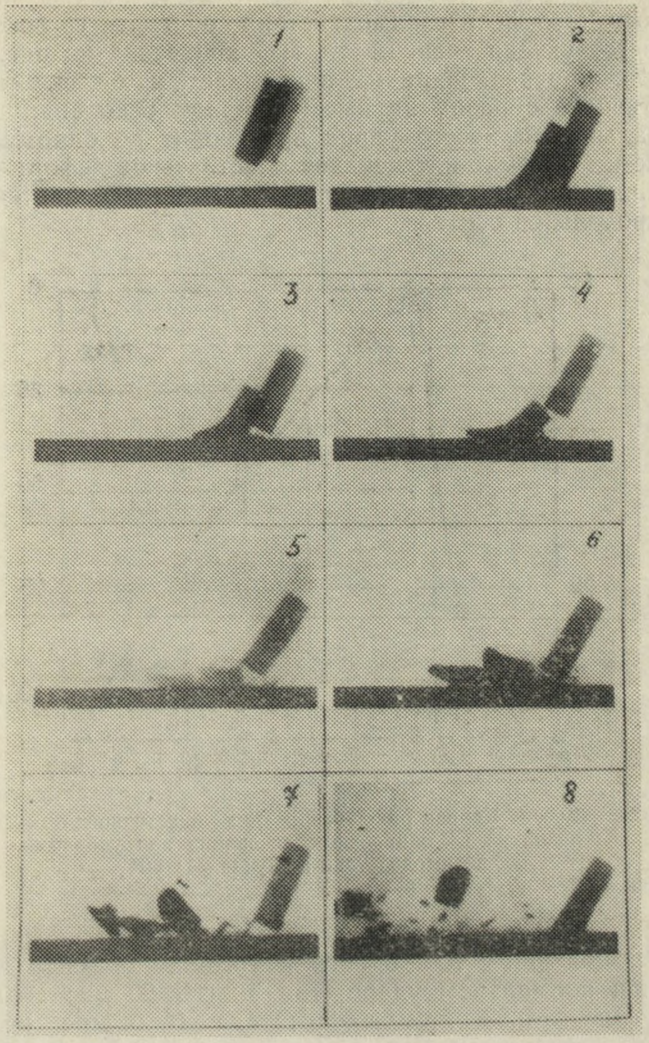


Рис. 3. Двухэкспозиционные рентгенограммы ударного взаимодействия образца с высокопрочным основанием при $\alpha_в=30°$ для моментов времени от начала удара, мкс: *1* —9,0; *2* — 10,3; *3* — 18,5; *4* — 30,8; *5* — 45,2; *6* — 57,8; *7* — 97,5; *8* — 154,5

тельного влияния на торможение образца, и значения $l(t)$ оказываются близкими, в пределах обычного экспериментального разброса.

На рис. 3 представлен ряд рентгенограмм неосесиммет-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ричного ($\alpha_в=30^\circ$) взаимодействия образца с основанием; соответствующая зависимость $\bar{l}(t)$ приведена на рис. 2 (кривая *2*). Сравнение кривых показывает, что деформирование пластичного образца на высокопрочном основании в случае нормального и косого удара происходит по одному закону; также к $t=45$ мкс интенсивное пластическое деформирование заканчивается и далее длина образца не изменяется (вдоль его продольной оси).

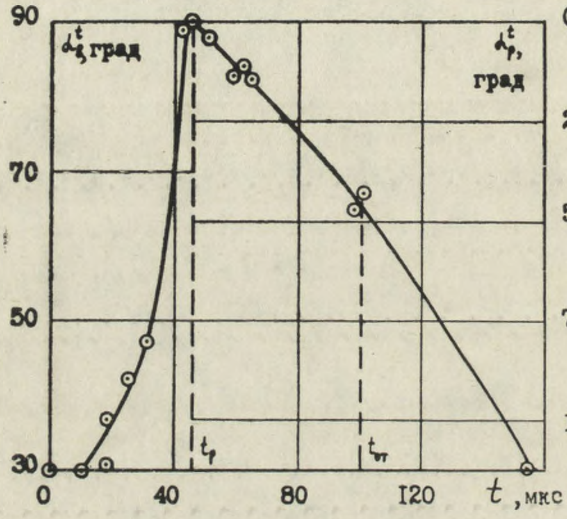


Рис. 4. Кривая рикошетирования пластичного образца на высокопрочном основании при ударном взаимодействии в случае $\alpha_в=30^\circ$

Отметим, что в случае косого удара значения $\bar{l}(t)$ оказываются бо̀льшими для одного и того же момента времени, чем при нормальном ударе; так, для $t=20$ мкс $\bar{l}=0{,}58$ при $\alpha_в=0^\circ$ и $\bar{l}=0{,}63$ при $\alpha=30^\circ$; для $t=40$ мкс $\bar{l}=0{,}47$ и $\bar{l}=0{,}54$ соответственно, т. е. в случае косого удара образец вследствие асимметричности деформирования укорачивается меньше, причем для развитого процесса ($t>10$ мкс) длины образцов можно связать соотношением $\bar{l}(\alpha_в=0^\circ)=$ $=\bar{l}(\alpha_в\neq 0^\circ)\cdot\cos\alpha_в$.

При косом ударе угол встречи образца в процессе деформирования изменяется от начального значения $\alpha_в$ до рикошета α_p и отскока от основания. На рис. 4 представлена за-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

висимость текущего угла встречи $\alpha_в^t$ и угла рикошета α_p^t от времени.

Процесс взаимодействия образца с основанием в случае косого удара может быть представлен в виде тех же трех последовательных этапов, что и при нормальном ударе:

1) $0 \leqslant t \leqslant 45$ мкс: угол встречи $\alpha_в^t$ увеличивается от 30° при $t=0$ до 90° при $t_p=45$ мкс, когда контакт образца с основанием осуществляется его боковой поверхностью;

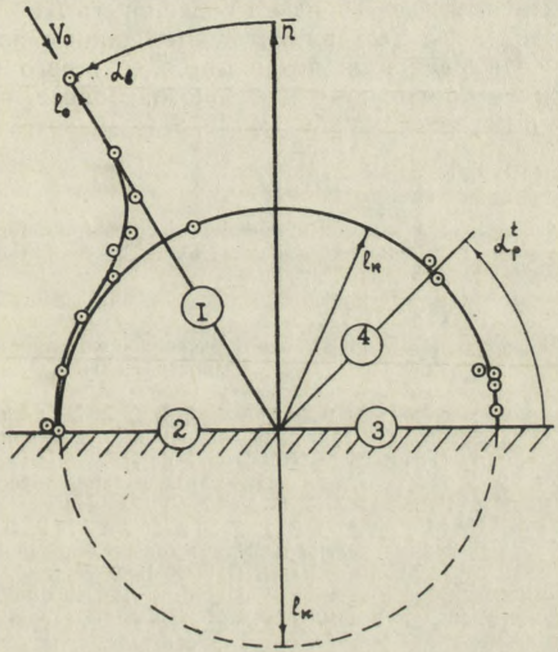


Рис. 5. Поляра рикошетирования при $\alpha_в=30°$: *1* — $\alpha_в=30°$, $t=0$ мкс; *2* — $\alpha_в^t=90°$, $t=t_p=$ $=45$ мкс; *3* — $\alpha_p^t=0°$, $t=t_p=45$ мкс; *4* — $\alpha_p^t=$ $=45°$; $t=t_{от}=100$ мкс

2) $t_p \leqslant t \lesssim 100$ мкс$=t_{от}$ — этап рикошета: образец скользит по основанию ($\alpha_p^t=0°$), а затем вершина его отделяется от основания ($\alpha_p^t>0°$), образец поворачивается и при α_p^t 45° отделяется (отскакивает) от основания.

3) $t \geqslant t_{от}$ — этап отскока: образец, вращаясь, отлетает от основания, а его скорости — поступательная (по нормали к

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

основанию) и вращательная, оцененные по рентгенограммам, имеют значения ~ 140 м/с и ~ 3500 оборот/с соответственно.

Наглядно изменение длины и угла встречи образца в процессе взаимодействия можно проследить по зависимости $l(\alpha_в^t)$, построенной в полярной системе координат. Такая зависимость приведена на рис. 5. При $\alpha_в^t = 90°$ ($t = t_p = 45$ мкс) длина образца принимает постоянное значение, и в дальнейшем поляра превращается в окружность постоянного радиуса, равного конечной длине образца после опыта l_k.

Представленные экспериментальные данные по динамике ударного взаимодействия позволят более строго разрабатывать методики трехмерного численного анализа, которые ограничены, по существу, работами [8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress. I. Theoretical considerations//Proc. of the Royal Soc. Series A. 1948. V. 194, № 1038. P. 289—299.

2. Wilkins M. L. Mechanics of penetration and perforation//Int. J. of Eng. Sci 1978. V. 16, № 11. P. 793—807.

3. Гулидов А. И., Фомин В. М. Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды//ПМТФ. 1980. № 3. С. 126—132.

4. Богомолов А. Н., Горельский В. А., Зелепугин С. А., Хорев И. Е. Поведение тел вращения при динамическом контакте с жесткой стенкой//ПМТФ. 1986. № 1. С. 161—163.

5. Рафтопулос Д., Дэвис Н. Удар упругопластического снаряда о жесткую мишень//РТиК. 1967. Т. 5. № 12. С. 174—181.

6. Бойко В. М., Гулидов А. И., Папырин А. Н., Фомин В. М., Шитов Ю. А. Экспериментально-теоретическое исследование отскока коротких стержней от твердой преграды//ПМТФ. 1982. № 5. С. 129—133.

7. Брагин В. С., Захаров В. М., Костюченко Е. А. Экспериментальные исследования взаимодействия стальных ударников с твердой преградой//Механика деформируемого твердого тела. Тула, 1985. С. 10—17.

8. Хорев И. Е., Горельский В. А., Югов Н. Т. Численное исследование физических особенностей трехмерной задачи скоростного удара деформируемого тела о препятствие//ДАН СССР. 1985. Т. 283. № 3. С. 612—615.

9. Горельский В. А., Хорев И. Е., Югов Н. Т. Численное исследование трехмерной задачи динамического контакта твердых тел//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987. С. 55—58.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

РАСЧЕТ ТЕПЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НА УДАРНОЙ АДИАБАТЕ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ МЕТАЛЛОВ

И. И. Костенко, Л. И. Шахтмейстер

В настоящее время существует уже достаточно большое количество уравнений состояния металлов, описывающих их поведение в широком диапазоне давлений и температур, поэтому появилась необходимость в подробном сравнении параметров, полученных по различным уравнениям состояния. В данной работе проводится анализ трех типов уравнений состояния. Их выбор связан с тем, что теоретические ударные адиабаты, построенные по этим уравнениям, практически совпадают (с точностью 1%) друг с другом в переменных ($P_н$, $\rho_н$).

Здесь $P_н$, $\rho_н$ — давление и плотность ударного сжатия. Первое из уравнений чисто эмпирическое, второе — интерполяционное, третье — основано на построении потенциала межатомного взаимодействия. Соответственно в такой же последовательности они расставлены по сложности построения. Для первого необходимо задать $P_н$ ($\rho_н$) — экспериментальную ударную адиабату и Γ_0 — коэффициент Грюнайзена при нормальных условиях, для второго — вид интерполяционной функции и константы ρ_0, a, b, Γ_0 — плотность, изэтропическую скорость звука, коэффициент из соотношения $D=a+bu$ (D — скорость ударной волны, u — массовая скорость частиц за фронтом волны) при нормальных условиях; для третьего — вид функции потенциала холодного сжатия и величины ρ_0, a, b, Γ_0, Γ_0', Γ_0'', E_{T0}. Для привязки потенциала к состоянию нулевого равновесия ($P=0$, $T=0$) необходимо решить неявную систему из трех уравнений с тремя неизвестными.

Таким образом, можно говорить о существенном возрастании сложности построения уравнений состояния от первого

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

к третьему. Возникает вопрос, при каких физических постановках задачи какое уравнение лучше использовать, а когда целесообразно использовать сложные уравнения состояния. Для многих задач механики сплошных сред весьма важен корректный расчет температуры и тепловых характеристик среды, поэтому в данной работе проведено сравнение уравнений состояния, именно с точки зрения точности расчетов тепловых характеристик. Сравнение сделано по $E_{T\text{н}}$ — тепловой составляющей удельной внутренней энергии на ударной адиабате.

1. Уравнение состояния вида $P=A(\rho)+B(\rho)E$

Построение такого уравнения состояния осуществляется следующим образом. На основании эмпирического соотношения $\Gamma\rho=\Gamma_0\rho_0$ полагается $B(\rho)=\Gamma_0\rho_0=\text{const}$. Функция $A(\rho)$ строится таким образом, чтобы теоретическая ударная адиабата совпадала с экспериментальной в виде

$$P_{\text{н}}=\frac{\rho_0 a^2\eta(\eta-1)}{(b-(b-1)\eta)^2},\ \text{где}\ D=a+bu,\ \eta=\rho/\rho_0,$$

тогда

$$A(\rho)=\frac{\rho_0 a^2(\eta-1)\left(\eta-\frac{\Gamma_0}{2}(\eta-1)\right)}{(b-(b-1)\eta)^2}-\rho_0\Gamma_0E_0, \qquad (1.1)$$

где ρ, η — плотность и сжатие среды; E_0 — начальная удельная внутренняя энергия среды. Для таких функций $A(\rho)$ и $B(\rho)$ удельная энергия холодного сжатия имеет вид

$$E_x=\exp\left(-\frac{\Gamma_0}{\eta}\right)\int\limits_{\eta_{0k}}^{\eta}\frac{A(\eta)}{\rho_0\eta^2}\exp\left(\frac{\Gamma_0}{\eta}\right)d\,\eta, \qquad (1.2)$$

а потенциал холодного сжатия запишется так:

$$P_x=\Gamma_0\rho_0\exp\left(-\frac{\Gamma_0}{\eta}\right)\int\limits_{\eta_{0k}}^{\eta}\frac{A(\eta)}{\rho_0\eta^2}\exp\left(\frac{\Gamma_0}{\eta}\right)d\,\eta+A(\eta);\ \eta_{0k}=\rho_{0k}/\rho_0, \qquad (1.3)$$

$$\text{где}\ E_0=\frac{a^2}{\Gamma_0}\frac{(\eta_{0k}-1)\left(\eta_{0k}-\frac{\Gamma_0}{2}(\eta_{0k}-1)\right)}{(b-(b-1)\eta_{0k})^2};$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ρ_{0k} — плотность среды при $P=0$; $T=0$. Значение η_{0k} определим из условия $E_x(\rho_0)+E_{T_0}=E_0$, где E_{T_0} — начальное значение тепловой составляющей удельной внутренней энергии, которое задается как константа материала.

2. Уравнение состояния вида $P=P_s+\Gamma\rho(E-E_s)$

В этом уравнении за «опорную» кривую [1] принимается кривая изэнтропического сжатия (P_s, E_s), где $E_s=\int\limits_{\rho_0}^{\rho} P_s/\rho^2 d\rho$. Для него удельная энергия и давление холодного сжатия имеют вид

$$E_x=\int\limits_{\rho_{0k}}^{\rho} P_s/\rho^2 d\rho - E_{T0}\int\limits_{\rho_{0k}}^{\rho} \frac{\Gamma}{\rho}\exp\left(\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\frac{\Gamma}{\rho}d\rho\right)d\rho\,; \tag{2.1}$$

$$P_x=P_s-\Gamma_\rho E_{T_0}\exp\left(\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\frac{\Gamma}{\rho}d\rho\right), \tag{2.2}$$

где ρ_{0k} находится из условия $P_x(\rho_{0k})=0$. Если для этого уравнения состояния принять соотношение $\Gamma\rho=\Gamma_0\rho_0$, тогда

$$P_x=P_s-\Gamma_0\rho_0\exp(\Gamma_0(1-1/\eta))E_{T_0}\,; \tag{2.3}$$

$$E_x=\int\limits_{\rho_{0k}}^{\rho} P_s/\rho^2 d\rho - E_{T0}\exp(\Gamma_0)\left(\exp\left(-\frac{\Gamma_0}{\eta_{0k}}\right)-\exp\left(-\frac{\Gamma_0}{\eta}\right)\right). \tag{2.4}$$

Для кривой изэнтропического сжатия аппроксимирующая функция выбирается в виде функции Морзе [1, 2]: $B=4b-2$:

$$P_s=\frac{3\rho_0 a^2}{B}\eta^{2/3}(\exp(2B(1-\eta^{-1/3}))-\exp(B(1-\eta^{-1/3}))).$$

Коэффициенты для функций Морзе найдены из условия равенства первой и второй производных по плотности для кривых изэнтропического сжатия и экспериментальной ударной адиабаты $D=a+bu$ при нормальных условиях:

$$(P_s)'_{\rho_0}=(P_{\text{H}})'_{\rho_0};\ (P_s)''_{\rho_0}=(P_{\text{H}})''_{\rho_0}.$$

3. Уравнение состояния вида $P=P_x+\Gamma\rho(E-E_x)$

В этом уравнении состояния P_x, E_x — потенциал и удельная внутренняя энергия межатомного взаимодействия, по-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

этому они являются функциями от сжатия среды $\eta_k = \rho/\rho_{0k}$ из состояния нулевого равновесия $P=0$, $T=0$. Для аппроксимации используется функция Морзе $B=4b_{0k}-2$:

$$P_x = \frac{3\rho_{0k}a_{0k}^2}{B}\eta_k^{2/3}(\exp(2B(1-\eta_k^{-1/3}))-\exp(B(1-\eta_k^{-1/3}))),$$

где ρ_{0k}, b_{0k}, a_{0k} — физические константы материала при $P=0$, $T=0$. Они находятся из трех физических условий:

$$P(\rho_0)=0;\ (P_s)'_{\rho_0}=(P_H)'_{\rho_0};\ (P_s)''_{\rho_0}=(P_H)''_{\rho_0},$$

где $P_н$ — экспериментальная ударная адиабата $D=a+bu$. Математическое выражение этих условий для исходного уравнения состояния имеет следующий вид:

$$P_x(\rho_0)+\Gamma_0\rho_0E_{T0}=0; \tag{3.1}$$

$$P'_x(\rho_0)+E_{T0}(\Gamma_0^2+\Gamma_0+\Gamma'_0\rho_0)=a^2; \tag{3.2}$$

$$P''_x(\rho_0)+E_{T0}\left(\frac{\Gamma_0^3}{\rho_0}+\frac{\Gamma_0^2}{\rho_0}+3\Gamma_0\Gamma'_0+2\Gamma'_0+\Gamma''_0\rho_0\right)=\frac{a^2(4b-2)}{\rho_0}. \tag{3.3}$$

Производные берутся по плотности.

В п. 2 и 3 построение уравнения состояния существенно связано с выбором интерполяционной функции, для аппроксимации кривых изэнтропического и холодного сжатия используется функция Морзе. Как показано в работах [1, 2, 3], формула Морзе хорошо аппроксимирует парный потенциал межатомного взаимодействия металлов, а также кривую изэнтропического сжатия. В общем можно использовать любые другие функции, например Борн — Майера и Берча — Муриачана [4], если они хорошо описывают поведение материалов.

4. Функция Грюнайзена

Для построения уравнения состояния типа Ми-Грюнайзена необходимо задать вид функции Грюнайзена $\Gamma=\Gamma(\rho)$. Рассмотрим известные виды этой функции. Из [5] $\Gamma\rho=\Gamma_0\rho_0$. Этот вид привлекает исследователей тем, что качественно (а часто и количественно) верно отражает поведение коэффициента Грюнайзена для металлов в широком диапазоне давлений и температур, при этом имеет простой вид, который позволяет делать аналитические выкладки в термодинамических выражениях [6]:

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\Gamma=\frac{P_{H}-P_x}{\rho(E_{H}-E_x)}\ ,\ E_{H}=E_0+\frac{P_{H}}{2}\left(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\rho}\right), \qquad (4.1)$$

где ($P_н$, $E_н$) — экспериментальная ударная адиабата; (P_x, E_x) — теоретически построенный потенциал. Такое построение привлекательно тем, что при верном выборе и привязке потенциала холодного сжатия P_x получаются точные значения коэффициента на ударной адиабате. А если принять Г за функцию только одного аргумента плотности, то получаются точные значения Г и на всех других термодинамических кривых. Но так как при построении используются экспериментальные данные в виде ($P_н$, $E_н$), выражение (4.1) невозможно использовать для экстраполяции на новые области давлений или еще не исследованные материалы.

Из [7] можно заключить

$$\Gamma=-\frac{x}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(P_x/x^{2m/3}) \Big/ \frac{\partial}{\partial x}(P_x/x^{2m/3})+\frac{m-2}{3}\ ,$$

$$m=0,1,2;\ x=\rho_0/\rho.$$

Эта функция обычно используется для экстраполяции на новые области термодинамических параметров и на еще не использованные материалы. На материалах с известными ударными адиабатами ее использовать нецелесообразно ввиду качественного характера построения. Причем если известно ($P_н$, $E_н$) и выбран потенциал P_x, то в большинстве случаев расчеты по формулам (4.1) и (4.2) количественно не совпадают.

Для уравнений состояния из п. 1 и 2 функция Грюнайзена выбрана в виде $\Gamma\rho=\Gamma_0\rho_0$, а для п. 3 — в виде (4.1).

5. Результаты расчетов

Расчеты проведены для материалов Al, Cu, Pb, In, константы даны в табл. 1. Удельная тепловая составляющая энергии E_{T_0} рассчитана по теории Дебая для $T=300°$ К. Данные по Γ_0, Γ_0', Γ_0'' взяты из работы [8], где в диапазоне давлений до 35 кбар Г аппроксимировался функцией $\Gamma=\Gamma_0(\rho_0/\rho)^{\varphi}$. В квадратных скобках приведены ссылки на источники. В табл. 2 приведены константы ρ_{0k}, a_{0k}, b_{0k} , рассчитанные по уравнениям (3.1) — (3.3) с данными из табл. 1. Для расчетов тепловых характеристик представляют интерес величины ρ_{0k}, E_x , E_0 (см. табл. 3).

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Таблица 1

Материал	ρ_0, г/см³ [4]	a, $\frac{см}{мкс}$[4]	b[4]	c_v^*, $\frac{эрг}{г \cdot град} \cdot 10^{-6}$	Θ_0 °К[7]	Γ_0[8]	q[8]	E_{T0}, $\frac{эрг}{г} \cdot 10^{-8}$
Al	2,712	0,5327	1,357	9,04	390	2,14	1,0	16,15
Cu	8,930	0,3913	1,500	3,86	315	2,01	1,3	7,65
Pb	11,346	0,1976	1,568	1,215	88	2,63	1,2	3,26
In	7,278	0,2474	1,551	2,365	129	2,42	1,8	6,02

Таблица 2

Материал	ρ_{0k}, г/см³	a_{0k}, $\frac{см}{мкс}$	b_{0k}
Al	2,745	0,5370	1,360
Cu	9,019	0,3958	1,502
Pb	11,596	0,2018	1,578
In	7,450	0,2552	1,564

Таблица 3

Параметр		Al	Cu	Pb	In
ρ_0/ρ_{0k}	п. 2	0,98789	0,9900	0,9783	0,9766
	п. 3	0,98798	0,9901	0,9784	0,9770
	п. 1	0,98820	0,9903	0,9794	0,9778
E_{x_0}, $\frac{эрг}{г} \cdot 10^{-12}$	п. 2	$-2{,}11 \cdot 10^{-5}$	$-7{,}72 \cdot 10^{-6}$	$-9{,}53 \cdot 10^{-6}$	$-1{,}71 \cdot 10^{-5}$
	п. 3	$-2{,}11 \cdot 10^{-5}$	$-7{,}69 \cdot 10^{-6}$	$-9{,}47 \cdot 10^{-6}$	$-1{,}71 \cdot 10^{-5}$
	п. 1	$-2{,}01 \cdot 10^{-5}$	$-7{,}40 \cdot 10^{-6}$	$-8{,}54 \cdot 10^{-6}$	$-1{,}57 \cdot 10^{-5}$
E_0, $\frac{эрг}{г} \cdot 10^{-12}$	п. 2	$1{,}594 \cdot 10^{-3}$	$7{,}571 \cdot 10^{-4}$	$3{,}16 \cdot 10^{-4}$	$5{,}845 \cdot 10^{-4}$
	п. 3	$1{,}594 \cdot 10^{-3}$	$7{,}571 \cdot 10^{-4}$	$3{,}16 \cdot 10^{-4}$	$5{,}845 \cdot 10^{-4}$
	п. 1	$1{,}595 \cdot 10^{-3}$	$7{,}574 \cdot 10^{-4}$	$3{,}17 \cdot 10^{-4}$	$5{,}860 \cdot 10^{-4}$

Можно говорить, что методики расчетов по пп. 2 и 3 дают практически совпадающие результаты для характеристик начального состояния. Методика расчета по п. 1 с хорошей точностью совпадает с таковой по пп. 2 и 3. Тепловая составляющая удельной внутренней энергии E_T на ударной адиабате находилась из выражения $E_T = E_н - E_x$, где $E_н$— экспериментальное значение.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Таблица 4

ρ/ρ_0	E_x(п.3) $\frac{эрг}{г} \cdot 10^{-12}$	E_x(п.2)	E_x(п.1)	E_T (п.3)	E_T (п.2)	E_T (п.1)
			Алюминий			
1,00	$-2{,}113 \cdot 10^{-5}$	$-2{,}11 \cdot 10^{-5}$	$-2{,}01 \cdot 10^{-5}$	$1{,}615 \cdot 10^{-3}$	$1{,}615 \cdot 10^{-3}$	$1{,}615 \cdot 10^{-3}$
1,05	$1{,}992 \cdot 10^{-4}$	$1{,}990 \cdot 10^{-4}$	$2{,}023 \cdot 10^{-4}$	1,764	1,764	1,761
1,10	$1{,}066 \cdot 10^{-3}$	$1{,}066 \cdot 10^{-3}$	$1{,}072 \cdot 10^{-3}$	2,055	2,055	2,049
1,20	4,784	4,782	4,783	3,393	3,395	3,394
1,30	$1{,}101 \cdot 10^{-2}$	$1{,}100 \cdot 10^{-2}$	$1{,}097 \cdot 10^{-2}$	6,598	6,608	6,638
1,40	1,959	1,957	1,948	$1{,}290 \cdot 10^{-2}$	$1{,}292 \cdot 10^{-2}$	$1{,}301 \cdot 10^{-2}$
1,50	3,035	3,031	3,016	2,384	2,385	2,400
1,60	4,316	4,309	4,292	4,116	4,123	4,140
			Медь			
1,00	$-7{,}694 \cdot 10^{-6}$	$-7{,}72 \cdot 10^{-6}$	$-7{,}40 \cdot 10^{-6}$	$7{,}648 \cdot 10^{-4}$	$7{,}648 \cdot 10^{-4}$	$7{,}648 \cdot 10^{-4}$
1,05	$1{,}228 \cdot 10^{-4}$	$1{,}774 \cdot 10^{-4}$	$1{,}235 \cdot 10^{-4}$	8,347	7,800	8,340
1,10	6,213	7,429	6,221	9,832	8,613	9,824
1,20	$2{,}761 \cdot 10^{-3}$	$3{,}010 \cdot 10^{-3}$	$2{,}763 \cdot 10^{-3}$	$1{,}775 \cdot 10^{-3}$	$1{,}716 \cdot 10^{-3}$	$1{,}773 \cdot 10^{-3}$
1,30	6,399	6,773	6,429	3,893	3,519	3,863
1,40	$1{,}150 \cdot 10^{-2}$	$1{,}197 \cdot 10^{-2}$	$1{,}163 \cdot 10^{-2}$	8,391	7,921	8,261
1,50	1,801	1,858	1,843	$1{,}677 \cdot 10^{-2}$	$1{,}620 \cdot 10^{-2}$	$1{,}635 \cdot 10^{-2}$
1,60	2,589	2,653	2,690	3,111	3,047	3,010

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Таблица 5

ρ/ρ_0	E_x(п.3) $\frac{\text{эрг}}{\text{г}} \cdot 10^{-12}$	E_x(п.2)	E_x(п.1)	E_T (п.3)	E_T (п.2)	E_T (п.1)
			Свинец			
1,00	$-9{,}474 \cdot 10^{-6}$	$-9{,}53 \cdot 10^{-6}$	$-8{,}55 \cdot 10^{-6}$	$3{,}259 \cdot 10^{-4}$	$3{,}259 \cdot 10^{-4}$	$3{,}259 \cdot 10^{-4}$
1,05	$1{,}523 \cdot 10^{-5}$	$1{,}504 \cdot 10^{-5}$	$1{,}632 \cdot 10^{-5}$	3,538	3,542	3,529
1,10	$1{,}191 \cdot 10^{-4}$	$1{,}181 \cdot 10^{-4}$	$1{,}216 \cdot 10^{-4}$	4,178	4,188	4,153
1,20	6,248	6,203	6,275	6,867	6,913	6,840
1,30	$1{,}530 \cdot 10^{-3}$	$1{,}518 \cdot 10^{-}$	$1{,}529 \cdot 10^{-3}$	$1{,}340 \cdot 10^{-3}$	$1{,}352 \cdot 10^{-3}$	$1{,}341 \cdot 10^{-3}$
1,40	2,833	2,810	2,830	2,715	2,738	2,718
1,50	4,529	4,490	4,540	5,309	5,348	5,298
1,60	6,610	6,549	6,677	9,881	9,942	9,814
			Индий			
1,00	$-1{,}712 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}71 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}568 \cdot 10^{-5}$	$6{,}016 \cdot 10^{-4}$	$6{,}016 \cdot 10^{-4}$	$6{,}016 \cdot 10^{-4}$
1,05	2,188	2,071	2,275	6,655	6,646	6,646
1,10	$1{,}829 \cdot 10^{-4}$	$1{,}770 \cdot 10^{-4}$	$1{,}829 \cdot 10^{-4}$	7,458	7,517	7,458
1,20	9,779	9,518	9,658	$1{,}154 \cdot 10^{-3}$	$1{,}180 \cdot 10^{-3}$	$1{,}166 \cdot 10^{-3}$
1,30	$2{,}405 \cdot 10^{-3}$	$2{,}341 \cdot 10^{-3}$	$2{,}370 \cdot 10^{-3}$	$2{,}134 \cdot 10^{-3}$	2,237	2,169
1,40	4,459	4,342	4,403	4,183	4,300	4,239
1,50	7,131	6,939	7,086	8,030	8,222	8,075
1,60	$1{,}041 \cdot 10^{-2}$	$1{,}013 \cdot 10^{-2}$	$1{,}046 \cdot 10^{-2}$	$1{,}477 \cdot 10^{-2}$	$1{,}505 \cdot 10^{-2}$	$1{,}472 \cdot 10^{-2}$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

В табл. 4, 5 приведены результаты расчетов величин E_x и E_T. Для Al получилось, что три различные методики дали очень хорошее совпадение друг с другом по величинам E_T и E_x. Это объясняется отчасти тем, что функция $\Gamma\rho = \Gamma_0\rho_0$ для алюминия действительно аппроксимирует коэффициент Грюнайзена.

Для материалов Cu, Pb, In между пп. 2 и 3 совпадения величин нет, разница в абсолютных величинах составляет не более 5÷10% в зависимости от материала и сжатия. Отсюда можно сделать вывод, что коэффициент Г, используемый в п. 2, качественно верно отражает поведение реального Г, но не количественно (особенно для меди). Расчет величин по п. 1 отличается от такового по пп. 2 и 3 в среднем не более чем на 10%. Для исследователей, которые работают в диапазоне давлений до 100 кбар, целесообразно сравнить относительные величины (т. е. приросты величин). В этих величинах расхождение между пп. 1, 2, 3 гораздо большее, поэтому имеет смысл использовать методику, описанную в п. 3, так как она методологически наиболее правильна и последовательна в своем построении. В области давлений свыше 1 Мбар можно считать методики, приведенные в пп. 1, 2, 3, практически равноценными.

Авторы считают, что способ расчета, данный в п. 3, обеспечивает 10%-ную точность расчета температуры на ударной адиабате по сравнению с реальной температурой в диапазоне давлений до 2 Мбар. Точность расчета может быть повышена, во-первых, за счет использования более гибких интерполяционных функций, например, при использовании не трех, а четырех параметрических потенциалов; во-вторых, за счет использования экспериментальных данных, полученных на одном и том же материале в одинаковых термодинамических условиях. Если же удовлетворяет погрешность 10÷20%, то можно использовать более простые методы (см. пп. 1 и 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков А. В. О выборе интерполяционного потенциала для кривой изэнтропического сжатия//Физика горения и взрыва. 1980. Т. 16. № 1. С. 151—153.

2. Жданов В. А., Жуков А. В. Термодинамически полные уравнения состояния металлов (твердая фаза)//Журнал прикладной механики и техническй физики. 1978. № 5. С. 139—146.

3. Вааль А. А., Чернов Д. Е. Уравнения состояния статического и динамического сжатия халькогенидов бария//Журнал прикладной механики и технической физики. 1986. № 3. С. 105—108.

4. Альтшулер Л. В., Брусникин С. Е., Кузьменков Е. А.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Изотермы и функции Грюнайзена 25 металлов//Журнал прикладной механики и технической физики. 1987. № 1. С. 134—146.

5. Мак-Куин Р., Марш С. Уравнения состояния 19 металлических элементов по ударно-волновым измерениям до 2 Мбар//Динамические исследования твердых тел при высоких давлениях. М.: Мир, 1975. 115 с.

6. Кормер С. Б., Фунтиков А. И., Урлин В. Д., Колесникова А. И. Ударные диабаты металлов при высоких давления//Журнал эксперементальной и теоретической физики. 1962. Т. 42. № 3. С. 686—703.

7. Жарков В. Н., Калинин В. А. Уравнения твердых тел при высоких давлениях и температурах. М.: Наука. 1968. 310 с.

8. Boehler R., Ramakushnan I. Experemental results on the pressure dependence of the Cruneisen parameter: a review//J. Geophys. Res. 1908. Vol. 85. № 12. P. 6996—7002.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

УПРУГОЕ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ: ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ И СЛУЧАЙ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

В. А. Колдунов, Ш. Ш. Мударисов, Ю. Н. Сидоренко, О. И. Черепанов

Рассматривается процесс геометрически нелинейного деформирования цилиндрической оболочки под действием осевой сжимающей силы (осесимметричная задача) и равномерного внешнего давления (плоская задача). Решение проводится на основе пространственных соотношений теории упругости.

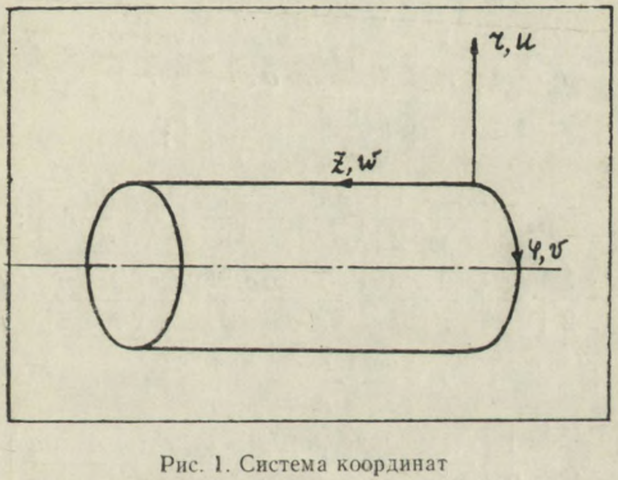


Рис. 1. Система координат

За исходные физические соотношения принимается обобщенный закон Гука [1], который в цилиндрической системе координат (рис. 1) записывается в виде

$$\varepsilon_{rr}=\frac{1}{E_r}\sigma_{rr}-\frac{\nu_{r\varphi}}{E_\varphi}\sigma_{\varphi\varphi}-\frac{\nu_{rz}}{E_z}, \quad \varepsilon_{r\varphi}=\frac{1}{G_{r\varphi}}\sigma_{r\varphi},$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}=-\frac{\nu_{\varphi r}}{E_r}\sigma_{rr}+\frac{1}{E_\varphi}\sigma_{\varphi\varphi}-\frac{\nu_{\varphi z}}{E_z}\sigma_{zz},\quad \varepsilon_{\varphi z}=\frac{1}{G_{\varphi z}}\sigma_{\varphi z}, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{zz}=-\frac{\nu_{zr}}{E_r}\sigma_{rr}-\frac{\nu_{z\varphi}}{E_\varphi}\sigma_{\varphi\varphi}+\frac{1}{E_z}\sigma_{zz},\quad \varepsilon_{rz}=\frac{1}{G_{rz}}\sigma_{rz},$$

где σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} — нормальные напряжения; $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi z}$, σ_{rz} — касательные напряжения (первый индекс показывает направление, в котором действует напряжение, а второй индекс — направление внешней нормали к площадке, к которой приложено напряжение); E_r, E_φ, E_z — модули Юнга по направлениям r, φ, z соответственно; $G_{r\varphi}$, $G_{\varphi z}$, G_{rz} — модули сдвига для плоскостей $z=\text{const}$, $r=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$ соответственно; $\nu_{r\varphi}$, ν_{rz}, $\nu_{\varphi r}$, $\nu_{\varphi z}$, ν_{zr}, $\nu_{z\varphi}$ — коэффициенты Пуассона. При этом должны выполняться следующие соотношения:

$$E_\varphi\nu_{\varphi r}=E_r\nu_{r\varphi},\quad E_z\nu_{z\varphi}=E_\varphi\nu_{\varphi z},\quad E_r\nu_{rz}=E_z\nu_{zr}. \tag{2}$$

Геометрические величины берутся в виде [2]:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right];$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{u}{r}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{u}{r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{v}{r}\right)^2\right];$$

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right];$$

$$\varepsilon_{z\varphi}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{u}{r}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{v}{r}\right)\right]; \tag{3}$$

$$\varepsilon_{zr}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial r}\right];$$

$$\varepsilon_{\varphi r}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{u}{r}\right)\frac{\partial v}{\partial r}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{v}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial r}\right],$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

где u — перемещения по координате r; v — перемещения по координате φ; w — перемещения по координате z.

Алгоритм решения рассмотрим на примере осесимметричной задачи. Граничные условия на одном торце соответствуют жесткому защемлению, т. е. $u=0$, $w=0$, на другом — перемещению $u=0$, $\sigma_{zz}=-P_{н}$, где $P_{н}$ — внешняя нагрузка.

Задача решается в вариационной постановке, в основу которой положен принцип стационарности полной потенциальной энергии деформации упругой системы [3]:

$$\delta Э=0, \tag{4}$$

где $Э=Э_1-Э_2$; $$Э_1=\frac{1}{2}\int\limits_V(\sigma_{rr}\varepsilon_{rr}+\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}+\sigma_{\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi}+2\sigma_{rz}\varepsilon_{rz})dV \tag{5}$$

— потенциальная энергия деформации системы (работа внутренних сил);

$$Э_2=\int\limits_S(R_S u+Z_S w)dS \tag{6}$$

— работа внешних поверхностных сил, приложенных к системе, на вызванных ими перемещениях.

На основании соотношений (1), (2), (3) потенциальная энергия деформации системы выражается через перемещения u, w, т. е.

$$Э_1=Э_1(u,\ w). \tag{7}$$

Вариационная задача относительно непрерывных перемещений u, w заменяется вариационной задачей относительно их дискретных значений в узлах конечно-разностной сетки, которой покрывается сечение оболочки. Аппроксимирующие конечно-разностные соотношения для получения приближенного функционала (7) берутся аналогично соотношениям, представленным в работе [4]. Определение стационарного значения приближенного функционала сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial Э}{\partial u_{kl}}&=\frac{\partial Э_1}{\partial u_{kl}}-\frac{\partial Э_2}{\partial u_{kl}};\\ \frac{\partial Э}{\partial w_{kl}}&=\frac{\partial Э_1}{\partial w_{kl}}-\frac{\partial Э_2}{\partial w_{kl}},\end{aligned} \tag{8}$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

где k, l — узлы конечно-разностной сетки по координатам r и z соответственно, в которых возможно варьирование перемещений. Система (8) решается методом Ньютона [5] в сочетании с методом последовательных нагружений. На каждом шаге по нагрузке итерационный процесс строится на основе представления очередного $S+1$ приближения для перемещений u, w в форме $u^{S+1}=u^S+\Delta u^S$, $w_{S+1}=w^S+\Delta w^S$, где $S=0, 1, 2, \ldots$ — номер исходного приближения. Первое приближение первого шага по нагрузке соответствует решению линейной задачи. Разлагая (8) в ряды и ограничиваясь первыми дифференциалами, т. е. линеаризуя (8) относительно приращений Δu^S, Δw^S, получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}
\sum_i\sum_j\left(\frac{\partial^2 Э_1^i(u^S,w^S)}{\partial u_{kl}\partial u_j}\Delta u_j^S+\frac{\partial^2 Э_k^i(u^S,w^S)}{\partial u_{kl}\partial w_j}\Delta w_j^S\right)=\\
=-\sum_i\left(\frac{\partial Э_1^i(u^S,w^S)}{\partial u_{kl}}-\frac{\partial Э_2^i}{\partial u_{kl}}\right);\\
\sum_i\sum_j\left(\frac{\partial^2 Э_1^i(u^S,w^S)}{\partial w_{kl}\partial u_j}\Delta u_j^S+\frac{\partial^2 Э_1^i(u^S,w^S)}{\partial w_{kl}\partial w_j}\Delta w_j^S\right)=\\
=-\sum_i\left(\frac{\partial Э_1^i(u^S,w^S)}{\partial w_{kl}}-\frac{\partial Э_2^i}{\partial w_{kl}}\right),
\end{gathered}\tag{9}$$

где индексом i отмечены слагаемые энергии деформации ячеек, окружающих варьируемый узел k, l. С помощью индекса j пронумерованы узлы сетки, перемещения которых входят в аппроксимации производных в пределах i ячейки. Граничные условия естественным образом входят в (9). Решение системы (9) осуществляется методом треугольного разложения Гаусса на каждом шаге итерации. Критерием окончания итерации является условие

$$\left|\frac{\Delta u_j^S}{u_S}\right|\leqslant\varepsilon,\quad \left|\frac{\Delta w_j^S}{w_S}\right|\leqslant\varepsilon,\tag{10}$$

где ε — наперед заданная точность определения перемещений. Матрица коэффициентов системы (9) имеет ленточную симметричную относительно главной диагонали структуру. При значениях параметра внешней нагрузки P, меньших некоторого неизвестного критического значения $P_{кр}$, процесс треугольного разложения устойчив. Это позволяет при после-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

довательном увеличении нагрузки определить значение $P_{кр}$ с заданной точностью на основе теоремы о делении спектра собственных значений симметричного пучка матриц [6]. Продолжение расчета после определения $P=P_{кр}$ осуществляется методом смены независимого параметра [7] следующим образом. На каждом шаге нагружения при P меньшем $P_{кр}$ фиксируется узел P, S конечно-разностной сетки, в котором значение производной $\partial u_{ps}/\partial P$ достигает максимума. При достижении критической нагрузки фиксируется значение параметра $P=P_{кр}$, а в качестве независимого параметра в (9) задается величина

$$u_{pS}=u_{pS}(P_{kp})+j\cdot\Delta u, \qquad (11)$$

где j — номер шага в закритической области. Из системы (9) определяется поле перемещений во всех узлах, за исключением точки $l=p$, $k=S$. После этого по известным узловым перемещениям из отброшенного ранее уравнения

$$\partial Э/\partial u_{pS}=0 \qquad (12)$$

уточняется значение параметра нагрузки $P=P(u_{pS})$, и процесс повторяется до достижения заданной точности вычисления перемещений и нагрузки P.

В качестве основы для тестирования алгоритма расчета были выбраны некоторые результаты работы [8] по упругопластическому деформированию изотропной ($E=2{,}1\cdot10$ кг/см^2; $\nu=0.33$, $\sigma_T=E/250$) оболочки с радиусом срединной поверхности R_0 и толщиной t_0. Определяющие соотношения имеют вид

$$\varepsilon=\begin{cases} \sigma/E, & \sigma\leqslant\sigma_T; \\ \dfrac{\sigma_T}{nE}\left[\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_T}\right)^n-1+n\right], & \sigma>\sigma_T, \end{cases} \qquad (13)$$
$$n=8.$$

Учет упругопластических деформаций в соответствии с законом деформирования (13) основан на теории малых упругопластических деформаций Ильюшина (без учета разгрузки). На рис. 2 приведена зависимость нагрузка — прогиб. Сплошными линиями изображены результаты работы [8], пунктиром — результаты, полученные по предложенному алгоритму, крестиком — появление пластических деформаций по данным работы [8], символом $\boxed{\cdot}$ — появление пластических деформаций, а точкой — момент потери устойчивости при решении задачи по данному алгоритму. На рис. 3 изображена зависимость критической нагрузки от параметра $\alpha=t_0/R_0$. На этом графике сплошные линии — результаты работы [8], а символы $\otimes$ — результаты, полученные при решении зада-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

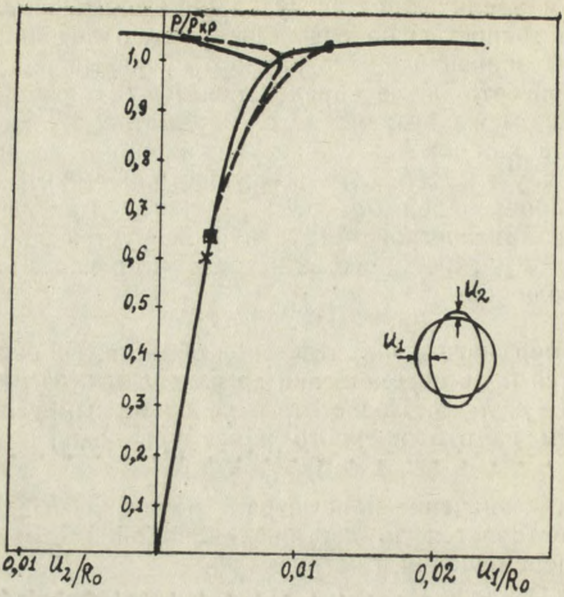


Рис. 2. Зависимость нагрузка-прогиб

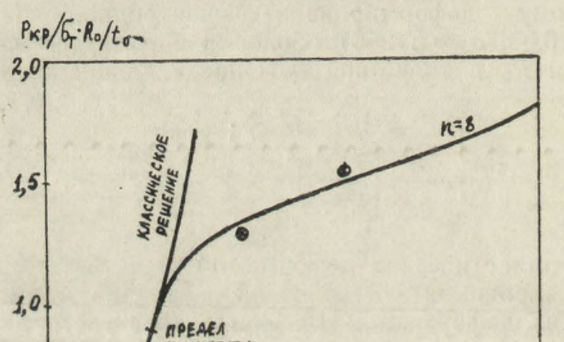


Рис. 3. Зависимость критической нагрузки от относительной толщины оболочки

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

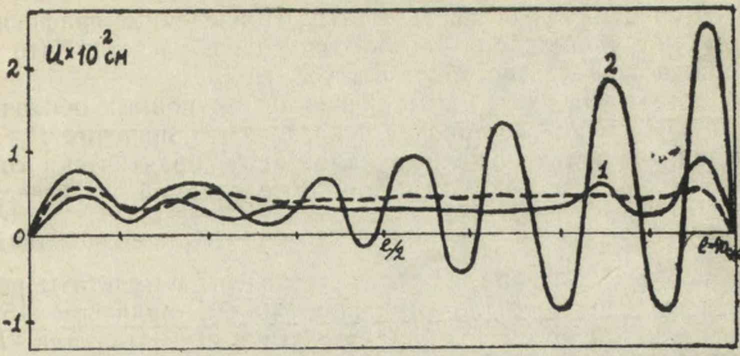


Рис. 4. Распределение прогибов по длине оболочки

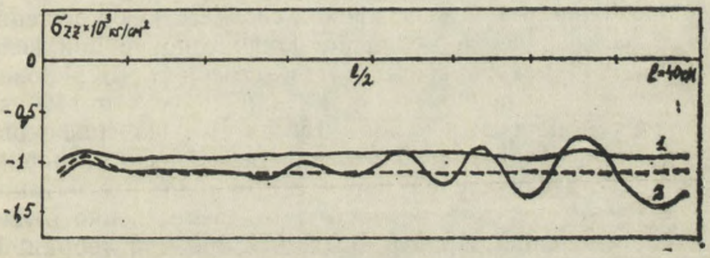


Рис. 5. Распределение осевых напряжений σ_{zz} по длине оболочки на внешней поверхности

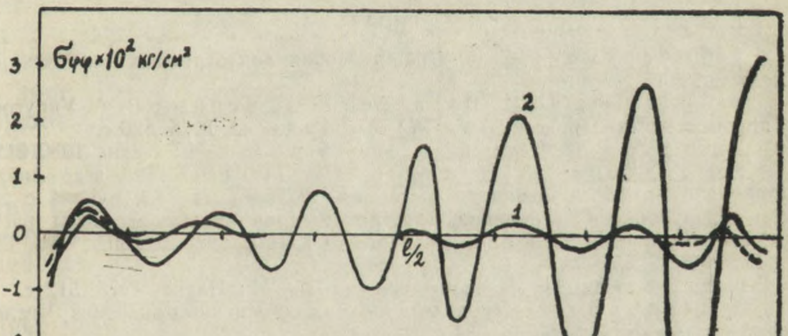


Рис. 6. Распределение окружных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ по длине оболочки на внешней поверхности

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

чи по описанному выше алгоритму. Приведенные графики показывают удовлетворительное совпадение расчетов, что подтверждает работоспособность алгоритма.

Тестовые расчеты на устойчивость изотропных оболочек в осесимметричной постановке показали, что значения $P_{\text{кр}}$, полученные по предложенному алгоритму, практически совпадают с критической нагрузкой, определяемой по известной формуле [9] $P_{\text{кр}}=0{,}6\,\dfrac{Eh}{R}$ при достаточно мелкой конечно-разностной сетке. На рис. 4—6 представлены результаты расчетов ортотропной оболочки длиной 40 см, радиусом 15 см, толщиной 0,05 см с характеристиками материала $E_r = 5{,}9\cdot10^4$ кг/см²; $E_\varphi = 4{,}9\cdot10^5$ кг/см²; $E_z = 7{,}85\cdot10^5$ кг/см²; $G_{rz} = 1{,}962\cdot10^4$ кг/см²; $\nu_{r\varphi} = 0{,}48$; $\nu_{\varphi z} = 0{,}23$; $\nu_{rz} = 0{,}48$. Сплошные линии *1*, *2* на графиках соответствуют решению задачи в геометрически нелинейной постановке при величине нагрузок 900 и 1120 кг/см² соответственно. Штриховая линия — решение линейной задачи при нагрузке 1120 кг/см². Критическая нагрузка равна 1150 кг/см². Из графиков видно, что при нагрузках, близких к критическим, параметры напряженно-деформированного состояния, рассчитанные с учетом геометрической нелинейности, существенно отличаются от параметров, рассчитанных по линейной теории. Предпринятые попытки воспроизвести «кривую Кармана» к положительному результату не привели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.

2. Колтунов Ю. Н., Васильев В. А., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высшая школа, 1975. 526 с.

3. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

4. Колдунов В. А., Кудинов А. Н., Люкшин П. А. и др. Анализ напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций с учетом анизотропии на основании пространственной численной схемы расчета//Теория пластин и оболочек. Материалы XIII Всесоюзн. конф. Ч. 3. Таллинн, 1983. С. 55—60.

5. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

6. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983. 384 с.

7. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.

8. Yoshihiro Tomita, Abio Shindo. On the hifurcation and post-bifurcation behaviour of thick circular elastic-plastic tubas under lateral prassure//Computer methods in applied mechanics and engineering, 1982. V. 35. № 2. P. 207—219.

9. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 311 с.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ДЕЙСТВИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ НА ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАДДУТУЮ СФЕРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ

М. В. Лазаренко, В. И. Тараканов

Процесс высокоскоростного взаимодействия компактного элемента с оболочечной конструкцией можно условно разбить на два этапа: собственно удар и период последействия. Первый этап занимает небольшой промежуток времени (несколько периодов прохождения продольными волнами толщины оболочки) и сопровождается либо сквозным пробитием, либо образованием кратера на лицевой поверхности и отколов на тыльной поверхности. В течение первого этапа импульс компактного элемента полностью или частично (например, в случае сквозного пробития) передается материалу оболочки. Первый этап моделируется взаимодействием элемента с плитой конечной толщины, второй — занимает существенно больший промежуток времени и сводится к возбуждению колебаний оболочечной конструкции за счет импульса, накопленного в зоне удара. При этом в оболочке могут возникнуть разрушающие напряжения, даже если в процессе удара не произошло сквозного пробития. Кроме того, зона разрушения может оказаться значительно большей, чем зона разрушения при сквозном пробитии, если размеры компактного элемента меньше толщины оболочки, а при больших скоростях взаимодействия — существенно меньше толщины оболочки.

Таким образом, изучение периода последействия представляет интерес при оценке характера разрушения оболочечной конструкции.

Рассмотрим локальное импульсное нагружение предварительно наддутой сферической оболочки. Заданием локальной нагрузки $f(x, y, t)$ будем моделировать начальный импульс. Нелинейные уравнения изгиба пологой сферической оболочки, предложенные Вольмиром [2], имеют вид

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$D\,\Delta\Delta\, w - h(\sigma_{xx} w_{,xx} + \sigma_{yy} w_{,yy} + 2\,\sigma_{xy} w_{,xy}) -$$
$$- \frac{h}{R}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \rho\, h w_{,tt} = f(x, y, t); \tag{1}$$
$$\frac{1}{E}\,\Delta\Delta\varphi + \frac{1}{R}\Delta\, w + w_{,xx} w_{,yy} - w^2_{,xy} = 0,$$

где x, y — декартовы координаты; w — прогиб вдоль внутренней нормали; D — цилиндрическая жесткость; E — модуль Юнга; h — толщина оболочки; R — радиус; f — внешняя локальная нагрузка; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений.

Функция напряжений φ связана с напряжениями на срединной поверхности следующими соотношениями:

$$\sigma_{xx} = \varphi_{,yy};\ \sigma_{yy} = \varphi_{,xx};\ \sigma_{xy} = -\varphi_{,xy}. \tag{2}$$

При предварительном наддутии внутренним давлением P напряжения в оболочке

$$\overset{0}{\sigma}_{xx} = \overset{0}{\sigma}_{yy} = \frac{RP}{2\,h};\ \overset{0}{\sigma}_{xy} = 0;\quad w^0 = -\frac{1-\nu}{2\,Eh} R^2 P,$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Линеаризованные уравнения (1) относительно безразмерных изменений прогиба w и функции напряжений φ после локального взаимодействия примут вид

$$\Delta\Delta\, w - a\,\Delta\, w - \Delta\varphi + b w_{,tt} = f,$$
$$\Delta\Delta\varphi + \Delta\, w = 0. \tag{3}$$

Переход к безразмерным величинам в (3) осуществляется следующим образом:

$$w_Б = w/c;\ x_Б = x/c;\ y_Б = y/c;\ t_Б = t/T;\ \varphi_Б = \varphi/Ec^2;$$
$$f_Б = f\,\frac{C^3}{D};\ c^4 = \frac{h^2 R^2}{12(1-\nu^2)};\ b = \frac{\rho\, hc^4}{T^2 D};\ a = \frac{RPc^2}{2\,D}.$$

В дальнейшем индекс опустим. Величину параметра T определим ниже.

Уравнения (3) будем решать с нулевыми начальными условиями

$$w = w_{,t} = 0,\ t = 0. \tag{4}$$

Будем полагать, что место приложения локальной импульсной нагрузки значительно удалено от границ оболочки, тог-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

да можно искать решение уравнений (3), не учитывая влияния границ до тех времен, пока на границе не появятся значительные возмущения. Таким образом, будем искать решение уравнений (3) с начальными условиями (4) в области $-\infty < x,\ y < \infty,\ 0 < t < t_0$, где t_0 — время прохождения упругой волны до границы оболочки.

Получим решение двумя разными методами: с применением преобразования Лапласа и преобразования Фурье.

Пусть

$$T^2 = \frac{\rho h c^4}{D}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)^{-1},$$

тогда

$$b = 1 - \frac{a^2}{4}.$$

Если из второго уравнения (3) взять частное решение

$$\Delta\varphi = -w$$

и после подстановки его в первое уравнение применить преобразование Лапласа [1] по времени, то для изображения прогиба W получим уравнение

$$\Delta\Delta W - a\,\Delta W + \left[1 + \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)p^2\right]W = F, \tag{5}$$

где F — изображение нагрузки f; p — параметр преобразования.

Рассмотрим решение уравнения (5) в частном случае, когда $F = \delta(x-\xi,\ y-\eta)$, где δ — функция Дирака. В этом случае при $x \neq \xi,\ y \neq \eta$ W удовлетворяет однородному уравнению (5), которое можно переписать в виде

$$\left[\Delta - \frac{a}{2} + i\sqrt{(1+p^2)\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)}\right]\left[\Delta - \frac{a}{2} - i\sqrt{(1+p^2)\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)}\right]W = 0. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) имеет вид

$$W = W_1 + W_2,$$

где

$$W_i = A_i K_0\left(\varkappa\sqrt{-\frac{a}{2} \pm i\sqrt{(1+p^2)\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)}}\right)$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

являются решениями уравнений [3]:

$$\Delta W_i+\left[-\frac{a}{2}\pm i\sqrt{(1+p^2)\left(1-\frac{a^2}{4}\right)}\right]W_i=0;$$

$$\varkappa^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2.$$

Значения коэффициентов A_i находятся из условия совпадения асимптотики W решения уравнения (5) с δ-функцией в правой части и асимптотики функции $W_{00}=\frac{1}{8\pi^2}\varkappa^2\ln\varkappa$, являющейся решением уравнения $\Delta\Delta W_{00}=\delta(x-\xi,\ y-\eta)$. Тогда фундаментальное решение уравнения (5) можно записать

$$W_0=\frac{-1}{4\pi i\sqrt{(1+p^2)\left(1-\frac{a^2}{4}\right)}}\times$$

$$\times\left\{K_0\left(\varkappa\sqrt{-\frac{a}{2}+i\sqrt{(1+p^2)\left(1-\frac{a^2}{4}\right)}}\right)-\right.$$

$$\left.-K_0\left(\varkappa\sqrt{-\frac{a}{2}-i\sqrt{(1+p^2)\left(1-\frac{a^2}{4}\right)}}\right)\right\}.$$

Общее решение уравнения (5) для произвольной нагрузки будет иметь вид

$$W(x,\ y,\ p)=\iint\limits_D F(\xi,\ \eta,\ p)W_0(x-\xi,\ y-\eta,\ p)d\,\xi\,d\,\eta.$$

Используя теорему о свертке [1], можно записать оригинал для смещений в виде

$$w(x,\ y,\ t)=\iint\limits_D\int\limits_0^t f(\xi,\ \eta,\ \tau)G_0(x-\xi,\ y-\eta,\ t-\tau)d\,\tau\,d\,\xi\,d\,\eta, \qquad (7)$$

где G_0 — оригинал изображения pW_0.

Определение оригинала G_0 для фундаментального решения W_0 достаточно трудоемко, поэтому приведем его значение, опустив промежуточные выкладки

$$G_0(x-\xi,\ y-\eta,\tau)=\frac{1}{2\pi\sqrt{4-a^2}}\int\limits_0^\tau J_0(u)\sin\left(\frac{\varkappa^2}{8}\sqrt{\frac{4-a^2}{\tau^2-u^2}}+\right.$$

$$\left.+a\sqrt{\frac{\tau^2-u^2}{4-a^2}}\right)\frac{u\,du}{\tau^2-u^2}. \qquad (8)$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

В соотношении (8) нельзя переходить к пределу при $\varkappa \to 0$, меняя порядок интегрирования и предельного перехода. Если область приложения нагрузки D стягивается в точку x_0, y_0, а время приложения нагрузки стремится к нулю, то соотношение (7) принимает вид

$$w(x, y, t) = Q \cdot G_0(x - x_0, y - y_0, t), \; t > 0;$$

$$Q = \lim_{\substack{D \to 0 \\ t \to 0}} \iint_D \int_0^t f(\xi, \eta, \tau)\, d\tau\, d\xi\, d\eta.$$

Величина Q есть безразмерный импульс количества движения, переданный оболочке в момент удара. В общем случае величина Q находится из решения задачи, соответствующей первому этапу взаимодействия — удару.

Получим теперь другой вариант решения. Положим

$$T^2 = \frac{\rho h c^4}{D}, \; b = 1.$$

Если к уравнениям (3) с начальными условиями (4) применить преобразование Фурье [1] по переменным x, y, то уравнения движения относительно трансформант Фурье прогиба W, функции напряжений Φ и нагрузки F примут вид

$$\begin{gathered} (p^2 + q^2)^2 W + (p^2 + q^2)(aW + \Phi) + W_{,tt} = F; \\ (p^2 + q^2)^2 \Phi - (p^2 + q^2) W = 0, \\ W = W_{,t} = 0, \; t = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

После исключения Φ из второго уравнения (9) уравнение движения для прогиба примет вид

$$\begin{gathered} W_{,tt} + \omega^2 W = F, \\ W = W_{,t} = 0; \; t = 0; \\ \omega^2 = (p^2 + q^2)^2 + a(p^2 + q^2) + 1. \end{gathered} \tag{10}$$

Решение (10) может быть записано в виде

$$W = \frac{1}{\omega} \int_0^t F \sin \omega (t - \tau)\, d\tau,$$

тогда, выполнив обратное преобразование Фурье, для прогиба и функции напряжений получим следующее выражение:

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$w(x, y, t)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}e^{-i(px+qy)}\int\limits_0^t F\sin\omega(t-\tau)d\tau dp dq;$$

$$\varphi(x, y, t)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}e^{-i(px+qy)}\int\limits_0^t F\sin\omega(t-\tau)d\tau\frac{dp dq}{p^2+q^2};$$

$$F(p, q, \tau)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x, y, \tau)e^{i(px+qy)}dx dy. \qquad (11)$$

Таким образом, получено решение в квадратурах, непосредственно связывающее значение прогиба и функции напряжений с действующей нагрузкой. Напряжения в оболочке получаются дифференцированием соотношений (11).

Для сосредоточенной нагрузки

$$f(x, y, t)=f(t)\delta(x, y)$$

трасформанта локальной нагрузки имеет вид

$$F(p, q, \tau)=\frac{1}{2\pi}f(\tau).$$

Тогда в полярной системе координат

$$x=r\cos\varphi;\ y=r\sin\varphi;\ p=s\cos\psi;\ q=s\sin\psi \qquad (12)$$

после интегрирования по полярному углу выражение для прогиба примет вид

$$w(r, t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{1}{\omega}J_0(rs)\int\limits_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\, s ds.$$

Для мгновенного импульса сосредоточенной силы

$$f(x, y, t)=f\cdot\delta(t)\delta(x, y)$$

возможно дальнейшее упрощение выражения для прогиба

$$w(r, t)=\frac{f}{4\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\sin\omega t}{\omega}J_0(rs)s ds,$$

$$\omega^2=s^4+as^2+1,$$

где J_0 — функция Бесселя 1-го рода.

Из последних соотношений следует, что при отсутствии наддува прогиб в точке действия импульса сосредоточенной силы изменяется по закону

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$w(0, t) = \frac{f}{4} J_0(t).$$

Выражения для прогиба и функции напряжений значительно упрощаются для случая осесимметричной нагрузки. В полярной системе координат (12) после выполнения интегрирования по полярному углу с учетом соотношений [3] получим

$$w(r, t) = \int_0^\infty \frac{1}{\omega} J_0(rs) \int_0^t \sin\omega(t-\tau) \int_0^\infty f(\rho, \tau) J_0(\rho s) \rho \, d\rho \, d\tau \, s ds;$$

$$\varphi(r, t) = \int_0^\infty \frac{1}{s\omega} J_0(rs) \int_0^t \sin\omega(t-\tau) \int_0^\infty f(\rho, \tau) J_0(\rho s) \rho \, d\rho \, d\tau \, ds, \quad (13)$$

$$\omega^2 = s^4 + as^2 + 1.$$

В качестве иллюстрации приведем пример расчета динамических напряжений в сферической оболочке под внешней нагрузкой, характер распределения которой по поверхности оболочки остается неизменным во времени $f(p, \tau) = f_1(p) \cdot f_2(\tau)$.

Вид функций f_1, f_2 приведен на рис. 1. Расчет проводился для оболочки со следующими характеристиками: $h = 2$ мм; $R = 2$ м; $E = 210$ ГПа; $\nu = 0{,}32$; $\rho = 7800$ кг/м^3; $P = 10^5$ Па. На

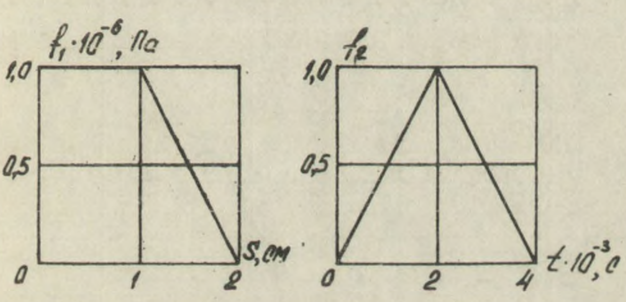


Рис. 1. Зависимость локальной нагрузки от времени и полярного радиуса

рис. 2, 3 приведены зависимости от времени прогиба w и скорости изменения прогиба w_t на оси симметрии $r = 0$ для наддутой (кривые *1*) и ненаддутой оболочек (кривые *2*). Предварительный наддув приводит к снижению максимальной скорости деформирования на 26% и максимального локаль-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

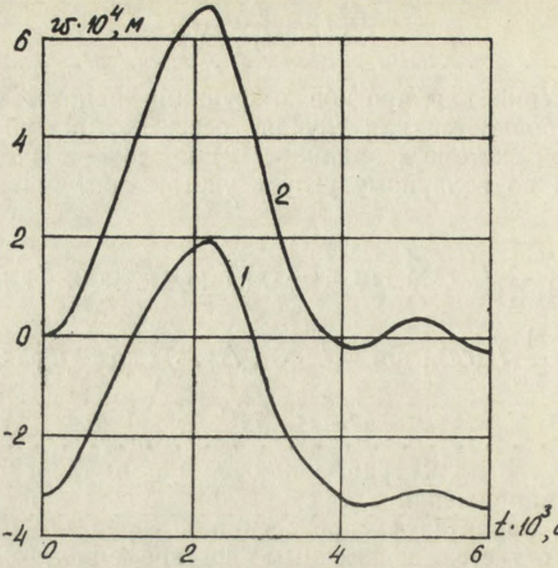


Рис. 2. Зависимость прогиба на оси симметрии от времени

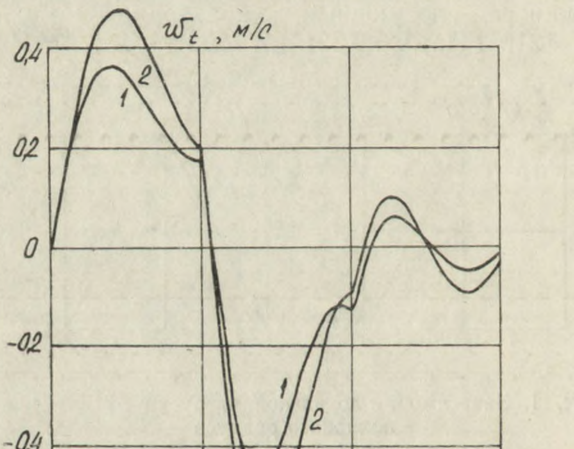


Рис. 3. Зависимость скорости изменения прогиба на оси симметрии от времени

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

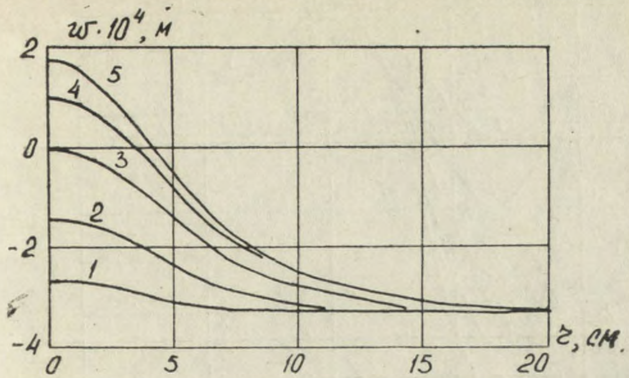


Рис. 4. Распределение прогиба по полярному радиусу

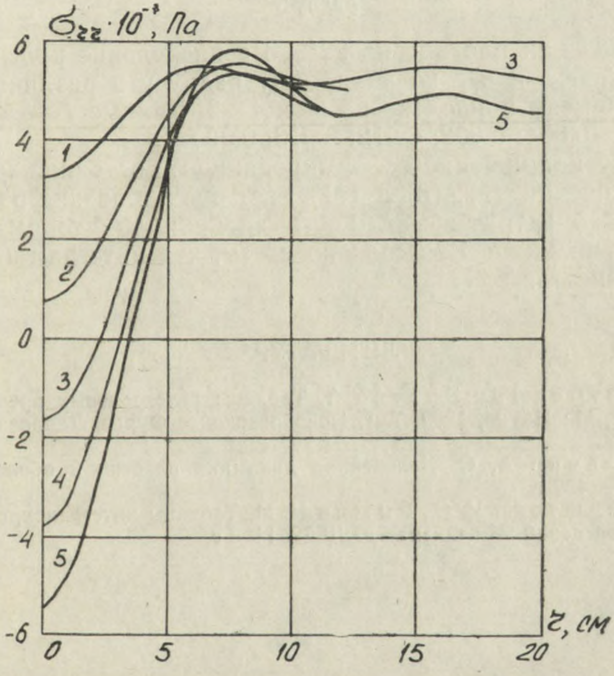


Рис. 5. Распределение напряжения σ_{rr} по полярному радиусу

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

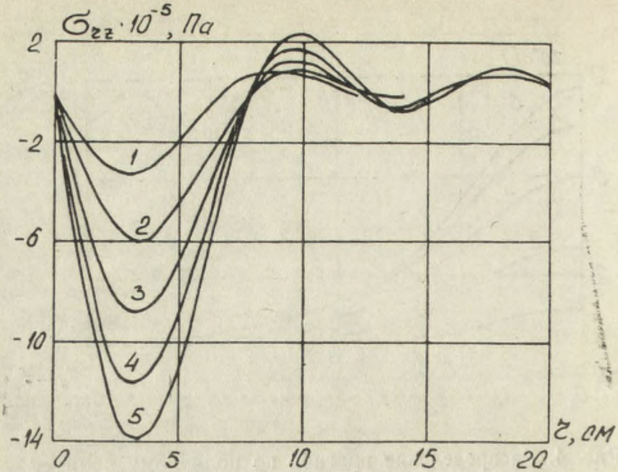


Рис. 6. Распределение напряжения σ_{rz} по полярному радиусу

ного изменения прогиба на 22%. Распределение прогиба, напряжений σ_{rr} и σ_{rz} по полярному радиусу в различные моменты времени приведено на рис. 4—6. Кривые *1—5* соответствуют $t=0{,}004$; 0,008; 0,012; 0,016; 0,020 с.

Расчет напряженно-деформированного состояния на основе соотношений (7), (8) и (11) дает очень близкие результаты. Однако затраты машинного времени во втором случае значительно ниже. Это связано с тем, что интеграл (8) имеет особенность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г. и Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. В 2 т. М.: Наука, 1969. Т. 1. Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина. 343 с.

2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.

3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1108 с.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛИМЕРНЫХ МАССИВОВ

В. Н. Лейцин, С. В. Пономарев

Классический способ определения механических характеристик материалов основывается на использовании результатов испытаний образцов, позволяющих реализовать однородное напряженное или деформированное состояние. К подобным испытаниям относятся, например, испытания галтелей при растяжении и тонкостенных трубок при кручении. Последний вид механических испытаний является технически трудно реализуемым для широкого круга высокоэластичных низкомодульных полимерных материалов из-за потери устойчивости тонкостенных трубок при кручении.

Альтернативными относительно классических методов испытаний механических свойств материалов путем создания однородных напряженных или деформированных состояний в испытываемых образцах являются способы, основанные на натурных или модельных испытаниях элементов конструкций, на испытаниях методом локального нагружения, на испытаниях специальных образцов, реализующих сложнонапряженное или сложнодеформированное состояние. В отличие от классических методов альтернативные способы определения механических характеристик имеют дело с объектами исследования — натурными или модельными элементами конструкций или образцами сложной формы, объединенными названием «полимерный массив».

Оценка механических характеристик полимерного массива по результатам механических испытаний, реализующих сложнонапряженное или сложнодеформированное состояние, требует привлечения результатов численного расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) элемента конструкций для соответствующего нагружения.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

В предложенной работе изложен алгоритм определения эффективных упругих характеристик полимерного массива по результатам испытаний и численного решения краевых задач. Характер испытаний определяет смешанную краевую задачу теории упругости $s=s_u+s_\sigma$.

Анализ результатов расчета НДС массива с заданными нулевыми значениями перемещений на части поверхности s_u позволяет сделать вывод, что решения смешанной краевой задачи при нулевых граничных условиях на s_u зависят от значения модуля Юнга так же, как решения первой краевой задачи

$$\rho(r)=\rho^0(r)/E;$$
$$\sigma_{ij}(r)=\overset{0}{\sigma}_{ij}(r), \tag{1}$$

где $\rho^0(r)$ определяет перемещения или деформации в точке r для значения модуля Юнга $E=1$.

Анализ результатов расчета НДС при заданных ненулевых значениях перемещений на s_u при различных значениях модуля Юнга E позволяет построить следующие зависимости значений перемещений или деформаций $\rho(r)$ и напряжений $\sigma_{ij}(r)$ от значений модуля Юнга:

$$\rho(r)=\rho^0(r)/E+\rho^*(r);$$
$$\sigma_{ij}(r)=\overset{0}{\sigma}_{ij}(r)+\sigma^*_{ij}(r)\cdot E, \tag{2}$$

где $\sigma^0(r)$ и $\rho^0(r)/E$ — результаты решения задачи с нулевыми граничными условиями на s_u.

Алгоритм определения упругих характеристик по результатам испытаний полимерных массивов при сложнонапряженном и сложнодеформированном состоянии основан на зависимости решений краевых задач теории упругости от упругих констант в форме (1) и (2). Например, пусть для рассматриваемого полимерного массива в процессе нагружения измерены значения перемещений или деформаций $\rho_{изм}(x_i)$ в ряде точек на поверхности. Для подобного нагружения решается краевая задача о деформировании тела той же конфигурации, материал которого характеризуется модулем Юнга $E=1$ Па, для набора значений коэффициента Пуассона

$$0<\nu_s<\nu_2<\ldots<0{,}5.$$

Из решения краевых задач используем значения перемещений или деформаций в тех же точках x_i для определения значений

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

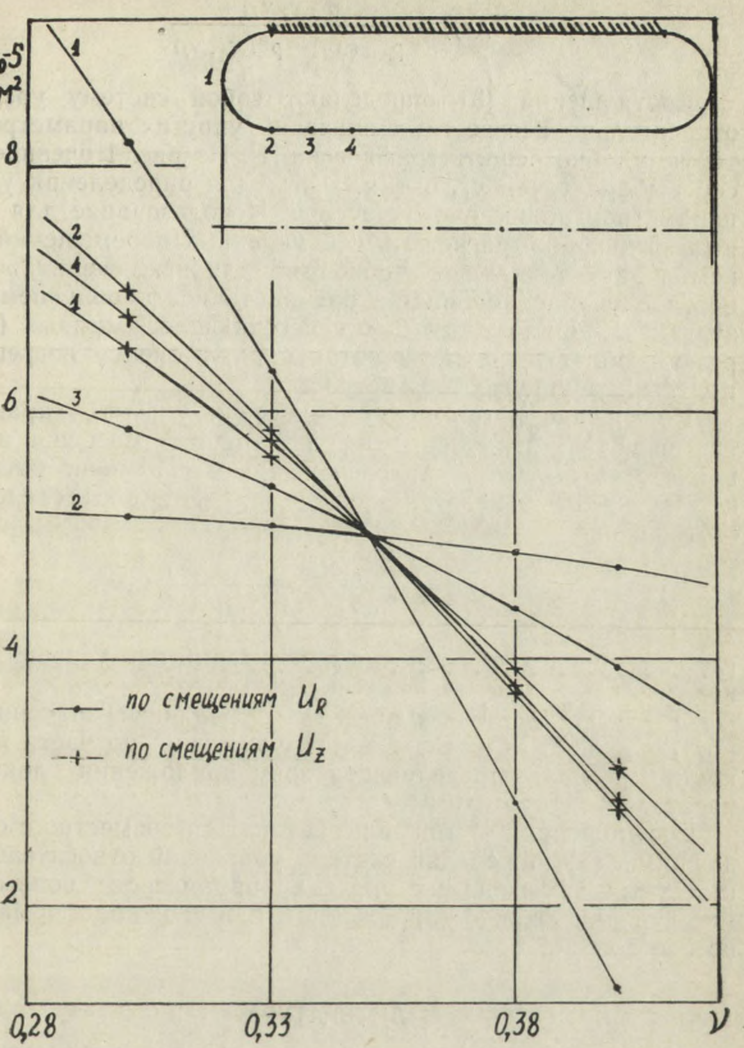


Рис. 1

$$\rho^0(x_t, \nu_j) \text{ и } \rho^*(x_1, \nu_j).$$

Потребовав равенства расчетных и измеренных значений перемещений или деформаций, получим выражение

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$E_i(\nu_j)=\frac{\rho^0(x_i\,\nu_j)}{\rho_{изм}(x_i)-\rho^*(x_1,\nu_j)}. \qquad (3)$$

Соотношения (3) определяют собой систему уравнений относительно неизвестных значений упругих параметров, которую удобно решить графически [1]. Из рис. 1 очевиден способ выбора точек x_i, оптимальных для определения упругих параметров полимерного массива. Использование для подобных вычислений расчетных и измеренных перемещений более чем в двух точках x_i необходимо для исключения возможности случайной ошибки и оценки точности получаемых результатов. В плоскости E, ν пересекающиеся кривые (3) вырезают область, размеры которой дают оценку погрешности полученных упругих параметров.

Построение алгоритма определения упругих характеристик по результатам испытаний полимерных массивов и решений соответствующих краевых задач и сравнение расчетных и измеренных значений напряжений приводит к исследованию соотношений

$$E_i(\nu_j)=\frac{f_{изм}(x_i)-f^0(x_i,\nu_j)}{f^*(x_i,\nu_j)}, \qquad (4)$$

где $f_{изм}$ определяет значения напряжений или условий в точках x_i.

Под усилием понимаются либо граничные значения $t_i = \sigma_{ij}\cdot r_j$, либо интегралы от этих значений по части поверхности массива, определяющей зону приложения локальной нагрузки.

Соотношения (4) могут исследоваться совместно с соотношениями (3), определяя систему уравнений относительно неизвестных эффективных упругих параметров полимерного массива при сложно-напряженном или сложнодеформированном состоянии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brown P. T. Discussion of the paper: Indirect identification of the overage elastic characteristics of rock masses by G. Gioda//Struct. Foundat. Rock. Proc. Int. Conf., Sydney, 7—9 May, 1980. Vol. 2. Rotterdam, 1981. P. 31—32.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

О ВЛИЯНИИ ХАРАКТЕРА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В. И. Масловский

Одной из возможных причин рассогласований результатов экспериментальных испытаний на устойчивость цилиндрических оболочек под действием неравномерного внешнего давления, полученных различными авторами, могут быть отличия в способе передачи нагрузки на оболочку, реализуемые в конкретных установках, и вызываемые этим отклонения в фактическом поверхностном распределении давления от планируемого.

1. Рассмотрим устойчивость шарнирно опертой цилиндрической оболочки, нагруженной переменным внешним давлением:

$$q=\zeta\, q_{\text{п}}\bar{q}(\theta), \tag{1}$$

где

$$q_{\text{п}}=\frac{\pi\sqrt{6}}{9(1-\mu^2)^{3/4}}\,E\frac{R}{L}\left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}$$

— критическое внешнее давление осесимметрично нагруженной оболочки, определяемое по формуле Саутуэлла — Папковича; ξ — коэффициент пропорциональности; $\bar{q}(\theta)$ — функция, характеризующая изменяемость давления в окружном направлении, имеющая единичную амплитуду.

Оценим решение задачи устойчивости оболочки под действием нагрузки (1) с позиции теории локальной устойчивости, исследуя возможность образования единичной локальной вмятины угла раствора π/n в области, характеризуемой угловой координатной θ_i:

$$w=w_0\cos\nu\xi\cos n(\theta-\theta_i);\ \ F=F_0\cos\nu\xi\cos n(\theta-\theta_i).$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Интегрируя уравнения безразличного равновесия теории пологих оболочек в области локальной устойчивости Ω, получим характеристическое уравнение [5]:

$$\zeta^2 a^2 + [(\nu^2+n^2)^2 b + 2\nu^2 a]\cdot\zeta + \varepsilon(n^2+\nu^2)^4 + \nu^4 = 0, \qquad (2)$$

где

$$a = Q(\overline{X}_1^0 n^2 + X_2^0 \nu^2 - 2\overline{X}^0 \nu n);$$

$$b = Q(\overline{T}_2^0 n^2 + \overline{T}_1^0 \nu^2 + 2\overline{S}^0 \nu n);$$

$$\zeta Q\overline{X}_1^0 = -\frac{4nR}{\pi L}\int_\Omega X_1^0 R \cos^2\nu\xi \cos^2 n(\theta-\theta_i)\,d\Omega;$$

$$\zeta Q\overline{X}_2^0 = -\frac{4nR}{\pi L}\int_\Omega X_2^0 R \cos^2\nu\xi \cos^2 n(\theta-\theta_i)\,d\Omega;$$

$$\zeta Q\overline{X}^0 = -\frac{nR}{\pi L}\int_\Omega X^0 R \sin 2\nu\xi \sin 2n(\theta-\theta_i)\,d\Omega;$$

$$\zeta Q\overline{T}_1^0 = -\frac{4nR}{\pi L}\int_\Omega \frac{T_1^0}{Eh} \cos^2\nu\xi \cos^2 n(\theta-\theta_i)\,d\Omega;$$

$$\zeta Q\overline{T}_2^0 = -\frac{4nR}{\pi L}\int_\Omega \frac{T_2^0}{Eh} \cos^2\nu\xi \cos^2 n(\theta-\theta_i)\,d\Omega;$$

$$\zeta Q\overline{S}^0 = -\frac{nR}{\pi L}\int_\Omega \frac{S^0}{Eh} \sin 2\nu\xi \sin 2n(\theta-\theta_i)\,d\Omega,$$

$$Q = \frac{4\pi\sqrt{6}}{9(1-\mu^2)^{3/4}}\left(\frac{R}{L}\right)^2\left(\frac{h}{R}\right)^{3/2}; \quad \nu = \frac{\pi R}{L}; \quad \varepsilon = \frac{1}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{h}{R}\right)^2,$$

а параметры докритического состояния $\overset{0}{\varkappa}_1$, ..., S^0 определяются в рамках линейной теории непологих оболочек.

Критическое значение ξ^* находится посредством минимизации корня (2) по n и θ_i.

2. Рассмотрим с позиций сформулированного выше подхода влияние характера распределения интенсивности внешнего давления на величину критического параметра ξ^*.

Пусть $\bar{q}(\theta)$ — нулевые вне $[-\varphi_{0/2}, \varphi_{0/2}]$ четные функции θ, удовлетворяющие условию $\varphi_0^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{q}(\theta)d\theta = c$, $0 \leqslant c \leqslant 1$. Таких $\bar{q}(\theta)$, отвечающих фиксированным c, φ_0, существует бесконечно много, и в этом случае можно говорить об интегрально равных распределениях нагрузок.

Решениям задачи для оболочки с $L/R = 5{,}83$, $R/h = 788$, $c = 0{,}75$ и различных распределений $\bar{q}(\theta)$ отвечают результаты, представленные на рис. 1.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

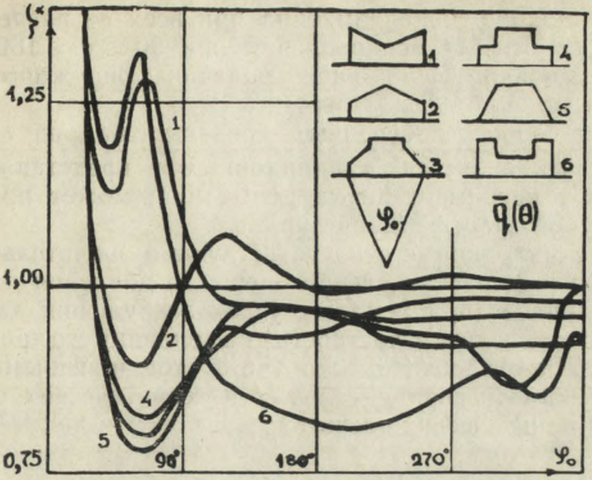


Рис. 1. Относительное критическое неравномерное внешнее давление для различных вариантов распределения по окружной координате

Естественным является совпадение значений ξ^* в области малых углов загружения φ_0 для всех анализируемых вариантов $\bar{q}(\theta)$ $(i=\overline{1,\ 6})$. При φ_0, меньших угла раствора полуволны потери устойчивости осесимметрично нагруженной внешним давлением цилиндрической оболочки, нагрузка воспринимается ею интегрально вне зависимости от характера распределения.

Наиболее опасным в области углов $\varphi_0<100°$ оказывается распределение, отвечающее варианту 5, в области $\varphi_0>100°$ — варианту 6. Локальный минимум $\xi^*(\varphi_0)$ для вариантов 1, 6 в области $\varphi_0=40°$ объясняется резонансом в зоне потери устойчивости (окрестности $\theta=0$) возмущений от границ сектора, прежде всего осевых сжимающих усилий. Для $\varphi_0=360°$ напряженно-деформированное состояние оболочки будет неосесимметричным, вследствие чего значения ξ^* для различных вариантов $\bar{q}(\theta)$ отличаются друг от друга.

При малых φ_0 инициирующая вмятина локализуется по центру сектора, для вариантов 1, 3—6 при увеличении φ_0 зона локальной потери устойчивости уходит из $\theta=0$ и располагается под нагрузкой либо в окрестности границ сектора (для вариантов 1,6), либо в окрестности характерного уступа распределения $\bar{q}(\theta)$ при $\theta=\pm\frac{\varphi_0}{4}$ (для вариантов 3—5). Для ва-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

рианта 2 инициирующая вмятина при всех φ_0 располагается при $\theta=0$, а эффект подкрепления при $90°\leqslant\varphi_0\leqslant180°$ объясняется в основном осцилляцией величины окружного сжимающего усилия в области малых θ.

Нормирование полученных результатов на значение $\xi_i^*(360°)$, что является традиционным в представлении результатов экспериментальных испытаний, может привести к существенной трансформации кривых.

Полученные данные свидетельствуют о значительном влиянии характера распределения внешнего давления по окружной координате (при немалых углах загружения для секториального давления в частности) на величину его критической амплитуды и о необходимости учета этой изменяемости при сопоставлении экспериментальных и теоретических результатов и при практических расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев А. В., Моссаковский В. И., Ободан Н. И. Об устойчивости цилиндрической оболочки при произвольном внешнем давлении//Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970. С. 629—633.

2. Кудинов А. Н., Муравицкий В. И. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек под действием неравномерного внешнего давления и нагрева//Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970. С. 318—322.

3. Кудинов А. Н. Экспериментальное исследование устойчивости конических оболочек при несимметричном внешнем давлении//Тр. НИИ ПММ Томск: Изд-во ТГУ, 1974. Т. 4. С. 150—154.

4. Масловский В. И., Тарновский Е. И. Об устойчивости цилиндрических и слабоконических оболочек при местном нагружении//Матер. региональной научно-практической конференции «Молодые ученые и специалисты — народному хозяйству». Секция математики, кибернетики, АСУ. Томск: Изд-во ТГУ, 1977. С. 209—211.

5. Масловский В. И., Кудинов А. Н. Локальная устойчивость цилиндрической оболочки при секториальном нагружении. Томск, 1979. Рукопись представлена Томским ун-том. Деп. в ВИНИТИ 13 авг. 1979. № 3007—79.

6. Броневич Г. В. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек, нагруженных внешним радиальным давлением на части поверхности//Тр. Всес. заочного политехн. ин-та. Вып. 113. Сер. «Сопротивление материалов и строительная механика». М., 1978. С. 32—37.

7. Кудинов А. Н., Тарновский Е. И. Результаты испытаний на устойчивость цилиндрических оболочек при неосесимметричном нагружении//Пространственные конструкции в Красноярском крае. Красноярск, 1981. С. 149—154.

8. Гольденвейзер Л. П. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

М. Д. Михайлов

Разработка эффективных методов решения уравнений газовой динамики представляет собой важный вопрос современной науки. Эффективным и в общем случае фактически единственным способом решения задач газовой динамики являются численные методы, основанные на использовании современных ЭВМ. Их отличает большая универсальность и возможность применения для исследования широкого класса явлений. При этом дифференциальные или интегральные уравнения, описывающие исходную задачу, аппроксимируются так называемой разностной схемой.

Можно для каждой дифференциальной задачи построить большое количество разностных схем. При этом важно, чтобы они сохраняли свои «хорошие» качества в реальных расчетах, т. е. на грубых сетках.

Для линейных уравнений математической физики существует хорошо развитая теория разностных схем, опирающаяся на центральные понятия: аппроксимация, устойчивость и сходимость. Одним из важнейших свойств разностных схем является устойчивость. Построение устойчивых разностных схем — важная теоретическая задача. До настоящего времени нет теоретического обоснования устойчивости разностных схем, аппроксимирующих систему квазилинейных (нелинейных) уравнений газовой динамики. Широко используется

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

подход фон Неймана [1], основанный на «замораживании» коэффициентов. В последние годы широкое применение при исследовании свойств разностных схем для уравнений газовой динамики получил метод дифференциального приближения (ДП). В [2] сформулированы теоремы о связи устойчивости разностных схем и свойств их дифференциальных приближений, которые ограничены случаем постоянных и переменных коэффициентов. Для нелинейных случаев нет таких строгих утверждений [2], но практические расчеты подтверждают правильность использования метода ДП.

В данной работе предлагается одно семейство разностных схем первого порядка, аппроксимирующее систему дифференциальных уравнений газовой динамики. Это семейство строится на основе схемы типа Фридрихса — Куранта — Леви (Ф-К-Л) [1]. Последняя была предложена для аппроксимации системы газодинамических уравнений для одномерного случая и имеет ряд характерных особенностей.

1. Схема аппроксимирует систему дифференциальных уравнений газовой динамики, записанную в недивергентном виде.

2. Для устранения неустойчивости в решении приходится чередовать левые и правые пространственные разности в зависимости от знака скорости.

3. Схема явная, первого порядка аппроксимации относительно шагов сетки.

В [1] Р. Рихтмайер исследует вопросы аппроксимации и устойчивости этой схемы. Исследование устойчивости основано на «замораживании» коэффициентов. После этого применяется метод Фурье. В настоящей работе схема типа Ф-К-Л исследуется на устойчивость с помощью метода ДП. Полученное необходимое условие устойчивости сравнивается с критерием устойчивости для этой схемы из [1]. Сравнение проводится на модельной задаче о кратковременных импульсных нагрузках в одномерной постановке. Применяется численный метод, основанный на схеме типа Ф-К-Л и семействе разностных схем, построенных на ее основе, и методе искусственной вязкости [3], [4].

Разностная схема типа Фридрихса—Куранта—Леви

Запишем систему уравнений газовой динамики в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}=-\rho\frac{\partial u}{\partial x};$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad (1)$$

$$\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\rho u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=-p\frac{\partial u}{\partial x},$$

где ρ — плотность; u — массовая скорость частиц среды; ε — удельная внутренняя энергия; p — давление; t — время; x — эйлерова пространственная переменная. Система (1) замыкается уравнением состояния вида

$$p=f(\rho,\ \varepsilon). \qquad (2)$$

Аппроксимируем систему (1), предварительно исключив из нее уравнение энергии с помощью уравнения (2), схемой типа Ф-К-Л

$$\frac{\rho_{j+1/2}^{n+1}-\rho_{j+1/2}^{n}}{\tau}+u_j^{n+1}\frac{\rho_{j+1/2}^{n}-\rho_{j-1/2}^{n}}{h}=-\rho_{j+1/2}^{n}\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}}{h},$$

$$u_j^{n+1}\geqslant 0;$$

$$\rho_j^n\left(\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+u_j^n\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}\right)=-\frac{p_{j+1/2}^n-p_{j-1/2}^n}{h},\ u_j^n\geqslant 0; \qquad (3)$$

$$\frac{p_{j+1/2}^{n+1}-p_{j+1/2}^{n}}{\tau}+u_j^{n+1}\frac{p_{j+1/2}^{n}-p_{j-1/2}^{n}}{h}=-(\rho c^2)_{j+1/2}^{n}\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}}{h},$$

$$u_j^{n+1}\geqslant 0.$$

Если u_j^n и u_j^{n+1} отрицательны, то вместо левых пространственных разностей используются правые, т. е.

$$\frac{\rho_{j+1/2}^{n+1}-\rho_{j+1/2}^{n}}{\tau}+u_j^{n+1}\frac{\rho_{j+3/2}^{n}-\rho_{j+1/2}^{n}}{h}=-\rho_{j+1/2}^{n}\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}}{h};$$

$$\rho_j^n\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=-\frac{p_{j+1/2}^n-p_{j-1/2}^n}{h}, \qquad (4)$$

$$\frac{p_{j+1/2}^{n+1}-p_{j+1/2}^{n}}{\tau}+u_j^{n+1}\frac{p_{j+3/2}^{n}-p_{j+1/2}^{n}}{h}=-(\rho c^2)_{j+1/2}^{n}\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}}{h},$$

где r — шаг разностной сетки по времени; h — шаг по пространству; c — местная скорость звука.

Исследование устойчивости схемы (3) проведем с помощью метода ДП [2]. Обозначим через $\omega=(\rho,\ u,\ p)^+$ вектор-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

столбец неизвестных. Предположим, что $\omega(x,t)\in C_2^2(\bar{G})$, где $\bar{G}=\{(x,t):0\leqslant x\leqslant X,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$. Используя идею разложения в ряд Тейлора функций ρ, u, p в окрестности узла (x_j, t^n) до членов первого порядка относительно τ и h, получим вначале Г-форму ПДП (первое дифференциальное приближение):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-\frac{h}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial t}-$$
$$-\tau\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{h}{2}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{h}{2}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\tau\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t};$$
$$\tau\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\tau}{2}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{h}{2}\rho u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad (5)$$
$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+\rho c^2\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{h}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial t}-$$
$$-\tau\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{h}{2}\rho c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\tau\rho c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\frac{h}{2}\frac{\partial(\rho c^2)}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Исключая производные по t и смешанные производные по t и x второго порядка, получим П-форму ПДП

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{h}{2}u-\frac{\tau}{2}u^2\right)\frac{\partial^2\rho}{\partial x}+$$
$$+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\left(\frac{h}{2}-\tau u\right)\frac{\partial\rho}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x};$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-\left(\frac{\tau}{2}u^2+\frac{\tau}{2}c^2-\frac{h}{2}u\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-$$
$$-\tau\frac{u}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\tau u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\frac{\tau}{2\rho}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\tau u}{\rho^2}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{\tau}{2\rho}\frac{\partial(\rho c^2)}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x};$$
$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+\rho c^2\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{h}{2}u+\frac{\tau}{2}c^2-\frac{\tau}{2}u^2\right)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{h}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\tau}{2\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\frac{\tau}{2}\rho c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\tau}{2}\frac{\partial(\rho c)}{\partial t}\cdot$$
$$\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\tau}{2}u\frac{\partial(\rho c^2)}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\tau}{2}\frac{c^2}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x}.$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Выпишем матрицу C_2 коэффициентов при $\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$:

$$C_2=\begin{pmatrix} \frac{h}{2}u-\frac{\tau}{2}u^2 & 0 & \frac{\tau}{2} \\ 0 & \frac{h}{2}u=\frac{\tau}{2}u^2-\frac{\tau}{2}c^2 & -\frac{\tau}{\rho}u \\ 0 & 0 & \frac{h}{2}u-\frac{\tau}{2}u^2+\frac{\tau}{2}c^2 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы C_2. Имеем

$$\lambda_1=\frac{1}{2}(hu-\tau u^2),\ \lambda_2=\frac{1}{2}(hu-\tau(u^2+c^2)),$$

$$\lambda_3=\frac{1}{2}(hu-\tau(u^2-c^2)). \qquad (6)$$

Как следует из леммы [2], необходимым условием устойчивости разностной схемы является выполнение условий $\lambda_i>0$, $i=1, 2, 3$, или, учитывая (6),

$$\varkappa u<1;$$

$$\varkappa^2(u^2+c^2)<\varkappa u, \quad \varkappa=\frac{\tau}{h}. \qquad (7)$$

В общем виде с учетом случая $u<0$ условие устойчивости записывается следующим образом:

$$\varkappa\,|\,u\,|<1;$$

$$\varkappa\frac{u^2+c^2}{|\,u\,|}<1. \qquad (8)$$

С помощью подхода фон Неймана в [1] для схемы (3)—(4) получено условие устойчивости вида

$$\varkappa(\,|\,u\,|+c)\leqslant 1. \qquad (9)$$

Там же доказано, что условие (9) является достаточным условием устойчивости.

С помощью численного эксперимента сравним условия устойчивости (8) и (9). Сравнение проведем на модельной задаче о высокоскоростном соударении пластинчатого бойка и

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

полубесконечной преграды в одномерной постановке в рамках гидродинамической модели.

Однопараметрическое семейство разностных схем

Построим на основе схемы типа Ф-К-Л семейство разностных схем первого порядка аппроксимации. В одномерном случае семейство запишется следующим образом:

$$\frac{\rho_{j+1/2}^{n+1}-\rho_{j+1/2}^{n}}{\tau}=-\alpha u_j^{n+1}\frac{\rho_{j+1/2}^{n}-\rho_{j-1/2}^{n}}{h}-(1-\alpha)\frac{\rho_{j+1/2}^{n+1}-\rho_{j-1/2}^{n+1}}{h}-$$

$$-\rho_{j+1/2}^{n}\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}}{h},\quad u_j^{n+1}\geqslant 0,$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n}}{\tau}+\alpha u_j^n\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}+(1-\alpha)u_j^n\frac{u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{h}=$$

$$=-\frac{1}{\rho_j^n}\frac{p_{j+1/2}^{n}-p_{j-1/2}^{n}}{h},\ u_j^n\geqslant 0; \qquad (10)$$

$$\frac{\varepsilon_{j+1/2}^{n+1}-\varepsilon_{j+1/2}^{n}}{\tau}+\alpha u_j^{n+1}\frac{\varepsilon_{j+1/2}^{n}-\varepsilon_{j-1/2}^{n}}{h}+$$

$$+(1-\alpha)u_j^{n+1}\frac{\varepsilon_{j+1/2}^{n+1}-\varepsilon_{j-1/2}^{n+1}}{h}-\frac{p_{j+1/2}^{n}}{\rho_j^n}\cdot\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_j^{n+1}}{h};$$

$u_j^{n+1}\geqslant 0$; α — параметр, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

В случае $u_j^n<0$, $u_j^{n+1}<0$ соответствующие левые пространственные разности заменяем на правые.

Исследование устойчивости однопараметрического семейства разностных схем (10), проведенное с использованием метода ДП, показало, что для $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ необходимое условие устойчивости имеет вид

$$\varkappa u<1;$$
$$\varkappa^2(u^2+c^2)<\varkappa u.$$

В общем случае с учетом $u<0$ необходимое условие устойчивости семейства схем совпадает с (8).

Модельная задача о высокоскоростном соударении. Анализ результатов численного счета

Постановку задачи о высокоскоростном соударении двух металлических тел при соответствующих предположениях

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

можно найти в [4]. В работе приводится один из многочисленных вариантов соударения, которые рассчитывались с использованием ЭВМ. Рассмотрим высокоскоростное соударение алюминиевого бойка, представляющего собой бесконечно тонкую пластину, о полубесконечную преграду. Скорость соударения $V_0=0{,}2$ см/мкс. Отметим, что $\rho_0=2{,}7$ г/см³, $c_0=0{,}541$ см/мкс. В качестве уравнения состояния бралось уравнение состояния Осборна вида

$$p=\frac{1}{\rho_0\varepsilon+\varphi_0}\Big\{\xi(a_1+a_2\,|\,\xi\,|\,)+$$

$$+\rho_0\varepsilon[b_0+\xi(b_1+b_2\,\xi)+\varepsilon(c_0^1+c_1\,\xi)]\Big\},\ \xi=\frac{\rho}{\rho_0}-1.$$

Для подавления осцилляций, возникающих при численном решении задачи о соударении, использовалась квадратичная искусственная вязкость [4]. В качестве разностной схемы применялись и схема типа Ф-К-Л и однопараметрическое семейство схем (10). Условие устойчивости для схем (3)—(4) и (10) бралось в виде неравенств (8), и шаг τ выбирался таким образом, чтобы выполнялись неравенства (8). Во втором варианте шаг τ выбирался из критерия Куранта (9). Численный счет проводился по программе, составленной на F—IV на ЭВМ ЕС-1022.

Анализ результатов счета показал, что шаг τ, выбранный с учетом (8), меняется в процессе счета (рис. 1, кривая *1*), в то время как шаг τ, выбранный с учетом (9), приводит к неустойчивости схем. Поэтому условие (9) было модифицировано следующим образом:

$$\beta\varkappa(\,|\,u\,|\,+c)\leqslant 1, \tag{11}$$

где $\beta\approx 0{,}75$. Шаг τ, полученный из условия (11), сохраняет в процессе счета почти постоянное значение (рис. 1, кривая *2*). Численные расчеты проводились до $t\approx 10$ мкс. Сравнение обоих вариантов счета (имеются в виду различные способы проверки устойчивости схемы) с точным решением, а также с лагранжевой методикой, дало для обоих вариантов хорошее согласование. Максимальная относительная погрешность наблюдалась при проверке закона сохранения полной энергии E (до 30%), что объясняется недивергентностью уравнения энергии. Кроме того, ввиду неявности схем семейства (10) проводились итерации, что явилось причиной увеличения времени счета. И в этом случае вышеуказанные сравне-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

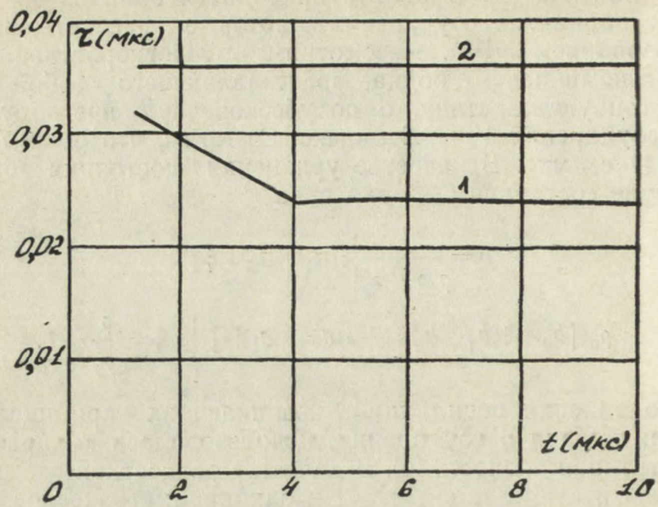


Рис. 1

ния привели к хорошему совпадению результатов (за исключением закона сохранения E).

Таким образом, условия устойчивости, полученные методом ДП для схемы типа Ф-К-Л и для однопараметрического семейства схем, позволяют выбрать практически подходящие шаги τ и h для численного решения задач газовой динамики с ударными волнами и другими особенностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. М.: ИЛ, 1960. 262 с.

2. Шокин Ю. И., Яненко Н. Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985. 364 с.

3. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 686 с.

4. Гриднева В. А., Михайлов М. Д. О влиянии искусственной вязкости на характер решения задачи о кратковременных импульсных нагрузках//Труды НИИ ПММ. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1977. Т. 6. С. 78—86.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

С. М. Павлов, А. А. Светашков

Предлагается метод решения задач линейной и нелинейной вязкоупругости (ЛВУ и НВУ), возникающих при проектировании конструкций из полимерных и композиционных материалов.

Запишем уравнения краевой задачи вязкоупругости в операторном виде

$$A\bar{u}=\bar{f}, \tag{1}$$

где A — некоторый положительно-определенный оператор; $\bar{u}$ — вектор перемещений; $\bar{f}$ — вектор нагрузок. Оператор A содержит кроме дифференциальных еще интегральные операторы, действие которых, как правило, нельзя свести к интегралу с одним ядром, действующим на сумму дифференциальных операторов (в противном случае автоматически выполняется принцип соответствия между упругим и вязкоупругим решениями). Прямая континуально-временная дискретизация оператора A требует достаточно большого объема памяти ЭВМ в связи с необходимостью хранить всю историю изменения во времени компонент вектора перемещений в каждой точке. Рассмотрим двухслойную неявную операторную схему

$$B\,\frac{\bar{u}^{k+1}-\bar{u}^{k}}{\tau^{k+1}}+A\,\bar{u}^{k}=\bar{f}. \tag{2}$$

Ее преимущество перед (1) в том, что B — легкообращаемый оператор. В частности, это может быть оператор линейной вязкоупругости (ЛВУ) с подобными ядрами объемной и сдвиговой релаксации (постоянный коэффициент Пуассона) или оператор теории упругости. Скорость сходимости итерацион-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ного процесса (2) зависит от постоянных энергетической эквивалентности операторов A, B:

$$\gamma_1 B \leqslant A \leqslant \gamma_2 B. \tag{3}$$

Зная γ_1, γ_2, можно оценить близость приближенного и точного решений [1]:

$$\| \bar{u} - \bar{u}^k \| \leqslant \frac{C}{\gamma_1} \left\| \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \right\|^k, \tag{4}$$

где C — некоторая постоянная. Другое преимущество итерационной схемы (2) перед (1), как будет показано ниже, заключается в разделении пространственных и временных переменных, что значительно сокращает объем необходимой памяти ЭВМ и время расчета.

Перейдем к вариационной формулировке задачи ЛВУ. Необходимо найти минимум функционала Лагранжа

$$Э = \int\limits_v W(\varepsilon_{ij}) dv - \int\limits_s p_i u_i \, ds \tag{5}$$

при условии

$$u_i / \Gamma_u = u_i^1 . \tag{6}$$

Здесь V, S — объем тела и его внешняя поверхность; p_i . u_i — компоненты векторов поверхностей нагрузки и перемещений; W — удельный потенциал ЛВУ изотропного тела

$$W(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \theta(t) \Lambda^* \theta + \varepsilon_{ij}(t) G^* \varepsilon_{ij} \tag{7}$$

$$(i, j = 1, 2, 3);$$

$\theta = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронеккера; ε_{ij} — тензор деформации;

$$\Lambda^* \theta \equiv \Lambda_0(t) [\theta(t) - 2 \int\limits_0^t \Gamma_\lambda (t, \tau) \theta(\tau) d\tau]; \tag{8}$$

$$G^* \varepsilon_{ij} \equiv G_0(t) [\varepsilon_{ij}(t) - 2 \int\limits_0^t \Gamma_G (t, \tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau[. \tag{9}$$

Здесь $\Lambda_0(t)$, $G_0(t)$ — модули объемной и сдвиговой упругости нестабильного тела; $\Gamma_\Lambda(t, \tau)$, $\Gamma_G(t, \tau)$ — соответствующие ядра релаксации. Выпуклость функционала $Э$ следует из по-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ложительной определенности $W(\varepsilon_{ij})$ [2]. Удельный потенциал $W(\varepsilon_{ij})$ соответствует краевой задаче ЛВУ с оператором

$$A\bar{u} \equiv (\Lambda^* + 2G^*)\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{u} + G^*\Delta\bar{u} = \bar{f}$$

и граничными условиями

$$\sigma\bar{\nu}\big|_{\Gamma_\sigma} = \bar{p},\quad \bar{u}\big|_{\Gamma_u} = \bar{u}_1.$$

Введем вспомогательный функционал $Э_0$ с удельным потенциалом

$$W_0(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\lambda_s\theta(t)G^*\theta + \varepsilon_{ij}(t)G^*\varepsilon_{ij} \tag{10}$$

$$(i, j = 1, 2, 3).$$

В дифференциальной формулировке ему будет соответствовать оператор

$$B\,\bar{u} \equiv (\lambda_s + 2)G^*\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{u} + G^*\Delta\,\bar{u} = \bar{f}.$$

Вместо задачи минимизации Э при граничных условиях (6) рассмотрим задачу последовательной минимизации

$$Э_1 = \int_v W_0(\varepsilon_{ij})dv - \int_s \rho_i u_i ds + \int_v (W(\overset{n}{\varepsilon_{ij}}) - W_0(\overset{n}{\varepsilon_{ij}}))dv. \tag{11}$$

Сходимость итерационного процесса гарантируется положительной определенностью W, W_0. Постоянные энергетической эквивалентности μ_1, μ_2

$$(\mu_1 Э_0 \leqslant Э \leqslant \mu_2 Э_0)$$

найдены в [3]. Зная их, можно построить оптимальный итерационный процесс с чебышевским набором итерационных параметров [4]. Другой способ достижения оптимальной скорости сходимости состоит в выборе такого параметра λ_s в (10), при котором $\mu_1 \approx \mu_2$. Процесс разделения пространственных и временных переменных ясен из записи последнего интеграла в (11). На нулевой итерации он равен нулю, причем

$$\bar{u}^{(0)}(\bar{x}, t) = \tilde{u}^{(0)}(\bar{x})\varphi_0(t). \tag{12}$$

На первой и последующих итерациях

$$\Delta Э = \int_v (W(\varepsilon_{ij}) - W_0(\varepsilon_{ij}))dv = \int_v \theta(t)(\Lambda^* - \lambda_s G^*)\theta^{(0)}dv. \tag{13}$$

В силу (12)

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\theta^{(0)}(\bar{x}, t)=\tilde{\theta}^{(0)}(\bar{x})\varphi_0(t).$$

Тогда получим

$$\Delta Э=\varphi_1(t) \int_v \theta(\bar{x}, t)\tilde{\theta}^{(0)}(\bar{x})dv, \qquad (14)$$

$$\varphi_1(t)=(\Lambda^*-\lambda_s G^*)\varphi_0(\tau).$$

При варьировании (13) по перемещениям $\bar{u}(x, t)$ первый сомножитель в подынтегральном выражении в (14) пропадает, поэтому $\delta(\Delta Э)$ представим в виде произведения сомножителя $\varphi_1(t)$ на некоторую функцию координат. Поскольку $\Delta Э$ играет в вариационном уравнении (11) роль массовой силы, то новое приближение будет иметь вид

$$u^{(+)}(\bar{x}, t)=\tilde{u}^{(0)}(\bar{x})\varphi_0(t)+\tilde{u}^{(1)}(\bar{x})\varphi_1(t).$$

Для n-го приближения имеем

$$u^{(n)}(\bar{x}, t)=\sum_{i=0}^{n} \tilde{u}^{(i)}(x)\varphi_i(t); \qquad (15)$$

$$\varphi_i(t)=(\Lambda^*-\lambda_s G^*)^i\varphi_0(t). \qquad (16)$$

Временные функции $\varphi_i(t)$ могут быть определены численно или аналитически.

В качестве числового примера просчитывалась задача о напряженно-деформированном состоянии ЛВУ цилиндра конечных размеров под действием внутреннего давления. Реологические характеристики однородно стареющего тела задавались в виде [5]:

$$G^*x=G_0(t)[x(t)-\int_0^t R(t,\tau)x(\tau)d\tau],$$

$$\Lambda^*=\Lambda_0=\text{const};$$

$$R(t,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}[G_0(\tau)+Q(t,\tau)], \quad Q(t, \tau)=-\varphi(\tau)(1-e^{-\gamma(t-\tau)});$$

$$\varphi(\tau)=G_{01}(C_0+A_0e^{-\beta\tau});$$

$$G_0(\tau)=G_{01}(1-\xi e^{-\beta_1\tau}),$$

где $\gamma=0{,}01$; $\beta=0{,}007$; $C_0=0{,}05$; $A_0=0{,}45$; $\xi=0{,}3$; $\beta_1=0{,}06$. В табл. 1 приведена зависимость скорости сходимости от параметра λ_s (N — количество итераций) для разных моментов времени, в табл. 2 — радиальные перемещения внутренней поверхности стареющего ЛВУ-цилиндра под действием внут-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Таблица 1

λ_s	$N(T=5)$	$N(T=15)$
1	Расх.	Расх.
2,1	5	5
2,8	—	5
4	9	9
10	18	19
20	20	20

Таблица 2

t	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	7,34	8,02	8,74	9,32	9,66
5	8,87	9,69	10,5	11,1	11,7
10	9,85	10,7	11,7	12,5	12,9
20	10,7	11,7	12,7	13,6	14,1
50	10,8	11,9	13,0	13,9	14,4

реннего давления для различных моментов истории нагружения. Здесь $x_i=\frac{l_i}{10}$ $(i=1, ..., 5)$ — координаты левой половины внутренней поверхности цилиндра (правая часть деформируется симметрично); L — длина цилиндра.

Расчеты на ЭВМ проводились таким образом, что матрица исходного оператора B, дискретизированного по МКР вариационного уравнения Лагранжа, обращается по методу Гаусса всего один раз. Каждому новому дискретному значению t соответствует новая правая часть системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Итерационный процесс состоит в суммировании решений системы с разными правыми частями и коэффициентами, являющимися функциями времени $\varphi_i(t)$. Естественно, что хранение $\varphi_i(t)$ в памяти ЭВМ (или вычисление $\varphi_i(t)$ на каждой итерации) более экономично, чем хранение истории нагружения в каждой точке конструкции. Время работы центрального процессора ЭВМ БЭСМ-6 для расчета одной итерации составляет около одной минуты, 10 итераций — около двух минут. Значение λ_s не менялось при переходе от одного момента времени к другому. В данном случае пересчет матрицы СЛАУ в зависимости

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

от λ_s менее выгоден с точки зрения экономии машинного времени, чем увеличение количества итераций.

Рассмотрим соотношения главной квазилинейной теории вязкоупругости с мгновенной линейной упругостью [6]:

$$S_{ij}(t)=\Gamma^* e_{ij}-\Gamma_3^*\varphi(e,\ \theta)\,e_{ij}, \tag{17}$$

$$\sigma(t)=K^*\theta,\ e_{ij}=\varepsilon_{ij}-\frac{1}{3}\theta\delta_{ij},\ e=e_{ij}e_{ij}.$$

Здесь K^*, Γ^* — операторы ЛВУ, по своей структуре аналогичные Λ^*, G^*; Γ_3^* — нелинейный оператор релаксации

$$\Gamma_3^*\varphi(e,\ \theta)e_{ij}\equiv\int\limits_0^t\Gamma_3(t,\ \tau)\varphi[e(\tau,\ \tau),\ \theta(\tau)]e_{ij}(\tau)d\,\tau. \tag{18}$$

Наложим на $\varphi(e,\ \theta)$ ограничения, вытекающие из выпуклости диаграммы $s_{ij}\sim e_{ij}\sim t$, аналогичные ограничениям на функцию $\omega(e_u)$ в деформационной теории пластичности:

$$1\geqslant\varphi(e,\ \theta)\geqslant 0. \tag{19}$$

Вариационная формулировка задачи НВУ заключается, как известно, в минимизации функционала

$$Э_н=\int\limits_v W_н(\varepsilon_{ij})dv-\int\limits_s p_i u_i ds; \tag{20}$$

$$W_н(\varepsilon_{ij})=\theta(t)K^*\theta+e_{ij}(t)\Gamma^*e_{ij}-e_{ij}(t)\Gamma_3^*\varphi(e,\ \theta)e_{ij}. \tag{21}$$

Для доказательства эквивалентности дифференциальной и вариационной формулировок краевой задачи НВУ, а также существования и единственности минимума функционала (20) достаточно доказать [2] положительную определенность касательного модуля определяющих уравнений (17), которые для краткости запишем в виде

$$\sigma=F(\varepsilon), \tag{22}$$

где σ, ε — совокупности функций $\sigma_{ij}(\bar{x},\ t)$, $\varepsilon_{ij}(\bar{x},\ t)$.

Касательный модуль определяющих уравнений (22) будет

$$\frac{dF}{d\,\varepsilon}:h=\frac{d}{d\,\xi}[F(\varepsilon+\xi\,h)]\,|_{\xi=0}. \tag{23}$$

Здесь h — произвольный тензор второго ранга; ξ — число. Поскольку функционал удельной потенциальной энергии де-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

формации есть потенциал F, $F(\varepsilon)=dW/d\varepsilon{:}h$, то требование положительной определенности касательного модуля эквивалентно требованию выпуклости $W_н(\varepsilon)$. Таким образом, необходимо установить справедливость

$$h:\frac{dF}{d\varepsilon}:h\geqslant\mu\, h:h,\ \mu>0, \tag{24}$$

для любого произвольного тензора h. Вместо исследования знака $W''(\varepsilon+\xi h,\ h,\ h)$ поступим следующим образом. Учитывая (19), можно записать неравенство

$$W_н(\varepsilon)\geqslant\theta(t)K^*\theta+e_{ij}(t)(\Gamma^*-\Gamma_3^*)e_{ij}=W'(\varepsilon). \tag{25}$$

Наложим следующие ограничения на ядро нелинейной релаксации $\Gamma_3(t,\tau)$: будем считать его абсолютно интегрируемым при $t,\ \tau\in[0,\ \infty]$ положительным. Кроме того, предположим

$$\Gamma(t,\tau)\geqslant\Gamma_3(t,\tau),\ t,\ \tau\in[0,\infty]. \tag{26}$$

Тогда квадратичный функционал $W'(\varepsilon)$ будет положительно определенным. При этих условиях касательный модуль НВУ-среды мажорируется снизу касательным модулем $dF'/d\varepsilon\cdot$ $\cdot\left(F'=\dfrac{dW'}{d\varepsilon}\right)$ некоторой фиктивной ЛВУ-среды с потенциалом W'. Имеем

$$h:\frac{dF}{d\varepsilon}:h\geqslant h:\frac{dF'}{d\varepsilon}:h\geqslant\mu\, h:h. \tag{27}$$

Следовательно, функционал краевой задачи НВУ ограничен снизу выпуклым функционалом некоторой фиктивной краевой задачи ЛВУ. Отсюда следует положительная определенность касательного модуля (24). Коэрцитивность вариационного функционала краевой задачи ЛВУ для различных типов граничных условий доказана в [7].

Для анализа сходимости итерационного процесса (2) рассмотрим энергетические неравенства

$$\mu_2Э_0\geqslant Э_н\geqslant\mu_1Э_0.$$

В силу положительной определенности $W_н$ имеем

$$\mu_2W_0\geqslant W_н\geqslant\mu_1W_0.$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Параметр μ_1 определяется на основе (25) как минимум функционала $W'(\varepsilon)$ при условии $W_0(\varepsilon)=1$. С другой стороны,

$$W_н(\varepsilon) \leqslant W''(\varepsilon) = \theta(t) K^* \theta + e_{ij}(t) \Gamma^* e_{ij}.$$

Задача определения μ_2 сводится к нахождению максимума квадратичного функционала

$$W_2(\varepsilon) = W''(\varepsilon) - \mu W_0(\varepsilon).$$

Таким образом, скорость сходимости итерационного процесса (2) решения краевой задачи НВУ определится посредством найденных μ_1, μ_2 по формуле (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика//Успехи математических наук. 1948. Т. 3. № 6. С. 89—185.
2. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М., 1984. 336 с.
3. Светашков А. А. Выбор вспомогательного функционала при решении задач линейной и нелинейной вязкоупругости итерационным методом. ВИНИТИ, № 7950—84, ДЕП от 12.12.84, с. 1—38.
4. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978. 592 с.
5. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М., 1983. 336 с.
6. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970. 280 с.
7. Дюво Г., Лионс Ж. Л. Неравенства в механике и физике. М., 1980. 384 с.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА ПОВЕРХНОСТЬ УПРУГОГО КОМПОЗИТА

А. А. Светашков

Рассматривается динамическое поведение многослойной упругой конструкции под воздействием равноускоренно движущейся нагрузки. Предполагается, что трение отсутствует, слои композита считаются жесткоскрепленными между собой. Нагрузка распределена равномерно по части граничной поверхности композита по закону

$$H(x,t)=\text{Ч}_0 h\left(\frac{at^2}{2}-x\right)\sin\omega t. \qquad (1)$$

Здесь h — единичная функция Хевисайда; $s=at^2/2$ — закон равноускоренного движения; $\omega=\pi/T_0$, где T_0 — время прохождения нагрузки по границе.

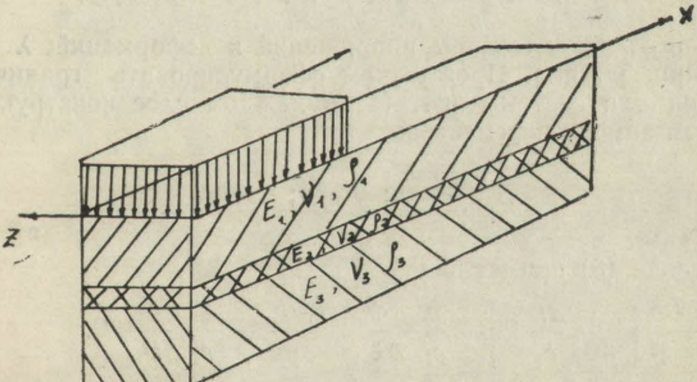


Рис. 1

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Задача решается в двумерной постановке: рассматривается плосконапряженное состояние, т. е. считается, что $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$. Уравнения динамической теории упругости в отсутствие массовых сил имеют вид

$$\rho \ddot{\bar{u}}_i = (\lambda + G) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} + G \Delta \bar{u},$$
$$u = (u_1, u_2, u_3). \tag{2}$$

Для плосконапряженного состояния система (2) расщепляется на 2 уравнения относительно динамических потенциалов [1]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi = 0; \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi = 0; \tag{4}$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}; \ c_1^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho}; \ c_2^2 = \frac{G}{\rho}. \tag{5}$$

В соответствии с выражениями для плосконапряженного состояния имеем связь между напряжениями и деформациями в каждом слое конструкции

$$\sigma_{ij} = \lambda' \theta' \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij},$$
$$\lambda' = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\lambda; \quad \theta' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \ \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь σ_{ij}, ε_{ij} — тензоры напряжений и деформаций; λ, G — постоянные Лямэ. Прежде чем сформулировать граничные условия для системы (3), (4) в каждом слое конструкции, сделаем замену переменных

$$\xi = \frac{at^2}{2} - x; \ y' = y; \ t' = t.$$

Уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}\left[1 - \left(\frac{at}{c_1}\right)^2\right] - \frac{a}{c_1^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t^2} = 0. \tag{7}$$

При $\left(\frac{at}{c_1}\right)^2 \ll 1$, что реализуется с точностью до 1%, мож-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

но пренебречь вторым слагаемым в коэффициенте при $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}$.
Тогда система (3), (4) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - b_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - b_2 \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \tag{9}$$

Граничные условия запишутся в виде условий упругого контакта между слоями следующим образом:

$$\sigma_{yy}^{(1)}\Big|_{y=0} = -H(x, t);$$
$$\sigma_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0} = 0; \tag{10}$$
$$\sigma_{yy}^{(n-1)}(\xi, l_n, t) = \sigma_{yy}^{(n)}(\xi, l_n, t); \ \sigma_{xy}^{(n-1)}(\xi, l_n, t) = \sigma_{xy}^{(n-1)}(\xi, l_n, t);$$
$$u^{(n-1)}(\xi, l_n, t) = u^{(n)}(\xi, l_n, t); \ v^{(n-1)}(\xi, l_n, t) = v^{(n)}(\xi, l_n, t);$$
$$\sigma_{yy}^{(N)}(\xi, l_N, t) = \sigma_{xy}^{(N)}(\xi, l_N, t) = 0.$$

Здесь индекс n означает индекс слоя; $n=1, 2, ..., N$; N — количество слоев; l_n — ордината контакта между n—1-м и n-м слоями. Общее решение (8), (9) запишем в виде

$$\Phi_n = e^{i\omega t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k \xi}\left(A_k^{(n)} e^{\nu_k^{(n)} y} + B_k^{(n)} e^{-\nu_k^{(n)} y}\right); \tag{11}$$

$$\Psi_n = e^{i\omega t}\sum_{k=-\infty} e^{i\omega_k \xi}\left(C_k^{\prime n)} e^{\mu_k^{(n)} y} + D_k^{(n)} e^{-\mu_k^{(n)} y}\right). \tag{12}$$

Характеристическое уравнение, связывающее ω, ω_k, $\nu_k^{(n)}$, $\mu_k^{(n)}$, будет

$$(\nu_k^{(n)})^2 = -\alpha_k^{(n)}; \ (\mu_k^{(n)})^2 = -\beta_k^{(n)};$$

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{\omega^2}{(c_1^{(n)})^2} - \omega_k^2 - ikb_1^{(n)}; \beta_k^{(n)} = \frac{\omega^2}{(c_2^{(n)})^2} - \omega_k^2 - ikb_2^{(n)};$$

$$\omega_k = \frac{\pi k}{L}; \ b_l^{(n)} = \frac{a}{(c_l^{(n)})^2}.$$

Здесь $c_1^{(n)}$, $c_2^{(n)}$ — скорость продольных и поперечных волн в (n)-м слое конструкций; L — длина по x. После подстановки (11), (12) в выражения для напряжений и перемещений, а

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

затем в граничные условия (10) получим $4N$ уравнений относительно неизвестных комплексных констант $A_k^{(n)}$, $B_k^{(n)}$, $C_k^{(n)}$ $D_k^{(n)}$ для каждого члена ряда. Выражения для компонент напряженно-деформированного ряда, входящих в (10), для n-го слоя будут следующими:

$$u^{(n)}=e^{i\omega t}\sum e^{i\omega_k \xi}\left[-ik\left(A_k^{(n)}e^{\nu_k^{(n)}y}-B_k^{(n)}e^{-\nu_k^{(n)}y}\right)+\right.$$
$$\left.+\mu_k^{(n)}\left(C_k^{(n)}e^{\mu_k^{(n)}y}-D_k^{(n)}e^{-\mu_k^{(n)}y}\right)\right],$$
$$v^{(n)}=e^{i\omega t}\sum e^{i\omega_k \xi}\left[\nu_k^{(n)}\left(A_k^{(n)}e^{\nu_k^{(n)}y}-B_k^{(n)}e^{-\nu_k^{(n)}y}\right)+\right.$$
$$\left.+ik\left(C_k^{(n)}e^{\mu_k^{(n)}y}+D_k^{(n)}e^{-\mu_k^{(n)}y}\right)\right].$$

Граничное условие на наружной поверхности, которое в движущейся системе координат приобретает вид

$$H(\xi,\ t)=H_0 h(\xi)\sin\omega t,$$

разлагается в ряд Фурье по координате ξ.

Для однослойной полосы $n=1$ система уравнений имеет вид

$$(\lambda+2G)(A_k+B_k)\nu_k^2+2G_{ik}(C_k-D_k)\mu_k-\lambda k^2(A_k+B_k)=-f_k,$$
$$k^2(C_k+D_k)-2i\,\nu_k(A_k-B_k)+\mu_k^2(C_k+D_k)=0;$$
$$-ik(A_k e^{\nu_k h}+B_k e^{-\nu_k h})+\mu_k(C_k e^{\mu_k h}-D_k e^{-\mu_k h})=0;$$
$$\nu_k(A_k e^{\nu_k h}-B_k e^{-\nu_k h})+ik(C_k e^{\mu_k h}+D_k e^{-\mu_k h})=0.$$

В качестве числового примера была решена задача о распространении поверхностной волны по границе упругой полуплоскости. Выражения для перемещений и напряжений имеют вид

$$u=-\sin\omega t\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[ikA_k e^{-\nu_k y}-B_k\mu_k e^{-\mu_k y}\right]e^{i\omega_k \xi};$$
$$v=-\sin\omega t\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\nu_k A_k e^{-\nu_k y}+ikB_k e^{-\mu_k y}\right]e^{i\omega_k \xi};$$
$$\sigma_{yy}=\sin\omega t\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\nu_k^2 A_k e^{-\nu_k y}+ik\mu_k B_k e^{-\mu_k y}\right]e^{i\omega_k \xi}; \qquad (13)$$
$$\sigma_{xy}=-\sin\omega t\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[-ikA_k e^{-\nu_k y}+B_k\mu_k^2 e^{-\mu_k y}\right]e^{i\omega_k \xi}.$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Граничные условия запишутся так:

$$\sigma_{yy}(\xi, 0, t) = -H(\xi, t);$$

$$\sigma_{xy}(\xi, 0, t) = 0;$$

$$\nu_k^2 = \omega_k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}; \quad \mu_k^2 = \omega_k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}. \tag{14}$$

Подставляя выражения для перемещений (13) в граничные условия (14), получим систему двух комплексных уравнений для определения $A = A_1 + iA_2$, $B = B_1 + iB_2$. Заметим, что при вычислении комплексных значений ν_k, μ_k их вещественная часть бралась с отрицательным знаком, что удовлетворяет соотношениям (14) и постулату о затухании волн по глубине полуплоскости (в то время как для формулировки задачи с граничными условиями (10) этого ограничения не требуется).

Исходные данные брались следующими:
$L = 60$; $v = 6 \cdot 10^4$; $\rho = 8 \cdot 10^{-3}$. В табл. 1, 2 приведены результа-

Таблица 1

	T	$s/4$	$s/2$	$3s/4$	s
v	1	$3{,}3 \cdot 10^{-2}$	$7{,}2 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}3 \cdot 10^{-2}$	$-3{,}6 \cdot 10^{-2}$
u		$-1{,}5 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}8 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}1 \cdot 10^{-2}$	0
v	2	$-8{,}7 \cdot 10^{-2}$	$1{,}1 \cdot 10^{-1}$	$-1{,}3 \cdot 10^{-1}$	$1{,}4 \cdot 10^{-1}$
u		$-7{,}5 \cdot 10^{-2}$	$5{,}4 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}8 \cdot 10^{-2}$	0
v	3	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	$4{,}1 \cdot 10^{-2}$	$-5{,}3 \cdot 10^{-2}$	$-4{,}2 \cdot 10^{-2}$
u		$2{,}7 \cdot 10^{-2}$	$-7{,}5 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}9 \cdot 10^{-2}$	0

Таблица 2

	T	$s/4$	$s/2$	$3\ s/4$	s
v	1	10^{-2}	$2{,}9 \cdot 10^{-2}$	$-6{,}5 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}0 \cdot 10^{-2}$
u		$-6 \cdot 10^{-3}$	$-9{,}8 \cdot 10^{-3}$	$-7{,}1 \cdot 10^{-3}$	0
v	2	$-2{,}2 \cdot 10^{-2}$	$2{,}4 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}6 \cdot 10^{-2}$	$2{,}6 \cdot 10^{-2}$
u		$-10 \cdot 10^{-3}$	$7{,}9 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}3 \cdot 10^{-3}$	0
v	3	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	$1{,}3 \cdot 10^{-2}$	$-6{,}4 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}8 \cdot 10^{-2}$
u		$5{,}8 \cdot 10^{-3}$	$-8{,}6 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}2 \cdot 10^{-2}$	0

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ты расчета перемещений u, v для разных моментов времени $t_i = iT_0/3$, $i=1, 2, 3$ и различных значений $s_j = jat^2/8$, $j=1, 2, 3, 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975. 872 с.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

О КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПО ПЛАВАЮЩЕМУ ЛЬДУ

В. И. Тараканов

Транспортировка грузов зимой по льду рек и водоемов и связанная с этим проблема безопасности движения приводят к задаче исследования деформирования упругой пластины, плавающей в жидкости, подвижной нагрузкой.

В этом случае важное значение имеет не только вес нагрузки и ее распределение, но и скорость движения. При некоторой критической скорости движения, деформирование ледового покрытия становится значительным, что может привести к его разрушению. Наличие критической скорости движения для определенных видов нагрузки было установлено в работе [1].

Исследование больших смещений при критических скоростях движения проводилось в метрике C, т. е. критической скоростью считалась скорость, для которой хотя бы в одной точке рассматриваемой области смещение обращалось в бесконечность (в рамках линейной теории).

Такой подход создает определенные неудобства, так как требует расчета конкретных видов нагружения, решения в явной форме задачи для этих видов, а затем определения устойчивости. В данной работе исследование устойчивости деформирования проводится при оценке смещений в метрике L_2. Такой подход позволяет установить величину критической скорости для нагрузки, произвольно распределенной в плане, без нахождения в явной форме самого решения.

Задача рассматривается в следующей постановке. Ледовое покрытие моделируется бесконечной упругой пластиной толщиной h, которая плавает в слое жидкости $-H \leqslant z \leqslant 0$, $-\infty < x, y < \infty$. По льду перемещается произвольная в плане нагрузка $f(x, y, t)$ с постоянной скоростью V в направлении оси x. Предполагается, что в общем случае ледовое по-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

крытие может иметь предварительное сжатие в своей плоскости величиной N, а нагрузка квадратично интегрируема.

$$\| f \|_2 \equiv \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2 dx dy \right]^{1/2} < \infty. \tag{1}$$

Считается, что упругие характеристики льда меняются по его толщине по известному закону.

Исходная система уравнений запишется в следующем виде:

$$D \Delta\Delta W + (\gamma_0 - \gamma) W + N \Delta W + h \frac{\gamma}{g} W_{,tt} = -\frac{\gamma_0}{g} \Phi_{,t} + f, \ z=0; \tag{2}$$

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 0, \ -H \leqslant z \leqslant 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \tag{3}$$

$$\Phi_{,z} = W_{,t}, \qquad z = 0; \tag{4}$$

$$\Phi_{,z} = 0, \qquad z = -H; \tag{5}$$

$$D = (1 - \nu^2)^{-1} \int\limits_0^1 \left(z - \frac{h}{2} \right)^2 E(z) dz, \tag{6}$$

где W — смещение пластины; Φ — потенциал скорости жидкости; γ_0, γ — удельный вес воды и льда соответственно; D — цилиндрическая жесткость пластины; ν, E — коэффициент Пуассона и модуль упругости льда; g — ускорение свободного падения.

Условия (4), (5) являются кинематическими условиями для жидкости на границе со льдом и на дне. Считая движение нагрузки установившимся, можно перейти к новым переменным ξ, η: $\xi = x - Vt$; $\eta = y$. В этом случае система уравнений (2)—(5) запишется так:

$$D \Delta\Delta W + (\gamma_0 - \gamma) W + N \Delta W + h \frac{\gamma}{g} V^2 W_{,\xi\xi} = V \frac{\gamma_0}{g} \Phi_{,\xi} + f; \tag{7}$$

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 0, \quad -H < z < 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}; \tag{8}$$

$$\Phi_{,z} = -V W_{,\xi}, \qquad z = 0; \tag{9}$$

$$\Phi_{,z} = 0, \qquad z = -H. \tag{10}$$

Решение системы (7)—(10) ищется с помощью двойного преобразования Фурье, при этом в силу соотношения (1) существует преобразование Фурье $\varphi(p, q)$ для нагрузки f:

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$f(\xi_1\eta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(p,q)e^{i(p\xi+q\eta)}dp\,dq. \qquad (11)$$

Смещение пластины и потенциал скорости жидкости представляется в виде

$$W=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B(p,q)e^{i(p\xi+q\eta)}dp\,dq; \qquad (12)$$

$$\Phi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}A(p,q)e^{i(p\xi+q\eta)}\left[e^{z\sqrt{p^2+q^2}}+e^{-(z+2H)\sqrt{p^2+q^2}}\right]dp\,dq. \qquad (13)$$

Представление потенциала Ф в виде (13) обеспечивает выполнение уравнения (8) и краевого условия (10). Из краевого условия (9) следует

$$A(p,q)=-\frac{ipV}{\sqrt{p^2+q^2}}\left[1-e^{-2H\sqrt{p^2+q^2}}\right]B(p,q).$$

Подставляя это соотношение в (13), на основе уравнения (7) получим выражение, связывающее изображение $B(p,q)$ и $\varphi(p,q)$:

$$B(p,q)=\frac{1}{G}\varphi(p,q),$$

$$G=D(p^2+q^2)-N(p^2+q^2)+\gamma_0-\gamma-h\frac{\gamma}{g}V^2p^2-$$

$$-\frac{\gamma_0}{g}V^2p^2\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}\operatorname{cth}(H\sqrt{p^2+q^2}). \qquad (14)$$

Оценка устойчивости деформирования пластины в метрике L_2 производится на основе известной теоремыИраншереля [2], устанавливающей равенство норм в L_2 для оригинала и изображения в преобразовании Фурье. При этом можно оценивать потерю устойчивости по наличию бесконечного увеличения нормы в L_2 изображения решения, а не его оригинала.

На основе соотношений (1), (4) норма $\|B(p,q)\|_2$ становится бесконечно большой при тех значениях параметров V, N, при которых найдется хотя бы одно значение p, $q\in(-\infty, \infty)$, обращающее в ноль величину G.

Рассмотрим предварительно допустимую область значений величины сжатия N при нулевой скорости движения, ког-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

да не происходит потери устойчивости. Из выражения (14) получается

$$0<N<N_*,$$

где $N_*=\min\limits_{p,q\in-\infty.\infty}\dfrac{D(p^2+q^2)^2+\gamma_0-\gamma}{p^2+q^2}=$

$$=\min\limits_{x\in 0,\infty}\left[Dx+\frac{\gamma_0-\gamma}{x}\right]=2\sqrt{(\gamma_0-\gamma)D},$$

т. е. величину сжатия можно брать в виде

$$N=2\,\varepsilon\sqrt{(\gamma_0-\gamma)D},\quad 0\leqslant\varepsilon<1. \tag{15}$$

При $\varepsilon\geqslant 1$ ледовое покрытие неустойчиво при любой нагрузке. Из соотношений (14), (15) следует выражение для критической скорости движения $о\leqslant V<V_*$:

$$V_*^2=\min\limits_{p,q\in-\infty,\infty}\frac{D(p^2+q^2)^2-2\,\varepsilon(p^2+q^2)\sqrt{(\gamma_0-\gamma)D}+\gamma_0-\gamma}{h\dfrac{\gamma}{g}p^2\left[1+\dfrac{\gamma_0}{\gamma}\dfrac{1}{h(p^2+q^2)}\mathrm{cth}\,(H\sqrt{p^2+q^2})\right]}=$$

$$=\min\limits_{\lambda,q\in 0.\infty}\frac{D\lambda^4-2\,\varepsilon\lambda^2\sqrt{(\gamma_0-\gamma)D}+\gamma_0-\gamma}{(\lambda^2-q^2)h\dfrac{\gamma}{g}\left[1+\dfrac{\gamma_0}{\gamma}\dfrac{1}{\lambda h}\mathrm{cth}\,H\lambda\right]}=$$

$$=\min\limits_{\lambda\in 0,\infty}\frac{D\lambda^4-2\,\varepsilon\lambda^2\sqrt{(\gamma_0-\gamma)D}+\gamma_0-\gamma}{h\dfrac{\gamma}{g}\left[\lambda^2+\dfrac{\gamma_0}{\gamma}\dfrac{\lambda}{h}\mathrm{cth}\,H\lambda\right]}.$$

Вводя обозначения $\omega=\dfrac{H}{h}$, $\beta=h^4\dfrac{\gamma_0-\gamma}{D}$, $x=\lambda h$, можно окончательно получить

$$V_*^2=\frac{gD}{\gamma\,h^3}\min\limits_{x\in 0,\infty}\frac{x^4-2\,\varepsilon\,x^2\sqrt{\beta}+\beta}{x\left(x+\dfrac{\gamma_0}{\gamma}\mathrm{ct}\,h\,\omega x\right)}. \tag{16}$$

На рис. 1 изображены зависимости безразмерной критической скорости $U_*=V_*\sqrt{\dfrac{\gamma\,h^3}{gD}}\cdot 10^2$ от безразмерной толщины льда β, построенной по соотношению (16).

Диапазон измерения параметра β соответствует изменению толщины льда от 0 до 4 м для типичных механических

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

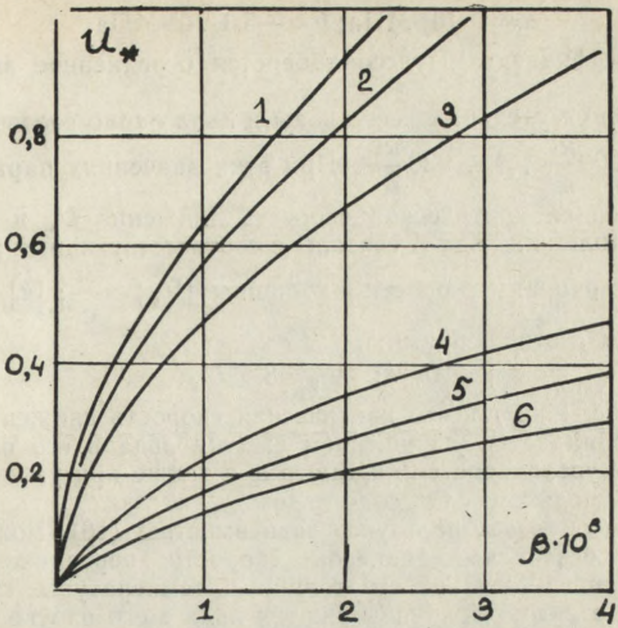


Рис. 1. Зависимость безразмерной критической скорости движения от безразмерной толщины льда

свойств льда. Для установления соответствия безразмерной скорости и толщины льда с размерными значениями необходимо определить цилиндрическую жесткость D. Считая, что температура по толщине льда меняется линейно от нуля на границе с водой до T на поверхности льда, а зависимость модуля упругости от температуры можно аппроксимировать параболой [3], имеем зависимость модуля от толщины в виде квадратичного полинома

$$E(z)=a+b\,\frac{(z-h)^2}{h^2}\,.$$

Для варианта $T=-10°$ C из [3] получаются некоторые осредненные значения модулей, а именно:

$$E(0)=1{,}7\cdot 10^3 \text{ МПа};\ E(h)=7\cdot 10^3 \text{ МПа}.$$

Фактически эти значения имеют достаточно большой разброс для разных льдов. При этом получаются следующие значения коэффициентов:

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$a=7\cdot 10^3 \text{ МПа}; \; b=-5{,}3\cdot 10^3 \text{ МПа}.$$

Для коэффициента Пуассона берется осредненное значение $\nu=0{,}35$.

Значения удельных весов воды и льда равно соответственно $\gamma_0=1000\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\gamma=920\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. При этих значениях параметров безразмерная критическая скорость движения U_* и безразмерная толщина льда β связаны с соответствующими размерными величинами скорости и толщины $[V_*]=\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $[h]=$м следующими соотношениями:

$$\beta=10^{-6}h; \quad V_*=8{,}5\, U_*.$$

Из рис. 1 видно, что критическая скорость движения значительно падает с увеличением сжатия льда в его плоскости, когда увеличивается параметр ε, а также при уменьшении толщины водяного слоя подо льдом.

Таким образом, пользуясь зависимостью (16), можно определить безопасный диапазон скорости передвижения по льду в зависимости от его толщины, температуры, глубины воды подо льдом, величины сжатия льда в его плоскости.

Замечание. Выражение (16) является оценкой критической скорости движения для любых видов нагрузки, но это не означает, что не может найтись такая конкретная нагрузка, для которой критическая скорость окажется выше, чем в (16). Если в спектре конкретной нагрузки отсутствует некоторый диапазон параметров p, q, в который входят параметры, минимизирующие (16), то для этой конкретной нагрузки критическая скорость окажется выше, чем по соотношению (16). Это обстоятельство не искажает оценку (16), так как повышение критической скорости для некоторой конкретной нагрузки может просто идти в запас устойчивости движения. По существу, это означает, что (16) является оценкой снизу критической скорости для любых видов нагрузки, причем в отдельных случаях эта оценка совпадает с величиной критической скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 120 с.

2. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М.: Физматгиз, 1963. 256 с.

3. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 384 с.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ УДАРНИКА И ПРЕГРАДЫ ПРИ ИХ НЕСИММЕТРИЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Н. Т. Югов

В настоящее время в отечественной и зарубежной литературе насчитывается большое количество работ, посвященных проблеме разрушения деформируемых твердых тел под действием больших импульсных нагрузок. Вместе с тем большинство из них посвящено экспериментальному изучению процесса разрушения в тех или иных условиях нагружения, в результате которого не удается проследить динамику зарождения и развития микроповреждений, последующее объединение которых приводит к макроповреждению материала и его разрушению. Численное моделирование процессов динамического разрушения твердых тел, осуществляемое в основном в двумерной постановке, не позволяет оценивать прочность взаимодействующих тел пространственной конфигурации в условиях сложного нагружения. Вследствие этого возникает острая необходимость разработки трехмерных методик и программ расчета процессов деформирования и разрушения твердых тел в условиях несимметричного динамического нагружения и проведения на их основе исследований актуальных задач.

В настоящей работе исследовалось взаимодействие стального компактного цилиндра размером 0,008 м$\times$0,008 м с алюминиевой преградой толщиной 0,005 м. Скорость взаимодействия составляла 0,294 скорости звука в материале ударника. Вектор скорости ударника в начальный момент взаимодействия совпадал с его осью симметрии и составлял с нормалью к преграде угол 30°. Расчеты проводились в рамках модели пористой среды [1—3]. Кинетическое соотношение, описывающее процесс образования, развития и залечивания микропор в материалах взаимодействующих тел, а также

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

константы кинетической модели разрушения для ряда материалов приведены в работах [4, 5]. Поведение материалов описывалось упругопластической моделью, константы которой для рассмотренных пар тел аналогичны [6, 7]. В качестве численного метода использовался модифицированный метод конечных элементов [7, 8].

Адекватное отображение результатов численного счета реализовывалось построением на графопостроителе изометрических проекций конфигураций деформируемых в процессе взаимодействия тел и их различных сечений, а также диаграмм и графиков распределения в них интересующих искомых параметров.

На рис. 1 приведены конфигурации взаимодействующих

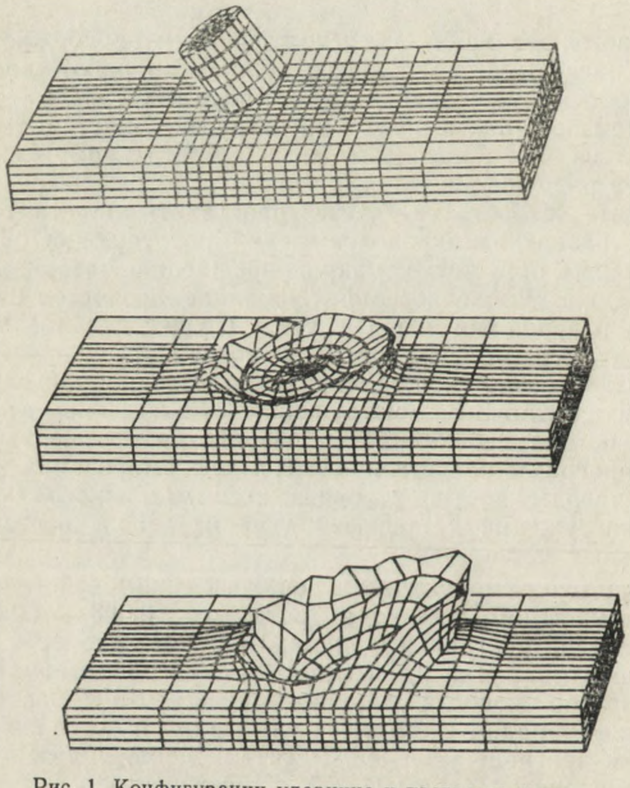
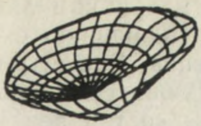


Рис. 1. Конфигурации ударника и преграды в процессе взаимодействия в моменты времени 0,8 и 16 мкс

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru



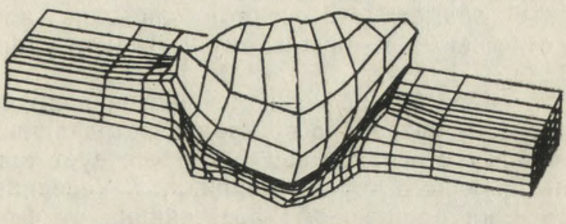


Рис. 2. Разрез преграды и конфигурация внедрившегося в нее ударника в момент времени 16 мкс

тел в моменты времени 0,8 и 16 мкс. Видно, что ударник и преграда претерпевают большие пластические деформации, обусловленные высокой скоростью взаимодействия.

На рис. 2 представлены сечение преграды и конфигурация ударника в момент времени 16 мкс, которые детализируют характер деформации взаимодействующих тел. Из данного рисунка, а также из графиков изменения составляющих импульса ударника (рис. 3) следует, что к моменту времени 16 мкс происходит пробитие преграды ударником. Видно, что вертикальная составляющая импульса становится постоянной. Это свидетельствует о том, что сопротивления движению ударника со стороны преграды практически нет, то есть ма-

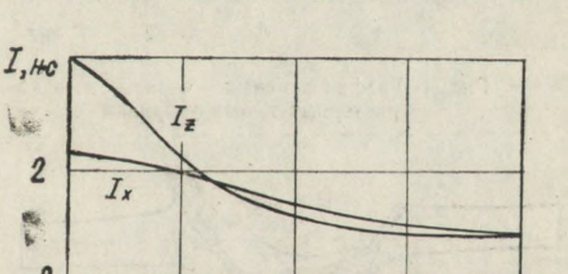


Рис. 3. График изменения вертикального и горизонтального импульсов ударника

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

териал преграды под ударником либо частично разрушился, либо приобрел скорость, равную скорости ударника, и движется вместе с ним вниз. Расчеты показывают, что падение вертикальной составляющей импульса ударника к моменту пробития им преграды составляет 80%. Падение горизонтальной составляющей импульса ударника составляет к этому же моменту времени 63%. Можно также отметить, что максимальный диаметр отверстия на лицевой поверхности преграды, отнесенный к начальному диаметру ударника, составляет 2,54.

На рис. 4 приведен график изменения процентного содержания пористости материала во времени в различных точках цилиндра вдоль его оси. Кривая *1* соответствует точке переднего контактирующего торца ударника, *2* — срединной точке (находящейся на одинаковом расстоянии от его торцов). В результате пластического деформирования материала ударника критическая пористость достигается лишь в окрестности осевой точки переднего торца ударника.

На рис. 5 приведено сечение преграды и ударника в плоскости симметрии в момент времени 16 мкс. Заштрихованные

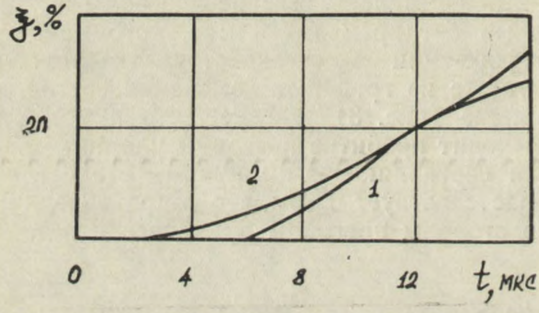


Рис. 4. График изменения пористости в характерных точках ударника

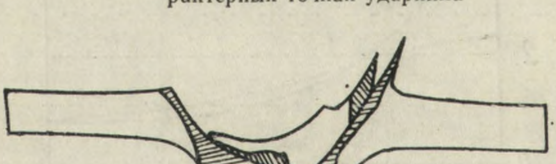


Рис. 5. Сечение преграды и ударника плоскостью симметрии с заштрихованными областями с критической пористостью

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

области соответствуют пористости, превышающей критическую [3]. Видно, что практически весь материал преграды, находящейся под ударником, находится в разрушенном состоянии. В ударнике наблюдаются две характерные зоны с уровнем пористости, превышающим критический, свидетельствующие о частичном его разрушении. В частности, происходит срезание начально контактирующей кромки ударника, образованной пересечением боковой и торцовой поверхностей, а также разрушение сильнодеформированной в результате пластического течения передней кромки.

Можно с уверенностью сказать, что разрушение ударника носит деформационный характер. Об этом свидетельствуют изменения пористости материала в характерных точках ударника, значит, пористость достигает критической величины к моментам времени, когда волновые процессы уже не имеют достаточной интенсивности, а преобладает пластическое деформирование материалов взаимодействующих тел. Разрушение же преграды осуществляется по комбинированному механизму, объединяющему возникновение микропор в волнах разгрузки на начальной стадии процесса и их дальнейшему росту по мере пластического деформирования преграды. Следует отметить, что в отдельных областях преграды, в частности в области, находящейся впереди по ходу движения ударника, отмечается частичное закрытие ранее возникнувших микропор в результате поджатия материала преграды движущимся ударником.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматуллин Р. И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей//ПММ. 1970. Т. 34. № 6. С. 1097—1112.

2. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Наука, 1970.

3. Белов Н. Н., Корнеев А. И., Николаев А. П. Численный анализ разрушения в плитах при действии импульсных нагрузок//ПМТФ. 1985. № 3. С. 132—136.

4. Канель Г. И., Разоренов С. В., Фортов В. Е. Кинетика разрушения алюминиевого сплава АМг6М в условиях откола//ПМТФ. 1984. № 5. С. 60—63.

5. Горельский В. А., Хорев И. Е., Югов Н. Т. Особенности разрушения цилиндров при несимметричном взаимодействии с жесткой стенкой//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 135—139.

6. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений//Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212.

7. Горельский В. А., Хорев И. Е., Югов Н. Т. Динамика трехмерного процесса несимметричного взаимодействия деформируемых тел с жесткой стенкой//ПМТФ. 1985. № 4. С. 112—118.

8. Оден Дж. Конечные элементы в механике сплошной среды. М.: Мир, 1976. С. 464.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ГОЛОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЙ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА ПРИ РАЗРУШЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

С. Н. Поляков, В. Т. Черных

Для определения параметров пространственно-временной структуры двухфазных потоков широко применяются методы стерео-, фото- и киносъемки. Существенным их недостатком является то, что при регистрации с большим увеличением ограниченная глубина резкости и невозможность апостериорной перефокусировки оптической системы по глубине потока не позволяют производить полных измерений характеристик элементов, например формы и размеров частиц потока во всей его толще. Голографические методы, преодолевающие этот недостаток, применены, в частности, для измерения сплошности двухфазных потоков [1], измерения распределения скоростей в водосливной струе [2], оценке качества распыливания топлива [3] и др.

Авторами применен голографический метод для изучения пространственной структуры высокоскоростного двухфазного потока, возникающего при разрушении твердых материалов под действием сосредоточенной импульсной нагрузки, заключающийся в регистрации прямотеневых одноэкспозиционных голограмм потока с последующим измерением координат, размеров и контуров проекций его элементов.

Исследование проводилось по следующей методике. Подвергаемые импульсному нагружению металлические пластины помещались в объективную ветвь голографического интерферометра [4] с рабочим полем 100 мм, созданного на основе зеркально-линзовых элементов и импульсного ОКГ типа ОГМ-20 ($\tau_{имп} \sim 20$ нс; $\lambda = 694$ нм; $E_{имп} = 0{,}4$ Дж), используемого в качестве источника света. Пластины располагались так, что противоположная нагружаемой поверхность находилась на краю регистрационной зоны и проектировалась в

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

плоскость регистратора. Поток металлических частиц, возникающий при разрушении пластины под действием импульсной нагрузки, просвечивался коллимированным пучком. Голограммы получали на высокоразрешающей голографической пленке типа ФПГВ-2.

Регистрация голограмм осуществлялась с некоторой задержкой от начала нагружения пластины. Запуск лазера осуществлялся импульсом от датчика начального момента нагружения, задержанным генератором ГИ-1. Датчиком служил замыкаемый в начальный момент нагружения конденсатор с обкладками в виде разделенных воздушным промежутком исследуемой пластины и тонкой алюминиевой фольги. Задержка регистрации голограммы от начала процесса нагружения ввиду важности этого параметра и разброса приборной задержки запуска ОГМ-20 контролировалась частотомером типа ЧЗ-38.

Записанная голограмма потока после фотохимической обработки устанавливалась в систему для восстановления волнового фронта. В качестве источника света служил He—Ne лазер ЛГ-38. Восстановленная объектная волна, несущая информацию о потоке, направлялась в телескопическую систему, состоящую из двух высокоразрешающих объективов. Система строила изображение в масштабе 3:1. Построенной телескопической системой изображение изучалось с помощью горизонтального микроскопа тип МГ-1 со шкалой, проградуированной по объект-микрометру с ценой деления 10 мкм. Измерение размеров, координат положения и контуров элементов потока выполняли путем последовательного сканирования оптической системы горизонтального микроскопа по глубине рассматриваемого изображения. Совместив плоскость наблюдения (измерения) последовательно со всеми элементами потока (частицами, ударными скачками плоскости), добившись при этом резкого наблюдения контуров, производили измерение геометрических размеров и координат. Отсутствие размывания контуров участков неоднородности фоновой освещенности в рассматриваемом изображении при смещении плоскости наблюдения по глубине изображения использовали как критерий отнесения этой неоднородности к шумам подложки пленки, дефектам фотоэмульсии, амплитудно-модулирующим дефектам оптики интерферометра, а не к элементам потока. Фотографирование прямотеневых картин потока в целом или его фрагментов выполняли с помощью микрофотонасадки типа МФН-12У/42. Используя фотографии ударных скачков плотности, производили оценку скоро-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

стей движения v частиц, образующих эти скачки, по формуле

$$V \simeq a \sin \alpha/2, \tag{1}$$

где a — скорость звука в воздухе; α — угол Маха.

Сдерживающим фактором частого применения такой оценки скорости частиц [1], для которых удалось визуализировать ударный скачок плотности, являлась неопределенность направления движения элементов и, следовательно, ориентация скачка плотности относительно плоскости наблюдения.

По описанной методике проведены исследования двухфазных потоков, возникающих при разрушении дюралюминиевых пластин толщиной 15 мм при нормальном нагружении последних стальным сферическим индентором, вводимым при скоростях $v_0 \sim 2{,}5 \div 3$ М. Задержка момента регистрации от начала нагружения пластин составляла величину 150÷170 мкс, что соответствовало наибольшему заполнению потоком регистрационной зоны.

На рис. 1, 2, 3 приведены прямотеневые картины потоков, характерные для данных опытов. Картины получены при следующем наборе параметров: $V_0 = 2{,}72$ М; $\Delta t_{\text{рег}} = 167$ мкс; $V_0 = 2{,}73$ М, $\Delta t_{\text{рег}} = 163$ мкс и $V_0 = 3{,}27$ М, $\Delta t_{\text{рег}} = 110{,}7$ мкс соответственно. Данные прямотеневых картин выбраны для иллюстрации результатов, приведенных в последующем изложении. Обширные темные пятна, выделенные стрелками с литерой A, являются шумами от дефектов оптических элементов.

В ходе исследования установлено, что отделению частиц от разрушающейся пластины предшествует отход от поверхности пластины интенсивной ударной волны со сферическим волновым фронтом (см. рис. 1, 2, 3; сферический волновой фронт выделен стрелками с литерой B). Волна обгоняется к моменту регистрации голограммы (150÷170 мкс) отделившимся двухфазным потоком (рис. 1, 2). По мнению авторов, данный скачок плотности порожден фронтом пластических деформаций пластины на начальной стадии нагружения.

Результаты измерений размеров частиц исследованных двухфазных потоков широко распределены в диапазоне от нескольких миллиметров до десятков микрометров. Установлено, что исследованные двухфазные потоки состоят из лидирующей группы частиц (включая индентор), образующих перед собой ударный скачок уплотнения и группы частиц, движущихся в следе лидирующей группы без образования ударных волн. Проведенная по формуле (1) оценка скорости час-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

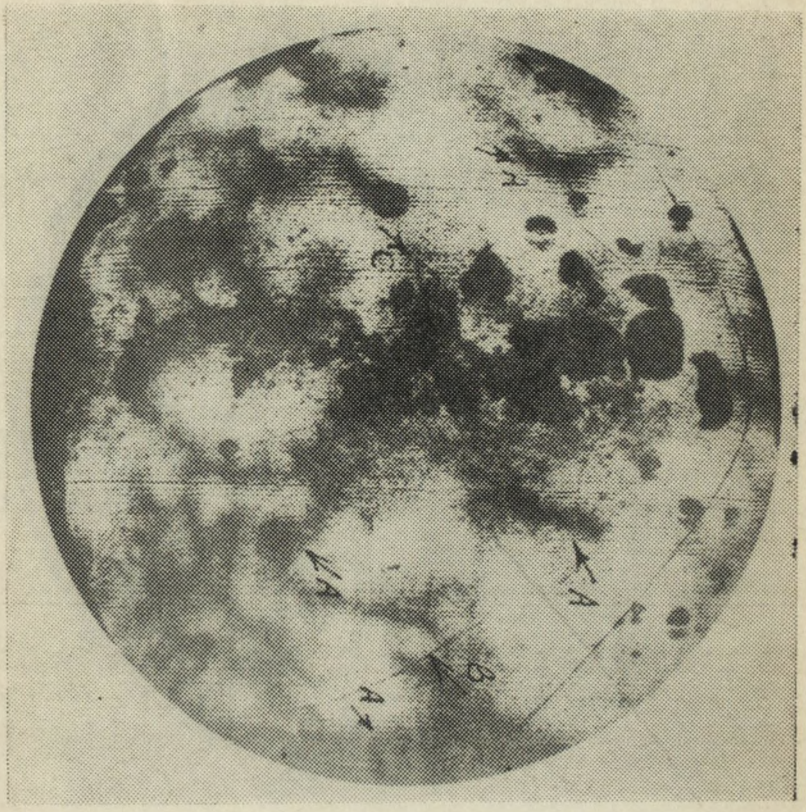


Рис. 1

тиц лидирующей группы составляет 50—70% от начальной скорости внедрения индентора. По мнению авторов, сделать оценку скоростей частиц отстающей группы по удалению от пластины на момент регистрации не представляется возможным в связи с неопределенностью времени и места отделения от нагружаемой пластины.

В опыте при параметрах $V_0=2{,}72$ M; $\Delta t_{\text{рег}}=167$ мкс удалось визуализировать частицу с максимальным размером 7 мм, перемещающуюся в направлении, противоположном направлению потока в целом (см. рис. 1, частица выделена стрелкой с литерой *C*), и находящуюся в отстающей группе «дозвуковых» частиц. Частица образует ударный скачок плотности, направленный к поверхности пластины. Невоспроизводимость данного явления в других опытах, а также отсутствие

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

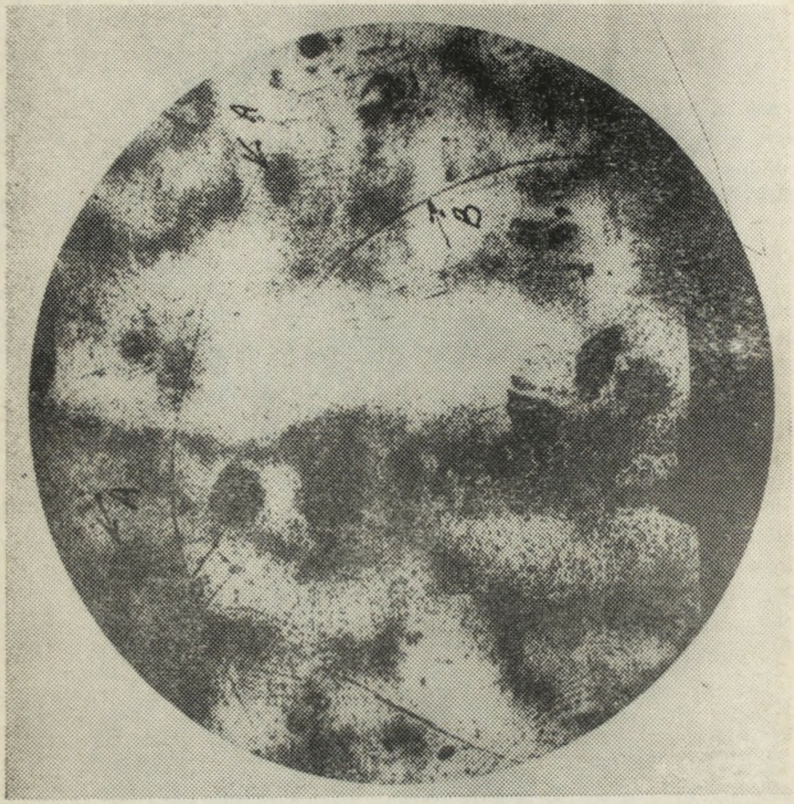


Рис. 2

каких-либо упоминаний об этом явлении в литературе говорит, с одной стороны, о чрезвычайной его редкости, с другой — подчеркивает уникальные возможности примененного метода для исследования трудновоспроизводимых высокоскоростных потоков. Данное явление, по-видимому, обусловлено либо продолжающимся в потоке, отделившемся от пластины, разрушением частиц под действием остаточных внутренних напряжений или соударения с другими частицами, либо упругим ударом этой частицы с лидирующей частицей, обладающей меньшим количеством движения. В любом случае данный факт говорит о сложности механизма формирования пространственной структуры данного вида двухфазных потоков.

Таким образом, проведенные исследования двухфазного потока, образующегося при разрушении твердых материалов,

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

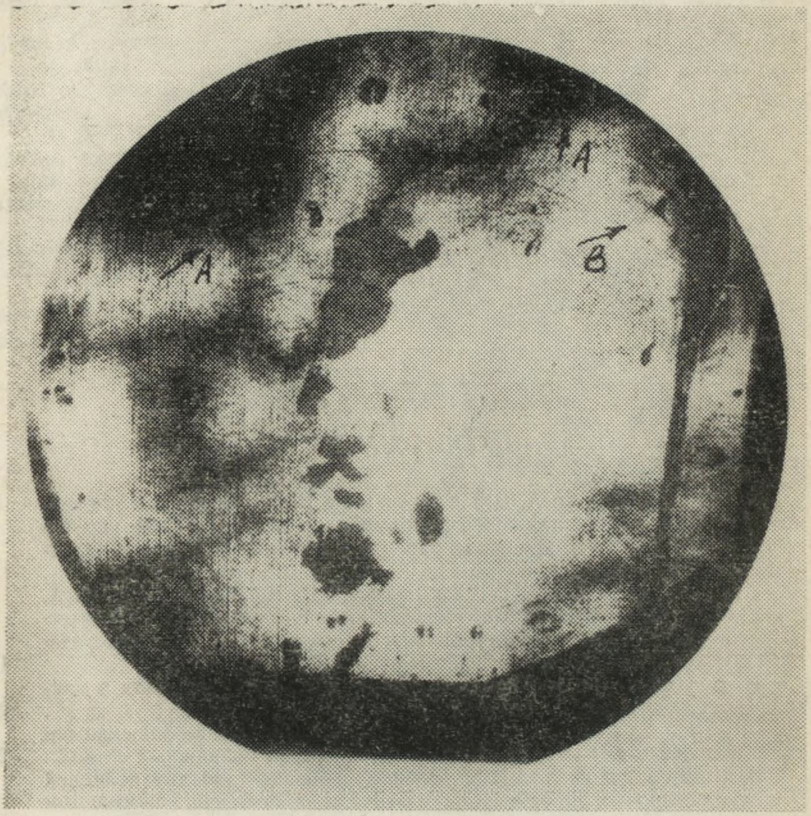


Рис. 3

показали эффективность применения голографического метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. М., Кузнецова Е. А., Росс С. В. и др. Применение методов голографии для определения сплошности двухфазных потоков//Голографические методы и аппаратура, применяемая в физических исследованиях. М., 1976.

2. Кузнецова Е. А., Степанов Б. М., Царфин В. Я. Голографическая съемка быстропротекающих процессов парными импульсами излучения//ПТЭ. 1972. № 6.

3 Антонов Е. А., Гинзбург В. М., Лехцнер Е. Н. и др. Оптическая голография: Практические применения /Под ред. Гинзбург В. М., Степанова Б. М. М.: Советское радио, 1978. 240 с.

4. А. с. 503428 СССР. Голографический интерферометр. Авт. изобр. Черных В. Т., Зелинский И. Н. Бюллетень изобретений. 1978. № 9.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.3

Барашков В. Н., Герасимов А. В., Люкшин Б. А. **Численное моделирование напряженно-деформированного состояния упругопластических оболочек вращения при ударном, динамическом и квазистатическом нагружении**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 3—13.

Рассматриваются вопросы расчета напряженно-деформированного состояния осесимметричных оболочечных упругопластических конструкций при нестационарном нагружении. При интенсивном нагружении изучаемые процессы деформирования протекают с проявлением физической и геометрической нелинейностей, поэтому реализация задач проводится на основе использования численных методов. Рассмотрен подход к проблеме с позиций системного анализа, когда для одной и той же конструкции создается не одна модель, а семейство моделей различного уровня сложности и алгоритмов для их реализации. Сопоставление результатов позволяет сделать достаточно обоснованные оценки границ применимости и точности различных моделей, а также разработать экономичную схему расчета НДС.

Библ. 4, ил. 3.

УДК 539.3

Бекетов Н. П., Варочкин А. П., Лихачев В. Н., Люкшин Б. А. **Экспериментально-теоретическое исследование несимметричного напряженно-деформированного состояния упругопластических оболочек при нестационарном нагружении**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 14—20.

В работе проводится физическое и математическое моделирование процессов упругопластического деформирования оболочек вращения при нестационарном несимметричном нагружении. В основу теоретического исследования положена модель оболочки, основанная на гипотезах Кирхгоффа-Лява. Экспериментальная часть работы проводилась на ударной установке типа манометрической бомбы с подвижным поршнем. Результаты регистрировались информационно-измерительной системой на базе микро-ЭВМ Электроника-60.

Библ. 10, ил. 2.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

УДК 539.375

Белов Н. Н., Симоненко В. Г. **К вопросу об отколах в мягких сталях с учетом полиморфного перехода**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 21—23.

В экспериментальных данных по исследованию разрушения в импульсно нагруженных сталях, испытывающих фазовый переход, зарегистрирован двойной откол, один из которых имеет гладкую откольную поверхность. Целью работы является теоретический анализ ударно-волновых процессов, приводящих к зафиксированным результатам. Материал ударника и преграды считается упругопластической средой, в которой разрушение трактуется как рост сферических пор, при достижении которыми предельной пористости происходит нарушение сплошности. Показано, что обычный откол происходит в результате встречи или волн разрежения, или волны разрежения с ударной волной разрежения, в то время как гладкий откол вызывается интерференцией ударных волн разрежения.
Библ. 2, ил. 4.

УДК 539.375

Гриднева В. А., Меркулова Н. Н. **Численное решение нестационарных задач механики сплошной среды на подвижных сетках**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 24—28.

Обсуждаются результаты численных расчетов одномерных задач газовой динамики, полученные с использованием подвижных разностных сеток. Расчеты проводились по схеме С. К. Годунова «распада разрывов». Скорость каждого узла сетки определялась из уравнения, полученного на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона.
Библ. 4, ил. 2.

УДК 539.374

Демидов В. Н. **Автомодельное решение для двухволновой структуры ударных волн и волн разгрузки в нелинейно-сжимаемом упругопластическом полупространстве**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 29—37.

Рассматривается задача о движении упругопластического полупространства, к поверхности которого внезапно прикладывается, а затем внезапно снимается некоторое внешнее давление. Определяющие уравнения среды таковы, что ударная адиабата и изэнтропа разгрузки имеют точки излома, вследствие чего происходит расщепление волн на упругие и пластические. Для частного вида термодинамического уравнения состояния — несложного обобщения уравнения состояния идеального газа — получено аналитическое решение задачи.
Библ. 3, ил. 5.

УДК 539.89

Жуков А. В. **Модель скалярного уравнения состояния композитов**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 38—41.

Предложен метод построения скалярного уравнения состояния композиционных материалов на примере асботекстолита в переменных— давле-

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ние, энергия, плотность — для области высоких ударных давлений, где материал можно рассматривать как гомогенную смесь.

Библ. 7, ил. 1.

УДК 539.374

З а х а р о в В. М. **Оценка сопротивления пластическому деформированию цилиндрического образца при ударном нагружении**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 42—47.

Исследуется характер торможения пластичного образца при ударном взаимодействии с жесткой стенкой. Обработкой рентгенограмм процесса получены зависимости текущей длины и скорости образца, даны полиноминальные аппроксимации этих зависимостей. С использованием одномерной модели «втекания» жесткой части образца в пластическую зону рассчитаны текущие значения динамического предела текучести. Предложена экспоненциальная аппроксимация зависимости динамического предела текучести от скорости срабатывания образца на жесткой стенке.

Библ. 6, ил. 2.

УДК 539.374

З а х а р о в В. М., Б р а г и н В. С. **Экспериментальное исследование динамики взаимодействия деформируемого образца с высокопрочным основанием**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 48—54.

Экспериментально исследуется взаимодействие стального образца длиной 3 диаметра с высокопрочным основанием. Рассматривается случай нормального и косого (30°) удара при скорости взаимодействия 542 и 557 м/с соответственно. Регистрация динамики осуществлялась с помощью рентгено-импульсной съемки. Получены зависимости тормежения образца, дан анализ его рикошетирования в случае косого удара.

Библ. 9, ил. 5.

УДК 539.83

К о с т е н к о И. И., Ш а х т м е й с т е р Л. И. **Расчет тепловых характеристик на ударной адиабате для различных уравнений состояния металлов**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 55—64.

Рассмотрены три типа уравнений состояния металлов, основанных на представлениях Ми-Грюнайзена. Проведен их сравнительный анализ по параметрам начального состояния $\rho_{0k}, E_{x0}, E_{0k}$ и по тепловым характеристикам на ударной адиабате. Расчеты проведены для материалов Al, Cu, Pb, In.

Библ. 8, табл. 5.

УДК 539.3

К о л д у н о в В. А., М у д а р и с о в Ш. Ш., С и д о р е н к о Ю. Н., Ч е р е п а н о в О. И. **Упругое и упругопластическое деформирование цилиндрической оболочки в геометрически нелинейной постановке: плоская деформация и случай осевой симметрии**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 65—72.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

В работе рассматривается процесс геометрически нелинейного деформирования (осесимметричная и плоская задачи) цилиндрической оболочки. Решение проводится на основе пространственных соотношений теории упругости с учетом упругопластических деформаций для плоской задачи. В основу построения алгоритма расчета положен принцип стационарности полной потенциальной энергии деформации упругой системы. Определение стационарного значения функционала сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, которое осуществляется методом Ньютона в сочетании с методом последовательных нагружений. Критическое значение нагрузки определяется на основе теоремы о делении спектра собственных значений симметричного пучка матриц. Приводятся примеры расчетов.

Библ. 9, ил. 6.

УДК 539.3:534.1

Лазаренко М. В., Тараканов В. И. **Действие локальной импульсной нагрузки на предварительно наддутую сферическую оболочку**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 73—82.

Рассматривается реализация методов преобразования Лапласа и преобразования Фурье в задаче о действии локальной импульсной нагрузки на предварительно напряженную сферическую оболочку. Приведены результаты численных расчетов.

Библ. 3, ил. 6.

УДК 539.3

Лейцин В. Н., Пономарев С. В. **Определение эффективных механических характеристик полимерных массивов**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 83—86.

Рассматриваются вопросы определения механических характеристик полимерных материалов массивных тел. Оценка механических характеристик полимерного массива производится на основе численного решения краевой задачи теории упругости с граничными условиями, соответствующими условиям нагружения в эксперименте. Приведены соотношения, определяющие систему уравнений для определения эффективных упругих параметров полимерного массива при сложнонапряженном состоянии.

Библ. 1, ил. 1.

УДК 539.3

Масловский В. И. **О влиянии характера распределения внешнего давления на устойчивость цилиндрической оболочки**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 87—90.

С позиций теории локальной устойчивости анализируется влияние характера распределения интенсивности внешнего давления на величину критического параметра нагрузки. Отмечается значительное влияние переменности нагрузки в окружном направлении и необходимость тщательного учета этой изменяемости при сопоставлении экспериментальных и теоретических результатов и проектировочных расчетах.

Библ. 8, ил. 1.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

УДК 539.375

Михайлов М. Д. **Об исследовании устойчивости одного семейства разностных схем методом дифференциального приближения**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 91—98.

В работе предлагается однопараметрическое семейство разностных схем первого порядка точности, построенных на основе схемы типа Фридрихса-Куранта-Леви. Проводится исследование устойчивости названных схем методом дифференциального приближения. Проверка эффективности полученных условий устойчивости проводилась на модельной задаче о кратковременных импульсных нагрузках в одномерной постановке.

Библ. 4, ил. 1.

УДК 539.376

Павлов С. М., Светашков А. А. **Вариационный метод расчета напряженно-деформированного состояния полимерных конструкций**//Механика сплошных сред. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 99—106.

Дается вариационная постановка задач линейной и нелинейной теории вязкоупругости. Формулируется итерационный алгоритм решения задач минимизации функционалов. На примере уравнений главной квазилинейной теории вязкоупругости показана положительная определенность касательного модуля. Проанализирована скорость сходимости итерационных методов. Приведен числовой пример расчета осесимметричной задачи вязкоупругости однородно стареющего цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления.

Библ. 7, табл. 2.

УДК 539.3

Светашков А. А. **Динамическое воздействие подвижной нагрузки на поверхность упругого композита**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 107—112.

Решается задача об упругих колебаниях многослойной конструкции под воздействием равноускоренно движущейся поверхностной нагрузки. Решение получено в аналитическом виде.

Библ. 1, табл. 2, ил. 1.

УДК 539.3

Тараканов В. И. **О критической скорости движения по плавающему льду**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 113—118.

Получена критическая скорость движения по плавающему льду, предварительно сжатому в своей плоскости. Подвижная нагрузка нормальна к плоскости ледяного покрова и распределена произвольным образом.

Условием критической скорости движения является соотношение, накладываемое на параметры движения, при котором интеграл по области от квадрата смещений пластины стремится к бесконечности. Полученный критерий не зависит от вида нагрузки и определяется только скоростью движения и физико-механическими характеристиками льда.

Библ. 3, ил. 1.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

УДК 539.3

Югов Н. Т. **Численное исследование трехмерного процесса деформирования и разрушения ударника и преграды при несимметричном взаимодействии**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 119—123.

В работе в рамках модели пористой среды рассмотрен трехмерный процесс деформирования и разрушения ударника и преграды при их несимметричном взаимодействии. Приведены конфигурации взаимодействующих тел, а также различные графики, характеризующие процесс соударения. Проанализированы механизмы разрушения ударника и преграды.

Библ. 8, ил. 5.

УДК 53.082.5

Поляков С. Н., Черных В. Т. **Голографический метод исследования высокоскоростного двухфазного потока при разрушении материалов**//Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991, с. 124—129.

Описан метод прямотеневой голографической регистрации двухфазного потока, возникающего при разрушении материалов под действием импульсной нагрузки, позволяющий определить координаты, размеры, форму и число частиц потока. Описана методика эксперимента и обработки результатов. Метод применен для исследования разрушения дюралюминиевых пластин, пирведены данные о пространственной структуре потока.

Библ. 4, ил. 3.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Редактор *К. Г. Шилько*
Технический редактор *Р. А. Прошенкина*
Корректор *Г. В. Астапенко*

ИБ 2119

Сдано в набор 24.02.88. Подписано в печать 31.10.91. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Бумага типографская № 3. Гарнитура Литературная. Печать высокая.
Печ. л. 8,75. Усл.-печ. л. 8,13. Уч.-изд. л. 7,85. Тираж 500 экз. Заказ 242.
Цена 1 р. 60 к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4.
Типография изд-ва «Омская правда», Омск, пр. Маркса, 39.

1 р. 60 к.

Томский госуниверситет 1878
Научная библиотека 00315372

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru