
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
В ГРАНИЧНЫХ
ЗАДАЧАХ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ**

ТОМСКИЙ ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск 1990

Беличенко В. П., Гошин Г. Г., Дмитренко А. Г., Мукомолов А. И., Мышкин В. Г., Чесноков А. Р. **Математические методы в граничных задачах электродинамики.** — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. — 172 с. — 1 р. 80 к. 1000 экз. 1604030000.

В монографии излагается развитие математических методов решения ряда внешних и внутренних граничных задач электродинамики, которые условно можно разбить на три группы: аналитические, численно-аналитические и вычислительные. Первые две группы включают интегральные преобразования типа Конторовича—Лебедева на бесконечном и конечном промежутках интегрирования и типа Меллина, в том числе в сочетании с методом факторизации, и метод, основанный на использовании свойств разрывных интегралов Вебера—Шафхейтлина. Эти методы иллюстрируются на примерах решения граничных задач для различных конических, сферических и секторных областей, а также плоских радиально-неоднородных структур. К третьей группе относится метод вспомогательных источников. Его возможности показаны на примере решения задачи рассеяния на трехосных эллипсоидах.

Для специалистов в области радиофизики и электродинамики, а также для аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Рецензент — кандидат физико-математических наук
Р. П. Старовойтова

Б $\frac{1604030000}{177(012)-90}$ 51-90

ISBN 5-7511-0060-3

© Беличенко В. П., Гошин Г. Г., Дмитренко А. Г.,
Мукомолов А. И., Мышкин В. Г., Чесноков А. Р., 1990

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая вниманию читателя коллективная монография посвящена изложению некоторых математических методов решения ряда задач прикладной электродинамики и теории дифракции. Несмотря на то, что эти методы известны применительно к решению рассматриваемых в монографии задач, они во всех случаях требовали своего развития, обобщения или модификации.

Условно математические методы, используемые при решении в строгой постановке указанных задач, можно разбить на три основные группы: аналитические, численно-аналитические и вычислительные, причем каждые из них имеют известные достоинства и недостатки и соответствующие области применения. В электродинамике под строгой постановкой для внешних задач обычно понимают такую, когда при заданных источниках возбуждения требуется найти решение уравнений Максвелла или волновых уравнений, удовлетворяющее граничным условиям на заданной поверхности, включая ее сингулярные точки, и требованию отсутствия волн, отраженных от бесконечно удаленных точек пространства. Для внутренних задач, связанных с замкнутыми пространствами, последнее условие опускается. Найденные решения должны обеспечивать конечность энергии электромагнитного поля в любом конечном объеме или пространственную интегрируемость плотности энергии. В строгой постановке решения граничных задач являются единственными (см., например, [1—5]).

Кажется естественным отдать предпочтение аналитическим методам, однако круг задач, решаемых с их помощью, довольно ограничен. Тем не менее поиски строгих аналитических решений новых задач имеют практи-

ческое значение и помимо самостоятельного интереса представляют интерес с точки зрения обоснования различных приближенных, а также тех или иных численно-аналитических и вычислительных методов. К одному из широко известных аналитических методов, позволяющих находить решения различных задач в областях с коническими или клиновидными границами, относится рассматриваемый в первой главе метод интегрального преобразования Конторовича—Лебедева. Этот метод применяется к исследованию осесимметричной биконической структуры, образованной двумя коническими поверхностями, одна из которых является изотропным идеально проводящим экраном, а другая выполнена из радиальных проводников. Подобные структуры в их центре или вершине в зависимости от характера соединения проводников могут давать неинтегрируемую особенность, что не позволяет использовать преобразование Конторовича—Лебедева в его традиционной форме. Предложен вариант формулы обращения, учитывающий такие особенности. При этом, чтобы обеспечить требуемую особенность в вершинах каждой из поверхностей, интегральное представление решения электродинамической задачи выбирается состоящим из двух частей с разными контурами интегрирования. Такой подход позволил впервые найти в замкнутом виде решение указанной задачи, рассмотреть ряд частных случаев и исследовать дифракционные характеристики некоторых конических структур.

Методы, изложенные в главах 2 и 3, относятся к группе численно-аналитических. В главе 2 для решения прикладных задач электродинамики в сферических, цилиндрических и секторных областях с включениями предлагается метод, основанный на использовании интегральных преобразований типа Конторовича—Лебедева или Меллина в конечных пределах в сочетании с методом факторизации. При этом исходные граничные задачи сводятся к системам линейных алгебраических уравнений бесконечного порядка фредгольмова типа. К преимуществам получающихся систем относятся простота структура матричных операторов, их быстрая сходимость, возможность применения метода редукции и разработки в общих случаях эффективных вычислительных процедур, а в предельных случаях — построения аналитических решений при помощи итераций. С использованием раз-

витого метода решены задачи о возбуждении сферического резонатора с включением в виде полого конуса, разветвленной секторной области с цилиндрическим закруглением и о распространении ТЕМ-волны в цилиндрической коаксиальной линии с внутренним проводником сложного сечения.

Другой численно-аналитический подход к решению дифракционных задач для плоских радиально-неоднородных структур предлагается в главе 3. Рассматриваемые структуры представляют собой плоский экран или систему параллельных экранов, содержащих круглую апертуру. В свою очередь, в такой апертуре может находиться частично прозрачный для электромагнитного поля диск, например образованный спиральными проводниками. Для решения подобных задач применяется метод, основанный на использовании свойств разрывных интегралов Вебера—Шафхейтлина, имеющих различные аналитические представления внутри единичного интервала, соответствующего апертуре, и вне его. В основе метода лежит возможность обращения этих интегралов в нуль вне единичного интервала при выполнении определенных условий. В конечном итоге задачи сводятся к решению систем линейных алгебраических уравнений бесконечного порядка, допускающих применение метода редукции, но имеющих более сложный вид элементов матричных операторов по сравнению с получающимися в главе 2. При помощи указанного подхода получены решения трехмерных задач о прохождении электромагнитной энергии через круглую апертуру в плоском экране, в том числе с расположенным в ней диском из спиральных проводников, об излучении собственных волн плоского волновода через круглое отверстие в его стенке, о связи двух смежных плоских волноводов через круглое отверстие в общей стенке.

В последнее время в связи с совершенствованием ЭВМ большое развитие получили различные вычислительные методы, в частности метод неортогональных рядов. Известен ряд вариантов этого метода, позволяющих эффективно решать трехмерные задачи для идеально проводящих, импедансных и диэлектрических тел вращения, для тел с диэлектрическим покрытием или многослойных, а также двумерные задачи для тел, не обладающих симметрией вращения. В главе 4 для решения

трехмерных векторных задач рассеяния на произвольных неосесимметричных гладких и выпуклых идеально проводящих и импедансных телах предлагается модификация метода неортогональных рядов. Модификация предполагает тангенциальное расположение вспомогательных источников на некоторой поверхности, подобной поверхности рассеивателя.

Введение и глава 1 написаны Г. Г. Гошиным, глава 2 — В. П. Беличенко, глава 3 — В. Г. Мышкиным и А. Р. Чесноковым, глава 4 — А. Г. Дмитренко и А. И. Мукомоловым.

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОНТОРОВИЧА—ЛЕБЕДЕВА В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С КОНИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ

Одним из эффективных методов аналитического решения граничных задач электродинамики в областях с коническими границами является интегральное преобразование Конторовича—Лебедева. Впервые оно было предложено в [6] и применено авторами к решению двумерной задачи о возбуждении кругового идеально проводящего конуса [7]. В более поздних работах Н. Н. Лебедева [8—11] преобразование получило свое математическое обоснование и было распространено на решение граничных задач в клиновидных областях [12]. Последняя форма преобразования тесно связана с интегралом Зоммерфельда [13]. В предельном случае статических задач пара преобразований Конторовича—Лебедева переходит в преобразование Меллина. Информацию о применении преобразования Конторовича—Лебедева к решению различных задач математической физики в полубесконечных конических и клиновидных областях можно найти, например, в монографиях [14—17]. Несмотря на то, что уже составлены таблицы интегрального преобразования [18, 19], некоторые его математические аспекты продолжают привлекать внимание исследователей [20—23].

При помощи интегрального преобразования Конторовича—Лебедева был успешно решен ряд важных задач теории дифракции и прикладной электродинамики. Так, в [24] впервые решена задача дифракции плоских электромагнитных волн, распространяющихся вдоль оси идеально проводящей конической поверхности. Задачи, связанные с излучением щелевых антенн на поверхности идеально проводящего конуса, рассмотрены в работах

[25--27]. Двумерные задачи об осесимметричном возбуждении конической плазменной оболочки или импедансного конуса с изменяющимися вдоль поверхности параметрами решены в [28--30]. Решения ряда задач теории антенн и линий передач о возбуждении щелевыми источниками конических и биконических структур, образованных изотропными идеально проводящими поверхностями и выполненными из спиральных или радиальных проводников, изложены в монографии [31]. Решения некоторых трехмерных скалярных задач для радиальных конических структур получены в [32--34].

В сочетании с другими методами, такими как Винера—Хопфа [35] или задачи Римана—Гильберта [36], преобразование Конторовича—Лебедева позволило найти строгие решения скалярных и векторных задач для ограниченных конических структур. Одними из первых в этом направлении были работы [37--40], в которых рассматриваются трехмерные скалярные и двумерные векторные задачи о возбуждении идеально проводящих конусов с открытым основанием и конической плазменной оболочки [41]. Несмотря на то, что указанный подход приводит к обобщенному функциональному уравнению Винера—Хопфа с последующим его сведением к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений бесконечного порядка, последняя имеет матричный оператор с вполне непрерывной формой и допускает ее решение с любой наперед заданной точностью методом редукции. Полученное решение, таким образом, можно считать строгим. Все электродинамические характеристики исследуемых структур через решения систем выражаются аналитически. Решения более сложных задач об осесимметричном возбуждении полого усеченного конуса конечных размеров или о наклонном облучении плоской электромагнитной волной конечного идеально проводящего конуса с открытым основанием найдены в [42--45]. Решения ряда задач о возбуждении различными источниками ограниченных конических и биконических структур, образованных идеально проводящими поверхностями или выполненными из радиальных или спиральных проводников, получены в [31, 46, 47].

Данная глава посвящена решению задач дифракции для структур, образованных полубесконечными коническими поверхностями в виде изотропного идеально про-

водящего экрана или выполненных из радиальных проводников, а также их совокупностью, при наклонном облучении этих структур плоскими электромагнитными волнами линейной поляризации. Подобные структуры в их центре или вершине в зависимости от характера соединения проводников могут иметь ненитируемую особенность, что не позволяет применить преобразование Конторовича—Лебедева в его традиционной форме. Предлагается новый вариант формулы обращения, в которой сингулярная часть выделена. При использовании полученной формулы обращения впервые найдены решения указанных дифракционных задач для замкнутых в вершине или нагруженных на некоторое сопротивление радиальных проводников. Рассмотрены частные случаи одиночных и остроугольных конусов, а также плоских экранов.

1.1. Постановка общей дифракционной задачи для биконической структуры с границами из радиальных проводников и изотропного экрана

В сферической системе координат r, θ, φ рассмотрим биконическую структуру, составленную из двух соединенных вершинами и имеющих общую ось симметрии конических поверхностей (рис. 1.1). Одна из этих поверхностей $\theta = \gamma_2$ является изотропным идеально проводящим экраном, другая $\theta = \gamma_1 \leq \gamma_2$ образована набором изолированных друг от друга радиальных проводников. В качестве математической модели последней возьмем модель с граничными условиями анизотропной проводимости [48, 31]. Структура, расположенная в однородной изотропной среде с параметрами ϵ и μ , находится в поле меридионального электрического или магнитного сосредоточенных источников, расположенных в точке с координатами $r = r_0, \theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0$, причем $\gamma_1 \geq \theta_0 < \gamma_2$. При $\gamma_1 < \theta_0 < \gamma_2$ имеем дело с задачей дифракции для модифицированной биконической линии, возбуждение которой кольцевыми источниками исследовалось ранее [31]. При $\theta_0 < \gamma_1 < \gamma_2$ имеем дело с дифракцией электромагнитных волн на коническом экране, прикрытом густой сеткой радиальных проводников. Предполагается, что все волновые процессы имеют временную зависимость вида $e^{-i\omega t}$.

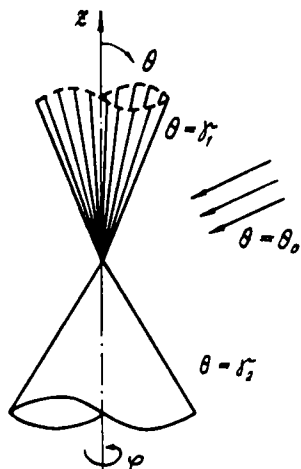


Рис. 1.1. Геометрия задачи

В соответствии с выбранной моделью граничные условия для компонент напряженностей поля имеют вид

$$\begin{aligned} E_{r1} + E_r^0 &= 0, & E_{r2} + E_r^0 &= 0, & (\theta = \gamma_2) \\ E_{r2} + E_r^0 &= 0, & (\theta = \gamma_1) & E_{\varphi 2} + E_{\varphi}^0 &= 0, \\ H_{r1} &= H_{r2}, \\ E_{\varphi 1} &= E_{\varphi 2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где индекс 1 относится к области $0 \leq \theta < \gamma_1$, 2 — к области $\gamma_1 < \theta < \gamma_2$, нуликом помечены компоненты заданного первичного поля.

При решении электродинамических задач в сферической системе координат удобно вводить электрический $U(r, \theta, \varphi)$ и магнитный $V(r, \theta, \varphi)$ потенциалы Дебая. Их введение позволяет вместо интегрирования уравнений Максвелла решать более простую задачу — интегрировать волновые уравнения, которым они удовлетворяют:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - s^2 r U &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} - s^2 r V &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Компоненты напряженностей полей выражаются через потенциалы Дебая посредством формул:

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) - s^2 rU, \\
E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (rU) - \frac{s\omega}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\
E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (rU) + s\omega \frac{\partial V}{\partial \theta}, \\
H_r &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV) - s^2 rV, \\
H_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (rV) + \frac{s}{\omega \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \\
H_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (rV) - \frac{s}{\omega} \frac{\partial U}{\partial \theta}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\tag{1.4}$$

Соотношения (1.2) — (1.4) получены из известных [2] формальной заменой $k = is$, $s > 0$ — вещественно; $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ — постоянная распространения; $\omega = \sqrt{\mu/\epsilon}$ — волновое сопротивление среды.

Подстановка (1.3) и (1.4) в (1.1) с использованием (1.2) приводит к граничным условиям для потенциалов

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} &= r E_r^0, \\
\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} &= r E_r^0, \\
\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_1}{\partial \varphi^2} &= \\
= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_2}{\partial \varphi^2}, \quad (\theta = \gamma_1) &\tag{1.5} \\
\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (r U_1) + s \omega \frac{\partial V_1}{\partial \theta} &= \\
= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (r U_2) + s \omega \frac{\partial V_2}{\partial \theta}; \\
\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} &= r E_r^0, \\
\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (r U_2) + s \omega \frac{\partial V_2}{\partial \theta} &= -E_\varphi^0, \quad (\theta = \gamma_2) &\tag{1.6}
\end{aligned}$$

Теперь решение граничной задачи для электрического и магнитного потенциалов Дебая вторичного поля сводится к интегрированию однородных волновых уравнений (1.2) с граничными условиями (1.5) и (1.6). Искомые решения должны также удовлетворять принципу предель-

ного поглощения, т. е. допускать аналитическое продолжение в область $\text{Res} > 0$ ($\text{Im} k > 0$) и убывать там экспоненциально, если $r \rightarrow \infty$ [49]. Они должны также определенным образом вести себя на оси структуры и в ее центре, обеспечивая пространственную интегрируемость плотности энергии [1, 5]. При выполнении всех этих условий решение задачи будет единственным. Поскольку рассматриваемая структура обладает симметрией вращения, компоненты напряженностей поля и потенциалы разлагаются в ряды Фурье по координате φ , тригонометрические или экспоненциальные, следовательно, возможен переход к двумерным потенциалам $U^m(r, \theta)$ и $V^m(r, \theta)$, удовлетворяющим уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r^2} (r U^m) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U^m}{\partial \theta} \right) - \left(s^2 r + \frac{m^2}{r \sin^2 \theta} \right) U^m &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r^2} (r V^m) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V^m}{\partial \theta} \right) - \left(s^2 r + \frac{m^2}{r \sin^2 \theta} \right) V^m &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.2. Условия в сингулярных точках границы

Центр биконической структуры является сингулярной точкой, поскольку в нем сходятся вершины конических поверхностей, сами дающие сингулярность. Для получения однозначного решения, как это обычно делается [1, 5], привлекаются соображения физического характера, доопределяющие поведение поля в окрестности сингулярной точки. Это поведение для одной и той же структуры может быть разным. Тогда решения электродинамической задачи для конкретной структуры, но с разным поведением поля в окрестности сингулярной точки будут отличаться лишь поведением поля в окрестности этой точки.

Наиболее исследован вопрос о характере сингулярности в вершине изотропного идеально проводящего кругового конуса [50], а в общем случае — конуса эллиптического сечения [51, 52]. При таком исследовании обычно учитывают то обстоятельство, что в малой окрестности любой точки пространства, включая границу, поле имеет локальный характер, следовательно, возможен анализ на основе решения статических задач. В случае кругового конуса статические потенциалы удовлетворяют

уравнению Лапласа и их можно представить в виде

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{v=0}^{\infty} e^{im\varphi} \sum_v A_{mv} r^{v-1/2} P_{v-1/2}^{-m}(\cos\theta), \quad (1.8)$$

где $v \equiv v_{mn}^2(\gamma_1)$ или $v \equiv v_{mn}^M(\gamma_1)$ — корни уравнений $P_{v-1/2}^{-m}(\cos\gamma_1) = 0$ или $\frac{\partial}{\partial \gamma_1} P_{v-1/2}^{-m}(\cos\gamma_1) = 0$ соответственно. В задачах электродинамики они определяют спектры волн электрического ($H_r = 0$) или магнитного ($E_r = 0$) типов в области с конической границей $\theta = \gamma_1$, на которой заданы условия Дирихле или Неймана; $n = 1, 2, 3, \dots$ — порядковый номер корня. Решения этих уравнений, полученные с использованием таблиц [53], приведены на рис. 1.2. Так как всегда $v_{mn}^M(\gamma_1) > 1/2$, то, как видно из (1.8), в вершине идеально проводящего конуса потенциал обращается в нуль.

Если, зная потенциалы, по известным формулам найти компоненты напряженностей поля, то в случае граничных условий Дирихле напряженность электрического поля будет зависеть от радиальной координаты как $r^{v_{mn}(\gamma_1)-3/2}$, а в случае условий Неймана напряженность магнитного поля будет зависеть как $r^{v_{mn}^M(\gamma_1)-3/2}$ [50]. Отсюда следует, что для конусов с $\gamma_1 < 90^\circ$ при $r \rightarrow 0$ поле сингулярно, если $v_{mn}^M < 3/2$, и обращается в нуль, если $v_{mn}^M > 3/2$. При $v_{mn}^M = 3/2$ оно остается конечным, и это значение на рис. 1.2 показано штрих-пунктирной линией. Видно, что сингулярность могут давать лишь симметричный электрический и первый несимметричный магнитный типы волн. Для остроугольного конического проводника ($\gamma_1 \rightarrow \pi$) при использовании приведенных в [54] формул можно записать явные значения корней:

$$\begin{aligned} v_{0n}^2 &\simeq 1/2 + (n-1) + \frac{1}{2 \ln \frac{2}{\pi - \gamma_1}}, \\ v_{0n}^M &\simeq 1/2 + n + n(n+1) \left(\frac{\pi - \gamma_1}{2} \right)^2, \quad m = 0, \quad (1.9) \\ v_{mn}^2 &\simeq 1/2 + m + (n-1) \pm \frac{(2m+n+1)!}{(m-1)!m!(n-1)!} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{\pi - \gamma_1}{2} \right)^{2m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

В последнем выражении верхний знак относится к v_{mn}^2 ,

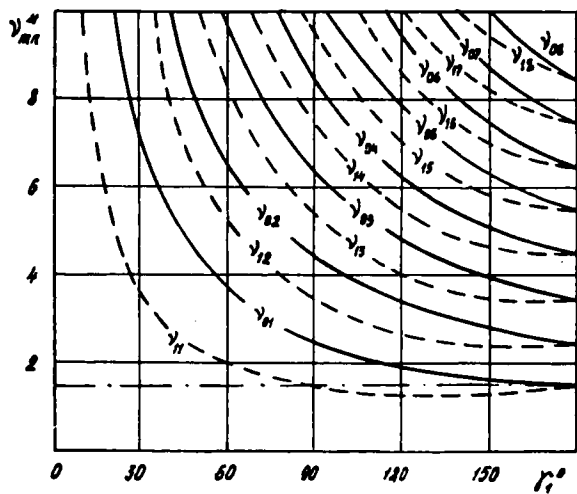
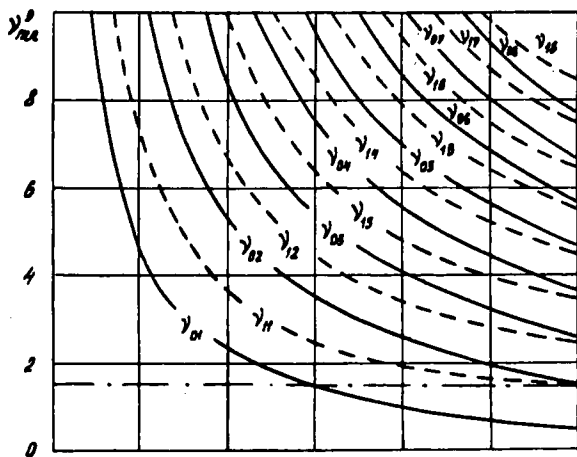


Рис. 1.2. Нули функций $P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos \gamma_1)$ и $\frac{d}{d\gamma_1} P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos \gamma_1)$

нижний — к v_{mn}^M . При $\gamma_1 = \pi$ эти значения равны полуцелым числам. Из соотношения

$$\frac{d}{d\gamma_1} P_{v-1/2}(\cos\gamma_1) = P_{v-1/2}'(\cos\gamma_1)$$

следует $v_{0n}^M = v_{0n}^I$.

Вопрос о характере сингулярности в вершине конической поверхности, образованной радиальными проводниками, почти не исследован. В такой структуре возбуждаются волны электрического типа, и ниже при $m \neq 0$ будет ТЕМ-волна, которая преобладает, если источники находятся вблизи вершины; при $m = 0$ ТЕМ-волна отсутствует, а сама структура полностью эквивалентна изотропному идеально проводящему конусу [31]. Распределение поля этой волны вдоль радиальной координаты будет различным в зависимости от того, сходятся в вершине проводники или остаются в ней разомкнутыми. В приближении ТЕМ-волны этот вопрос можно исследовать, опираясь на теорию длинных линий.

Известно (см., например, [55]), что эквивалентное сопротивление Z_3 длинной линии без потерь, нагруженной на сопротивление R , в общем случае комплексное, определяется формулой

$$Z_3 = Z \frac{\sin kr + i(R/Z)\cos kr}{(R/Z)\sin kr + i\cos kr}, \quad (1.10)$$

где Z — волновое сопротивление линии.

Из (1.10) следует ряд важных частных случаев: линия, разомкнутая на конце ($R = \infty$);

$$Z_3 = iZ \operatorname{ctg} kr; \quad (1.11)$$

короткозамкнутая линия ($R = 0$)

$$Z_3 = -iZ \operatorname{tg} kr; \quad (1.12)$$

линия, нагруженная на сопротивление, равное волновому ($R = Z$),

$$Z_3 = Z.$$

Так как знаменатель (1.10) описывает ток в линии

$$I(r) \sim (R/Z)\sin kr + i\cos kr, \quad (1.13)$$

то в случае разомкнутой на конце линии $I(r) \sim \sin kr$, в случае замкнутой $I(r) \sim \cos kr$ и в последнем случае $I(r) \sim e^{-ikr}$.

В интегральном представлении полученного при помощи преобразования Конторовича—Лебедева решения электродинамической задачи о возбуждении конической поверхности, образованной радиальными проводниками, ТЕМ-волну определяет полюс в точке $\nu = 1/2$ [31]. После взятия вычета зависимость электрического тока от радиальной координаты имеет вид

$$I(r) \sim \sqrt{r} J_{1/2}(kr) \sim \sin kr, \quad (1.14)$$

что соответствует разомкнутым в вершине проводникам. Поведение электрического потенциала Дебая $U(r, \theta, \varphi)$ и компонент напряженностей поля в приближении ТЕМ-волны вблизи вершины определяются соотношениями:

$$U = O(1), \quad \vec{E} = O(1/r), \quad \vec{H} = O(1), \quad kr \rightarrow 0. \quad (1.15)$$

Поскольку ТЕМ-волна является волной низшего типа, существующей в данной структуре, то она определяет поведение потенциала и поля при $kr \rightarrow 0$ для всей структуры в целом. Из (1.8) следует, что $\Phi = O(1)$ при $\nu = 1/2$, т. е. в окрестности вершины статический потенциал Φ и электродинамический потенциал U будут вести себя одинаково.

По аналогии с (1.14) поведение тока в случае замкнутых в вершине радиальных проводников для ТЕМ-волны будет иметь вид

$$I(r) \sim \cos kr \sim \sqrt{r} J_{-1/2}(kr), \quad (1.16)$$

что соответствует вычету в полюсе $\nu = -1/2$. Очевидно, что потенциалы и компоненты напряженностей полей в этом случае вблизи вершины ведут себя как

$$\Phi = O(1/r), \quad U = O(1/r), \quad \vec{E} = O(1), \quad \vec{H} = O(1/r), \quad kr \rightarrow 0. \quad (1.17)$$

Умножив числитель и знаменатель (1.10) на $\sqrt{2/\pi kr}$, приходим к следующему альтернативному выражению

$$Z_3 = Z \frac{J_{1/2}(kr) + i(R/Z)J_{-1/2}(kr)}{(R/Z)J_{1/2}(kr) + iJ_{-1/2}(kr)}, \quad (1.18)$$

в котором

$$I(r) \sim (R/Z)J_{1/2}(kr) + iJ_{-1/2}(kr). \quad (1.19)$$

Теперь можно утверждать, что если радиальные проводники в вершине конической поверхности нагружены на сопротивление, равное волновому сопротивлению струк-

туры, то подобная ситуация будет описываться уже суперпозицией двух вычетов в полюсах $\nu=1/2$ и $\nu=-1/2$. И, наконец, если радиальные проводники в вершине конической поверхности нагружены на сопротивление (R/Z) , в общем случае комплексное, то такая ситуация будет описываться этими же вычетами, но вклад одного из них (если интересоваться распределением тока, то вклад от вычета в точке $\nu=1/2$) должен быть умножен на величину (R/Z) . Однако в целом поведение поля при $kr \rightarrow 0$ будет определяться вычетом в точке $\nu=-1/2$, дающим наибольшую сингулярность.

Во всех рассмотренных случаях сингулярность в вершине конической поверхности, образованной радиальными проводниками, в отличие от изотропного идеально проводящего конуса не зависит от угла раскрыва γ_1 и определяется лишь характером соединения проводников в вершине. Эта сингулярность связана с ТЕМ-волной, обусловленной полюсом в точке $\nu=1/2$, не зависящим от γ_1 . В реальных структурах, например в проволочных антеннах, часть проводников может быть нагружена на сопротивление приемника или генератора, в пассивных структурах замкнута, а остальные проводники могут быть разомкнуты. Однако и в этих случаях наибольшая сингулярность будет определяться вычетом в точке $\nu=-1/2$. То, что сингулярность поля в вершине конической поверхности, образованной радиальными проводниками, может быть выше, чем сингулярность в вершине изотропного идеально проводящего конуса, подтверждается результатами работы [33], в которой исследована структура поля, рассеянного конической поверхностью с прорезанными вдоль образующей щелями, возбуждаемой радиальным магнитным диполем. Решение соответствующей электродинамической задачи является строгим и получено для модели с усредненными граничными условиями при помощи интегрального преобразования Конторовича—Лебедева в сочетании с методом задачи Римана—Гильберта [36].

Остановимся теперь на поведении поля в центре осесимметричной биконической структуры, составленной из двух конических поверхностей, каждая из которых образована радиальными проводниками, является изотропным идеально проводящим конусом или составлена из суперпозиции этих двух структур. Здесь также возмож-

ны ситуации, когда, во-первых, биконическая структура составлена из конических структур, имеющих то или иное рассмотренное выше поведение поля в вершинах, и, во-вторых, сами вершины конических поверхностей, образующие центр биконической структуры, между собой могут быть разомкнутыми, замкнутыми или нагруженными на некоторое сопротивление, в общем случае комплексное. Из найденных при помощи интегрального преобразования Конторовича—Лебедева строгих решений электродинамических задач о возбуждении кольцевыми источниками рассматриваемых биконических структур известно [31], что в них может существовать симметричная ТЕМ-волна. В биконических структурах, образованных радиальными проводниками или комбинацией радиальных проводников и изотропного конического экрана, может существовать также и несимметричная ТЕМ-волна, имеющая зависимость поля от азимутальной координаты. Напомним, что в одиночном конусе, образованном радиальными проводниками, могла существовать только такая волна. В интегральном представлении решения ТЕМ-волна во всех случаях была связана с полюсом в точке $v=1/2$, что соответствовало разомкнутым в центре биконическим структурам с зависимостью тока от радиальной координаты типа (1.14).

В общем случае биконическая структура может быть образована коническими поверхностями с различными электрическими свойствами, например совокупностью изолированных друг от друга проводников на одной поверхности $\theta=\gamma_1$ и изотропного экрана, образующего другую поверхность $\theta=\gamma_2$. В вершине каждой из этих поверхностей свое поведение поля, своя сингулярность. Вторичное поле в области $\gamma_1 < \theta < \gamma_2$ можно представить как поле, создаваемое по отдельности токами, наведенными на каждой из поверхностей, или как поле суперпозиции отраженных от них волн. В интегральном представлении решения соответствующей электродинамической задачи эти вклады будут описываться интегралами типа Конторовича—Лебедева, но по разным контурам, чтобы в каждом случае обеспечить свою сингулярность. Критерием правильности полученного решения должны быть предельные переходы $\gamma_1 \rightarrow 0$ или $\gamma_2 \rightarrow \pi$ к случаям одиночных конусов и выполнение совокупности граничных условий для биконической структуры в целом. Если

биконическая структура образована поверхностями с одинаковыми электрическими свойствами, включая поведение поля в сингулярных точках, то контуры интегрирования будут совпадать.

Так как вершины конических поверхностей, образующих биконическую структуру, сходятся в ее центре, то в простейших случаях очевидно, что если у обеих поверхностей или одной из них вершины разомкнуты, то и центр будет разомкнутым; если у обеих поверхностей вершины замкнуты, то и центр замкнутый. При этом возбуждаемые ТЕМ-волны, определяющие ту или иную сингулярность, будут описываться вычетами в полюсах $\nu = 1/2$ или $\nu = -1/2$ соответственно. Если центр биконической структуры будет нагружен на сопротивление, то по аналогии с рассуждениями на основе теории длинных линий, проведенными для конической поверхности, образованной радиальными проводниками, ТЕМ-волна будет описываться суперпозицией вычетов в этих полюсах.

1.3. Эвристический подход к обобщению метода применительно к решению задач с неинтегрируемой особенностью в сингулярных точках

Решение сформулированной в разд. 1.1 дифракционной задачи будем искать с использованием метода интегрального преобразования Конторовича—Лебедева. При этом решение исходной задачи сводится к решению соответствующей задачи для трансформант. Для решения в конических областях граничных задач электродинамики, включая задачи дифракции и рассеяния электромагнитных волн, удобно использовать пару преобразований вида

$$F(\nu) = \int_0^{\infty} F(r) K_{\nu}(sr) \frac{dr}{\sqrt{r}}, \quad (1.20)$$

$$F(r) = \frac{1}{i\pi\sqrt{r}} \int_C F(\nu) I_{\nu}(sr) \nu d\nu, \quad (1.21)$$

где $K_{\nu}(sr)$ — функция Макдональда; $I_{\nu}(sr)$ — модифицированная функция Бесселя; $s = -ik$, $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$. Контур интегрирования C проходит в полосе регулярности функции $F(\nu)$ параллельно мнимой оси $\text{Re}\nu = 0$. Полоса симметрична относительно этой оси и включает ее. В дальнейшем такой контур будем называть контуром Конторо-

вича—Лебедева. Для существования прямого преобразования (1.20) необходимо, чтобы при $r \rightarrow \infty$ функция $F(r)$ убывала не медленнее, чем $1/r$. Ограничения на ее поведение при $r \rightarrow 0$ будут рассмотрены ниже.

Основные теоремы доказаны для других версий преобразования, но их можно распространить и на (1.20), (1.21), если учесть соотношения

$$K_\nu(sr) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} [I_{-\nu}(sr) - I_\nu(sr)],$$

$$I_\nu(sr) = (-i)^\nu J_\nu(kr), \quad K_\nu(sr) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(kr).$$

Переход к поглощающей среде с чисто мнимым значением постоянной распространения k связан с тем, что в этом случае снимаются все вопросы, связанные с обоснованием сходимости имеющих интегралов, т. е. фактически расширяется область применения интегрального преобразования. Обратный переход к вещественным значениям k (среда без потерь) осуществляется в окончательном решении. В задачах электродинамики, решаемых в сферической системе координат, $F(r)$ в (1.20), (1.21) обычно имеет смысл компонент напряженностей поля, потенциалов Дебая или составляющих поверхностной плотности электрического тока.

Исследуем свойства функции $F(\nu)$, определенной интегралом (1.20), в зависимости от поведения $F(r)$ при $r \rightarrow 0$. Предположим, что

$$F(r) = O(r^\delta), \quad r \rightarrow 0. \quad (1.22)$$

Тогда на основании [56, ф. 2.16.2.2] имеем

$$F(\nu) = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{s}\right)^{\delta+1/2} \Gamma\left(\frac{\delta+1/2+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\delta+1/2-\nu}{2}\right)$$

при условии $|\operatorname{Re} \nu| < \delta + 1/2$, которое определяет границы полосы регулярности $F(\nu)$. С увеличением δ полоса расширяется, а при $\delta \rightarrow -1/2 + 0$ вырождается в прямую $\operatorname{Re} \nu = 0$. Для $\delta < 0$ функция $F(r)$ при $r \rightarrow 0$ является сингулярной, причем максимально допустимая степень сингулярности не должна достигать значения $\delta = -1/2$. С другой стороны, требование ограниченности энергии, заключенной в любом конечном объеме пространства, в сферической системе координат допускает более сильную сингулярность $\delta > -3/2$ [5].

Применительно к задачам с конической геометрией

сингулярность связана с центром биконической структуры или вершинной конической поверхности. Когда $-3/2 < \delta \leq -1/2$, интеграл (1.20) расходится, т. е. решение граничной задачи, имеющее при $r \rightarrow 0$ такую сингулярность, нельзя представить в виде (1.21). Однако эту трудность можно обойти, если преобразование (1.20) применить к функции, из которой выделена взятая с противоположным знаком аддитивная составляющая с сингулярностью из интервала $-3/2 < \delta \leq -1/2$,

$$F(v) = \int_0^{\infty} [F(r) - F(r)|_{r \rightarrow 0}] K_v(sr) \frac{dr}{\sqrt{r}}. \quad (1.23)$$

Если $\delta > -1/2$, то второй член в квадратных скобках должен быть опущен.

Выполнив обратное преобразование (1.21), получим

$$F(r) = F(r)|_{r \rightarrow 0} + \frac{1}{i\pi\sqrt{r}} \int_C F(v) I_v(sr) v dv, \quad (1.24)$$

где контур C является контуром Конторовича—Лебедева. Так как в решениях задач, найденных при помощи преобразования Конторовича—Лебедева, подынтегральные функции всегда являются мероморфными, то функция $F(r)$ может быть представлена в виде рядов вычетов в полюсах $F(v)$, расположенных в правой полуплоскости, где она удовлетворяет условиям леммы Жордана и допускает замыкание контура C . Для интеграла в (1.24) сказанное выше остается справедливым. Относительно конкретного вида выделенной части можно предположить, что $F(r)|_{r \rightarrow 0}$ соответствует членам ряда вычетов, взятых в полюсах $F(v)$, расположенных в полосе $-3/2 < \text{Re } v \leq -1/2$ слева от контура интегрирования C .

Рассмотрим ряд конкретных случаев и определим форму решения электродинамических задач для конических структур в зависимости от характера сингулярности в вершине. Для определенности под искомым решением $F(r)$ будем подразумевать двумерный электрический потенциал Дебая $U(r, \theta)$ вторичного поля, т. е. поля радиальных токов, наведенных на конической структуре сторонними источниками. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для магнитного потенциала $V(r, \theta)$ вторичного поля. Контур интегрирования и полюсы, лежащие вблизи полосы регулярности функции $F(v)$ и

дающие сингулярность решения, показаны на рис. 1.3. Контур C лежит в полосе регулярности, определенной условием $|\operatorname{Re} v| < 1/2$.

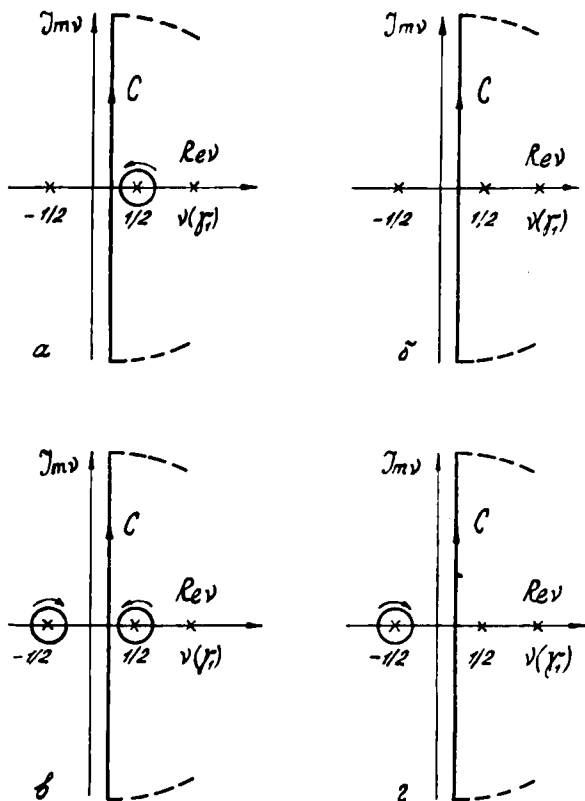


Рис. 1.3. Контурь интегрирования

1. Идеально проводящий конус. Для него потенциал при $r \rightarrow 0$ обращается в нуль и ближайший к полосе регулярности полюс будет $v_{01}^3(\gamma_1) > 1/2$. Однако в представлении $U(r, \theta)$ в виде интеграла по контуру C появляется полюс в точке $v = 1/2$, дающий конечное значение потенциала при $r \rightarrow 0$. Чтобы функция $U(v, \theta)$ была регулярной в точке $v = 1/2$, полюс необходимо скомпенсировать. Фактически полоса регулярности должна определяться условием $|\operatorname{Re} v| < v_{01}^3(\gamma_1)$. Решение следует брать в виде

$$U(r, \theta) = \frac{1}{i\pi \sqrt{r}} \int_C U(v, \theta) I_v(sr) v dv + \frac{1}{\sqrt{r}} I_{1/2}(sr) \operatorname{Res}_{v=1/2} U(v, \theta) \quad (1.25)$$

Вычет равен значению интеграла по малой петле, охватывающей полюс в точке $v = 1/2$, с направлением обхода, противоположным тому, которое возникает при пересечении полюса контуром C (рис. 1.3, а). В альтернативной записи контур интегрирования можно провести также в полосе $1/2 < \operatorname{Re} v < v_{mn}^3(\gamma_1)$, но он уже не будет контуром Конторовича—Лебедева.

2. Конус, образованный радиальными проводниками, разомкнутыми в вершине. В этом случае потенциал при $r \rightarrow 0$ остается конечным, что обеспечивается полюсом у подынтегральной функции в точке $v = 1/2$. Решение представляется интегралом Конторовича—Лебедева

$$U(r, \theta) = \frac{1}{i\pi \sqrt{r}} \int_C U(v, \theta) I_v(sr) v dv. \quad (1.26)$$

Плоскость комплексного переменного v показана на рис. 1.3, б.

3. Конус, образованный радиальными проводниками, замкнутыми в вершине. В этом случае потенциал при $r \rightarrow 0$ имеет особенность и ведет себя как $U(r, \theta) = O(1/r)$. Подобная сингулярность может быть связана с полюсом в точке $v = -1/2$. Подынтегральная функция имеет также полюс в точке $v = 1/2$, который при $r \rightarrow 0$ обеспечивал конечность потенциала для конуса с разомкнутыми в вершине проводниками. Поскольку оба эти случая взаимно исключают друг друга, то полюс в точке $v = 1/2$ должен быть скомпенсирован. Ситуация в комплексной плоскости изображена на рис. 1.3, в. Решение следует брать в виде

$$U(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{r}} I_{-1/2}(sr) \operatorname{Res}_{v=-1/2} U(v, \theta) + \frac{1}{\sqrt{r}} I_{1/2}(sr) \cdot$$

$$\cdot \operatorname{Res} U(v, 0) + \frac{1}{i\pi\sqrt{r}} \int_C U(v, 0) I_v(sr) v dv, \quad (1.27)$$

где вычет в полюсе $v = -1/2$ берется от трансформанты функции, определенной в правой полуплоскости.

4. Конус, образованный радиальными проводниками, в вершине нагруженными на сопротивление. В этом случае необходимо учитывать вклады от обоих полюсов, расположенных в точках $v = \pm 1/2$. Ситуация в комплексной плоскости изображена на рис. 1.3,з. Если величина нагрузки R равна волновому сопротивлению Z конической линии, то оба вклада будут равноправными и решение задачи следует брать в виде

$$U(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{r}} I_{-1/2}(sr) \operatorname{Res}_{v=-1/2} U(v, \theta) + \frac{1}{i\pi\sqrt{r}} \int_C U(v, \theta) I_v(sr) v dv. \quad (1.28)$$

Если $R \neq Z$, то вклад от вычета в точке $v = -1/2$ необходимо умножить на величину R/Z .

Правильность полученных формул покажем на нескольких примерах с известными функциями.

$$1. F(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} I_{1/2}(sr); \quad F(r) = O(1), \quad r \rightarrow 0. \quad (1.29)$$

Трансформанту этой функции можно записать, используя [56, ф. 2.16.21.1]:

$$F(v) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{r}} I_{1/2}(sr) \cdot K_v(sr) \frac{dr}{\sqrt{r}} = - \frac{1}{(v^2 - 1/4)}. \quad (1.30)$$

Областью существования интеграла является полоса $|\operatorname{Re} v| < 1/2$; в этой же полосе проходит контур C в формуле обращения Конторовича—Лебедева. Поэтому искомую функцию находим по формуле (1.26):

$$\frac{1}{\sqrt{r}} I_{1/2}(sr) = \frac{1}{i\pi\sqrt{r}} \int_C \frac{I_v(sr) v dv}{[-(v^2 - 1/4)]}. \quad (1.31)$$

Подынтегральная функция в правой полуплоскости имеет единственную особенность — простой полюс в точке $v = 1/2$, направление обхода которого отрицательно. Значение интеграла в точности равно функции в левой части равенства.

$$2. F(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} I_{-1/2}(sr); \quad F(r) = O(1/r), \quad r \rightarrow 0. \quad (1.32)$$

Эта функция не имеет трансформанты в смысле Конторовича—Лебедева, но она удовлетворяет формуле (1.27), для применения которой требуется знание трансформанты (1.30) от функции (1.29):

$$\frac{1}{\sqrt{r}} I_{-1/2}(sr) = \frac{1}{\sqrt{r}} I_{-1/2}(sr) - \frac{1}{\sqrt{r}} I_{1/2}(sr) + \\ + \frac{1}{i\pi\sqrt{r}} \int_C \frac{I_v(sr) v dv}{[-(v^2 - 1/4)]}.$$

Два последних слагаемых в правой части равенства компенсируют друг друга, и результат очевиден.

$$3. F(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} [I_{1/2}(sr) \pm I_{-1/2}(sr)]; \quad F(r) = O(1/r), \\ r \rightarrow 0. \quad (1.33)$$

Функция не имеет трансформанты в смысле Конторовича—Лебедева. Ее можно записать, используя формулу (1.23) для функции, из которой аддитивно выделена сингулярная составляющая

$$F(v) = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\sqrt{r}} [I_{1/2}(sr) \pm I_{-1/2}(sr)] \mp \frac{1}{\sqrt{r}} I_{-1/2}(sr) \right\} \cdot K_v(sr) \frac{dr}{\sqrt{r}} = \frac{-1}{(v^2 - 1/4)}.$$

Искомую функцию находим по формуле (1.28):

$$\frac{1}{\sqrt{r}} [I_{1/2}(sr) \pm I_{-1/2}(sr)] = \pm \frac{1}{\sqrt{r}} I_{-1/2}(sr) + \\ + \frac{1}{i\pi\sqrt{r}} \int_C \frac{I_v(sr) v dv}{[-(v^2 - 1/4)]}.$$

Результат очевиден.

Критерием правильности найденных с использованием формул обращения (1.25)—(1.28) решений конкретных электродинамических задач в конечном итоге будет служить проверка выполнения всех условий постановки этих задач, включая условия в сингулярных точках границы. Преимущество предлагаемого подхода в том, что найденная связь между поведением искомой функции в сингулярной точке ($r \rightarrow 0$) и полюсами $v = \pm 1/2$ в комплексной плоскости у ее трансформанты позволяет вместо

использования прямого преобразования (1.24) с априорным заданием неизвестной величины $F(r)|_{r \rightarrow 0}$ формально применить преобразование (1.20), а сингулярность учесть при выполнении обратного преобразования.

1.4. Решение дифракционной задачи в интегральной форме

Применив прямое преобразование (1.20) к уравнениям (1.7), для трансформант двумерных потенциалов Дебая получим обыкновенное дифференциальное уравнение Лежандра, в качестве общих интегралов которого возьмем

$$\begin{aligned} U_1^m(v, \theta) &= A_1(v) P_{v-1/2}^{-m}(\cos \theta), \\ V_1^m(v, \theta) &= B_1(v) P_{v-1/2}^{-m}(\cos \theta), \\ U_2^m(v, \theta) &= A_2(v) P_{v-1/2}^{-m}(-\cos \theta) + A_3(v) P_{v-1/2}^{-m}(\cos \theta), \\ V_2^m(v, \theta) &= B_2(v) P_{v-1/2}^{-m}(-\cos \theta) + B_3(v) P_{v-1/2}^{-m}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Применение преобразования (1.20) к граничным условиям (1.5) и (1.6), переписанным для двумерных потенциалов, и последующая подстановка в них (1.34) приводят к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных функций $A(v)$ и $B(v)$. При выводе этой системы следует учесть, что на изотропном идеально проводящем экране граничные условия выполняются по отдельности для электрических и магнитных типов волн, описываемых электрическим и магнитным потенциалами Дебая соответственно [2]. Ее решением являются

$$\begin{aligned} A_1(v) &= - \frac{(\bar{r}\bar{E}_r^0)_{m|Y_1}}{(v^2 - 1/4) P_{v-1/2}^{-m}(\cos \gamma_1)}, \\ A_{2,3}(v) &= \pm \frac{(\bar{r}\bar{E}_r^0)_{m|Y_1} \cdot \bar{P}_{v-1/2}^{-m}(\pm \cos \gamma_2)}{(v^2 - 1/4) D(v)} - \\ &\quad - \frac{(\bar{r}\bar{E}_r^0)_{m|Y_1} \cdot P_{v-1/2}^{-m}(\pm \cos \gamma_1)}{(v^2 - 1/4) D(v)}, \\ B_1(v) = B_3(v) &= - \frac{d/d\theta \bar{V}_{m|Y_1}^0}{d/d\gamma_2 P_{v-1/2}^{-m}(\cos \gamma_2)}, \quad B_2(v) = 0, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где

$$\begin{aligned} D(v) &= P_{v-1/2}^{-m}(\cos \gamma_1) P_{v-1/2}^{-m}(-\cos \gamma_2) - \\ &\quad - P_{v-1/2}^{-m}(-\cos \gamma_1) P_{v-1/2}^{-m}(\cos \gamma_2); \end{aligned} \quad (1.36)$$

Чертой помечены трансформанты разложений в ряды Фурье соответствующих функций первичного поля, взятых на поверхности $\theta = \gamma_1$ или $\theta = \gamma_2$. Необходимо подчеркнуть, что найденное решение обладает достаточной общностью и справедливо для любого распределения сторонних источников, в поле которых находится рассматриваемая биконическая структура.

Опираясь на результаты работы [31], для потенциалов Дебая поля плоских электромагнитных волн можно записать следующие представления:

$$U_0(r, \theta, \varphi) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi r s^3}} \left(\frac{-E_0 \frac{d}{d\theta_0}}{H_0 \frac{d}{d\varphi_0} \sin\theta_0} \right) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot \int_C [g_v^m(\theta, \theta_0) - g_{1/2}^m(\theta, \theta_0)] I_v(sr) \frac{v dv}{(v^2 - 1/4)}, \quad (1.37)$$

$$V_0(r, \theta, \varphi) = \frac{-i}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi r s^3}} \left(\frac{E_0 \frac{d}{d\varphi_0}}{H_0 \frac{d}{d\theta_0}} \right) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot \int_C [g_v^m(\theta, \theta_0) - g_{1/2}^m(\theta, \theta_0)] I_v(sr) \frac{v dv}{(v^2 - 1/4)},$$

где

$$g_v^m(\theta, \theta_0) = \frac{1}{2} \Gamma(1/2 + m + v) \Gamma(1/2 + m - v).$$

$$\begin{cases} P_{v-1/2}^{-m}(\cos\theta) P_{v-1/2}^{-m}(-\cos\theta_0), & \theta < \theta_0, \\ P_{v-1/2}^{-m}(-\cos\theta) P_{v-1/2}^{-m}(\cos\theta_0), & \theta > \theta_0, \end{cases} \quad (1.38)$$

$$g_{1/2}^m(\theta, \theta_0) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\operatorname{tg}\theta/2}{\operatorname{tg}\theta_0/2} \right)^{\pm m}, \quad \theta \leq \theta_0; \quad (1.39)$$

$E_0 = \text{const}$ и $H_0 = \text{const}$ — суть амплитуды напряженности электрического поля плоской волны Е- или Н-поляризации соответственно. Интегралы в (1.37) сходятся при условии $\pi/2 < |\theta_0 - \theta|$.

Эти представления получены посредством предельного перехода в соответствующих выражениях для потенциалов Дебая поля электрического или магнитного меридиональных диполей при удалении их на бесконечность и записаны в виде интегралов по контуру C , включающему мнимую ось плоскости комплексного переменного v и проходящему в полосе $|\operatorname{Re} v| < 1/2$ (рис. 1.3, а). В правой полуплоскости подынтегральные функции имеют полюсы в точке $v=1/2$, описывающие ТЕМ-волну. В спектре плоских волн такой составляющей нет, поэтому второе слагаемое (в квадратных скобках) есть не что иное, как компенсирующий вычет в точке $v=1/2$, обращающий подынтегральные функции в этой точке в нуль и таким образом делающий их регулярными в требуемой, более широкой полосе. Воспользовавшись теоремой сложения для функций Лежандра, переходя от интегралов Контровича—Лебедева к рядам вычетов и суммируя их [31], из (1.37) можно получить выражения, содержащие лишь элементарные функции. Соответствующие им компоненты напряженности электрического поля плоской волны E -поляризации ($H_z^0 \equiv 0$), например, имеют вид

$$\begin{aligned} E_r^0 &= E_0 [\sin\theta \cos\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - \cos\theta \sin\theta_0] e^{-ikr \cos\beta_0}, \\ E_\theta^0 &= E_0 [\cos\theta \cos\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \sin\theta \sin\theta_0] e^{-ikr \cos\beta_0}, \\ E_\varphi^0 &= -E_0 \cos\theta_0 \sin(\varphi - \varphi_0) e^{-ikr \cos\beta_0}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

где

$$\cos\beta_0 = \cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (1.41)$$

Таким образом, представления потенциала Дебая в форме (1.37) действительно описывают поле плоских электромагнитных волн, распространяющихся в направлении из верхнего полупространства в нижнее, характеризуемом углами θ_0 и φ_0 по отношению к осям z , x .

Применив к (1.37) прямое преобразование (1.20), нетрудно вычислить входящие в (1.35) трансформанты первичного поля. Они определяются следующими выражениями:

$$(\overline{r}, \overline{E_r^0})_{\pi(1,1)} = \sqrt{\frac{2\pi}{s^3}} \left(\frac{-E_0 \frac{d}{d\theta_0}}{\frac{H_0}{\sin\theta_0} \frac{d}{d\varphi_0}} \right) g_v^m(\theta_0, \varphi_{1,2}), \quad (1.42)$$

$$\frac{d}{d\theta} \bar{V}_{m|v_1}^0 = \frac{1}{u'} \sqrt{\frac{2\pi}{s'}} \left(\frac{E_0}{\sin\theta_0} \frac{d}{d\varphi_0} \right) \cdot \frac{d}{d\gamma_2} \frac{[g_v^m(\gamma_2, \theta_0) - g_{1/2}^m(\gamma_2, \theta_0)]}{(v^2 - 1/4)}.$$

Необходимо заметить, что операторы (стоящие в круглых скобках) $d/d\varphi_0$ должны пониматься условно: они вступают в силу лишь после подстановки трансформант в ряды азимутальных гармоник и выписаны с целью единообразия промежуточных формул.

Функции $A_{2,3}(v)$ в (1.35) состоят из двух слагаемых, каждое из которых связано с трансформантой первичного поля, взятой при $\theta = \gamma_1$ или $\theta = \gamma_2$.

Так как каждая из конических поверхностей при $r \rightarrow 0$ может иметь свою сингулярность, то такое же разбиение необходимо провести для трансформанты $U_2^m(v, \theta)$ в (1.34):

$$U_2^m(v, \theta) = \frac{(\bar{r}\bar{E}_v^0)_{m|v_1} \cdot f_2(v, \theta) - (\bar{r}\bar{E}_v^0)_{m|v_2} \cdot f_1(v, \theta)}{(v^2 - 1/4)D(v)}, \quad (1.43)$$

$$\text{где } f_{1,2}(v, \theta) = P_{v-1/2}^{-m}(\cos\gamma_{1,2}) P_{v-1/2}^{-m}(-\cos\theta) - P_{v-1/2}^{-m}(-\cos\gamma_{1,2}) P_{v-1/2}^{-m}(\cos\theta) \quad (1.44)$$

Предположим, что радиальные проводники в вершине конической поверхности $\theta = \gamma_1$ разомкнуты, а вершины конических поверхностей при $r \rightarrow 0$ не касаются друг друга, тогда, выполнив обратное преобразование по формулам (1.25) и (1.26), получим

$$U_1(r, \theta, \varphi) = i\sqrt{\frac{2}{\pi s^3 r}} \left(\frac{-E_0}{\sin\theta_0} \frac{d}{d\varphi_0} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot$$

$$\cdot \int_C \frac{g_v^m(\gamma_1, \theta_0) P_{v-1/2}^{-m}(\cos\theta)}{(v^2 - 1/4) P_{v-1/2}^{-m}(\cos\gamma_1)} I_v(sr) v dv, \quad (1.45)$$

$$U_2 = -i\sqrt{\frac{2}{\pi s^3 r}} \left(\frac{-E_0}{\sin\theta_0} \frac{d}{d\varphi_0} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot$$

$$\left\{ -i\pi I_{1/2}(sr) g_{1/2}^m(\gamma_2, \theta_0) \frac{j_1(1/2, \theta)}{D(1/2)} + \int_C [g_v^m(\gamma_1, \theta_0) f_2(v, \theta_0) - g_v^m(\gamma_2, \theta_0) j_1(v, \theta)] \frac{I_v(sr) v dv}{(v^2 - 1/4) D(v)} \right\}. \quad (1.46)$$

$$V_{1,2} = \frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi s^3 r}} \left(\frac{E_0}{H_0} \frac{d}{d\theta_0} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot \left\{ -i\pi I_{1/2}(sr) g_{1/2}^m(\gamma_2, \theta) \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \theta/2}{\operatorname{tg} \gamma_2/2} \right)^m + \right. \quad (1.47)$$

$$\left. + \int_C \frac{\frac{d}{d\gamma_2} g_v^m(\gamma_2, \theta_0) P_{v-1/2}^{-m}(\cos \theta)}{(v^2 - 1/4) \frac{d}{d\gamma_2} P_{v-1/2}^{-m}(\cos \gamma_2)} I_v(sr) v dv \right\},$$

где входящие в (1.45)–(1.47) функции определяются формулами (1.36), (1.38), (1.39) и (1.44); $g_v^m(\gamma_1, \theta_0)$ берется в зависимости от области падения плоской волны для $\gamma_1 \leq \theta_0$, а $g_v^m(\gamma_2, \theta_0)$ — только для $\gamma_2 > \theta_0$.

Если радиальные проводники в вершине конической поверхности $\theta = \gamma_1$ замкнуты, при этом вершины конических поверхностей касаются друг друга в точке $r = 0$, то, выполнив обратное преобразование по формулам (1.25) и (1.27), получим

$$U_1 = i\sqrt{\frac{2}{\pi s^3 r}} \left(\frac{-E_0}{H_0} \frac{d}{d\theta_0} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot \left\{ -2iK_{1/2}(sr) g_{1/2}^m(\gamma_1, \theta_0) \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \theta/2}{\operatorname{tg} \gamma_1/2} \right)^m + \right. \quad (1.48)$$

$$\left. + \int_C \frac{g_v^m(\gamma_1, \theta_0) P_{v-1/2}^{-m}(\cos \theta)}{(v^2 - 1/4) P_{v-1/2}^{-m}(\cos \gamma_1)} I_v(sr) v dv \right\},$$

$$U_2 = -i\sqrt{\frac{2}{\pi s^3 r}} \left(\frac{-E_0}{H_0} \frac{d}{d\theta_0} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot \left\{ -2iK_{1/2}(sr) g_{1/2}^m(\gamma_1, \theta_0) \frac{j_2(1/2, \theta)}{D(1/2)} - \right.$$

$$-i\pi I_{1,2}(sr)g_{1,2}(\gamma_2, 0_0) \frac{f_1(1/2, 0)}{D(1/2)} + \int_C [g_v^m(\gamma_1, 0_0)f_2(v, 0) - \\ - g_v^m(\gamma_2, 0_0)f_1(v, 0)] \frac{I_1(sr)v dv}{(v^2 - 1/4)D(v)}, \quad (1.49)$$

где

$$f_{1,2}(1/2, 0) = \frac{1}{(m!)^2} \left[\left(\frac{tg\gamma_{1,2}/2}{tg\theta/2} \right)^m - \left(\frac{tg\gamma_{1,2}/2}{tg\theta/2} \right)^{-m} \right], \quad (1.50)$$

$$D(1/2) = \frac{1}{(m!)^2} \left[\left(\frac{tg\gamma_1/2}{tg\gamma_2/2} \right)^m - \left(\frac{tg\gamma_1/2}{tg\gamma_2/2} \right)^{-m} \right]. \quad (1.51)$$

Выражения для $V_{1,2}(r, 0, \varphi)$ остаются без изменений.

Трансформанты Конторовича—Лебедева в интегральном представлении решения (1.45) — (1.49) являются четными мероморфными функциями, в правой полуплоскости имеющими простые полюсы в точке $v=1/2$ и бесконечное множество простых полюсов, расположенных на действительной оси и определяемых нулями функций

$P_{-1,2}^{-m}(\cos\gamma_1)$, $\frac{d}{d\gamma_2} P_{-1,2}^{-m}(\cos\gamma_2)$ или $D(v)$. Нули первых

двух функций для $m=0,1$ показаны на рис. 1.2, нули $D(v)$ — на рис. 1.4. При использовании асимптотических представлений специальных функций при больших значениях индексов можно показать, что интегралы по контуру C сходятся при определенных соотношениях между угловыми параметрами задачи. Так, интегралы, описывающие решение в области $\theta < \gamma_1$, сходятся при $\pi/2 < < 2\gamma_1 - (\theta_0 + \theta)$, если $\theta_0 < \gamma_1$, т. е. плоская волна распространяется внутри конической поверхности $\theta = \gamma_1$, и при $\pi/2 < (\theta_0 - \theta)$, если $\theta_0 > \gamma_1$, т. е. плоская волна распространяется вне той поверхности. Часть интегралов, описывающих решение в области $\gamma_1 < \theta < \gamma_2$, подынтегральные функции которых содержат $f_2(v, \theta)$, сходятся при условии $\pi/2 < 2(\gamma_2 - \theta) + |\gamma_1 - \theta_0|$; вторая часть с $f_1(v, \theta)$ сходитя при $\pi/2 < 2(\gamma_2 - \theta) + (\gamma_2 - \theta_0)$. Однако в результате деформации контура C можно получить интегралы, сходящиеся при любых соотношениях между угловыми параметрами задачи.

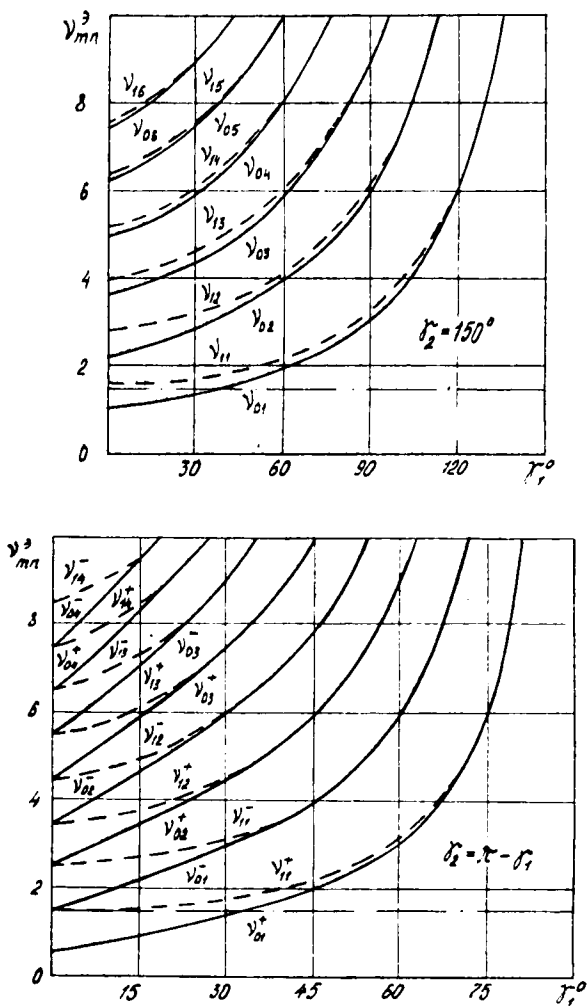


Рис. 1.4. Нули функции $D(v)$

1.5. Анализ решения и дифракционные свойства структур

Найденное решение обладает достаточной общностью и позволяет записать решения целого ряда более простых задач. В частности, из него после предельных переходов $\gamma_1 \rightarrow 0$ или $\gamma_2 \rightarrow \pi$ могут быть получены решения дифракционных задач для изотропного идеально проводящего конуса, конической поверхности, образованной радиальными проводниками, и соответствующих им плоских структур, а также для остроугольных конических или биконических проводников, представляющих собой модель тонкого ограниченного с одного конца полубесконечного проводника, системы двух таких проводников с исчезающе малым зазором между ними и тонкого провода бесконечной протяженности. Чтобы совершить предельные переходы, воспользуемся известными асимптотическими формулами для присоединенных функций Лежандра при $\gamma \rightarrow 0$ [4, 57]:

$$P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos\gamma) \simeq \frac{1}{\Gamma(m+1)} (\gamma/2)^m, \quad m=0, 1, 2, \dots, \quad (1.52)$$

$$P_{\nu-1/2}(\cos\gamma) \simeq -\frac{2}{\pi} \cos\nu\pi [\ln\gamma/2 + 0,577 + \\ + \psi(\nu + 1/2) - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg}\nu\pi],$$

$$P_{\nu-1/2}^{-m}(-\cos\gamma) \simeq \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+1/2+\nu)\Gamma(m+1/2-\nu)} \left(\frac{2}{\gamma}\right)^m, \\ m=1, 2, 3, \dots,$$

а также функциональным соотношением

$$P_{\nu-1/2}^{-m}(\pm\cos\gamma) = P_{\nu-1/2}^{-m}[\mp\cos(\pi-\gamma)],$$

если $\gamma \rightarrow \pi$.

1. Идеально проводящий конус. Для него решение задачи получается посредством предельного перехода $\gamma_1 \rightarrow 0$ и исключением из рассмотрения области $\theta < \gamma_1$, в которой полагаем $U_1(r, \theta, \varphi) = V_1(r, \theta, \varphi) \equiv 0$. При этом $g_{\nu}^m(\gamma_1, \theta_0)$ стремится к нулю, а $f_1(\nu, \theta)/D(\nu)$ — к значению $P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos\theta)/P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos\gamma_2)$. Вместо (1.46) или (1.49) имеем

$$\begin{aligned}
U(r, \theta, \varphi) = & i\sqrt{\frac{2}{\pi s^3 r}} \left(\frac{-E_0}{H_0} \frac{d}{d\theta_0} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot \\
& \cdot \left\{ \pi I_{1/2}(sr) g_{1/2}^m(\gamma_2, \theta_0) \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \theta/2}{\operatorname{tg} \gamma_2/2} \right)^m + \right. \\
& \left. + \int_C \frac{g_v^m(\gamma_2, \theta_0) P_{v-1/2}^{-m}(\cos \theta)}{(v^2 - 1/4) P_{v-1/2}^{-m}(\cos \gamma_2)} I_v(sr) v dv \right\}.
\end{aligned} \quad (1.53)$$

Для $V(r, \theta, \varphi)$ выражение (1.47) остается без изменений. К такому же результату приходим после предельного перехода $\gamma_1 = \gamma_2$ и исключения из рассмотрения области $\gamma_1 < \theta < \gamma_2$ в (1.45) и (1.48); имеющиеся вычеты при $v = \pm 1/2$ должны быть скомпенсированы, как не отвечающие требуемому поведению потенциала в вершине изотропного идеально проводящего конуса.

С целью более наглядной интерпретации преобразуем решение, выделив из него зеркально отраженные плоские волны. Насколько известно, для конических поверхностей такие попытки не делались. От контура C перейдем к контуру C_1 , проходящему в полосе $1/2 < \operatorname{Re} v < v_{01}^3(\gamma_1)$. Эквивалентные (1.53) и (1.47) выражения для потенциалов Дебая вторичного поля имеют вид

$$\begin{aligned}
U(r, \theta, \varphi) = & \frac{i}{\sqrt{2\pi s^3 r}} \left(\frac{-E_0}{H_0} \frac{d}{d\theta_0} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot \\
& \cdot \int_{C_1} \Gamma(1/2 + m + v) \Gamma(1/2 + m - v) P_{v-1/2}^{-m}(\cos \theta_0) \cdot \\
& \cdot P_{v-1/2}^{-m}(\cos \theta) \left[1 + \frac{P_{v-1/2}^{-m}(-\cos \gamma_2) - P_{v-1/2}^{-m}(\cos \gamma_2)}{P_{v-1/2}^{-m}(-\cos \gamma_2)} \right] \cdot \\
& \cdot \frac{I_v(sr) v dv}{(v^2 - 1/4)},
\end{aligned} \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned}
V(r, \theta, \varphi) = & \frac{i}{\omega \sqrt{2\pi s^3 r}} \left(\frac{E_0}{H_0} \frac{d}{d\theta_0} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot \\
& \cdot \int_{C_1} \Gamma(1/2 + m + v) \Gamma(1/2 + m - v) P_{v-1/2}^{-m}(\cos \theta_0) \cdot
\end{aligned}$$

$$P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos\theta) \left[1 + \frac{\frac{d}{d\gamma_2} P_{\nu-1/2}^{-m}(-\cos\gamma_2) - \frac{d}{d\gamma_2} P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos\gamma_2)}{\frac{d}{d\gamma_2} P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos\gamma_2)} \right] \cdot \frac{I_\nu(sr) v dv}{(v^2 - 1/4)} \quad (1.55)$$

Аддитивно выделим часть решения, соответствующую единице (в квадратных скобках), и просуммируем ряды азимутальных гармоник с использованием одного из вариантов теоремы сложения для функций Лежандра. В результате получим

$$U^0(r, \theta, \varphi) = \frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2s^3r}} \left(\frac{-E_0 \frac{d}{d\theta_0}}{H_0 \frac{d}{\sin\theta_0 d\varphi_0}} \right) \int_{C_1} P_{\nu-1/2}(-\cos\beta) \cdot \frac{I_\nu(sr) v dv}{(v^2 - 1/4) \cos v\pi} \quad (1.56)$$

$$V^0(r, \theta, \varphi) = \frac{i\sqrt{\pi}}{\omega\sqrt{2s^3r}} \left(\frac{E_0 \frac{d}{\sin\theta_0 d\varphi_0}}{H_0 \frac{d}{d\theta_0}} \right) \int_{C_1} P_{\nu-1/2}(-\cos\beta) \cdot \frac{I_\nu(sr) v dv}{(v^2 - 1/4) \cos v\pi} \quad (1.57)$$

где

$$\cos\beta = -\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0). \quad (1.57)$$

Такое же суммирование возможно и для потенциалов Дебая (1.37) поля падающей плоской электромагнитной волны:

$$U_0(r, \theta, \varphi) = \frac{-i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2s^3r}} \left(\frac{-E_0 \frac{d}{d\theta_0}}{H_0 \frac{d}{\sin\theta_0 d\varphi_0}} \right) \int_{C_1} P_{\nu-1/2}(-\cos\beta_0) \cdot \frac{I_\nu(sr) v dv}{(v^2 - 1/4) \cos v\pi} \quad (1.58)$$

$$V_0(r, \theta, \varphi) = \frac{-i\sqrt{\pi}}{\omega\sqrt{2s^3r}} \left(\frac{E_0 \frac{d}{\sin\theta_0 d\varphi_0}}{H_0 \frac{d}{d\theta_0}} \right) \int_{C_1} P_{\nu-1/2}(-\cos\beta_0) \cdot$$

$$\frac{I_v(sr) v dv}{(v^2 - 1/4) \cos v\pi},$$

где $\cos \beta_0$ определяется (1.41).

Замыкая контур C_1 в правой полуплоскости, вычислим интеграл как сумму вычетов в полюсах $v_n = n + 1/2$, $n = 1, 2, 3, \dots$. В свою очередь ряды вычетов суммируются с использованием формулы [31]:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{(n+1/2)}{n(n+1)} P_n^1(\cos \beta) J_{n+1/2}(kr) &= \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi k r \sin \beta}} (\cos kr - i \sin kr \cdot \cos \beta - e^{-ikr \cos \beta}). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Окончательные выражения для потенциалов Дебая падающей и зеркально отраженной плоских волн имеют вид

$$\begin{aligned} U_0(r, \theta, \varphi) &= - \left(\frac{-E_0 \frac{d\beta_0}{d\theta_0}}{H_0 \frac{d\beta}{d\varphi_0} \sin \theta_0} \right) \cdot \\ &\cdot \frac{(\cos kr - i \sin kr \cdot \cos \beta_0 - e^{-ikr \cos \beta_0})}{k^2 r \sin \beta_0}, \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} V_0(r, \theta, \varphi) &= - \frac{1}{\omega} \left(\frac{\frac{E_0}{\sin \theta_0} \frac{d\beta_0}{d\varphi_0}}{H_0 \frac{d\beta_0}{d\theta_0}} \right) \cdot \\ &\cdot \frac{(\cos kr - i \sin kr \cdot \cos \beta_0 - e^{-ikr \cos \beta_0})}{k^2 r \sin \beta_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U^0(r, \theta, \varphi) &= \left(\frac{-E_0 \frac{d\beta}{d\theta_0}}{H_0 \frac{d\beta}{d\varphi_0} \sin \theta_0} \right) \cdot \\ &\cdot \frac{(\cos kr - i \sin kr \cdot \cos \beta - e^{-ikr \cos \beta})}{k^2 r \sin \beta}, \end{aligned} \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} V^0(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{\frac{E_0}{\sin \theta_0} \frac{d\beta}{d\varphi_0}}{H_0 \frac{d\beta}{d\theta_0}} \right) \cdot \\ &\cdot \frac{(\cos kr - i \sin kr \cdot \cos \beta - e^{-ikr \cos \beta})}{k^2 r \sin \beta}, \end{aligned}$$

где

$$\frac{d\beta_0}{d\theta_0} = \frac{\cos\theta\sin\theta_0 - \sin\theta\cos\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)}{\sin\beta_0}; \quad (1.62)$$

$$\frac{d\beta_0}{d\varphi_0} = - \frac{\sin\theta\sin\theta_0\sin(\varphi - \varphi_0)}{\sin\beta_0};$$

$$\frac{d\beta}{d\theta_0} = - \frac{\cos\theta\sin\theta_0 + \sin\theta\cos\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)}{\sin\beta};$$

$$\frac{d\beta}{d\varphi_0} = - \frac{\sin\theta\sin\theta_0\sin(\varphi - \varphi_0)}{\sin\beta}.$$

Из сравнения (1.41) и (1.57) следует, что $\cos\beta_0$ переходит в $\cos\beta$ после замены угла падения θ_0 плоской волны на угол зеркального отражения $(\pi - \theta_0)$. Эти углы и ориентация направлений распространения плоских волн относительно координатных осей схематично изображены на рис. 1.5. Выражения (1.60) и (1.61) более наглядны в плоскости падения $\varphi = \varphi_0$:

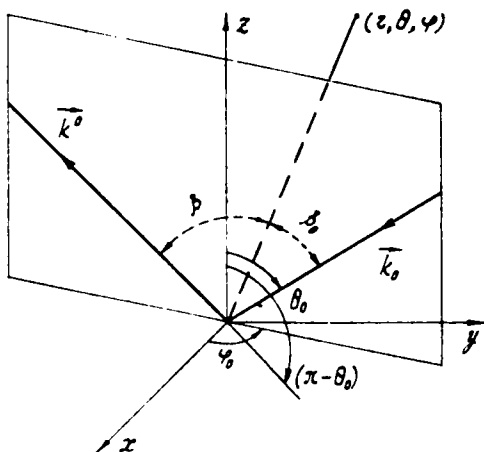


Рис. 1.5. Ориентация векторов падающей и зеркально отраженной плоских волн

$$\left. \begin{aligned} U_0(r, \varphi, \theta) &= E_0 \\ V_0(r, \varphi, \theta) &= - \frac{1}{w} H_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{[\cos kr - i \sin kr \cos(\theta - \theta_0) - e^{-ikr \cos(\theta - \theta_0)}]}{k^2 r \sin(\theta - \theta_0)}, \\
& U^0(r, \varphi_0, \theta) = E_0 \\
& V^0(r, \varphi_0, \theta) = -\frac{1}{w} H_0 \cdot \\
& \cdot \frac{[\cos kr + i \sin kr \cos(\theta + \theta_0) - e^{ikr \cos(\theta + \theta_0)}]}{k^2 r \sin(\theta + \theta_0)}.
\end{aligned}$$

В направлениях $\theta = \theta_0$ для падающей плоской волны и $\theta = \pi - \theta_0$ для зеркально отраженной волны, как следует из (1.63), потенциалы Дебая равны нулю. Они также обращаются в нуль при $kr \rightarrow 0$, что видно из (1.60) и (1.61) после раскрытия там неопределенности.

Вторичное поле после выделения из него зеркально отраженной плоской волны назовем дифракционным. Описывающие дифракционное поле потенциалы Дебая определяются выражениями

$$\begin{aligned}
U^g(r, \theta, \varphi) &= \frac{i}{\sqrt{2\pi s^3 r}} \left(\frac{-E_0}{H_0} \frac{d}{d\theta_0} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot \\
&\cdot \int_{C_1} \Gamma(1/2 + m + \nu) \Gamma(1/2 + m - \nu) P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos \theta_0) \cdot \\
&\cdot P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos \theta) \cdot \frac{P_{\nu}^{-m}(\gamma_2)}{P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos \gamma_2)} \cdot \frac{I_{\nu}(sr) \nu d\nu}{(\nu^2 - 1/4)}, \quad (1.64) \\
V^g(r, \theta, \varphi) &= \frac{i}{w \sqrt{2\pi s^3 r}} \left(\frac{E_0}{H_0} \frac{d}{d\theta_0} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot \\
&\cdot \int_{C_1} \Gamma(1/2 + m + \nu) \Gamma(1/2 + m - \nu) P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos \theta_0) \cdot \\
&\cdot P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos \theta) \cdot \frac{\frac{d}{d\gamma_2} P_{\nu}^{-m}(\gamma_2)}{\frac{d}{d\gamma_2} P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos \gamma_2)} \cdot \frac{I_{\nu}(sr) \nu d\nu}{(\nu^2 - 1/4)},
\end{aligned}$$

где

$$P_{\nu}^{-m}(\gamma_2) = P_{\nu-1/2}^{-m}(-\cos \gamma_2) - P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos \gamma_2). \quad (1.65)$$

Подынтегральные функции в (1.64) в правой полуплоскости имеют исследованные в разд. 1.2 бесконечные

системы простых действительных полюсов $v_{mn}^m(\gamma_2)$. Имеющиеся за счет $\Gamma(1/2 + m - v)$ полюсы не дают вклада из-за компенсации их нулями функции $P_v^{-m}(\gamma_2)$. Эта функция равна нулю также и в случае плоского экрана $\gamma_2 = \pi/2$. Таким образом, выражения (1.64) действительно описывают дифракционное поле изотропного идеально проводящего конуса, которое для плоского экрана обращается в нуль. В последнем случае, как и должно быть, остается зеркально отраженная волна, описываемая (1.61).

Если облучение идеально проводящего конуса осуществляется плоской волной, распространяющейся вдоль его оси симметрии ($\theta_0 = 0$), то выражения (1.53) и (1.47) для потенциалов Дебая вторичного поля совпадают с полученными А. С. Горяиновым [24]. Для потенциалов дифракционного поля из (1.64) имеем

$$\begin{aligned}
 U^g(r, \theta, \varphi) &= \frac{-i\pi}{\sqrt{2\pi s^3} r} \left[\begin{array}{l} -E_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \\ H_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \end{array} \right] \times \\
 &\times \int_{C_1} P_{v-1/2}^{-1}(\cos\theta) \cdot \frac{P_v^{-1}(\gamma_2)}{P_{v-1/2}^{-1}(\cos\gamma_2)} \cdot \frac{I_v(sr) v dv}{\cos v \pi}, \quad (1.66) \\
 V^g(r, \theta, \varphi) &= \frac{-i\pi}{\omega \sqrt{2\pi s^3} r} \left[\begin{array}{l} E_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ H_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \end{array} \right] \times \\
 &\times \int_{C_1} P_{v-1/2}^{-1}(\cos\theta) \cdot \frac{\frac{d}{d\gamma_2} P_v^{-1}(\gamma_2)}{\frac{d}{d\gamma_2} P_{v-1/2}^{-1}(\cos\gamma_2)} \cdot \frac{I_v(sr) v dv}{\cos v \pi}.
 \end{aligned}$$

2. Коническая поверхность, образованная радиальными проводниками. Для нее решение задачи получается посредством предельного перехода $\gamma_2 \rightarrow \pi$. При этом $g_v^m(\gamma_2, \theta_0)$ стремится к нулю, а $f_2(v, \theta)/D(v)$ — к значению $-P_{v-1/2}^{-m}(-\cos\theta)/P_{v-1/2}^{-m}(-\cos\gamma_1)$. Если радиальные проводники в вершине разомкнуты, то вместо (1.45) и (1.46) можно записать

$$\begin{aligned}
 U_{1,2}(r, \theta, \varphi) &= i\sqrt{\frac{2}{\pi s^3} r} \left(\begin{array}{l} E_0 \frac{d}{d\theta_0} \\ H_0 \frac{d}{\sin\theta_0 d\varphi_0} \end{array} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot \\
 &\cdot \left\{ -i\pi g_{1/2}^m(\gamma_1, \theta_0) \left(\frac{1g\theta/2}{1g\gamma_1/2} \right)^{\pm m} I_{1/2}(sr) + \right. \\
 &\left. + \int_{C_1} \frac{g_v^m(\gamma_1, \theta_0) P_{v-1/2}^{-m}(\pm \cos\theta)}{(v^2 - 1/4) P_{v-1/2}^{-m}(\pm \cos\gamma_1)} I_v(sr) v dv \right\}. \quad (1.67)
 \end{aligned}$$

Для замкнутых в вершине проводников из (1.48) и (1.49) находим

$$U_{1,2}(r, \theta, \varphi) = i\sqrt{\frac{2}{\pi s}} r \left(\frac{-E_0 \frac{d}{d\theta_0}}{\frac{H_0}{\sin\theta_0} \frac{d}{d\varphi_0}} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot \\ \cdot \left\{ -i\pi g_{1/2}^m(\gamma_1, \theta_0) \left(\frac{\operatorname{tg}\theta/2}{\operatorname{tg}\gamma_1/2} \right)^{\pm m} I_{-1/2}(sr) + \right. \\ \left. + \int_{C_1} \frac{g_v^m(\gamma_1, \theta_0) P_{v-1/2}^{\pm m}(\pm \cos\theta)}{(v^2 - 1/4) P_{v-1/2}^{\pm m}(\pm \cos\gamma_1)} I_v(sr) v dv \right\}. \quad (1.68)$$

В (1.67) и (1.68) верхние знаки в аргументах функций Лежандра и в показателе степени у внеинтегрального члена относятся к области $\theta < \gamma_1$, нижние — к области $\theta > \gamma_1$. Контур интегрирования C_1 проходит в полосе $1/2 < \operatorname{Re} v < v_{01}^1(\gamma_1)$. Магнитный потенциал Дебая вторичного поля в обоих случаях тождественно равен нулю.

Формулы (1.67) и (1.68) отличаются друг от друга внеинтегральными членами, точнее модифицированными функциями Бесселя, которые определяют различное поведение потенциалов в вершине рассматриваемой конической поверхности. Так как входящая в (1.67) и (1.68) функция $g_v^m(\gamma_1, \theta_0)$ имеет разные представления для областей $\gamma_1 \leq \theta_0$, то оказывается, что при $\theta < \gamma_1 < \theta_0$ и $\theta_0 < \gamma_1 < \theta$, т. е. в случае, когда точки наблюдения и точки источников лежат по разные стороны от поверхности $\theta = \gamma_1$, потенциалы вторичного поля не зависят от угла γ_1 . В том случае, когда точки наблюдения и точки источников лежат по одну сторону от поверхности $\theta = \gamma_1$, зависимость от γ_1 остается.

Для определенности предположим, что $\theta_0 < \gamma_1$, а проводники в вершине конической поверхности разомкнуты. Тогда из (1.67) имеем

$$U_1(r, \theta, \varphi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi s}} r \left(\frac{-E_0 \frac{d}{d\theta_0}}{\frac{H_0}{\sin\theta_0} \frac{d}{d\varphi_0}} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot \\ \cdot \left\{ -\frac{i\pi}{m} \left(\frac{\operatorname{tg}\theta/2}{\operatorname{tg}\gamma_1/2} \right)^m \left(\frac{\operatorname{tg}\theta_0/2}{\operatorname{tg}\gamma_1/2} \right)^m I_{1/2}(sr) + \right.$$

$$+ \left\{ \Gamma(1/2 + m + \nu) \Gamma(1/2 + m - \nu) P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos\theta) \cdot \right. \\ \left. \cdot P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos\theta_0) \frac{P_{\nu-1/2}^{-m}(-\cos\gamma_1)}{P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos\gamma_1)} \cdot \frac{I_\nu(sr) \nu d\nu}{(\nu^2 - 1/4)} \right\}, \quad (1.69)$$

$$U_2(r, \theta, \varphi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi s^3 r}} \left(\frac{-E_0 \frac{d}{d\theta_0}}{H_0 \frac{d}{\sin\theta_0 d\varphi_0}} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \cdot \\ \cdot \left\{ -\frac{i\pi}{m} \left(\frac{\operatorname{tg}\theta/2}{\operatorname{tg}\theta_0/2} \right)^{-m} I_{1/2}(sr) + \int_{C_1} \Gamma(1/2 + m + \nu) \cdot \right. \\ \left. \cdot \Gamma(1/2 + m - \nu) P_{\nu-1/2}^{-m}(-\cos\theta) P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos\theta_0) \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{I_\nu(sr) \nu d\nu}{(\nu^2 - 1/4)} \right\}. \quad (1.70)$$

Сравнивая (1.69) с (1.54), замечаем, что часть выражения для $U_1(r, \theta, \varphi)$, содержащая интеграл, полностью совпадает с выражением для электрического потенциала Дебая вторичного поля при дифракции на изотропном идеально проводящем конусе. Последнее включало дифракционное поле и зеркально отраженную плоскую волну. В случае конуса, образованного радиальными проводниками, к дифракционному полю изотропного идеально проводящего конуса добавляется ТЕМ-волна, в (1.69) представленная внеинтегральным членом. В области $\theta > \gamma_1$ та часть (1.70), которая содержит интеграл, есть не что иное, как взятое с противоположным знаком выражение для потенциала Дебая поля падающей плоской волны — формула (1.37). Полное поле в этой области связано лишь с ТЕМ-волной, распространяющейся вдоль рассматриваемой конической поверхности. Все сказанное справедливо и для поверхности с замкнутыми в вершине проводниками; отличие будет лишь в зависимости ТЕМ-волны от радиальной координаты. Остановимся на этой зависимости более подробно.

При возбуждении образованной радиальными проводниками конической поверхности $\theta = \gamma_1$ сосредоточенным источником, расположенным в точке с координатами $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, на ней будет возбуждаться бегущая в обе стороны — к вершине и уходящая на бесконечность ТЕМ-волна. Эта волна является собственной волной рассматриваемой структуры, т. е. представляет собой решение однородного волнового уравнения с заданными

граничными условиями, которым она удовлетворяет отдельно от первичного поля. Бегущая к вершине волна отражается с некоторым коэффициентом, зависящим от сопротивления нагрузки, и уходит на бесконечность. В области $r < r_0$ устанавливается режим стоячих волн, описываемых функциями $I_{\pm 1/2}(sr)$. В области $r > r_0$ будет лишь бегущая ТЕМ-волна, зависящая от радиальной координаты, описываемой функциями $K_{\pm 1/2}(sr)$. Указанные функции выражаются через элементарные

$$I_{\pm 1/2}(sr) = \frac{1}{\sqrt{2\pi sr}} (e^{sr} \mp e^{-sr}),$$

$$K_{\pm 1/2}(sr) = \sqrt{\frac{\pi}{2sr}} e^{-sr}, s = -ik.$$

Если учесть выбранную временную зависимость, то e^{-sr} соответствует уходящей в направлении возрастания координаты r волне, а e^{sr} — волне, распространяющейся в обратном направлении.

При удалении источника на бесконечность и в результате предельного перехода к плоской электромагнитной волне в угловом распределении поля источника остается лишь волна, направление распространения которой характеризуется углами θ_0 и φ_0 . В интегральном представлении (1.37) плоской волны отсутствует составляющая, соответствующая ТЕМ-волне, т. е. плоская волна ТЕМ-волну в рассматриваемой структуре не возбуждает. Иначе, ТЕМ-волна не может в этом случае прийти из бесконечно удаленных точек структуры. Аналогичная ситуация имеет место, например, в клиновидной области с импедансными границами, где плоская электромагнитная волна не возбуждает на гранях собственные (поверхностные) волны, набегающие на ребро, которое является лишь источником уходящих от него поверхностных волн [58, 59].

В данном случае источником ТЕМ-волн служит вершина конической поверхности, а точнее электрическая неоднородность в центре структуры, в которой сходятся радиальные проводники, поскольку собственные числа ТЕМ-волны $v = \pm 1/2$ не зависят от угла γ_1 раскрыва конической поверхности. Поэтому от модифицированной функции Бесселя следует оставить ту ее часть, которая описывает уходящую от центра бегущую волну:

$$I_{\pm 1/2}(sr) \rightarrow \frac{\mp e^{-sr}}{\sqrt{2\pi sr}}. \quad (1.71)$$

Здесь верхний знак соответствует разомкнутым в вершине проводникам, нижний — замкнутым. Если сходящиеся в вершине радиальные проводники нагружены на сопротивление, равное волновому сопротивлению линии, ТЕМ-волна будет описываться суммой функций (1.71), которая равна нулю. Это и естественно, так как в результате согласованной нагрузки отсутствует отраженная или порожденная ею волна. С учетом сделанных замечаний выделенные из (1.69) и (1.70) потенциалы поля ТЕМ-волны записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 U_1^I(r, \theta, \varphi) &= \frac{\pm e^{ikr}}{2k^2 r \sin \theta_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left\{ \begin{array}{l} -E_0 \cos m(\varphi - \varphi_0) \\ H_0 \sin m(\varphi - \varphi_0) \end{array} \right\} \cdot \\
 &\cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \gamma_1 / 2} \right)^m \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_0 / 2}{\operatorname{tg} \gamma_1 / 2} \right)^m, \\
 U_2^I(r, \theta, \varphi) &= \frac{\pm e^{ikr}}{2k^2 r \sin \theta_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left\{ \begin{array}{l} -E_0 \cos m(\varphi - \varphi_0) \\ H_0 \sin m(\varphi - \varphi_0) \end{array} \right\} \cdot \\
 &\cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_0 / 2}{\operatorname{tg} \theta / 2} \right)^m,
 \end{aligned} \quad (1.72)$$

где верхние знаки относятся к разомкнутым в вершине проводникам, нижние — к замкнутым. Они характеризуют коэффициент отражения по напряжению в разомкнутой или замкнутой на конце линиях. Верхняя строка в фигурных скобках относится к E -поляризации падающей волны, нижняя — к H -поляризации.

Так как отношения входящих в (1.72) тангенсов всегда меньше единицы, ряды можно просуммировать с использованием формул

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m t^m \cos m\psi &= \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos \psi + t^2}, \\
 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m t^m \sin m\psi &= \frac{2t \sin \psi}{1 - 2t \cos \psi + t^2}, \quad |t| < 1,
 \end{aligned} \quad (1.73)$$

полученных на основе [60, ф. 5.4.9.3]. Результат очевиден. Суммирование рядов для $U_2^I(r, \theta, \varphi)$ возможно также с использованием теоремы сложения для функций Лежандра, что дает

$$U_2^T(r, \theta, \varphi) = \frac{\pm e^{ikr}}{2k^2 r \operatorname{tg} \beta_0 / 2} \left(\frac{-E_0 \frac{d\beta_0}{d\theta_0}}{H_0 \frac{d\beta_0}{\sin \theta_0 d\varphi_0}} \right). \quad (1.74)$$

Однако из-за сложного вида $\operatorname{tg} \beta_0 / 2$ такое представление неудобно для нахождения компонент напряженностей поля.

Потенциалы Дебая полного поля $U_{1,2}^{\Sigma}(r, \theta, \varphi)$, описывающие волновые явления, происходящие при дифракции плоских электромагнитных волн на конической поверхности, образованной радиальными проводниками, можно представить в виде

$$U_1^{\Sigma} = U_0 + U^0 + U^g + U_1^T, \quad V_1^{\Sigma} = V_0, \\ U_2^{\Sigma} = U_2^T, \quad V_2^{\Sigma} = V_0, \quad (1.75)$$

где U_0 и V_0 — потенциалы поля падающей плоской волны; U^0 — потенциал поля зеркально отраженной плоской волны; U^g — потенциал дифракционного поля конической поверхности; $U_{1,2}^T$ — потенциал поля ТЕМ-волны. Они определяются соответственно выражениями (1.60), (1.61), (1.64) и (1.72). Из (1.75) следует, что коническая поверхность из радиальных проводников не оказывает никакого влияния на ту часть поля плоской волны, которая описывается магнитным потенциалом Дебая $V_0(r, \theta, \varphi)$. Та часть поля плоской волны, которая описывается электрическим потенциалом Дебая, за исключением поля ТЕМ-волны, ведет себя, как и при дифракции на сплошном коническом экране. Прошедшее поле этой части плоской волны связано лишь с порождаемой вершиной ТЕМ-волной.

Исследуем дифракционное поле, возникающее за счет неоднородности в центре структуры, где сходятся радиальные проводники. Компоненты напряженности электрического поля имеют вид

$$E_{\theta_1}^T = \frac{\pm i e^{ikr}}{kr \sin \theta \sin \theta_0} \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \left\{ \begin{array}{l} -E_0 \cos m(\varphi - \varphi_0) \\ H_0 \sin m(\varphi - \varphi_0) \end{array} \right\} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \gamma_1 / 2} \right)^m \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_0 / 2}{\operatorname{tg} \gamma_1 / 2} \right)^m,$$

$$\begin{aligned}
E_{q_1}^I &= \frac{\pm i e^{i k r}}{k r \sin \theta \sin \theta_0} \sum_{m=1}^{\infty} m \left\{ \frac{E_0 \sin m(\varphi - \varphi_0)}{H_0 \cos m(\varphi - \varphi_0)} \right\} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \gamma_1 / 2} \right)^m \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_0 / 2}{\operatorname{tg} \gamma_1 / 2} \right)^m, \\
E_{q_2}^I &= \frac{\pm i e^{i k r}}{k r \sin \theta \sin \theta_0} \sum_{m=1}^{\infty} m \left\{ \frac{-E_0 \cos m(\varphi - \varphi_0)}{H_0 \sin m(\varphi - \varphi_0)} \right\} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \theta_0 / 2} \right)^m, \\
E_{q_2}^I &= \frac{\pm i e^{i k r}}{k r \sin \theta \sin \theta_0} \sum_{m=1}^{\infty} m \left\{ \frac{E_0 \sin m(\varphi - \varphi_0)}{H_0 \cos m(\varphi - \varphi_0)} \right\} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_0 / 2}{\operatorname{tg} \theta / 2} \right)^m.
\end{aligned} \tag{1.76}$$

Ряды просуммируем с использованием формул

$$\sum_{m=1}^{\infty} m t^m \cos m \psi = t \frac{(1 + t^2) \cos \psi - 2t}{(1 - 2t \cos \psi + t^2)^2} = f(\psi, t), \tag{1.77}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m t^m \sin m \psi = t \frac{(1 - t^2) \sin \psi}{(1 - 2t \cos \psi + t^2)^2} = g(\psi, t),$$

полученных на основе [60, ф. 5.4.9.3]. Результат для разных поляризаций имеет вид

$$\begin{aligned}
E_{\theta_{1,2}}^I &= \frac{\mp i E_0 e^{i k r}}{k r \sin \theta \sin \theta_0} f(\varphi, t_{1,2}), \\
E_{q_{1,2}}^I &= \frac{\pm i E_0 e^{i k r}}{k r \sin \theta \sin \theta_0} g(\varphi, t_{1,2}),
\end{aligned} \tag{1.78}$$

$$E_{\theta_{1,2}}^I = \frac{\pm i H_0 e^{i k r}}{k r \sin \theta \sin \theta_0} g(\varphi, t_{1,2}), \quad E_{q_{1,2}}^I = \frac{\pm i H_0 e^{i k r}}{k r \sin \theta \sin \theta_0} f(\varphi, t_{1,2}),$$

где для простоты считается $\varphi_0 = 0$, а

$$t_1 = \frac{\operatorname{tg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \gamma_1 / 2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \theta_0 / 2}{\operatorname{tg} \gamma_1 / 2}, \quad t_2 = \frac{\operatorname{tg} \theta_0 / 2}{\operatorname{tg} \theta / 2}. \tag{1.79}$$

Поляризационная характеристика определяется выражением

$$\frac{E_{q_{1,2}}^I}{E_{\theta_{1,2}}^I} = - \Pi^e = 1/\Pi^h = \frac{(1 - t_{1,2}^2) \sin \varphi}{(1 + t_{1,2}^2) \cos \varphi - 2t_{1,2}}, \tag{1.80}$$

из которого следует, что поляризация порождаемого центром структуры поля ТЕМ-волны наклонная. При возбуждении конической поверхности из радиальных проводников кольцевой фазированной системой δ -генераторов поляризация поля ТЕМ-волны круговая левого или правого направлений вращения [31].

В случае плоскости, образованной радиальными проводниками, потенциал $U^k = 0$, а распределение поля ТЕМ-волны симметрично относительно самой плоскости. Все формулы для нее из выведенных выше получаются как частные при $\gamma_1 = \pi/2$.

Из (1.78) видно, что при изменении поляризации поля падающей плоской волны с электрической на магнитную компонента E_0 напряженности электрического поля ТЕМ-волны переходит в E_y и наоборот. При нормальном облучении ($\theta_0 = 0$) как в плоскости падения, так и в ортогональной ей плоскости в дальней зоне остается лишь одна из компонент напряженности электрического поля, распределение которого симметрично относительно оси симметрии структуры и имеет максимум на ее поверхности. При наклонном облучении в плоскости падения присутствует лишь одна компонента напряженности электрического поля, принимающая максимальное значение на поверхности структуры. В ортогональной плоскости распределение поля ТЕМ-волны всегда симметрично относительно оси структуры. Рассчитанные по формулам (1.78) диаграммы напряженности поля ТЕМ-волны в случае E -поляризации приведены на рис. 1.6 и 1.7.

Следует отметить, что попытки решения дифракционной задачи для конической поверхности, в частном случае, и плоскости, образованных радиальными проводниками, предпринимались и ранее [61, 62]. Однако полученное в [61] решение по своей форме справедливо для источников, расположенных на конечном расстоянии от вершины конической поверхности, поскольку не исключало распространяющуюся в направлении вершины ТЕМ-волну. В [62] были исследованы в дальней зоне лишь зеркально отраженные и прошедшие плоские волны; сферические волны, обусловленные центром плоскости, не были исследованы.

3. Остроугольные структуры. Совершив по формулам (1.52) предельные переходы в выражениях (1.45) — (1.47) в случае остроугольного биконического проводника, на-

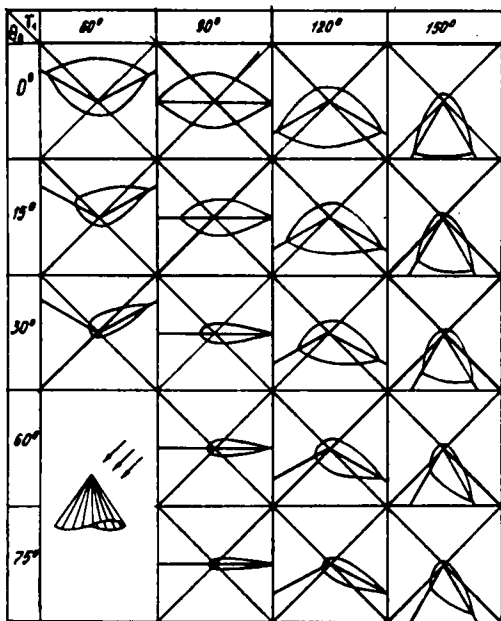


Рис. 1.6. Диаграммы напряженности поля ТЕМ-волны в плоскости падения: E_0 — сплошная

ходим, что высшие типы гармоник ($m=1, 2, 3, \dots$) имеют стоящие перед интегралами амплитудные множители $(\gamma_1/2)^{2m}_{\gamma_1 \rightarrow 0}$ и $(\frac{\pi - \gamma_2}{2})^{2m}_{\gamma_2 \rightarrow \pi}$. Нулевая гармоника электриче-

ского потенциала Дебая вторичного поля в области $\gamma_1 < \theta < \gamma_2$ оказывается преобладающей и определяется выражением

$$U_2(r, \theta) = i\sqrt{\frac{\pi}{2s^3r}} \left(\frac{-E_0 \frac{d}{d\theta_0}}{H_0 \frac{d}{\sin\theta_0 d\varphi_0}} \right) \int_{C_1} \{ [P_{\nu-1/2}(-\cos\theta_0) \cdot P_{\nu-1/2}(\cos\theta) + P_{\nu-1/2}(\cos\theta_0) P_{\nu-1/2}(-\cos\theta)] +$$

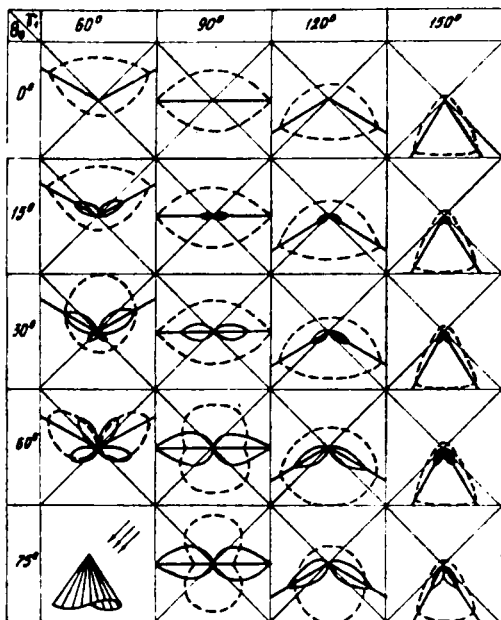


Рис. 1.7. Диаграммы напряженности поля ТЕМ-волны в плоскости, ортогональной плоскости падения: E_0 — сплошная; E_v — пунктирная

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{\pi} \cos v \pi [P_{v-1/2}(\cos \theta_0) P_{v-1/2}(\cos \theta) \ln \frac{\gamma_1}{2} + \\
 & + P_{v-1/2}(-\cos \theta_0) P_{v-1/2}(-\cos \theta) \ln \frac{\pi - \gamma_1}{2}] \cdot \\
 & \cdot \frac{I_v(sr) v dv}{(v^2 - 1/4) \cos v \pi D_0(v)}, \quad (1.81)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_0(v) \simeq 1 - \left(\frac{2}{\pi} \cos v \pi \right)^2 \left[\ln \frac{\gamma_1}{2} + 0,577 + \right. \\
 \left. + \psi(v + 1/2) - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} v \pi \right] \cdot \left[\ln \frac{\pi - \gamma_2}{2} + 0,577 + \right. \\
 \left. + \psi(v + 1/2) - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} v \pi \right]. \quad (1.82)
 \end{aligned}$$

Видно, что $U_2(r, 0) \neq 0$ только в случае E -поляризации падающей плоской волны.

Нулевая гармоника магнитного потенциала Дебая вторичного поля имеет вид

$$V_2(r, 0) \simeq \frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi s^3}r} \left(\frac{\pi - \gamma_2}{2}\right)^2 \left(\frac{E_0}{H_0} \frac{d}{d\theta_0}\right) \cdot \int_{C_1} P_{\nu-1/2}(\cos\theta_0) P_{\nu-1/2}(\cos\theta) \frac{I_\nu(sr) \nu d\nu}{(\nu^2 - 1/4)}, \quad (1.83)$$

т. е. $V_2(r, 0) \equiv 0$, так как подынтегральная функция в полуплоскости $\text{Re} \nu > 1/2$ не содержит полюсов. Высшие типы гармоник этого потенциала имеют амплитудные множители более высокого порядка малости, чем нулевая гармоника электрического потенциала. Поскольку магнитный потенциал связан с азимутальными электрическими токами, то малость его по сравнению с нулевой гармоникой электрического потенциала Дебая отражает тот факт, что азимутальные токи в тонком проводнике пренебрежимо малы по сравнению с продольными токами. В таком приближении структура, выполненная из радиальных проводников, по своим свойствам не отличается от сплошного проводника. В остроугольном ($\gamma_1 \rightarrow 0$, $\gamma_2 \rightarrow \pi$) биконическом проводнике, как следует из [31, ф. (1.24)], амплитуда напряженности поля ТЕМ-волны исчезающе мала, поэтому интегрирование в (1.81) ведется по контуру C_1 .

Подынтегральные функции в (1.81) имеют две бесконечные системы действительных полюсов: $\nu_p = 1/2 + p$, $p = 0, 1, 2, \dots$ и $\nu_{0n}(\gamma_1, \gamma_2)$. Только последняя система полюсов, являющихся нулями функции $D_0(\nu)$, дает вклад в дифракционное поле. Для симметричного ($\gamma_2 = \pi - \gamma_1$) биконического проводника можно записать асимптотические значения первых нулей этой функции:

$$\begin{aligned} \nu_{0n}^+ &\simeq 1/2 + 2(n-1) + \frac{1}{\ln 2/\gamma_1}, \\ \nu_{0n}^- &\simeq 3/2 + 2(n-1) + \frac{1}{\ln 2/\gamma_1}, \quad n = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.84)$$

которые при малых γ_1 аппроксимируют линейные части кривых (см. рис. 1.4). В более общем случае бикони-

ческой структуры с изотропными идеально проводящими границами полезной оказывается формула

$$v_{0n}^2 \simeq \frac{\pi n}{(\gamma_2 - \gamma_1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.85)$$

приведенная в [63].

В остроугольном ($\gamma_2 \rightarrow \pi$) коническом проводнике преобладающей также будет нулевая гармоника электрического потенциала Дебая, при облучении плоской волной E -поляризации имеющая вид

$$U(r, \theta) \simeq -i \sqrt{\frac{2}{\pi s^3 r}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 E_0 \int_{C_1} P_{\nu-1/2}^{-1}(\cos \theta_0) P_{\nu-1/2}(\cos \theta) \cdot \frac{I_\nu(sr) \nu d\nu}{\cos^2 \nu \pi \left(\ln \frac{\pi - \gamma_2}{2} + 0,577 + \psi(\nu + 1/2) - \frac{\pi}{2} \lg \nu \pi \right)}. \quad (1.86)$$

Для H -поляризации плоской волны $U(r, \theta) \equiv 0$. Из (1.86), асимптотических формул (1.52), а также (1.3) и (1.4) следует, что вторичное поле имеет лишь две компоненты — E_θ и H_φ , при облучении со стороны вершины убывающие как

$$E_\theta = H_\varphi = O(\theta_0), \quad \theta_0 \rightarrow 0.$$

При наклонном облучении вторичное поле в направлении оси проводника ($\theta \rightarrow 0$) исчезает по такому же закону, т. е. вторичное поле удовлетворяет принципу взаимности. Эти качественные выводы согласуются с результатами для тонких цилиндрических проводников (см., например, [64—67]). Однако из-за использования различных математических аппаратов провести аналитическое сопоставление результатов не удастся.

4. Дифракционные свойства конических структур. По аналогии с тем, как было проделано в [24], для вторичного поля при $\theta < \gamma_{1,2}$ и в области $2\gamma_{1,2} - (\theta + \theta_0) < \pi$, в которую не попадают зеркально отраженные лучи, можно получить интегральное представление, пригодное для численных расчетов в дальней зоне. С этой целью в формуле обращения интегрирование вдоль мнимой оси переведем в интегрирование по положительной вещественной полуоси. После использования при больших sr асимптотики функции Макдональда получим представление

$$F(r) \simeq \sqrt{\frac{2i}{\pi^3 k}} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^\infty F(i\tau) \operatorname{sh} \pi \tau \cdot \tau d\tau, \quad (1.87)$$

описывающее сферические волны. Последнее позволяет вместо (1.3) записать более простые выражения для компонент напряженности электрического поля:

$$E_\theta \simeq ik \left[\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\omega}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (1.88)$$

$$E_\varphi \simeq ik \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \omega \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Интеграл в (1.87) при некоторых упрощающих предположениях может быть вычислен приближенно. Рассмотрим случай осевого ($\theta_0 = 0$) облучения конических структур и будем интересоваться вторичным полем в направлении на источник ($\theta \simeq 0$). Оставив в рядах азимутальных гармоник лишь первую, для потенциалов Дебая изотропного идеально проводящего конуса из (1.53) и (1.47) получим

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{\theta e^{ikr}}{8k^2 r} \left[\begin{array}{l} -E_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \\ H_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \end{array} \right] \{ \operatorname{ctg}^2 \gamma_2 / 2 + \\ + 2 \int_0^\infty \frac{P_{\alpha-1/2}^{-1}(-\cos \gamma_2)}{P_{\alpha-1/2}^{-1}(\cos \gamma_2)} \operatorname{th} \pi \tau \cdot \tau d\tau \}, \quad (1.89)$$

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{\theta e^{ikr}}{8\omega k^2 r} \left[\begin{array}{l} E_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ H_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \end{array} \right] \{ -\operatorname{ctg}^2 \gamma_2 / 2 + \\ + 2 \int_0^\infty \frac{\frac{d}{d\gamma_2} P_{\alpha-1/2}^{-1}(-\cos \gamma_2)}{\frac{d}{d\gamma_2} P_{\alpha-1/2}^{-1}(\cos \gamma_2)} \operatorname{th} \pi \tau \cdot \tau d\tau \}.$$

В случае конической поверхности, образованной радиальными проводниками, магнитный потенциал в (1.89) будет тождественно равен нулю. Если радиальные проводники в вершине конической поверхности разомкнуты, то в фигурных скобках в выражении для электрического потенциала будет отсутствовать $\operatorname{ctg}^2 \gamma_2 / 2$. Если радиальные проводники в вершине замкнуты, то $\operatorname{ctg}^2 \gamma_2 / 2$ необходимо взять с противоположным знаком. В общем случае биконической структуры, а точнее в случае изотропного идеально проводящего конуса $\theta = \gamma_2$, прикрытого поверхностью $\theta = \gamma_1$ из радиальных проводников, магнитный

потенциал остается в том же виде, а в выражениях для электрического потенциала, соответствующего конической поверхности из радиальных проводников, необходимо γ_2 заменить на γ_1 .

Сведение интегралов в (1.89) к табличным возможно, если функции Лежандра для остроугольных конусов ($\gamma \leq \pi$) заменить по формулам (1.52), а для тупоугольных ($\gamma \geq \pi/2$) воспользоваться асимптотическим выражением

$$P_{m-1/2}^m(\cos \gamma) = \frac{\tau^{m-1/2}}{\sqrt{2\pi \sin \gamma}} e^{\tau \gamma} [1 + O(1/\pi)],$$

$\tau \gg 1$, $\tau > m$, $0 < \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$, $\tau \gg 1/\varepsilon$, которое при $\gamma \rightarrow \pi/2$ становится все более точным для любых τ . Интегралы при $\gamma \leq \pi$ вычисляются по формуле 2.4.5.10 из [60], а при $\gamma \geq \pi/2$ — с использованием формул 2.4.10.6 и 5.1.3.6 из того же источника.

Окончательно компоненты напряженности электрического поля для изотропного идеально проводящего конуса будут иметь вид

$$E_0 \simeq \frac{ie^{ikr}}{2kr} \left(\frac{\pi - \gamma_2}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} -E_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \\ H_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \end{bmatrix}, \quad (1.90)$$

$$E_\varphi \simeq \frac{ie^{ikr}}{2kr} \left(\frac{\pi - \gamma_2}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} E_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ H_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \end{bmatrix},$$

если $\gamma_2 \leq \pi$, и

$$E_0 \simeq \frac{ie^{ikr}}{2kr} (2\gamma_2 - \pi)^{-2} \begin{bmatrix} -E_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \\ H_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \end{bmatrix}, \quad (1.91)$$

$$E_\varphi \simeq \frac{ie^{ikr}}{2kr} (2\gamma_2 - \pi)^{-2} \begin{bmatrix} E_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ H_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \end{bmatrix},$$

если $\gamma_2 \geq \pi/2$, что согласуется с результатами работы [24].

Для конической поверхности из радиальных проводников амплитуда поля на оси будет в 4 раза меньше при $\gamma_2 \leq \pi$ и в 2 раза меньше при $\gamma_2 \geq \pi/2$ независимо от характера соединения проводников в вершине. Функциональная зависимость полностью совпадает с (1.90) и (1.91).

Если изотропный идеально проводящий конус прикрыт конической сеткой радиальных проводников, то в (1.90) вместо $\left(\frac{\pi - \gamma_2}{2} \right)^2$ необходимо подставить следующие множители:

$$\frac{1}{4} \left[\left(\frac{\pi - \gamma_1}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\pi - \gamma_2}{2} \right)^2 \right], \quad \gamma_1 \leq \pi, \quad \gamma_2 \leq \pi; \quad (1.92)$$

$$\frac{1}{2} \left[(2\gamma_1 - \pi)^{-2} + \left(\frac{\pi - \gamma_2}{2} \right)^2 \right], \quad \gamma_1 \geq \pi/2, \quad \gamma_2 \leq \pi;$$

$$\frac{1}{2} \left[(2\gamma_1 - \pi)^{-2} + (2\gamma_2 - \pi)^{-2} \right], \quad \gamma_1 \geq \pi/2, \quad \gamma_2 \geq \pi/2.$$

В случае остроугольных конусов наблюдается ослабление поля за счет прикрытия идеально проводящего конуса сеткой из радиальных проводников. Этот вывод согласуется с данными, приведенными в [68].

КОНЕЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Интегральные преобразования в бесконечных пределах (Фурье, Меллина, Конторовича—Лебедева) широко используются для сведения граничных задач математической физики со смешанными граничными условиями, задаваемыми на бесконечных или полубесконечных интервалах, к функциональным уравнениям с последующим их решением методом факторизации [35, 69, 70, 40]. Решение, следуя такой процедуре, задач со смешанными условиями, задаваемыми на конечном интервале изменения пространственной координаты, требует использования конечных интегральных преобразований. Однако возможности и перспективы их применения в указанном назначении, насколько нам известно, остаются невыясненными, несмотря на то, что эти преобразования находят все более широкое распространение в различных областях науки [71].

В главе 2 рассматриваются задачи электродинамики и электростатики для сферических, цилиндрических и секторных областей с включениями. Разработанный в ней подход сочетает использование конечных интегральных преобразований типа Конторовича—Лебедева и типа Меллина с методом факторизации. При этом задачи сводятся к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) фредгольмового типа, удобным в широком интервале изменения параметров задачи для численного решения на ЭВМ методом редукции, а в предельных ситуациях — для аналитического решения методом итераций.

Следует отметить, что рассмотренные задачи можно было бы в принципе решать с использованием известных численно-аналитических и прямых численных методов:

частичных областей [72--74], полуобращения [75, 76, 44], Галеркина [77, 78], коллокации [79], моментов в сочетании с процедурой предварительного построения специальной полной системы базисных функций [80]. Однако если сопоставить развиваемый подход с известными численно-аналитическими методами, то в его актив можно отнести простую структуру матричных операторов БС.1АУ, появление естественным образом в процессе формулировки БС.1АУ для ряда задач аналогов «больших параметров», по степеням которых удобно строить асимптотические разложения решений в предельных случаях, возможность эффективного исследования задачи о собственных колебаниях, основываясь на полученном решении задачи о возбуждении, быструю сходимость соответствующих матричных операторов. Целесообразность его развития вытекает также и из того, что иногда практическая реализация прямых методов наталкивается на ощутимые трудности, связанные со сложностью обоснования достоверности окончательных результатов, медленной сходимостью, в ряде случаев отсутствием сходимости приближенных решений к точному и явлениями неустойчивости соответствующих алгоритмов [76]. Отмеченное в особенности рельефно проявляется в случае включений с сингулярными граничными точками (типа заострений и ребер).

2.1. Конечные интегральные преобразования типа Конторовича—Лебедева и типа Меллина

В зависимости от конкретного содержания обсуждаемых в данной главе задач их решения могут быть получены с помощью конечных интегральных преобразований типа Конторовича—Лебедева или типа Меллина. Причем используемая версия конечного преобразования должна соответствовать системе координат, в которой решается задача, и граничному условию, заданному на ограничивающей область сферической или цилиндрической поверхности. Заметим также, что на стадии получения формальных решений граничных задач для уравнения Гельмгольца удобно положить волновое число k чисто мнимым, $k = is$, $s > 0$. Такой прием уже неоднократно использовался ранее в работах других авторов [35, 81, 82] и позволяет,

во-первых, снять ряд вопросов, связанных со сходимостью некоторых интегралов, во-вторых, непосредственно использовать полученное решение при решении в последующем нестационарных задач [81, 82]. Переход к вещественным значениям k осуществляется в окончательных выражениях путем их аналитического продолжения в s -плоскости.

Введем в рассмотрение следующие обозначения для выражений, содержащих цилиндрические или степенные функции:

$$X(v; sb, s\xi) = I_v(sb) K_v(s\xi) - K_v(sb) I_v(s\xi), \quad (2.1)$$

$$Y(v; sb, s\xi) = I'_v(sb) K_v(s\xi) - K'_v(sb) I_v(s\xi), \quad (2.2)$$

$$Z(v; sb, s\xi) = \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_v(sb)] K_v(s\xi) - \\ - \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} K_v(sb)] I_v(s\xi), \quad (2.3)$$

$$R(v; b, \xi) = \left(\frac{\xi}{b}\right)^v - \left(\frac{\xi}{b}\right)^{-v}, \quad (2.4)$$

где v — произвольный комплексный параметр; b — положительная постоянная величина; $\xi = r$ или ρ — радиальная координата соответственно сферической или цилиндрической системы координат; штрих означает дифференцирование по аргументу.

Можно показать [83], что функции (2.1) — (2.3) являются однозначными, четными, целыми трансцендентными функциями в плоскости v .

Формулы конечного интегрального преобразования типа Конторовича—Лебедева, предназначенного для решения граничных задач для уравнения Гельмгольца в сферической системе координат (в том случае, когда искомая функция $f(r)$ удовлетворяет граничному условию $\frac{\partial}{\partial r} [rf(r)]|_{r=b} = 0$ на ограничивающей область сферической поверхности), имеют вид

$$\Phi(v) = \int_0^b f(r) Z(v; sb, sr) \frac{dr}{\sqrt{r}}, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{2} [f(r+0) + f(r-0)] = \frac{1}{i\pi\sqrt{r}} \int_{-i\infty}^{i\infty} v\Phi(v) \cdot$$

$$\cdot \frac{I_v(sr)}{\frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_v(sb)]} dv. \quad (2.6)$$

Если при $r=b$ задано граничное условие $f(b)=0$, то следует использовать формулы (2.5), (2.6), в которых функции $Z(v; sb, sr)$ и $\frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_v(sb)]$ заменены соответственно на функции $X(v; sb, sr)$ и $I_v(sb)$.

Несколько иную структуру имеют формулы интегрального преобразования, ориентированного на решение граничных задач в цилиндрической системе координат. Так, если на цилиндрической поверхности $\rho=b$ или ее части задано граничное условие $f'(\rho)|_{\rho=b}=0$, то необходимо применять интегральное преобразование вида

$$\Phi(v) = \int_0^b f(\rho) Y(v; sb, s\rho) \frac{d\rho}{\rho}, \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{2} [f(\rho + 0) + f(\rho - 0)] = \frac{1}{i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} v \Phi(v) \frac{I_v(s\rho)}{I'_v(sb)} dv. \quad (2.8)$$

При граничном условии $f(b)=0$ сказанное выше сохраняет силу, если $Y(v; sb, s\rho)$ заменить на $X(v; sb, s\rho)$, а $I'_v(sb)$ — на $I_v(sb)$.

Решение граничных задач для уравнения Лапласа с граничным условием Дирихле на ограничивающей области сферической поверхности $r=b$ может быть проведено с помощью конечного интегрального преобразования типа Меллина:

$$\Phi(v) = \int_0^b f(r) R(v; b, r) \frac{dr}{\sqrt{r}}, \quad (2.9)$$

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{r}} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Phi(v) \left(\frac{b}{r}\right)^v dv. \quad (2.10)$$

Формулы (2.9), (2.10) могут быть использованы и при решении граничной задачи в цилиндрической или секторной области, если положить $r=\rho$, затем в (2.9) заменить $\sqrt{\rho}$ на ρ , а из (2.10) этот корень исключить.

Теорема 1. Пусть $f(r)$ — заданная функция, определенная в промежутке $(0, b)$ и удовлетворяющая условиям:

1) $f(r)$ — кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию в промежутке $(0, b)$;

2) $f(r)r^{-1/2}\ln r \in L(0, b)$. Тогда во всякой точке r , принадлежащей промежутку $(0, b)$, справедливо разложение (2.6).

Теорема 2. Пусть $f(r)$ — вещественная в интервале $0 < r < b$ функция, являющаяся кусочно-непрерывной и имеющая ограниченную вариацию в любом закрытом интервале $[a, d]$, $0 < a < d < b$, и такая, что для некото-

рого вещественного $\beta \geq 0$ интеграл $\int_a^b |f(r)|r^{-\beta-1/2}dr$ сходится. Тогда функция $\Phi(v)$, введенная с помощью соотношения (2.9), определена и регулярна в полосе $|\operatorname{Re} v| < \beta$ и имеет место разложение (2.10).

Впервые конечные интегральные преобразования типа Конторовича—Лебедева и типа Меллина были формально установлены в работах [84—86]. В дальнейшем было проведено строгое их обоснование [87, 88]. Теоремы 1 и 2 представляют в сущности слегка переформулированные теоремы из указанных работ. Установлены также [89, 90] интегральные преобразования, отвечающие случаю задания на сферической или цилиндрической границе области граничных условий третьего рода. Оказалось, что в этом случае разложение «произвольной» функции может содержать помимо непрерывного спектра также и дискретную часть. Вместе с тем теория обсуждаемых преобразований еще не разработана в достаточной мере. Так, для конечных интегральных преобразований типа Конторовича—Лебедева не получены аналоги равенства Парсеваля, не исследован вопрос об условиях, которые необходимо наложить на функцию $\Phi(v)$ для того, чтобы имело место разложение типа (2.6), не изучена композиционная структура этих преобразований.

2.2. Возбуждение сферического резонатора с конической вставкой

Сферические резонаторы нашли применение при измерении потенциала радиолокационных станций [91] и в особенности в качестве накопителей энергии в системах генерирования мощных СВЧ-импульсов [92, 93]. Однако

вследствие высокой степени симметрии сферической геометрии существует проблема, связанная с селекцией и неопределенностью оси поляризации типов колебаний. Поэтому было предложено [94] использовать для накопления энергии полусферический резонатор с электрически изолированным дном. В то же время не исключается возможность применения в указанном качестве открытых резонаторов [95]. Удобной не только для перестройки частоты и разрежения спектра, но и для вывода энергии может оказаться конструкция в виде бочкообразного резонатора с конической вставкой [96]. Детальное экспериментальное и теоретическое исследование такой конструкции становится весьма целесообразным ввиду выявленного в последнее время эффекта резкого увеличения добротности открытых электродинамических структур внутренними неоднородностями [97].

При теоретическом исследовании на первый план выдвигается приобретающая особое значение задача исследования резонатора-прототипа [96], т. е. в данном случае сферического резонатора с конической вставкой. Более того, если ориентироваться на возможные потребности техники миллиметровых и субмиллиметровых диапазонов волн, то интерес представляет проблема построения математической строгой модели резонатора, не требующего априорных предположений о размерах как резонатора, так и конической вставки, а также проблема развития адекватного метода решения задач о возбуждении и свободных колебаниях такого резонатора.

Перейдем к описанию математической модели сферического резонатора с конической вставкой. При этом ограничимся, как и авторы целого ряда работ [78, 79], исследовавшие влияние коаксиального включения на характеристики резонаторов иной геометрии, рассмотрением только аксиально симметричных ТМ-колебаний.

1. В сферической системе координат r, θ, φ размещен сферический идеально проводящий резонатор $r=b$ с идеально проводящей конической вставкой $\theta=\gamma$, $0 < r < a$, ($a < b$). Возбуждение резонатора осуществляется электрическим диполем, расположенным на оси симметрии структуры, в точке с координатами $r_0 \leq b$, $\theta_0 = 0$; момент диполя $\vec{p}$ ориентирован вдоль этой оси (рис. 2.1). Вследствие отмеченной симметрии возбуждаемое в резонаторе поле не зависит от координаты φ и полностью

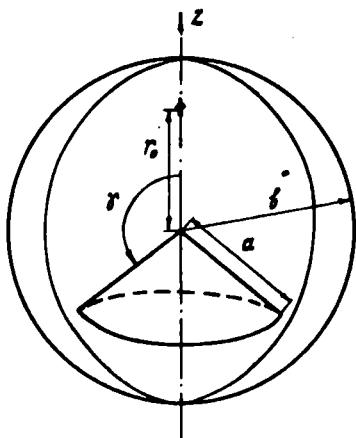


Рис. 2.1. Геометрия задачи

характеризуется электрическим потенциалом Дебая [69], который мы представим в виде суперпозиции потенциала $U_0(r, \theta)$, описывающего поле диполя в сферическом резонаторе в отсутствие конической вставки, и потенциала $U(r, \theta)$, вызванного наличием вставки.

Потенциал $U(r, \theta)$ должен:

а) быть непрерывным в области, охваченной сферой $r=b$, а также ограниченным всюду в указанной области, за исключением окрестности ребра $r=a, \theta=\gamma$ конической вставки;

б) удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}) - s^2 r U = 0 \quad (2.11)$$

и следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial(rU)}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r=b, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} [r(U_0 + U)] - s^2 r (U_0 + U) = 0 \quad (2.13)$$

при $\theta=\gamma, 0 < r < a$,

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\gamma-0} = \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\gamma+0} \quad \text{при} \quad a < r < b. \quad (2.14)$$

Кроме этого, потенциал $U(r, \theta)$ должен обеспечивать выполнение условий типа Мейкснера [1] вблизи сингулярных точек конической вставки

$$j(r) = O(r^\tau) \quad \text{при } r \rightarrow 0; \quad 0 < \tau < 1, \quad (2.15)$$

$$j(r) = O((a - r)^{1/2}) \quad \text{при } r \rightarrow a, \quad (2.16)$$

где $j(r)$ — поверхностная плотность тока на конической вставке; τ — постоянная, конкретное значение которой определяется величиной угла γ .

Что касается потенциала $U_0(r, \theta)$, то представление для него получается элементарно и записывается в виде

$$U_0 = \frac{|\bar{\rho}| w}{4\pi s r^{1/2} r_0^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\theta) [I_{n+1/2}(sr_<) \cdot K_{n+1/2}(sr_>) - \frac{I_{n+1/2}(sr_0) \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} K_{n+1/2}(sb)]}{\frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{n+1/2}(sb)]} I_{n+1/2}(sr)], \quad (2.17)$$

где $r_> = \max(r, r_0)$; $r_< = \min(r, r_0)$.

Сформулированные выше требования обеспечивают существование и единственность решения поставленной задачи.

2. Ближайшая цель состоит в получении представлений для трансформированных согласно (2.5) функций $U(r, \theta)$ и $U_0(r, \theta)$, а также основного функционального уравнения задачи. При этом оказывается удобным одновременно выразить трансформанту функции $U(r, \theta)$ через трансформанту функции $j(r)$, поскольку аналитические свойства последней в силу оценок (2.15), (2.16) можно считать известными. Применим преобразование (2.5) к уравнению (2.11), предварительно умножив обе его части на r . Общие решения

$$U(v, \theta) = \begin{cases} A(v) P_{\nu-1/2}(\cos\theta), & 0 \leq \theta < \gamma, \\ B(v) P_{\nu-1/2}(-\cos\theta), & \gamma < \theta \leq \pi, \end{cases}$$

полученного таким путем уравнения Лежандра для трансформанты $U(v, \theta)$, учитывающие требования ограниченности $U(r, \theta)$ при $\theta=0$ и π , подставим в трансформированное согласно (2.5) соотношение

$$\frac{s}{v} \left[\frac{\partial U(r, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\gamma-0} - \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\gamma+0} \right] = j(r), \quad 0 < r < a.$$

Воспользовавшись соотношением вронскиана для функций Лежандра $P_{\nu-1/2}(\cos\theta)$ и $P_{\nu-1/2}(-\cos\theta)$ [3], найдем, что $U(\nu, \theta)$ для областей $0 \leq \theta < \gamma$ и $\gamma < \theta \leq \pi$ имеет соответственно следующие представления:

$$U(\nu, \theta) = \frac{\sin\gamma}{2} \Gamma(1/2 + \nu) \Gamma(1/2 - \nu) P_{\nu-1/2}(\cos\gamma) \cdot \\ \cdot P_{\nu-1/2}(-\cos\gamma) \frac{P_{\nu-1/2}(\pm\cos\theta)}{P_{\nu-1/2}(\pm\cos\gamma)} F(\nu), \quad (2.18)$$

где комплексное переменное ν принадлежит полосе $|\operatorname{Re}\nu| < 1/2$, а функция

$$F(\nu) = \frac{\omega}{s} \int_0^a j(r) Z(\nu; sb, sr) \frac{dr}{\sqrt{r}} \quad (2.19)$$

регулярна в полосе $|\operatorname{Re}\nu| < 1/2 + \tau$.

Применим к представлению (2.17) интегральное преобразование (2.5). Производя почленное интегрирование, упрощая общий член полученного ряда с использованием соотношения вронскиана для модифицированной функции Бесселя и функции Макдональда, а затем суммируя ряд с помощью формулы Дуголла [57], получаем для трансформанты $U_0(\nu, \theta)$ функции $U_0(r, \theta)$ представление

$$U_0(\nu, \theta) = \frac{|\vec{p}| \omega}{4\pi s r_0^{1/2}} \Gamma(1/2 + \nu) \Gamma(1/2 - \nu) \cdot \\ \cdot P_{\nu-1/2}(-\cos\theta) Z(\nu; sb, sr_0), \quad |\operatorname{Re}\nu| < 1/2. \quad (2.20)$$

Примем далее во внимание, что компонента E_r электрического поля, возбуждаемого в резонаторе с конической вставкой, определяется соотношением

$$r E_r = r \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r(U_0 + U)] - s^2 r^2 (U_0 + U),$$

применим к этому соотношению преобразование (2.5) и положим $\theta = \gamma$. Тогда с учетом граничного условия (2.13) и представлений (2.18), (2.20) получим следующее функциональное уравнение для функции $F(\nu)$:

$$(\nu^2 - 1/4) L(\nu) \left[F(\nu) + \frac{|\vec{p}| \omega}{2\pi s r_0^{3/2} \sin\gamma P_{\nu-1/2}(\cos\gamma)} \cdot \right. \\ \left. \cdot Z(\nu; sb, sr_0) \right] = Q(\nu), \quad (2.21)$$

где

$$L(\nu) = \frac{\sin\gamma}{2} \Gamma(1/2 + \nu) \Gamma(1/2 - \nu) P_{\nu-1/2}(\cos\gamma) \cdot$$

$$\cdot P_{v-1/2}(-\cos\gamma), \quad (2.22)$$

$$Q(v) = \int_a^b \sqrt{r} E_r|_{\theta=\gamma} Z(v; sb, sr) dr - \quad (2.23)$$

неизвестная целая четная функция.

Нетрудно убедиться в том, что уравнение (2.21) выполняется в полосе $|\operatorname{Re} v| < 1/2 + \tau$. Поскольку функция $F(v)$ имеет не полуплоскость, а полосу $|\operatorname{Re} v| < 1/2 + \tau$ регулярности, мы получили не обычное, а так называемое обобщенное уравнение типа Винера—Хопфа [35]. Соответственно этому его решение не выражается в замкнутом виде. Однако с использованием характерных для метода Винера—Хопфа построений это уравнение может быть преобразовано в эквивалентную ему БСЛАУ второго рода, удобную для численного решения методом редукции. После нахождения решения этой системы становится возможным расчет основных электродинамических характеристик сферического резонатора с конической вставкой.

3. Нетрудно непосредственно убедиться в том, что определяемая интегралом (2.19) функция $F(v)$ допускает разложение вида

$$F(v) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{-v}(sb)] \Gamma(-v) \left(\frac{sa}{2}\right)^v F^+(v) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_v(sb)] \Gamma(v) \left(\frac{sa}{2}\right)^{-v} F^-(v) \right\}, \quad (2.24)$$

$$F^\pm(v) = \frac{\omega}{s} \Gamma(1 \pm v) \left(\frac{sa}{2}\right)^{\mp v} \int_0^a j(r) I_{\pm v}(sr) \frac{dr}{\sqrt{r}}, \quad (2.25)$$

где функции $F^\pm(v)$ регулярны соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Re} v > -\min[1, 1/2 + \tau]$ и $\operatorname{Re} v < \min[1, 1/2 + \tau]$ и, что особенно важно подчеркнуть, не имеют экспоненциального роста на бесконечности в полуплоскостях регулярности, а ведут себя алгебраически. Действительно, подставляя оценку (2.16) в (2.25), заменяя функцию $I_v(sr)$ ее асимптотикой, справедливой при $|v| \gg sr$, и вычисляя полученный интеграл, находим

$$F^\pm(v) = O(v^{-3/2}) \quad |v| \rightarrow \infty. \quad (2.26)$$

Поведение второй неизвестной функции $Q(v)$, входящей в функциональное уравнение (2.21), при $|v| \rightarrow \infty$

определяется поведением компоненты E_r в окрестности ребра конической вставки

$$E_r = O((r - a)^{-1/2}) \quad \text{при} \quad r \rightarrow a + 0.$$

Подставляя эту оценку в (2.23) и асимптотически оценивая получившийся интеграл, находим, что в полуплоскости $\text{Re} v > 0$

$$Q(v) \sim \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{-v}(sb)] \Gamma(v) \left(\frac{sa}{2}\right)^{-v} q(v), \quad q(v) \rightarrow 0$$

$$\text{при} \quad |v| \rightarrow \infty.$$

Отсюда в силу четности функции $Q(v)$ видно ее поведение и в полуплоскости $\text{Re} v < 0$.

Лемма. Функции $I_{-v}(sb)$ и $\frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{-v}(sb)]$ не имеют нулей в полуплоскости $\text{Re} v \leq 0$. Для первой функции сформулированное утверждение доказано в [98], для второй оно доказывается аналогичным образом.

Требуемый также результат факторизации функции (2.22), т. е. представление ее в виде $L(v) = L^+(v)L^-(v)$, где функции $L^+(v)$ и $L^-(v)$ регулярны и не имеют нулей и экспоненциального роста в различных, но перекрывающихся полуплоскостях плоскости v , приведен, например, в [47, 109]. Факторизация выполнена методом бесконечных произведений, при этом $L^-(v) = L^+(-v)$. Функция $L^+(v)$ вещественна при вещественных v , регулярна в полуплоскости $\text{Re} v > -1/2$, не имеет нулей при $\text{Re} v > -\min[v_1(\gamma), v_1(\pi - \gamma)]$, где $v_1(\gamma)$ и $v_1(\pi - \gamma)$ — соответственно наименьшие по величине положительные нули функций $P_{v-1/2}(\pm \cos \gamma)$. При $|v| \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$L^+(v) = O((v)^{-1/2}).$$

Считая факторизацию выполненной и принимая во внимание изложенные выше факты, подставим в функциональное уравнение (2.21) разложение (2.24) и разделим обе части уравнения на

$$(v - 1/2) \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{-v}(sb)] L^-(v) \Gamma(-v) \left(\frac{sa}{2}\right)^v. \text{ Имеем}$$

$$(v + 1/2) L^+(v) F^+(v) + H(v) + T(v) = S(v), \quad (2.27)$$

где

$$H(v) = (v + 1/2) L^+(v) \frac{\frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_v(sb)]}{\frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{-v}(sb)]} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(-v)} \left(\frac{sa}{2}\right)^{-2v} \cdot F^-(v); \quad (2.28)$$

$$T(v) = \frac{|\bar{p}| w(sa/2)^{-v} (v + 1/2) L^+(v) Z(v; sb, sr_0)}{\pi s r_0^{3/2} \sin \gamma P_{v-1/2}(\cos \gamma) \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{-v}(sb)] \Gamma(-v)}; \quad (2.29)$$

$$S(v) = \frac{2Q(v) (sa/2)^{-v}}{(v - 1/2) L^-(v) \Gamma(-v) \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{-v}(sb)]}. \quad (2.30)$$

Причем ясно, что уравнение (2.27) выполняется в полосе $-1/2 < \text{Re } v < 0$ и в этой полосе оно эквивалентно уравнению (2.21).

Далее, в соответствии с методом Винера—Хопфа необходимо представить каждую из функций (2.28), (2.29) в виде суммы двух функций, регулярных в различных, но перекрывающихся полуплоскостях. Известно [35], что разложение регулярной в полосе $c < \text{Re } v < d$ функции $f(v)$, равномерно стремящейся к нулю при $|v| \rightarrow \infty$ внутри этой полосы, может быть произведено с использованием формулы

$$f^-(v) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + \xi}^{\infty + \xi} \frac{f(\mu)}{\mu - v} d\mu, \quad c < \xi < \text{Re } v < d. \quad (2.31)$$

Подставляя в (2.31) вместо $f(\mu)$ функцию $H(\mu)$, определяемую формулой (2.28), убеждаемся в том, что подынтегральная функция удовлетворяет условиям леммы Жордана в левой полуплоскости и имеет в этой полуплоскости две системы простых полюсов, обусловленных функциями $\Gamma(v)$ и $L^+(v)$. Воспользовавшись теоремой о вычетах, найдем, что функция

$$H^+(v) = -\frac{\pi \sin \gamma}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n-1)}{(n+2v)} \frac{\frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{-n/2}(sb)]}{\frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{n/2}(sb)]} \cdot \frac{F^-(n/2) (sa/2)^n}{\Gamma^2(1 + n/2) L^+(n/2)} P_{(n-1)/2}(\cos \gamma) P_{(n-1)/2}(-\cos \gamma) \quad (2.32)$$

регулярна в полуплоскости $\text{Re} v > -1$ и стремится к нулю при $|v| \rightarrow \infty$. Аналогичными свойствами в левой полуплоскости обладает функция $H^-(v) = H(v) - H^+(v)$. При разложении функции $T(v)$ следует различать два случая: $r_0 > a$ и $r_0 < a$. В первом случае в (2.31) допустимо замыкание контура интегрирования в левой полуплоскости. После вычисления вычетов в простых полюсах подынтегральной функции получаем

$$T^+(v) = - \frac{|\rho|\omega}{\pi s r_0^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(sa/2)^{n+1/2} P_n(\cos \gamma) Z(n+1/2; sb, sr_0)}{(2n+2v+1)L^+(n+1/2) \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{n+1/2}(sb)] \Gamma(n+1/2)}, \quad (2.33)$$

$$T^-(v) = T(v) - T^+(v).$$

Функция (2.33) регулярна при $\text{Re} v > -3/2$ и стремится к нулю при $|v| \rightarrow \infty$ в этой полуплоскости.

В случае $r_0 < a$ следует воспользоваться представлением функции $T(v)$ в виде

$$T(v) = \frac{|\rho|\omega\pi}{2sr_0^{3/2}} \frac{(sa/2)^{-v}(v+1/2)P_{v+1/2}(-\cos \gamma)}{\sin 2v\pi L^-(v) \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{-v}(sb)] \Gamma(-v)} \cdot \\ \cdot \{I_{-v}(sr_0) \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_v(sb)] - I_v(sr_0) \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{-v}(sb)]\} = \\ = T_1(v) + T_2(v).$$

Нетрудно видеть, что функции $T_1(v)$ и $T_2(v)$ стремятся к нулю при $|v| \rightarrow \infty$ в левой и правой полуплоскостях соответственно. Принимая при вычислении интеграла (2.31) эти факты во внимание, окончательно получим

$$T^+(v) = \frac{|\rho|\omega}{2\pi s r_0^{3/2} \sin \gamma} \frac{(v+1/2)(sa/2)^{-v} L^+(v) I_v(sr_0) \Gamma(1+v)}{P_{v+1/2}(\cos \gamma)} - \\ - \frac{|\rho|\omega}{4sr_0^{1/2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)(sa/2)^{n+1/2} P_{n+1/2}(-\cos \gamma)}{(n+2v)L^+(n/2) \Gamma(n/2)} \cdot \\ \cdot \frac{I_{n/2}(sr_0) \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{n/2}(sb)]}{\frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{n/2}(sb)]} + \frac{|\rho|\omega}{2\pi s r_0^{3/2} \sin \gamma}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2 + \mu_n) \left(\frac{sa}{2}\right)^{-\mu_n} L^+(\mu_n) I_{\mu_n}(sr_0) \Gamma(1 + \mu_n)}{(\mu_n - \nu) \frac{\partial}{\partial \mu} P_{\mu-1/2}(\cos \gamma)|_{\mu=\mu_n}}, \quad (2.34)$$

где $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность положительных нулей функции $P_{\mu-1/2}(\cos \gamma)$.

Функция (2.34) регулярна в полуплоскости $\text{Re } \nu > -1/2$ и стремится к нулю при $|\nu| \rightarrow \infty$ в этой полуплоскости. Что касается функции $S(\nu)$, определяемой выражением (2.30), то она регулярна в левой полуплоскости и стремится к нулю при $|\nu| \rightarrow \infty$. Теперь мы имеем возможность сгруппировать в уравнении (2.27) члены с разными областями регулярности:

$$\begin{aligned} (\nu + 1/2) L^+(\nu) F^+(\nu) + H^+(\nu) + T^+(\nu) = \\ = S(\nu) - H^-(\nu) - T^-(\nu). \end{aligned}$$

Используя теорему об аналитическом продолжении [99], заключаем, что обе части последнего уравнения равны некоторой целой функции. На основании обобщенной теоремы Лиувилля [99], с учетом асимптотических свойств, входящих в уравнение функций, получим, что эта целая функция является константой, тождественно равной нулю. Следовательно, во всей плоскости комплексного переменного ν справедливо уравнение

$$(\nu + 1/2) L^+(\nu) F^+(\nu) + H^+(\nu) + T^+(\nu) = 0. \quad (2.35)$$

Это уравнение содержит уже только одну неизвестную функцию $F^+(\nu)$, а также бесконечную последовательность $\{F^+(n/2)\}_{n=2}^{\infty}$ ее частных значений, входящих в выражение для $H^+(\nu)$. Таким образом, если удастся определить элементы последовательности, то из уравнения (2.35) можно будет найти значения функций $F^{\pm}(\nu)$, а следовательно, и функции $F(\nu)$.

4. Полагая в уравнении (2.35) последовательно $\nu = p/2$, $p = 2, 3, 4, \dots$, относительно неизвестных получим БСЛАУ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (p + 1) L^+(p/2) F^+(p/2) + H^+(p/2) + T^+(p/2) = 0, \\ p = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

которая после замены

$$x_p = \frac{ikr_0^{3/2}}{|\bar{p}|w} F^+(p/2) p^{1/2} \left(\frac{a}{b}\right)^{p/2} \quad (2.36)$$

приводится к виду

$$x_p + \sum_{n=2}^{\infty} a_{pn} x_n = b_p, \quad p = 2, 3, 4, \dots, \quad (2.37)$$

$$a_{pn} = -\frac{\pi \sin \gamma}{2} \frac{(-1)^n (np)^{1/2} (n-1)}{(n+p)(p+1)} \frac{(a/b)^{p/2} (k^2 ab/4)^{n/2}}{L^+(p/2) L^+(n/2) \Gamma^2(1+n/2)} \cdot$$

$$\cdot \begin{cases} (-1)^m P_{m-1/2}(\cos \gamma) P_{m-1/2}(-\cos \gamma) & \text{при } n=2m, \\ -\frac{y'_m(kb)}{\psi'_m(kb)} [P_m(\cos \gamma)]^2 & \text{при } n=2m+1, m=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.38)$$

$$b_p = -\sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} \frac{p^{1/2} (a/b)^{p/2}}{(p+1) L^+(p/2)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (ka/2)^{n+1/2} P_n(\cos \gamma)}{(2n+p+1) \Gamma(n+1/2) L^+(n+1/2) \psi'_n(kb)} \cdot$$

$$\cdot \{\psi_n(kr_0) y'_n(kb) - y_n(kr_0) \psi'_n(kb)\}. \quad (2.39)$$

Здесь введены в рассмотрение сферические функции Бесселя и Неймана в определении Дебая

$$\psi_m(kb) = \sqrt{\frac{\pi kb}{2}} J_{m+1/2}(kb), \quad y_m(kb) = \sqrt{\frac{\pi kb}{2}} Y_{m+1/2}(kb),$$

осуществлен переход к вещественным значениям волнового числа, т. е. положено $s = -ik$, и предполагается, что $r_0 > a$; штрих означает дифференцирование по аргументу. Если $r_0 < a$, то вместо b_p в правых частях системы уравнений (2.37) должны фигурировать коэффициенты

$$\tilde{b}_p = -\frac{2ikr_0^{3/2}}{|\bar{p}|w} \frac{p^{1/2} (a/b)^{p/2}}{(p+1) L^+(p/2)} T^+(p/2) \Big|_{s=-ik}, \quad (2.40)$$

где величины $T^+(p/2)$ определяются формулой (2.34).

Непосредственно из (2.36), (2.39), (2.40) видно, что три последовательности, образованные элементами x_p , b_p , $\tilde{b}_p$, принадлежат гильбертову пространству l_2 . Следовательно, матричный оператор системы (2.37) действует из l_2 в l_2 . Имея в виду, что отношение $y'_m(kb)/\psi'_m(kb)$ при k , отличном от резонансной частоты сферического резонатора без вставки, всегда ограничено каким бы ни было m , убеждаемся в том, что составленный из элементов (2.38) двойной ряд

$$\sum_{n, p=2}^{\infty} |a_{pn}|^2$$

сходится. Последнее означает, что матричный оператор системы (2.37) вполне непрерывен [100]. Тогда для системы (2.37) справедлива альтернатива Фредгольма [100]: либо система (2.37) имеет единственное решение, либо соответствующая ей однородная система имеет нетривиальное решение. В силу единственности решения исходной граничной задачи и допустимости всех произведенных при выводе (2.37) операций в рассматриваемом случае при k , отличном от резонансной частоты сферического резонатора с конической вставкой, выполняется первая часть альтернативы Фредгольма. Из изложенного следует, что метод редукции, будучи применен для решения системы (2.37), будет сходиться по норме пространства l_2 .

5. Согласно (2.6), (2.18), (2.22) и (2.24) потенциал Дебая полного поля $U_{\Sigma}(r, \theta)$ записывается в виде

$$\begin{aligned} U_{\Sigma}(r, \theta) = & U_0(r, \theta) + \frac{1}{2\pi i \sqrt{r}} \int_{-\infty}^{\infty} v L(v) \frac{I_v(sr)}{\frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_v(sr)]} \cdot \\ & \cdot \frac{P_{v-1/2}(\pm \cos \theta)}{P_{v-1/2}(\pm \cos \gamma)} \left\{ \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_v(sb)] \Gamma(v) \left(\frac{sa}{2}\right)^{-v} F^{-}(v) + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{-v}(sb)] \Gamma(-v) \left(\frac{sa}{2}\right)^v F^{+}(v) \Big\} dv = \\ & = U_0(r, \theta) + U_1(r, \theta) + U_2(r, \theta). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Интегральное выражение для $U_2(r, \theta)$ без особого труда представляется в виде суммы вычетов в простых полюсах, расположенных в правой половине v -плоскости. Получение аналогичного представления для $U_1(r, \theta)$ в области $0 < r < a$ более сложно в силу следующих причин:

1) замыкание контура интегрирования в левой полуплоскости (где функция $F^{-}(v)$ регулярна) не представляется возможным, поскольку условия леммы Жордана не выполняются;

2) при замыкании контура в правой полуплоскости возникает вопрос о локализации там полюсов функции $F^{-}(v)$.

Однако использование вытекающего из (2.35) равенства

$$F^-(v) = \frac{H^+(-v) + T^+(-v)}{(v - 1/2)L^-(v)}$$

позволяет преодолеть эту трудность. В результате вычисления вычетов найдем, что выделяется член, компенсирующий в (2.41) слагаемое $U_0(r, \theta)$, а потенциал $U_\Sigma(r, \theta)$ имеет следующее представление:

$$\begin{aligned} U_\Sigma(r, \theta) = & -\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{I_{1/2}(sr)}{\frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{1/2}(sb)]} \left\{ \frac{|\vec{p}| \omega}{8sr_0^{3/2}} \cdot \right. \\ & \cdot [I_{1/2}(sr_0) \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{-1/2}(sb)] - I_{-1/2}(sr_0) \cdot \\ & \frac{\partial}{\partial b} \cdot [\sqrt{b} I_{1/2}(sb)]] - \frac{\sin \gamma}{2} F(1/2) \Big\} - \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \\ & \cdot \sum_{m=1}^{\infty} v_m L^+(v_m) I_{v_m}(sr) \Gamma(v_m) \left(\frac{sa}{2}\right)^{-v_m} G(v_m) \cdot \\ & \cdot \frac{P_{v_m-1/2}(\pm \cos \theta)}{(v_m - 1/2) \frac{d}{dv} P_{v-1/2}(\pm \cos \gamma) |_{v=v_m}}, \quad (2.42) \\ G(v_m) = & -\frac{\pi \sin \gamma}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n-1)}{n-2v_m} \cdot \\ & \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{-n/2}(sb)]}{\frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{n/2}(sb)]} \frac{F^+(n/2)}{\Gamma^2(1+n/2) L^+(n/2)} \cdot \\ & \cdot \left(\frac{sa}{2}\right)^n P_{(n-1)/2}(\cos \gamma) P_{(n-1)/2}(-\cos \gamma) - \frac{|\vec{p}| \omega}{\pi sr_0^{3/2}} \cdot \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(sa/2)^{n+1/2} P_n(\cos \gamma) Z(n+1/2; sb, sr_0)}{(2n-2v_m+1) L^+(n+1/2) \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{n+1/2}(sb)] \Gamma(n+1/2)}, \quad r_0 < a. \end{aligned}$$

В (2.42) в аргументах функций Лежандра берутся верхние знаки при $0 \leq \theta < \gamma$ и нижние — при $\gamma < \theta \leq \pi$. Соответственно для первой области величины v_m есть положительные нули функции $P_{v-1/2}(\cos \gamma)$, а для второй — функции $P_{v-1/2}(-\cos \gamma)$.

Принимая во внимание оценку (2.26), можно убедиться в том, что ряд (2.42) сходится абсолютно и равномерно и поэтому допускает почленное дифференцирование. Нетрудно непосредственно проверить, что найден-

ный потенциал $U_-(r, \theta)$ удовлетворяет уравнению (2.11), а также граничному условию (2.13), поскольку при $\theta = \gamma$ обращается в нуль каждый член бесконечного ряда. Вблизи вершины конуса

$$U_-(r, \theta) \sim \text{const} + O(r^{\gamma(\gamma)}) \text{ или } \text{const} + O(r^{\gamma(\pi-\gamma)}),$$

следовательно, условие (2.15) в вершине конической вставки удовлетворяется. Отметим еще, что первое слагаемое в (2.42) вообще не дает вклада в электромагнитное поле и поэтому при конкретных вычислениях может не приниматься во внимание.

В области $a < r < b$ достаточно найти представление в виде ряда для потенциала $U(r, \theta)$, поскольку соответствующее представление (2.17) для потенциала $U_0(r, \theta)$ уже получено. Вычисляя вычеты, находим

$$U(r, \theta) = \frac{\sin \gamma}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(sa/2)^{n+1/2} F^+(n+1/2)}{\Gamma(n+1/2) \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{n+1/2}(sb)]} \cdot P_n(\cos \theta) P_n(\cos \gamma) Z(n+1/2; sb, sr). \quad (2.43)$$

Ряд (2.43) сходится абсолютно и равномерно, а определяемый им потенциал $U(r, \theta)$ удовлетворяет уравнению (2.11) и граничному условию (2.12).

Далее, по условиям задачи функция $j(r)$, определяющая распределение поверхностной плотности тока на конической вставке, должна быть отличной от нуля при $0 < r < a$ и тождественно равной нулю при $a < r < b$. Функция $j(r)$ определяется скачком производной по θ потенциала $U(r, \theta)$ при $\theta \rightarrow \gamma \pm 0$ и на основании (2.41) может быть представлена интегралом

$$j(r) = \frac{s}{i\pi\omega\sqrt{r}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(sa/2)^{\nu} F^+(\nu)}{\Gamma(\nu) \frac{\partial}{\partial b} [\sqrt{b} I_{\nu}(sb)]} Z(\nu; sb, sr) d\nu. \quad (2.44)$$

Поскольку подынтегральная функция в (2.44) регулярна в правой полуплоскости и при $a < r < b$ стремится к нулю, если $|\nu| \rightarrow \infty$, мы видим, что, действительно, $j(r) \equiv 0$ на продолжении конической вставки. Интеграл (2.44) сходится, на основании оценки (2.26), вместе с интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \nu^{-3/2} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^{-\nu} + \left(\frac{ar}{b^2} \right)^{\nu} \right] d\nu.$$

Отсюда вытекает, что $j(r) = O((a-r)^{1/2})$ при $r \rightarrow a$, т. е. условие (2.16) удовлетворяется.

Таким образом, полученное решение удовлетворяет всем условиям поставленной задачи. Структурно решение представлено в виде разложения по собственным функциям полубесконечного конуса в области $0 < r < a$ и по собственным функциям сферической оболочки радиуса $r=b$ в области $a < r < b$. В этом смысле имеется сходство с решением, конструируемым с помощью метода частичных областей. Известны модификации метода частичных областей, в рамках которых учет условий на ребре производится за счет такого разложения неизвестных коэффициентов в ряд, при котором каждый член ряда, представляющего поле, в отдельности удовлетворяет условию на ребре. В полученном же решении каждый из членов разложений (2.42), (2.43) в отдельности не удовлетворяет условию на ребре $r=a$, $\theta=\gamma$ конической вставки, однако решение в целом этому условию удовлетворяет и может быть эффективно использовано при проведении численных расчетов. Для вычисления полей достаточно знать некоторый начальный отрезок последовательности $\{F^+(n/2)\}_{n=2}^{\infty}$. Искомые коэффициенты определяются путем решения быстросходящейся БСЛАУ (2.37), в общем случае методом редукции. Расчет полей производится с использованием рядов (2.42), (2.43), в которых s заменено на $-ik$, по известным соотношениям, выражающим компоненты полей через потенциал Дебая.

6. Полученное решение о возбуждении сферического резонатора с конической вставкой примечательно, в частности, тем, что оно непосредственно может быть использовано при определении собственных частот такого резонатора. Для этого необходимо в (2.37) положить $b_p=0$ и считать, что волновое число k не есть заранее заданный параметр, а подлежит определению. Как известно, однородная система уравнений имеет нетривиальное решение в том случае, когда ее определитель равен нулю. Таким образом, уравнение

$$\det \|\delta_{pn} + a_{pn}\| = 0 \quad (2.45)$$

составляет основу для определения собственных частот.

Из анализа выражения (2.38) следует, что в предельном случае $ka \ll 1$ мы можем учесть в определителе (2.45) в первом приближении только элементы, стоящие на глав-

ной диагонали. Обращение в нуль хотя бы одного из этих элементов будет приводить к равенству нулю всего определителя. Поскольку малая величина a входит в числитель выражения (2.38) для u_{pn} , то элемент может обратиться в нуль, если мала и величина $\psi'_m(kb)$, или, иными словами, при небольшом отклонении k от собственной частоты k_{mp} , $p=1, 2, 3, \dots$, резонатора без конической вставки. Таким образом, уравнение для определения собственных частот в рассматриваемом случае имеет вид

$$1 - \frac{\pi \sin \gamma}{4(m+1)} \frac{m(a/b)^{m+1/2}}{[L^+(m+1/2)]^2} \frac{y'_m(kb)}{\psi'_m(kb)} \frac{(k^2 ab/4)^{m+1/2}}{\Gamma^2(m+3/2)} \cdot [P_m(\cos \gamma)]^2 = 0.$$

При k , близком к k_{mp} , оно может быть переписано следующим образом:

$$1 - \frac{\pi \sin \gamma}{4(m+1)} \frac{m(a/b)^{m+1/2}}{[L^+(m+1/2)]^2} \frac{y'_m(k_{mp}b)}{\frac{\partial}{\partial k} \psi'_m(kb) |_{k_{mp}}} \cdot \frac{(k_{mp}^2 ab/4)^{m+1/2}}{\Gamma^2(m+3/2)} [P_m(\cos \gamma)]^2 \frac{1}{k - k_{mp}} = 0.$$

Откуда находим сдвиг собственной частоты, обусловленный конической вставкой малых электрических размеров

$$k - k_{mp} = \frac{\pi \sin \gamma}{4(m+1)} \frac{m(k_{mp}a/2)^{2m+1}}{[L^+(m+1/2)]^2} \frac{y'_m(k_{mp}b)}{\frac{\partial}{\partial k} \psi'_m(kb) |_{k_{mp}}} \cdot \frac{[P_m(\cos \gamma)]^2}{\Gamma^2(m+3/2)}. \quad (2.46)$$

Последняя формула упрощается при $\gamma = \pi/2$, т. е. когда коническая вставка разворачивается в диск

$$k - k_{mp} = \frac{m}{m+1} (k_{mp}a/2)^{2m+1} \frac{\cos^2(\pi m/2)}{\Gamma^2(m+3/2)} \frac{y'_m(k_{mp}b)}{\frac{\partial}{\partial k} \psi'_m(kb) |_{k_{mp}}} \quad (2.47)$$

Полученные формулы (2.46), (2.47) в силу принятых при их выводе предположений не описывают целый ряд физических эффектов. Так, например, они никак не отражают наличие резонансов, которые должны иметь место, исходя из физических соображений, вблизи частот, соответствующих собственным колебаниям самой конической вставки. Выявление резонансов этого типа и исследование характеристик резонатора при произвольных геомет-

рических параметрах требуют привлечения ЭВМ для проведения численных расчетов. Не приводя результатов конкретных расчетов, остановимся на характеристике ключевых моментов, заложенных в вычислительную схему.

Наиболее трудоемким при расчетах оказывается нахождение большого числа нулей функции (2.22), требуемых при вычислении функции факторизации $L^+(v)$. Достаточно эффективной и обеспечивающей высокую точность определения нулей оказывается программа [47], сочетающая поиск первых нескольких десятков нулей по алгоритму работы [101], а вычисление последующих — с использованием асимптотических формул из [54]. Недостаток этой программы связан с несколько медленной работой при нахождении первой группы нулей. Гораздо большим быстродействием обладает алгоритм, использующий имеющиеся в настоящее время подробные табличные данные [102] для начальных десяти нулей. При вычислении самой функции $L^+(v)$ целесообразно применять прием, аналогичный в идейном отношении методу Куммера ускорения сходимости рядов.

Вычисление сферических функций Бесселя, полиномов Лежандра и функций Лежандра удобно проводить по алгоритмам, описанным в [101, 103, 104], а решение уравнения (2.45) — на основе алгоритма Брента [105] с постепенным наращиванием величины a до заданного значения и вычислением начальных значений, соответствующих равенству нулю длины образующей a конической вставки, по формуле из работы [106].

2.3. Электростатические поля в заземленной сферической оболочке с проводящим коническим включением

Эффективность развитого в предыдущем параграфе подхода более емко можно продемонстрировать на примере решения электростатической задачи [110]. Помимо самостоятельного значения решение этой задачи может рассматриваться как необходимый этап, если при решении динамической задачи основываться на идеях известного своей эффективностью метода полуобращения [75, 76, 44], т. к. этот метод связан с выделением в опе-

раторе исходной граничной задачи его статической (сингулярной) части, в качестве которой может быть выбран оператор соответствующей электростатической задачи, и нахождением способа ее обращения.

При определении электростатических полей, производимых заряженными включениями внутри заземленной сферической оболочки, обычно используют метод парных уравнений. Так, например, в [107] рассмотрены включения в виде сферического сегмента или диска. При использовании метода такие важные характеристики, как суммарная плотность заряда на сегменте (диске) и емкость структуры, выражаются через вспомогательную функцию, удовлетворяющую интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Задача о коническом включении в принципе может быть решена методом парных уравнений с привлечением разрывных интегралов несколько более общего вида, чем использованные в [108]. Однако в этом случае приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма вследствие сложного вида его ядра сопряжено с большими трудностями и неэффективно при произвольных длине образующей конического включения и угле при его вершине.

1. Пусть в сферической системе координат r, θ, φ размещена заземленная сферическая оболочка радиуса $r=b$, внутри которой в точке с координатами r_0, θ_0, φ_0 расположен точечный заряд q . Коническое включение $\theta=\gamma, 0 < r < a, (a < b), \varphi \in (0, 2\pi)$, поддерживаемое при постоянном потенциале V , возмущает поле, вызываемое зарядом при отсутствии включения (рис. 2.2.). Поэтому потенциал полного электростатического поля $U_\Sigma(r, \theta, \varphi)$ можно представить в виде суперпозиции потенциа-

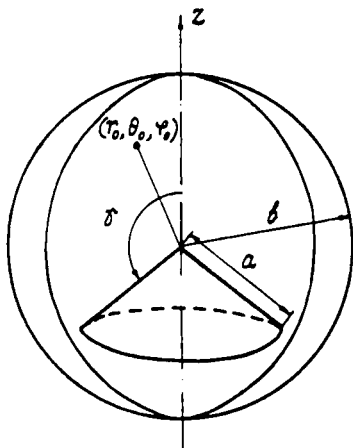


Рис. 2.2 Геометрия задачи

ла $U_0(r, \theta, \varphi)$, описывающего поле при отсутствии включения, и потенциала $U(r, \theta, \varphi)$, вызванного включением.

Постановка граничной задачи сводится к следующему: требуется найти гармоническую в области, ограниченной сферической оболочкой, функцию

$$\Delta U(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (2.48)$$

обращающуюся в нуль при $r=b$, удовлетворяющую на поверхности конуса граничному условию

$$U_0(r, \gamma, \varphi) + U(r, \gamma, \varphi) = V, \quad r < a, \quad \varphi \in (0, 2\pi) \quad (2.49)$$

и условию непрерывности нормальной производной на продолжении конической поверхности

$$\left. \frac{\partial U(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\gamma-0} - \left. \frac{\partial U(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\gamma+0} = 0, \\ a < r < b, \quad \varphi \in (0, 2\pi).$$

Кроме того, искомое решение должно обеспечивать выполнение условий типа Мейкснера [70] вблизи сингулярных точек включения:

$$\sigma(r, \varphi) = O(r^{-1}) \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0, \quad 0 < \tau < 1, \quad (2.50)$$

$$\sigma(r, \varphi) = O((a-r)^{-1/2}) \quad \text{при} \quad r \rightarrow a, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad (2.51)$$

где $\sigma(r, \varphi)$ — суммарная плотность заряда на конусе, определяемая соотношением

$$r\sigma(r, \varphi) = \varepsilon \left[\left. \frac{\partial U(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\gamma-0} - \left. \frac{\partial U(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\gamma+0} \right], \\ 0 < r < a, \quad \varphi \in (0, 2\pi); \quad (2.52)$$

ε — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей сферическую оболочку.

Отметим также, что представление для потенциала $U_0(r, \theta, \varphi)$ получается элементарно и имеет вид

$$U_0(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{r_{>}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^n - \frac{1}{b} \left(\frac{r_0 r}{b^2} \right)^n \right] P_n(\cos\beta_0),$$

где $\cos\beta_0 = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$.

Учтем симметрию задачи относительно плоскости $\varphi = \varphi_0$ и подставим в (2.48), (2.52) разложения в ряды Фурье:

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(r, \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0),$$

$$\sigma(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m(r) \cos m(\varphi - \varphi_0).$$

Воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций в интервале $[0, 2\pi]$, получим уравнение, которому удовлетворяют коэффициенты Фурье $U_m(r, \theta)$, и соотношение для коэффициентов Фурье $\sigma_m(r)$, к которым применим преобразование (2.9). Следуя далее методике, изложенной в 2.2, для подлежащей определению функции $F_m(v)$ получим справедливое в полосе $|\text{Re} v| < 1/2$ функциональное уравнение

$$\begin{aligned} L_m(v) \left\{ F_m(v) + \frac{\varepsilon_m q}{2\pi \sqrt{r_0} \sin \gamma} R(v; b, r) \frac{P_{v-1/2}^{-m}(\pm \cos \theta_0)}{P_{v-1/2}^{-m}(\pm \cos \gamma)} \right\} = \\ = \delta_{0m} \varepsilon V \left[\frac{a^{v+1/2} b^{-v}}{v+1/2} + \frac{a^{-v+1/2} b^v}{v-1/2} \right] + Q_m(v), \end{aligned} \quad (2.53)$$

где

$$F_m(v) = \int_0^a \sqrt{r} \sigma_m(r) R(v; b, r) dr; \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} L_m(v) = \frac{\sin \gamma}{2} \Gamma(1/2 + m + v) \Gamma(1/2 + m - v) \cdot \\ \cdot P_{v-1/2}^{-m}(\cos \gamma) P_{v-1/2}^{-m}(-\cos \gamma); \end{aligned} \quad (2.55)$$

$Q_m(v)$ — неизвестная целая нечетная функция, имеющая в полуплоскости $\text{Re} v < 0$ асимптотику вида $Q_m(v) \sim \sim a^{v+1/2} b^{-v} q_m(v)$, $q_m(v) \rightarrow 0$ при $|v| \rightarrow \infty$; здесь и далее при $\theta_0 < \gamma$ выбираются верхние знаки, а при $\theta_0 > \gamma$ — нижние.

Свойства функций, входящих в уравнение (2.53), аналогичны свойствам функций из уравнения (2.21), т. е. мы вновь пришли к обобщенному функциональному уравнению типа Винера-Хопфа.

2. Учтем, что функция $F_m(v)$, определяемая выражением (2.54), допускает представление

$$\begin{aligned} F_m(v) = b^{-v} a^{v+1/2} F_m^+(v) - b^v a^{-v+1/2} F_m^-(v), \\ F_m^+(v) = \int_0^a \sigma_m(r) \left(\frac{r}{a} \right)^{v+1/2} dr, \quad F_m^-(v) = F_m^+(-v), \end{aligned}$$

а функция (2.55) факторизована в [109]. Тогда построения, аналогичные произведенным в 2.2, приводят к спра-

ведливому во всей v -плоскости функциональному уравнению, содержащему только одну неизвестную функцию $F_m^+(v)$:

$$F_m^+(v) L_m^+(v) - H_m^+(v) = T_m^+(v) + \delta_{0m} \frac{eV}{(v + 1/2) L_0^+(1/2)},$$

(2.56)

$$\begin{aligned} H_m^+(v) &= \frac{\sin \gamma}{2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(a/b)^{2n+1}}{(n + 1/2 + v) L_m^+(n + 1/2)} \times \\ &\times \frac{(n-m)!}{(n+m)!} F_m^+(n + 1/2) [P_n^m(\cos \gamma)]^2; \\ T_m^+(v) &= -\frac{e_m q}{4\pi} \sum_{n=m}^{\infty} \left[\frac{1}{r_0} \left(\frac{a}{r_0} \right)^n - \frac{1}{b} \left(\frac{r_0 a}{b^2} \right)^n \right] \times \\ &\times \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{P_n^m(\cos \theta_0) P_n^m(\cos \gamma)}{(1/2 + n + v) L_m^+(n + 1/2)}, \quad r_0 \geq a; \\ T_m^+(v) &= -\frac{e_m q}{2\pi a \sin \gamma} L_m^+(v) \left(\frac{r_0}{a} \right)^{v-1/2} \frac{P_{v-1/2}^m(\pm \cos \theta_0)}{P_{v-1/2}^m(\pm \cos \gamma)} + \\ &+ \frac{e_m q}{2\pi a \sin \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{a} \right)^{v_{nm}} \frac{L_m^+(v_{nm} + 1/2)}{(v - v_{nm} - 1/2)} \frac{P_{v_{nm}}^m(\pm \cos \theta_0)}{\frac{\partial}{\partial v} P_v^m(\pm \cos \gamma)|_{v=v_{nm}}} + \\ &+ \frac{e_m q}{4\pi b} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{r_0 a}{b^2} \right)^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{P_n^m(\cos \theta_0) P_n^m(\cos \gamma)}{(1/2 + n + v) L_m^+(n + 1/2)}, \quad r_0 < a. \end{aligned}$$

Здесь v_{nm} равно $\alpha_n^m(\gamma) - 1/2$ или $\alpha_n^m(\pi - \gamma) - 1/2$ в зависимости от того, расположен заряд в области $\theta < \gamma$ или $\theta > \gamma$, причем $\alpha_n^m(\gamma)$ и $\alpha_n^m(\pi - \gamma)$ являются нулями по индексу функций $P_{v-1/2}^m(\cos \gamma)$ и $P_{v-1/2}^m(-\cos \gamma)$ соответственно.

Полагая в уравнении (2.56) последовательно $v = p + 1/2$, $p = m, m+1, \dots$, и производя замену

$$x_{pm} = \left(\frac{a}{b} \right)^{p+1/2} F_m^+(p + 1/2),$$

приходим к нормальной БСЛАУ относительно x_{pm} :

$$x_{pm} + \sum_{n=m}^{\infty} a_{pn} x_{nm} = b_{pm}, \quad (2.57)$$

где

$$a_{pm} = - \frac{\sin \gamma}{2} \frac{(a/b)^{n+p+1}}{(n+p+1) L_m^+(n+1/2) L_m^+(p+1/2)} \times \\ \times \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [P_n^m(\cos \gamma)]^2; \\ b_{pm} = \delta_{0m} \frac{r V (a/b)^{n+1/2}}{(p+1) L_m^+(1/2) L_m^+(p+1/2)} + \\ + \frac{(a/b)^{n+1/2}}{L_m^+(p+1/2)} T_m^+(p+1/2).$$

Система (2.57) допускает применение метода редукции при нахождении ее единственного нетривиального решения. Кроме того, при $\gamma = \pi/2$ (в этом случае функция $L_m^+(v)$ выражается через отношение гамма-функций) можно строго показать, что норма матричного оператора системы меньше единицы при любом соотношении величин a и b . Следовательно, в этом случае система (2.57) может решаться и методом итераций. Последний вывод справедлив, по-видимому, и для произвольных γ , т. к. функция $L_m^+(v)$ весьма слабо зависит от γ . Однако его строгое обоснование при $\gamma \neq \pi/2$ затруднено ввиду сложного представления функции $L_m^+(v)$ через бесконечные произведения [109].

Искомая функция $U(r, \theta, \varphi)$ может быть представлена бесконечными рядами, содержащими коэффициенты $F_m^+(n+1/2)$, $n = m, m+1, \dots$, определяемые из решения системы (2.57). Эти ряды имеют различную структуру в областях $a < r < b$ и $0 < r < a$. В области $a < r < b$ функция $U(r, \theta, \varphi)$ представима выражением

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{\sin \gamma}{2\epsilon} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m(\varphi - \varphi_0) \times \\ \times \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} - \frac{a}{b} \left(\frac{ar}{b^2} \right)^n \right] \times \\ \times F_m^+(n+1/2) P_n^m(\cos \gamma) P_n^m(\cos \theta). \quad (2.58)$$

Что касается области $0 < r < a$, то для нее более компактно записывается выражение для потенциала полного поля

$$U_{\Sigma}(r, \theta, \varphi) = V \left[1 + \frac{1}{L_0^+(1/2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^{n+1} \frac{L_0^+(v_{n0} + 1/2)}{v_{n0}} \right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{P_{v_m}(\pm \cos \theta)}{\frac{\partial}{\partial v} P_v(\pm \cos \gamma)|_{v=v_m}} \Big] - \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m(\varphi - \varphi_0) \times \\
& \times \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{v_{sm}} L_m^+(v_{sm} + 1/2) \frac{P_{v_{sm}}''(\pm \cos \theta)}{\frac{\partial}{\partial v} P_v''(\pm \cos \gamma)|_{v=v_{sm}}} \times \\
& \times \{H_m^+(-v_{sm} - 1/2) + T_m^+(-v_{sm} - 1/2)\}, \quad (2.59)
\end{aligned}$$

где при $\theta < \gamma$ выбираются верхние знаки, а при $\theta > \gamma$ — нижние. Первый член в (2.59) описывает поле уединенного (т. е. находящегося в свободном пространстве) конуса, заряженного до потенциала V [109]. Второй член учитывает конечность конуса и его «взаимодействие» со сферической оболочкой. Если $r_0 < a$ и точки наблюдения и расположения заряда находятся по одну сторону от поверхности конуса, то (после подстановки в (2.59) выражения для $T^+(v)$) из (2.59) выделяется в явном виде член, представляющий потенциал поля, создаваемого точечным зарядом, помещенным над полубесконечным конусом $\theta = \gamma$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Ряды (2.58) и (2.59) сходятся абсолютно и равномерно в соответствующих областях внутри сферической оболочки и удовлетворяют всем условиям (2.48) — (2.51), сформулированным при постановке задачи.

3. В качестве примера приложения полученного решения вычислим емкость структуры в том случае, когда заряд отсутствует ($q = 0$), а конус поддерживается при потенциале V . Полный заряд конуса Q определяется нулевой азимутальной гармоникой суммарной плотности распределения зарядов

$$\begin{aligned}
Q &= \sin \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sigma(r, \varphi) r dr = 2\pi \sin \gamma \int_0^a \sigma_0(r) r dr = \\
&= 2\pi a \sin \gamma F_0^+(1/2).
\end{aligned}$$

Величину $F_0^+(1/2)$ определим из системы (2.57), решая ее методом итераций. Ограничиваясь в третьем приближении методом итераций членами порядка $(a/b)^3$, получим в окончательном виде следующее выражение для емкости C структуры:

$$C = \frac{2\pi\epsilon a \sin\gamma}{[L_0^+(1/2)]^2 - \frac{\sin\gamma}{2}\left(\frac{a}{b}\right)}. \quad (2.60)$$

Более простое выражение для емкости получается при $\gamma = \pi/2$:

$$C|_{\gamma=\pi/2} = \frac{4\pi\epsilon a}{\pi/2 - a/b}. \quad (2.61)$$

В таблице приведены значения величины $C/4\pi\epsilon a$, рассчитанные в [107] (первая строка таблицы) и по формулам (2.60), (2.61). Значения функции $L_0^+(1/2)$ при $\gamma \neq \pi/2$ рассчитывались по формулам из [109] с использованием алгоритмов, описанных в 2.2. Отметим, что в [107] при расчете емкости потребовалось численное решение с помощью ЭВМ интегрального уравнения. В то же время полученное простое приближенное выражение для случая $\gamma = \pi/2$ позволяет достаточно точно рассчитать емкость при $b/a \geq 2$.

Хотя в данном разделе рассмотрена задача электростатики, ясно, что изложенный подход применим к более широкому классу краевых задач математической физики для уравнения Лапласа (или Пуассона), характеризуемых наличием в области конических или биконических разрезов. Кроме того, он применим при решении ряда двумерных задач в областях, отнесенных к цилиндрической системе координат и содержащих разрезы клиновидной или более сложной формы. При этом не исключаются полностью случаи задания на границах областей граничных условий третьего рода, а также и более сложных граничных условий на разрезах.

2.4. Возбуждение разветвленной секторной области с цилиндрическим закруглением

В последнее время активно обсуждается проблема рациональной формулировки задач о разветвлении областей различной геометрии. Разработанные подходы к решению этой проблемы, опирающиеся на метод частичных областей или метод частичных пересекающихся областей, приводят в конечном итоге к БСЛАУ, состоящей, как правило, из двух или более подсистем [72, 73]. При

ЕМКОСТЬ СТРУКТУРЫ

a/a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
$\gamma = \pi/2$	0,946	0,811	0,759	0,730	0,713	0,701	0,692	0,686	0,680	$2/\pi$
	0,934	0,808	0,757	0,729	0,712	0,700	0,692	0,685	0,680	$2/\pi$
$\gamma = 120^\circ$	0,810	0,714	0,673	0,651	0,638	0,628	0,621	0,616	0,612	0,577
$\gamma = 140^\circ$	0,618	0,561	0,536	0,522	0,513	0,507	0,502	0,498	0,496	0,472
$\gamma = 160^\circ$	0,385	0,361	0,351	0,345	0,341	0,338	0,336	0,335	0,333	0,323

решении системы методом редукции известные трудности вызывает вопрос о корректном выборе числа учитываемых уравнений из каждой подсистемы, т. к. указанное число существенно зависит от геометрии области [73]. Кроме того, стремление сформулировать оптимальный вариант БС/1АУ как по простоте реализации, времени счета и точности при вычислениях на ЭВМ, так и по возможности ее эффективного аналитического решения при определенных значениях параметров задачи заставляет обращаться к поиску иных методов решения, относящихся к упомянутому кругу задач.

1. В цилиндрической системе координат ρ, φ, z размещен идеально проводящий секторный резонатор $S: \{\varphi = 0 \cup 2\gamma, 0 < \rho < b; \rho = b, 0 < \varphi < 2\gamma; -\infty < z < \infty\}$, разветвленный идеально проводящей стенкой $R: \{\varphi = 2\beta, a < \rho < b; -\infty < z < \infty\}$. Резонатор возбуждается нитью магнитного тока, расположенной в точке с координатами ρ_0, φ_0 (рис. 2.3). В отсутствие стенки R поле выражается

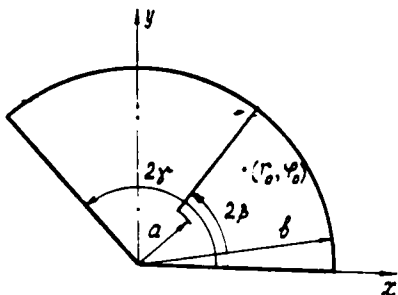


Рис. 2.3. Геометрия задачи

через функцию $\Pi_0(\rho, \varphi)$, которую с точностью до неучитываемого нами в дальнейшем амплитудного множителя удобно представить интегралом следующего вида:

$$\Pi_0(\rho, \varphi) = 2i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos v(2\gamma - \varphi_+) \cos v\varphi_-}{\sin 2\gamma v} \frac{I_v(sp)}{I_v(sb)} \times \\ \times Y(v; sb, sp_0) dv, \quad (2.62)$$

где $\varphi_+ = \max(\varphi, \varphi_0)$, $\varphi_- = \min(\varphi, \varphi_0)$.

Функция $\Pi(\rho, \varphi)$, характеризующая возмущение этого

поля стенкой R , должна удовлетворять уравнению Гельмгольца, иметь непрерывную производную по φ всюду в области $0 < \varphi < 2\gamma$, $0 < \rho < b$, обеспечивать выполнение граничных условий:

$$\frac{\partial \Pi(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = 0 \cup 2\gamma, \quad 0 < \rho < b, \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial \Pi(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = b, \quad 0 < \varphi < 2\gamma, \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial \Pi_0(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = 2\beta, \quad a < \rho < b, \quad (2.65)$$

а также условий на ребрах

$$\frac{\partial \Pi(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} = O(\rho^{n/2\gamma}) \text{ при } \rho \rightarrow 0,$$

$$\frac{\partial \Pi(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} = O((a - \rho)^{1/2}) \text{ при } \rho \rightarrow a - 0, \quad \varphi \rightarrow 2\beta.$$

По смыслу функции $\Pi_0(\rho, \varphi)$ и $\Pi(\rho, \varphi)$ являются соответствующими магнитными векторами Герца, имеющими отличную от нуля лишь свою z -компоненту.

Запишем представление для $\Pi(\rho, \varphi)$ в виде

$$\begin{aligned} \Pi(\rho, \varphi) = & \frac{1}{i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{v G(v) I_v(sp)}{\sin 2\gamma v I'_v(sb)} \times \\ & \times \begin{cases} \cos v(2\gamma - \varphi) \sin 2\beta v \\ - \sin v(2\gamma - \varphi) \cos 2\beta v \end{cases} dv, \end{aligned} \quad (2.66)$$

где $G(v)$ — неизвестная функция, в фигурных скобках выбирается верхняя строка при $2\beta < \varphi < 2\gamma$ и нижняя — при $0 < \varphi < 2\beta$. Нетрудно непосредственно убедиться в том, что (2.66) обеспечивает удовлетворение граничных условий (2.63) и непрерывность производной по φ в области $0 < \varphi < 2\gamma$, $0 < \rho < b$, а $G(v)$ есть трансформанта [в смысле (2.7)] от суммарной поверхностной плотности $j(\rho)$ тока, текущего по стенке R . Функция $G(v)$ является целой, четной и в силу оценки $j(\rho) = O((\rho - a)^{1/2})$ при $\rho \rightarrow a$ ее поведение при $|v| \rightarrow \infty$ в правой и левой полуплоскостях описывается соответственно выражениями

$$G(v) \sim \Gamma(\pm v) I'_{\pm v}(sb) \left(\frac{sa}{2}\right)^{\mp v} g(\pm v),$$

причем $g(\pm v) = O(|v|^{-1})$, по крайней мере, при $|v| \rightarrow \infty$. Можно показать, что определение функции $G(v)$ так,

как указано выше, обеспечивает подчинение интегрального представления (2.66) также и граничному условию (2.64).

Применим далее интегральное преобразование (2.7) к граничному условию (2.65) и учтем при этом представления (2.62), (2.66). Тогда получим

$$\frac{v \sin v(2\gamma - 2\beta) \sin 2\beta v}{\sin 2\gamma v} G(v) - 2\pi \frac{\sin v(2\gamma - 2\beta) \cos v\varphi_0}{\sin 2\gamma v} \times \\ \times Y(v; sb, s\rho_0) = F(v), \quad (2.67)$$

где

$$F(v) = \int_0^a \left[\frac{\partial \Pi_0(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=2\beta} Y(v; sb, s\rho) \frac{d\rho}{\rho}$$

и без умаления общности положено $\varphi_0 < 2\beta$. Функция $F(v)$ регулярна в полосе $|\operatorname{Re} v| < 1/2$, и в этой полосе справедливо уравнение (2.67). Из него непосредственно следует, что

$$F(0) = - \frac{2\pi(\gamma - \beta)}{\gamma} Y(0; sb, s\rho_0). \quad (2.68)$$

Перепишем (2.67) в виде

$$\frac{\sin 2\gamma v}{v \sin 2\beta v \sin v(2\gamma - 2\beta)} F(v) + 2\pi \frac{\cos v\varphi_0}{v \sin 2\beta v} Y(v; sb, s\rho_0) = G(v). \quad (2.69)$$

В правой части (2.69) стоит целая функция. В то же время каждый член из левой части имеет полюс второго порядка в точке $v=0$. Однако левая часть в целом регулярна в этой точке вследствие справедливости соотношения (2.68). Поэтому уравнение (2.69) выполняется в полосе $|\operatorname{Re} v| < 1/2$ и представляет собой обобщенное функциональное уравнение типа Винера—Хопфа.

2. Функция $F(v)$ представима в виде

$$F(v) = \frac{1}{2} \{ I'_{-v}(sb) \Gamma(-v) \left(\frac{sa}{2}\right)^v F^+(v) + \\ + I'_v(sb) \Gamma(v) \left(\frac{sa}{2}\right)^{-v} F^-(v) \}, \quad (2.70)$$

где функции $F^\pm(v)$ регулярны соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Re} v > -1/2$ и $\operatorname{Re} v < 1/2$ и имеет место оценка $F^+(v) = O(v^{-1})$ при $|v| \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re} v > -1/2$. При факторизации функции

$$L(v) = - \frac{\sin 2\gamma v}{v \sin 2\beta v \sin v(2\gamma - 2\beta)}$$

воспользуемся формулой дополнения для гамма-функции. Тогда сразу же получим

$$L^+(v) = \sqrt{\frac{2\beta(\gamma - \beta)}{\gamma}} \frac{\Gamma(2\beta v/\pi) \Gamma(2v(\gamma - \beta)/\pi) e^{-v\kappa(\beta, \gamma)}}{\pi \Gamma(2\gamma v/\pi)},$$

$$L^+(-v) = L^-(v).$$

Выбор функции $\kappa(\beta, \gamma)$ в виде

$$\kappa(\beta, \gamma) = \frac{2\beta}{\pi} \ln \beta - \frac{2\gamma}{\pi} \ln \gamma + \frac{2(\gamma - \beta)}{\pi} \ln(\gamma - \beta)$$

обеспечивает алгебраическое убывание $L^+(v)$ при $\text{Re} v \rightarrow +\infty$. Именно

$$L^+(v) = 2\sqrt{\frac{\beta(\gamma - \beta)}{\pi\gamma v}} + O(v^{-3/2}).$$

Функция $L^+(v)$ регулярна в полуплоскости $\text{Re} v > 0$ и не имеет нулей при $\text{Re} v > -1/2$. В точке $v=0$ эта функция имеет полюс, и это обстоятельство должно учитываться при преобразованиях уравнения (2.69).

Подставим разложение (2.70) в (2.69) и разделим обе его части на $L^-(v) I'_{-\nu}(sb) \Gamma(-v) (sa/2)^v$. Поскольку функция $I'_{-\nu}(sb)$ не имеет нулей в полуплоскости $\text{Re} v \leq 0$, то результирующее уравнение заведомо будет выполняться в полосе $-1/2 < \text{Re} v < 0$. Это уравнение преобразуется в справедливое во всей v -плоскости и содержащее только одну неизвестную функцию $F^+(v)$ уравнение

$$L^+(v) F^+(v) - \frac{F^+(0)}{v} \sqrt{\frac{\gamma}{2\beta(\gamma - \beta)}} + H^-(v) = -T^+(v),$$

(2.71)

где

$$H^+(v) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (sa/2)^{2n}}{(n+v)(n!)^2} \frac{F^+(n)}{L^+(n)} \frac{\sin 2n\gamma}{\sin 2n(\gamma - \beta) \sin 2n\beta} -$$

$$- \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(sa/2)^{2p}}{(n\pi + 2\beta v)} \frac{I'_{-\rho}(sb)}{I'_{\rho}(sb) \Gamma^2(1+\rho) \sin \pi \rho} \frac{F^+(p)}{L^+(p)} -$$

$$- \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (sa/2)^{2q}}{(n\pi + 2(\gamma - \beta)v)} \frac{I'_{-q}(sb)}{I'_q(sb) \Gamma^2(1+q) \sin \pi q} \times$$

$$\times \frac{F^+(q)}{L^+(q)} \frac{\sin 2q\gamma}{\sin 2q\beta},$$

$$T^+(v) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (sa/2)^n \cos p\varphi_0}{(n\pi + 2\beta v)} \frac{Y(p; sb, sp_0)}{I'_p(sb) \Gamma(1+p) L^+(p)},$$

$$\rho_0 > a, p = n\pi/2\beta, q = n\pi/2(\gamma - \beta).$$

Выражение для $T^+(v)$, отвечающее случаю $\rho_0 < a$, мы здесь не приводим из-за его несколько громоздкого вида и в последующем ограничимся рассмотрением случая, когда $a < \rho_0 < b$.

Введем в рассмотрение числовую последовательность $\{\kappa_m\}_{m=1}^{\infty}$, образованную числами $n, n\pi/2\beta, n\pi/2(\gamma - \beta)$, $n=1, 2, 3, \dots$, расположенными в порядке возрастания их величин и пронумерованными с помощью индекса m . Полагая в (2.71) последовательно $v = \kappa_m$, $m=1, 2, 3, \dots$, получим БСЛАУ относительно неизвестных постоянных $F^+(\kappa_m)$. Для того чтобы полученная система была замкнутой, необходимо еще определить величину $F^+(0)$. С этой целью рассмотрим уравнение (2.71), как определяющее для $F^{\pm}(v)$. Значения $F^+(v)$ и $F^-(v)$, найденные из этого уравнения, подставим в соотношение для $F(v)$, а затем перейдем к пределу $v \rightarrow 0$. Тогда найдем

$$F^+(0) = \frac{1}{\tilde{p}} \left\{ \frac{2\pi(\gamma - \beta)}{\gamma} Y(0; sb, sp_0) + \sqrt{\frac{2\beta(\gamma - \beta)}{\gamma}} \times \right. \\ \left. \times I'_0(sb) [T^+(0) + H^+(0)] \right\},$$

где

$$\tilde{p} = I'_0(sb) \left[C + \ln \frac{sa}{2} + \frac{2\beta}{\pi} \ln \beta - \frac{2\gamma}{\pi} \ln \gamma + \right. \\ \left. + \frac{2(\gamma - \beta)}{\pi} \ln(\gamma - \beta) \right] + K'_0(sb)$$

— параметр, играющий ту же роль, что и параметр, встречающийся в задаче дифракции на щели в плоском экране [1].

После замены $x(\kappa_m) = F^+(\kappa_m) (a/b)^{\kappa_m}$ получим относительно $x(\kappa_m)$ БСЛАУ с вполне непрерывным в l_2 матричным оператором. Элементы оператора просты по структуре и убывают с ростом κ_n и κ_m не медленнее, во всяком случае, чем $(a/b)^{\kappa_n + \kappa_m} \kappa_m^{-1/2} n^{-3/2}$, что обеспечивает быструю сходимость системы и возможность ее эффективного решения на ЭВМ методом редукции (понятно, что сфор-

мулированные утверждения справедливы, как и в случае задачи из 2.2, только при «нерезонансных» значениях параметра s). Кроме того, при $sa/2 < 1$ уравнение (2.71) позволяет легко получить приближенное аналитическое решение. Для этого доопределим последовательность $\{\kappa_m\}_{m=0}^{\infty}$ значением $\kappa_0 = 0$ и положим

$$F^+(v) = \sum_{m=0}^M F_m^+(v) \cdot (sa/2)^{\kappa_m},$$

M — произвольное. Подставляя это разложение в (2.71) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $sa/2$, получим, например, с точностью до $(sa/2)^{\kappa_2}$

$$F_0^+(v) = \frac{1}{\beta v L^+(v)} \sqrt{\frac{2\pi(\gamma - \beta)}{\gamma}} Y(0; sb, sp_0),$$

$$F_1^+(v) = \frac{4\pi}{\beta} \sqrt{\frac{\gamma(\gamma - \beta)}{2\beta}} \frac{Y\left(\frac{\pi}{2\beta}; sb, sp_0\right) \cos(\pi q_0/2\beta)}{I'_{\pi/2\beta}(sb) \Gamma(1 + \pi/2\beta) L^+(v)} \times$$

$$\times e^{\pi \kappa(\beta, \gamma)/2\beta} \left[\frac{1}{\pi + 2\beta v} - \frac{1}{v} \frac{I'_0(sb)}{\pi \beta} \right], \quad \beta > \frac{\gamma - \beta}{2}, \frac{\pi}{4}.$$

3. Функция $\Pi_{\Sigma}(\rho, \varphi) = \Pi_0(\rho, \varphi) + \Pi(\rho, \varphi)$ может быть представлена бесконечными рядами, содержащими коэффициенты $F^+(\kappa_m)$. Именно, переход от интегральных представлений (2.62), (2.66) к рядам вычетов показывает, что в угловой области $2\beta < \varphi < 2\gamma$, $a < \rho < b$ поле выражается через функцию

$$\Pi_{\Sigma}(\rho, \varphi) = - \frac{1}{2(\gamma - \beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n F^+(q) \frac{(sa/2)^q}{I'_q(sb) \Gamma(1 + q)} \times$$

$$\times Y(q; sb, sp) \cos q(2\gamma - \varphi), \quad (2.72)$$

а в области $0 < \varphi < 2\beta$, $a < \rho < b$ — через функцию

$$\Pi_{\Sigma}(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n F^+(p) \frac{(sa/2)^p}{I'_p(sb) \Gamma(1 + p)} \times$$

$$\times Y(p; sb, sp) \cos p\varphi + \frac{1}{2\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{I'_p(sp_{\leq})}{I'_p(sb)} \times$$

$$\times Y(p; sb, sp_{\geq}) \cos p\varphi_0 \cos p\varphi, \quad (2.73)$$

где $p_{\leq} = \min(\rho, \rho_0)$; $p_{\geq} = \max(\rho, \rho_0)$.

В области $0 < \varphi < 2\gamma$, $0 < \rho < a$ функция $\Pi_{\Sigma}(\rho, \varphi)$ представима в виде

$$\Pi_2(\rho, \varphi) = \frac{\pi}{\gamma} Y(0; sb, sp_0) \frac{I_0(sp)}{I'_0(sb)} - \\ - \frac{1}{2\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(1+t) (sa/2)^{-t} L^+(t) [T^+(-t) + \\ + H^+(-t) + \frac{F^+(0)}{n\pi} \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\beta(\gamma-\beta)}}] I_t(sp) \sin 2\beta t \cos t\varphi, \\ t = n\pi/2\gamma. \quad (2.74)$$

Ряды (2.72—2.74) сходятся абсолютно и равномерно, удовлетворяют уравнению Гельмгольца, а также всем условиям, сформулированным при постановке задачи. При вычислении поля следует воспользоваться известными соотношениями, а в полученные выражения для $\Pi_2(\rho, \varphi)$ подставить $-ik$ вместо s .

2.5. ТЕМ-волна в цилиндрической коаксиальной линии с внутренним проводником сложного сечения

Усложнение профиля поперечного сечения внутреннего проводника цилиндрической коаксиальной линии — наиболее простой путь достижения необходимого значения ее характеристического импеданса без изменения в целом поперечных размеров линии. С другой стороны, наличие, например, ребер у внутреннего проводника будет приводить к высокой концентрации электрического поля в зазорах между этими ребрами и внешним проводником. Тем самым создаются предпосылки для эффективного управления электромагнитной волной, распространяющейся в линии, с помощью размещенных в зазорах малогабаритных управляющих элементов (сосредоточенных или распределенных) [111].

В качестве обладающей достаточной степенью общности модели линии с ребристым внутренним проводником сложного поперечного сечения примем размещенный в цилиндрической системе координат ρ, φ, z идеально проводящий цилиндрический экран $\rho=b$, внутри которого содержится идеально проводящий проводник, составленный из N расположенных в радиальных полуплоскостях и разнесенных одна относительно другой на угол $2\pi/N$ пластин (рис. 2.4). Известно [112], что в определенном частотном диапазоне электромагнитное поле

в линии описывается ТЕМ-волной и поэтому параметры линии однозначно определяются из решения соответствующей электростатической задачи.

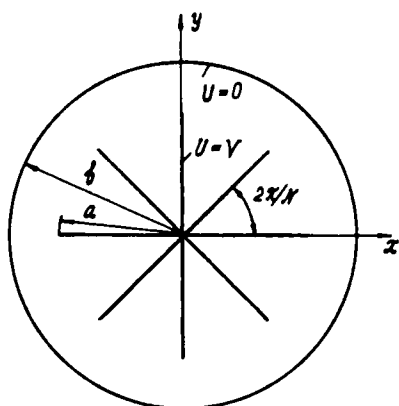


Рис. 2.4. Геометрия задачи

1. Будем искать функцию $U(\rho, \varphi)$, непрерывную на поперечном сечении линии (с производной по φ , также непрерывной там, за исключением отрезков $\rho < a$ лучей $\varphi = 2\pi m/N$, $m = 1, 2, \dots, N$), удовлетворяющую уравнению Лапласа, граничным условиям

$$U\left(\rho, \frac{2\pi m}{N}\right) = V, \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad V = \text{const}, \quad (2.75)$$

$$U(b, \varphi) = 0 \quad (2.76)$$

и условию на ребрах

$$\frac{\partial U(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} = O((a - \rho)^{-1/2}), \quad \rho \rightarrow a - 0, \quad \varphi = 2\pi m/N.$$

Вообще говоря, существует несколько подходов к исследованию характеристик передающих линий с ТЕМ-волной. В частности, широкое распространение получили метод задачи Римана—Гильберта [112], метод частичных областей [113, 115], метод конформного преобразования [114], модифицированный метод вычетов [70]. Мы, однако, будем следовать методике, разработанной в 2.2.

Как показано в разд. 2.1, решение задачи может

быть получено с использованием следующей версии конечного интегрального преобразования типа Меллина:

$$\Phi(v) = \int_0^b f(\rho) R(v; b, \rho) \frac{d\rho}{\rho}, \quad (2.77)$$

$$f(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{-v} \Phi(v) dv, \quad 0 < \rho < b. \quad (2.78)$$

Поскольку согласно (2.75) $U(\rho, \varphi) \rightarrow V$ при $\rho \rightarrow 0$, то для этой функции, как нетрудно видеть, трансформанта в смысле (2.77) не существует. Поэтому введем в рассмотрение функцию

$$W(\rho, \varphi) = U(\rho, \varphi) - V.$$

Функция $W(\rho, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, граничным условиям

$$W\left(\rho, \frac{2\pi m}{N}\right) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \rho \leq a,$$

$$W(b, \varphi) = -V$$

и тому же самому условию на ребрах, что и функция $U(\rho, \varphi)$. Эта функция уже может быть подвергнута интегральному преобразованию (2.77). Получающееся в результате преобразования дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 W(v, \varphi)}{d\varphi^2} + v^2 W(v, \varphi) = -2vV, \quad -\frac{N}{2} < \text{Re } v < \frac{N}{2}$$

для трансформанты $W(v, \varphi)$ функции $W(\rho, \varphi)$ имеет решение вида

$$W(v, \varphi) = -\frac{2V}{v} + A_m(v) \sin v\varphi + B_m(v) \cos v\varphi,$$

$$\frac{2\pi(m-1)}{N} \leq \varphi \leq \frac{2\pi m}{N}.$$

Неизвестные коэффициенты $A_m(v)$ и $B_m(v)$ могут быть выражены через значения функции $W(v, \varphi)$ в граничных точках рассматриваемого углового сектора. В силу симметрии задачи граничные значения функции $W(v, \varphi)$ совпадают и описываются, как нетрудно убедиться, некоторой неизвестной целой функцией $Q(v)$. Внутри углового сектора

$$W(v, \varphi) = -\frac{2V}{v} + \frac{\left[Q(v) + \frac{2V}{v}\right]}{\cos \frac{\pi v}{N}} \cos v \left[\varphi - \frac{(2m-1)\pi}{N} \right]. \quad (2.79)$$

Если теперь к формуле

$$\rho \frac{\sigma(\rho)}{\varepsilon} = \left[\frac{\partial W(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \right]_{\varphi = \frac{2\pi m}{N} - 0} - \left[\frac{\partial W(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \right]_{\varphi = \frac{2\pi m}{N} + 0},$$

описывающей распределение погонной поверхностной плотности $\sigma(\rho)$ заряда на m -й пластине, применить интегральное преобразование (2.77), а затем подставить в нее выражение (2.79), то придем к функциональному уравнению

$$\frac{1}{\varepsilon} F(v) = -[2vQ(v) + 4V] \frac{\sin \frac{v\pi}{N}}{\cos \frac{v\pi}{N}}, \quad (2.80)$$

где

$$\tilde{F}(v) = \int_0^a \sigma(\rho) R(v; b, \rho) d\rho$$

есть неизвестная функция, регулярная в полосе $-\frac{N}{2} < \text{Re } v < \frac{N}{2}$.

2. Структура уравнения (2.80) и свойства входящих в него функций носят характер, типичный для рассматриваемых в данной главе задач. Поэтому, используя разложение

$$F(v) = \left(\frac{a}{b}\right)^v F^+(v) - \left(\frac{a}{b}\right)^{-v} F^-(v),$$

результат факторизации

$$L^+(v) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{N}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{v}{N}\right)}, \quad L^-(v) = -\frac{v}{N} L^+(-v)$$

функции

$$L(v) = -\sin \frac{v\pi}{N} / \cos \frac{v\pi}{N}.$$

и проводя анализ, в своей основе аналогичный изложенному в 2.2, приходим к справедливому во всей v -плоскости и содержащему только одну неизвестную функцию $F^+(v)$ уравнению

$$F^-(v) + \frac{N}{\pi} L^+(v) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{a}{b}\right)^{2nN} \frac{F^+(nN)}{nN+v} \times \\ \times \frac{\Gamma(1/2+n)}{\Gamma(1+n)} = AL^+(v). \quad (2.81)$$

Константу A можно определить, исходя из следующих соображений. Величина

$$F^+(0) = \int_0^a \sigma(\rho) d\rho$$

равна, очевидно, полному линейному заряду внутреннего проводника. Обозначив этот заряд через Q , найдем

$$A = \frac{Q}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^{2nN} F^+(nN) \frac{\Gamma(1/2+n)}{\Gamma(1+n)}.$$

Полагая теперь в уравнении (2.81) последовательно $v=pN$, $p=1, 2, 3, \dots$, и вводя новые неизвестные величины x_{pN} по формуле

$$x_{pN} = \left(\frac{a}{b}\right)^{pN} F^+(pN),$$

получим БСЛАУ вида

$$x_{pN} + \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(1/2+p)}{\Gamma(1+p)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^{(n+p)N} x_{nN} \frac{\Gamma(1/2+n)}{\Gamma(1+n)} \times \\ \times \left[\frac{n}{n+p} - 1 \right] = \frac{\Gamma(1/2+p)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1+p)} \left(\frac{a}{b}\right)^{pN} \cdot Q, \\ p=1, 2, 3, \dots \quad (2.82)$$

Из последующего будет видно, что, решив систему (2.82), мы сразу же получаем возможность вычислить значения функции $W(\rho, \varphi)$ (а следовательно, и $U(\rho, \varphi)$) в любой точке поперечного сечения рассматриваемой цилиндрической коаксиальной линии. Сопоставление систем уравнений (2.82) и (2.57) свидетельствует о более быстрой сходимости системы (2.82) при $N \geq 2$. Поэтому следует

ожидать, что уже начальные приближения метода итераций (первое либо второе) будут давать приемлемое по точности решение системы (2.82).

3. Воспользовавшись уравнением (2.80), выразим функцию $Q(v)$ через функции $F^{\pm}(v)$, а полученное выражение подставим в формулу (2.79) для трансформанты $W(v, \varphi)$. Результирующее выражение для $W(v, \varphi)$ будучи подставленным в формулу (2.78), позволяет представить функцию $W(\rho, \varphi)$ в интегральной форме

$$W(\rho, \varphi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{-v} \left\{ \frac{2V}{v} + \frac{1}{2v\varepsilon} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^v F^{+}(v) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{a}{b}\right)^{-v} F^{-}(v) \right] \frac{\cos v \left[\varphi - \frac{(2m-1)\pi}{N} \right]}{\sin \frac{v\pi}{N}} \right\} dv.$$

Из этого представления, в свою очередь, могут быть получены представления в виде рядов вычетов. Как и следовало ожидать, они имеют различающийся характер в областях $0 < \rho < a$ и $a < \rho < b$. Так, для основной иско-мой функции $U(\rho, \varphi)$ в области $0 < \rho < a$ справедливо выражение

$$U(\rho, \varphi) = V - \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{(k+1/2)N} \times \\ \times \frac{\Gamma(k+1/2)}{(k+1/2)\Gamma(k+1)} \left\{ -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^{2nN} F^{+}(nN) \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{n}{n-(k+1/2)} - 1 \right] + \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \right\} \sin(k+1/2)N\varphi, \quad (2.83)$$

а в области $a < \rho < b$ — выражение

$$U(\rho, \varphi) = -\frac{N}{2\pi\varepsilon} Q \ln\left(\frac{\rho}{b}\right) + \frac{1}{2\pi\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b}\right)^{nN} F^{+}(nN) \times \\ \times \left[\left(\frac{\rho}{b}\right)^{-nN} - \left(\frac{\rho}{b}\right)^{nN} \right] \cos nN\varphi. \quad (2.84)$$

Не составляет труда убедиться в том, что ряды (2.83) и (2.84) являются абсолютно и равномерно сходящимися, удовлетворяют граничным условиям (2.75), (2.76) и ус-

ловию на ребрах. Причем скорость их сходимости увеличивается с ростом числа N , образующих внутренний проводник пластин. Полученное решение включает в себя ряд представляющих интерес частных случаев. Так, при $N=4$ имеем коаксиальную линию с крестообразным внутренним проводником, при $N=3$ — линию, у которой пластины, составляющие внутренний проводник, отстоят на угловом расстоянии, равном $2\pi/3$ друг от друга, при $N=2$ — хорошо известную линию с ленточным внутренним проводником. Случай $N=1$ интересен в том отношении, что вместо коаксиальной линии имеем цилиндрическую линию со смещенным внутренним ленточным проводником. Наконец, изложенная выше методика без существенных изменений может быть применена к исследованию более сложного варианта линии со смещенным внутренним проводником: именно, когда этот проводник представляет собой клиновидную структуру с произвольным углом раскрыва, общее ребро которой совпадает с осевой линией цилиндрического экрана.

МЕТОД РАЗРЫВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ДЛЯ ПЛОСКИХ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР

В главе 2 речь шла о краевых задачах теории дифракции на проводящих экранах, совпадающих с частью одной из координатных поверхностей в цилиндрической и сферической системах координат. Хотя последние и относятся к числу таких, в которых дифференциальные уравнения поля разделяются по переменным, фактор ограниченности экрана не дает возможности строгого аналитического решения этих задач классическими методами.

Аналогичная ситуация имеет место, если в цилиндрической системе координат $0 \leq \xi, \eta, z$ в качестве основного объекта взять совпадающий с координатной поверхностью $z = c = \text{const}$ плоский экран с кусочно-однородными физическими свойствами по координате ξ и однородными по координате η . Рассмотрим случай, в котором экран имеет две области однородности — $\xi \in s_1$ и $\xi \in s_2$, одна из которых (например, s_1) имеет конечный характерный размер a . Тогда типичная краевая задача дифракции сводится к отысканию решений уравнений поля, удовлетворяющих различным граничным условиям на областях s_1 и s_2 поверхности $z=c$, условиям излучения и так называемым «условиям на ребре» на линии L разрыва граничного условия. Эта задача выглядит наиболее просто, если система координат $0 \leq \xi, \eta, z$ является либо просто декартовой $(Oxyz)$, либо круговой цилиндрической $(O\rho\varphi z)$ координатной системой, а область s_1 — соответственно либо бесконечной полосой $(|x| \leq a)$, либо кругом $(\rho \leq a)$ на плоскости $z=c$.

Если обратиться к модели плоского идеального (т. е. бесконечно тонкого и обладающего бесконечной проводимостью) экрана, мы придем к ставшим уже классическими задачам теории дифракции излучения на полосе и круглом диске, а также щели и круглой апертуре в таком

экране. В результате систематических усилий многочисленных исследователей были разработаны эффективные асимптотические методы решения таких задач, пригодные альтернативно либо в области малых ($ka \ll 1$), либо больших ($ka \gg 1$) по сравнению с длиной волны λ размеров объектов a ($k = 2\pi/\lambda$). Однако особый принципиальный и практический интерес представляют дифракционные явления в области «резонансных» размеров объектов ($ka \sim 1$), исследование которых может быть проведено лишь на основе строгих математических методов.

Благодаря крайней идеализации модели и уникальной возможности совместить такие экраны с координатными поверхностями специфических систем координат, эти задачи решаются строго методом Фурье, т. е. путем разделения переменных в дифференциальных уравнениях поля, как в скалярном (акустическом), так и в векторном (электромагнитном) вариантах [1].

3.1. Использование свойств разрывных интегралов Вебера—Шафхейтлина при решении задач электродинамики

Существует другой, также строгий, численно-аналитический метод [116, 117] решения таких задач дифракции, который лежит в основе математического аппарата, используемого в данной главе. Чтобы схематически представить его суть, удобно исходить из эквивалентной математической формы представления рассматриваемых задач в виде системы парных интегральных уравнений:

$$\int_C \bar{\psi}(\alpha) K(\alpha, \xi) d\alpha = \begin{cases} \psi(\xi), & \xi \in s_1, \\ 0, & \xi \in s_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\int_C \bar{\psi}(\alpha) \kappa(\alpha) K(\alpha, \xi) d\alpha = f(\xi), \quad \xi \in s_1 \quad (3.2)$$

которые получаются из дифференциальных либо интегродифференциальных уравнений поля с помощью интегрального преобразования с подходящим ядром $K(\alpha, \xi)$ [118]. Здесь $\bar{\psi}(\alpha)$ — трансформанта неизвестной полевой функции $\psi(\xi)$, определенной в области $\xi \in s_1$; $\kappa(\alpha)$ и $f(\xi)$ — заданные функции; C — некий контур интегрирования в комплексной плоскости α .

В основе рассматриваемого метода решения уравне-

ний (3.1), (3.2) лежит хорошо известный математический прием, заключающийся в представлении искомой функции $\psi(\xi)$ в форме разложения по некоторой системе ортогональных в области s_1 функций $\psi_v(\xi)$, т. е. в виде

$$\psi(\xi) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \psi_v(\xi), \quad (3.3)$$

в результате чего поставленная задача сводится к отысканию множества коэффициентов a_v ($v=0, 1, 2, \dots$) этого функционального ряда [1, 119, 120]. При этом выбор системы функций $\psi_v(\xi)$ или их трансформант

$$\bar{\psi}_v(\alpha) = \int_{s_1} \psi_v(\xi) K(\alpha, \xi) d\xi$$

должен обеспечивать надлежащее, предписываемое условиями на ребре, поведение функции $\psi(\xi)$ на границе L области s_1 .

Если выбор системы функций $\bar{\psi}_v(\alpha)$ (или $\psi_v(\xi)$) адекватен природе задачи, подстановка разложения искомой целой функции

$$\psi(\alpha) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \bar{\psi}_v(\alpha) \quad (3.4)$$

в уравнение (3.1) приводит к интегралам

$$I_v(\xi) = \int_C \bar{\psi}_v(\alpha) K(\alpha, \xi) d\alpha.$$

Рассматриваемые как функции переменной ξ , они имеют разрывный характер с сингулярной точкой ξ , лежащей на границе между областями s_1 и s_2 , и относятся к группе интегралов Вебера—Шафхейтлина [121]. С другой стороны, в разложении (3.3) функции являются гипергеометрическими полиномами, а функциональные ряды (3.4) представляют собой разложение Неймана—Гегенбауэра [122] по функциям Бесселя. Гипергеометрические полиномы в задаче дифракции на полосе (или щели) сводятся к полиномам Чебышева [119], в задаче для диска (или апертуры) — к полиномам Якоби [123]. В связи с этим обсуждаемый математический метод имеет в литературе название либо метода разрывных интегралов Вебера—Шафхейтлина [123], либо метода разложения по гипергеометрическим полиномам [116, 117].

В результате подстановки ряда (3.4) и разложения ядра $K(\alpha, \xi)$

$$K(\alpha, \xi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \psi_{\mu}(\alpha) \psi_{\mu}(\xi) \quad (3.5)$$

по системе функций $\psi_{\mu}(\xi)$ в (3.2) интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\mu\nu} a_{\nu} = c_{\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

бесконечного порядка с коэффициентами

$$c_{\mu\nu} = \int \bar{\psi}_{\mu}(\alpha) \kappa(\alpha) \bar{\psi}_{\nu}(\alpha) d\alpha, \quad (3.7)$$

$$c_{\mu} = \int_{s_1} f(\xi) \psi_{\mu}(\xi) d\xi. \quad (3.8)$$

Практическое решение системы (3.6) — (3.8) неизбежно связано с ее редукцией, т. е. ограничением ее порядка некоторым конечным числом N . При этом, конечно, предварительно должен быть решен вопрос о существовании и единственности ее решения, а также дана оценка точности приближенного решения, связанного с порядком N [124, 125].

Не имея никаких особых преимуществ по сравнению с классическим методом Фурье в смысле удобства численной реализации (с помощью ЭВМ) решений упомянутых дифракционных задач, очерченный метод обладает одним существенным достоинством — большей универсальностью. Он может быть использован для анализа дифракционных процессов на более сложных объектах. Примеры исследований такого рода содержатся в работах [123, 126].

К таким объектам относятся также системы параллельных идеальных экранов, часть которых имеет ту же геометрию, что и фигурирующие выше элементарные модели (бесконечные полоса и щель, круглые диск и апертура). Если ограничиться случаем радиально-неоднородных экранов, примерами наиболее простых систем такого типа являются плоский волновод с круглой апертурой в одной из его стенок, два смежных плоских волновода с такой же апертурой в разделяющей их перегородке, два соосных равновеликих круглых отверстия в парал-

лельных плоских экранах и т. д. Решение имеющих очевидный прикладной интерес задач дифракции электромагнитных волн для некоторых из таких систем методом разрывных интегралов и составляет содержание § 3.2—3.4. Ряд задач, являющихся их двумерными аналогами, рассматривался этим же методом в [119].

Метод разрывных интегралов может быть использован при исследовании процессов дифракции и в тех случаях, когда плоские радиально-неоднородные экраны содержат неидеально проводящие области [126]. Особый случай представляет собой ситуация, когда часть экрана $z=0$, например его внутренняя область s_1 ($\rho \leq a$), обладает анизотропной поверхностной проводимостью, которая является бесконечной вдоль некоторых линий $\rho = \rho(\varphi)$ и равна нулю вдоль семейства ортогональных им кривых (ρ, φ — цилиндрические координаты, $\rho(\varphi)$ — монотонно возрастающая функция). Попытка строгого решения задачи дифракции плоской электромагнитной волны на круглом диске, проводящем вдоль семейства линий, представляющих собой логарифмические спирали, дается в работе [127]. Однако полученное в ней решение труднообозримо и не поддается численному анализу. Поэтому при решении задач электродинамики, связанных с такими анизотропно проводящими экранами, в разд. 3.5 применяется численно-аналитический метод, описанный выше.

В силу геометрической и физической природы моделей в работах [116, 127] для описания дифракционного электромагнитного поля «естественным» образом выбирается параллельный экрану $z=c$ вектор Герца $\vec{\Pi}(\vec{r})$. В результате задача сводится к системе двух связанных дифференциальных уравнений для компонент $\Pi_\rho(\vec{r})$, $\Pi_\varphi(\vec{r})$ вектора $\vec{\Pi}(\vec{r})$. Последнее обстоятельство в значительной мере усложняет задачу. В данной главе, как и в работе [126], поле описывается с помощью магнитного и электрического векторов Герца — $\vec{\Pi}^h(\vec{r})$ и $\vec{\Pi}^e(\vec{r})$, нормальных к плоскости экрана. Этот прием скаляризует дифференциальные уравнения задачи и существенно упрощает весь аналитический аппарат метода.

3.2. Передача электромагнитной энергии через круглую апертуру в плоском идеальном экране

Прежде чем обратиться к исследованию процесса дифракции в системах радиально-неоднородных параллельных экранов очерченным выше методом, целесообразно рассмотреть с его помощью в качестве ключевой задачу дифракции плоской электромагнитной волны на круглой апертуре с радиусом $a=1$ в одиночном плоском идеальном экране ($z=0$), находящемся в среде с волновым сопротивлением Z (и соответствующей проводимостью $Y=1/Z$).

Пусть волновой вектор $\vec{k}$ падающей волны лежит в плоскости xz , составляя с осью z угол θ_0 ($0 \leq \theta_0 < \pi/2$). Вместо общего случая произвольной ориентации вектора $\vec{E}$ удобно рассматривать отдельно два основных типа поляризации этой волны, когда вектор $\vec{E}^i$ лежит либо в плоскости (xz) падения (E -волна), либо нормален к ней (H -волна).

1. Если эта волна по характеру поляризации относится к E -типу, функции Герца $\Pi^h(\vec{r})$, $\Pi^e(\vec{r})$, описывающие дифракционное поле, представляются рядами Фурье вида

$$\begin{aligned} \Pi^h(\vec{r}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \Pi_m^h(\rho, z) \sin m\varphi, & \Pi_0^h(\rho, z) &= 0, \\ \Pi^e(\vec{r}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \Pi_m^e(\rho, z) \cos m\varphi, \end{aligned} \quad (3.9)$$

в которых амплитуды $\Pi_m^h(\rho, z)$, $\Pi_m^e(\rho, z)$ выражаются через интегралы Фурье—Бесселя:

$$\begin{aligned} \Pi_m^h(\rho, z) &= i^m \varepsilon_m \int_0^{\infty} h_m(\xi) J_m(\xi \rho) e^{i\kappa z/2} d\xi, \\ \Pi_m^e(\rho, z) &= i^m \varepsilon_m \int_0^{\infty} e_m(\xi) J_m(\xi \rho) e^{i\kappa z/2} d\xi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь через ε_m обозначена величина $\varepsilon_m = 2 - \delta_{0m}$ (δ_{0m} — символ Кронекера); $\kappa = (k^2 - \xi^2)^{1/2}$ ($\text{Im} \kappa \geq 0$); J_m — символ функции Бесселя порядка m ; $h_m(\xi)$, $e_m(\xi)$ — искомые функции.

Если с помощью известных формул найти из (3.9), (3.10) выражения для ρ - и φ -компонент векторов $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$ электромагнитного поля и подчинить их необходимым граничным условиям на плоскости $z=0$, мы приходим для каждого значения m ($m=0, 1, 2, \dots$) к системе «парных» интегральных уравнений:

$$\int_0^\infty [kZh_m(\xi) \pm \kappa e_m(\xi)] J_{m \mp 1}(\xi \rho) \xi d\xi = 0, \quad (3.11)$$

$$1 \leq \rho < \infty,$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty f(\xi) [\kappa h_m(\xi) \pm kY e_m(\xi)] J_{m \pm 1}(\xi \rho) \xi d\xi = \\ & = \mp 2Y J_{m \mp 1}(\xi_0 \rho), \quad 0 \leq \rho \leq 1, \end{aligned} \quad (3.12)$$

относительно двух неизвестных функций $h_m(\xi)$, $e_m(\xi)$, которая является аналогом системы уравнений (3.1), (3.2). В этих уравнениях через $f(\xi)$ обозначена функция, равная в рассматриваемом случае

$$f(\xi) \equiv 2, \quad (3.13)$$

а через ξ_0 — величина $\xi_0 = k \sin \theta_0$.

Реализуя очерченную в общих чертах в разд. 3.1 математическую процедуру, используем представление целых [в силу (3.11)] функций $kZh_m(\xi)$, $\kappa e_m(\xi)$ в виде разложений Неймана—Гегенбауэра [122, с. 577]:

$$kZh_m(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_{m\nu} j_{2\nu+m}(\xi) / \xi, \quad (3.14)$$

$$\kappa e_m(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e_{m\nu} j_{2\nu+m-1}(\xi)$$

[ср. с (3.4)] по сферическим функциям Бесселя $j_n(\xi)$, а также разложение ядра $J_n(\xi \rho)$ уравнения (3.12) в ряд вида [122, с. 154]:

$$\begin{aligned} J_n(\xi \sqrt{u}) &= 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} (2\mu + n + 3/2) [J_{2\mu+n+3/2}(\xi) / \xi^{3/2}] \times \\ &\times [u^{n/2} Q_{\mu}^{(n-1/2)}(u)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

[ср. с (3.5)] по полиномам Якоби $Q_{\mu}^{(n-1/2)}(u)$, ортогональным на отрезке $[0,1]$ с весом $u^{n/2}(1-u)^{1/2}$.

После подстановки представлений (3.14), (3.15) в уравнение (3.12) и преобразований последнее сводится

к бесконечной ($m=0, 1, 2, \dots$) совокупности систем линейных алгебраических уравнений бесконечного порядка:

$$\sum_{v=0}^{\infty} [A_{0v}^m h_{mv} - B_{0v}^m c_{mv}] = v_0^m, \quad (3.16)$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} B_{\mu v}^m e_{mv} = v_{\mu}^m,$$

$$n_{m0} - (2m + 1) e_{m0} = 0,$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} A_{\mu v}^m h_{mv} = 0,$$

$$\mu = 1, 2, \dots$$

относительно множества коэффициентов h_{mv} , e_{mv} ($v=0, 1, 2, \dots$) функциональных рядов (3.14). Комплексные коэффициенты этих систем даются следующими выражениями:

$$A_{\mu v}^m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) j_{2\mu+m}(\xi) j_{2v+m}(\xi) \frac{\kappa}{k} \cdot \frac{d\xi}{\xi}, \quad (3.17)$$

$$B_{\mu v}^m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) j_{2\mu+m}(\xi) j_{2v+m-1}(\xi) \frac{k}{\kappa} d\xi,$$

$$v_{\mu}^m = 2j_{2\mu+m}(\xi_0)/\xi_0, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

Элементы $A_{\mu v}^m$, $B_{\mu v}^m$ (3.17) матричных операторов A^m , B^m (как в [116]) могут быть выражены через ряды по целым положительным степеням величины $k(=ka)$. Так же, как это было сделано в работе [120], можно показать, что бесконечные системы уравнений (3.16) эквивалентны фредгольмовым системам второго рода, разрешимым методом редукции.

Таким образом, совокупность выражений (3.9) — (3.18) дает формальное решение поставленной задачи в виде функций дифракционного поля $\Pi^h(\mathcal{T})$, $\Pi^e(\mathcal{T})$ в произвольной точке пространства $\mathcal{T}$. Асимптотическая оценка интегралов в (3.10) позволяет вычислить это поле в волновой области ($kr \gg 1$). Наиболее наглядной и компактной в аналитическом смысле характеристикой процесса дифракции плоской волны на апертуре является коэффициент прохождения Q энергии падающей волны через апертуру [1], для которого из (3.9), (3.10), (3.14) следует формула

$$Q \cos \theta_0 = 2(4/\pi)^2 k Z \int_0^k dx \cdot x^2 \times \quad (3.19)$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} e_m [Z |h_m(\xi)|^2 + Y |e_m(\xi)|^2], \quad h_0(\xi) \equiv 0.$$

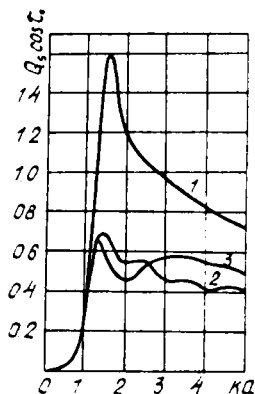


Рис. 3.1. Зависимость коэффициента Q прохождения энергии E -волны от радиуса апертуры ka для различных углов падения θ_0 . Кривые 1—3 соответствуют $\theta_0 = 0-90^\circ$ (30°)

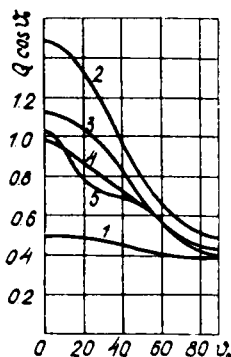


Рис. 3.2. Зависимость характеристики $Q \cos \theta_0$ для E -волны от угла падения θ_0 при различных значениях радиуса апертуры ka . Кривые 1—5 соответствуют $ka = 1.0-5.0$ (1.0)

Полученные с помощью (3.19) численные результаты представлены графически на рис. 3.1, 3.2. На рис. 3.1 даны графики зависимости величины Q от приведенного (выраженного в единицах $\lambda = \lambda/2\pi$) радиуса апертуры k ($=ka$) для нескольких значений угла падения θ_0 первичной волны. Рис. 3.2 иллюстрирует зависимость дифракционной характеристики $Q \cos \theta_0$ от угла θ_0 при фиксированных значениях параметра ka .

2. В том случае, когда на экран с апертурой набегают плоская электромагнитная волна типа Н, равносильные (3.9) разложения в ряды Фурье функций $\Pi^h(\tau)$, $\Pi^e(\tau)$ дифракционного поля даются выражениями

$$\Pi^h(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \Pi_m^h(\rho, z) \cos m\varphi, \quad (3.20)$$

$$\Pi^e(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \Pi_m^e(\rho, z) \sin m\varphi, \quad \Pi_0^e(\rho, z) \equiv 0,$$

в которых амплитуды $\Pi_m^h(\rho, z)$, $\Pi_m^e(\rho, z)$ определяются теми же формулами (3.10). Эквивалентная (3.11), (3.12) система парных интегральных уравнений в рассматриваемом случае имеет вид

$$\int_0^{\infty} [kZh_m(\xi) \mp \kappa e_m(\xi)] J_{m \mp 1}(\xi \rho) \xi d\xi = 0, \quad 1 \leq \rho < \infty. \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(\xi) [\kappa h_m(\xi) \mp kYe_m(\xi)] J_{m \mp 1}(\xi \rho) \xi d\xi = \\ = -2YJ_{m \mp 1}(\xi_0 \rho), \quad 0 \leq \rho \leq 1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Использование в уравнении (3.22) разложений (3.14), (3.15) приводит к совокупности ($m=0, 1, 2, \dots$) систем линейных уравнений:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [A_{0\nu}^m \cdot h_{m\nu} - B_{0\nu}^m e_{m\nu}] = v_0^m, \quad (3.23)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\mu\nu}^m h_{m\nu} = v_{\mu}^m,$$

$$h_{m0} + (2m + 1)e_{m0} = 0,$$

$$-\sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\mu\nu}^m e_{m\nu} = 0,$$

$$\mu = 1, 2, \dots$$

для коэффициентов $h_{m\nu}$, $e_{m\nu}$ функциональных рядов (3.14). Коэффициенты $A_{\mu\nu}^m$, $B_{\mu\nu}^m$, v_{μ}^m этих систем выражаются теми же формулами (3.17), (3.18).

Выражение

$$Q \cos \theta_0 = 2(4/\pi)^2 k Z \cos^2 \theta_0 \int_0^{\kappa} d\kappa \cdot \kappa^2 \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} e_m [Z|h_m(\xi)|^2 + Y|e_m(\xi)|^2], e_0(\xi) \equiv 0 \quad (3.24)$$

для коэффициента прохождения энергии H -волны через апертуру отличается формально лишь наличием дополнительного множителя $\cos^2 \theta_0$ в правой части. Рис. 3.3, 3.4 иллюстрируют графически рассчитанные по формуле (3.24) зависимости энергетического коэффициента прохождения Q от радиуса апертуры ka ($=ka$) при заданных значениях угла падения θ_0 (см. рис. 3.3) и от угла θ_0 при

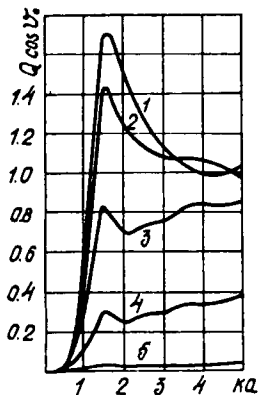


Рис. 3.3. Зависимость коэффициента Q прохождения энергии H -волны от радиуса апертуры ka для различных углов падения θ_0 . Кривые 1–5 соответствуют $\theta_0 = 0^\circ$ – 80° (20°)

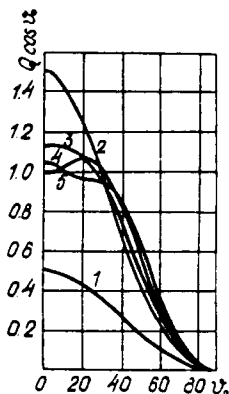


Рис. 3.4. Зависимость характеристики $Q \cos \theta_0$ для H -волны от угла падения θ_0 при различных значениях радиуса апертуры ka . Кривые 1–5 соответствуют $ka = 1,0$ – $5,0$ ($1,0$)

фиксированных ka (см. рис. 3.4). Следует отметить, что кривые с индексом 1, относящиеся к случаю нормального падения волны ($\theta_0 = 0$), как и должно быть, являются идентичными и совпадают с соответствующим графиком, рассчитанным классическим методом [1, с. 293]. Характерной особенностью всех кривых на рис. 3.1 и 3.3 является наличие «резонансного» максимума вблизи точки $ka = 1,5$.

Из простых соображений следует, что предельные значения величины $Q \cos \theta_0$ при $ka \rightarrow \infty$ равны $\cos \theta_0$ (т. е. $Q \rightarrow 1$). Степень отклонения ее от предельных значений при наибольших фигурирующих в расчетах значениях ka тем больше, чем больше угол падения θ_0 , что можно объяснить видимым сокращением размера апертуры, наблюдаемой с направления прихода падающей волны, с ростом θ_0 . Различие в величине характеристики $Q \cos \theta_0$ при больших значениях ka способствует выявлению свойств круглой апертуры в экране как поляризационного фильтра при скользящем падении электромагнитной волны на экран.

3.3. «Высвечивание» энергии собственных волн плоского волновода через апертуру в его стенке

К числу наиболее простых систем из нескольких параллельных экранов с апертурами относится ограниченный плоскостями $z=0$ и $z=-b$ волновод, в одной из стенок которого ($z=0$) имеется круглое отверстие с радиусом $a=1$. Предполагается, что по волноводу на апертуру набегают в направлении положительных x двумерная электромагнитная волна. Как и в предыдущем параграфе, целесообразно рассматривать случаи дифракции на апертуре E - и H -волн отдельно.

1. В первом из них поле первичной E -волны может быть описано с помощью вектора напряженности магнитного поля

$$\vec{H}_p^e = 2\hat{y}Y \exp(ikx \sin \tau_p) \cos(kz \cos \tau_p). \quad (3.25)$$

В этом выражении $\hat{y} \rightarrow$ единичный координатный орт; τ_p — бриллюэновский угол для волноводной E -волны с индексом p , вводимый соотношениями $\xi_p = (k^2 - \kappa_p^2)^{1/2} = k \sin \tau_p$, $\kappa_p = p\pi/b = k \cos \tau_p$ ($0 < \tau_p \leq \pi/2$, $0 \leq p \leq P$; $P = [kb/\pi]$ — целая часть отношения kb/π).

Использование для решения поставленной задачи метода разрывных интегралов, схематически представленного в § 3.1, приводит формально к тому же выражению (3.19) для коэффициента Q , прохождения энергии волноводной E -волны в полупространство $z \geq 0$, в котором нужно заменить левую часть выражением $Q \cos \tau_p$. Формулы (3.16) — (3.18) также сохраняют свое значение,

только функция $j(\xi)$ под интегралами (3.17) приобретает вид

$$j(\xi) = 1 + i \operatorname{ctg} \chi b, \quad (3.26)$$

а в формуле (3.17) необходимо заменить $\xi_0 = k \sin \theta_0$ величиной $\xi_p = k \sin \tau_p$ ($p = 0, 1, 2, \dots, P$).

Результаты численного анализа коэффициента прохождения Q , энергии волноводных волн от параметров задачи представлены на рис. 3.5—3.8. Рассчитывались

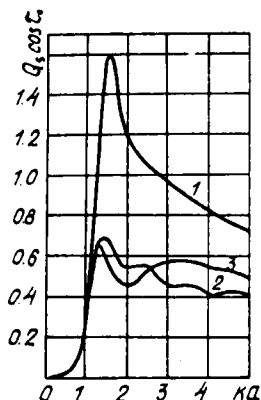


Рис. 3.5. Зависимость коэффициента прохождения Q , для E_0 -волны от радиуса апертуры ka для различных значений высоты волновода β . Кривые 1—3 соответствуют $\beta = 2,5$ —6,5 (2,0)

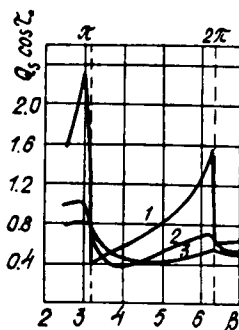


Рис. 3.6. Зависимость характеристики $Q \cos \varepsilon_0$ для E_0 -волны от высоты волновода β при различных значениях радиуса апертуры. Кривые 1—3 соответствуют $ka = 1,5$ —4,5 (1,5)

случаи дифракции на апертуре E_0 -волны (см. рис. 3.5, 3.6) и E_1 -волны (см. рис. 3.7, 3.8). На рис. 3.5, 3.7 даются графики зависимости величин $Q \cos \varepsilon_0$ и $Q \cos \varepsilon_1$ от приведенного радиуса апертуры ka при фиксированных значениях приведенной высоты волновода $\beta = kb$. Рис. 3.6 и 3.8 иллюстрируют зависимость тех же дифракционных характеристик от параметра β при заданных значениях ka .

2. Решение тем же методом задачи дифракции на

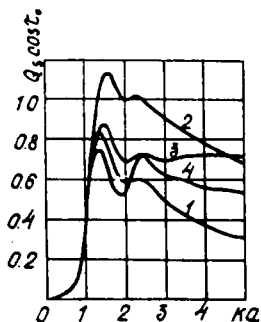


Рис. 3.7. Зависимость коэффициента прохождения Q , энергии E_1 -волны от радиуса апертуры для различных значений высоты волновода β . Кривые 1—4 соответствуют $\beta = 3,5—8,0$ (1,5)

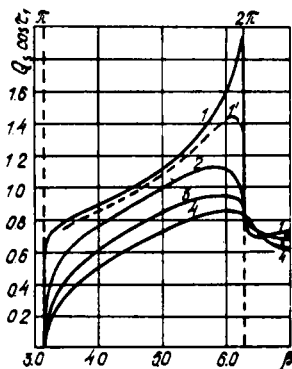


Рис. 3.8. Зависимость характеристики $Q, cost_1$ для E_1 -волны от высоты волновода β при различных значениях радиуса апертуры ka . Кривые 1—4 соответствуют $ka = 1,5—4,5$ (1,0); 1' — $ka = 1,75$

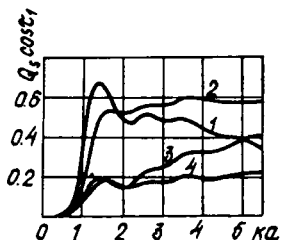


Рис. 3.9. Зависимость коэффициента прохождения Q , энергии H_1 -волны от радиуса апертуры при различных значениях высоты волновода β . Кривые 1—4 соответствуют $\beta = 3,5—8,0$ (1,5)

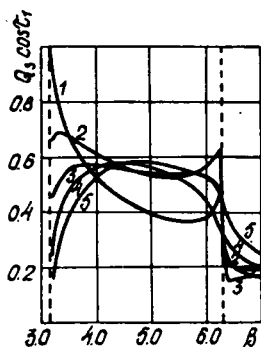


Рис. 3.10. Зависимость характеристики $Q, cost_1$ для H_1 -волны от высоты волновода β при различных значениях радиуса апертуры. Кривые 1—5 соответствуют $ka = 1,25, 1,50, 1,75, 3,00, 4,50$

апертуре в стенке волновода собственной H -волны с полем, представленным вектором

$$\vec{H}_p^h = 2\hat{x}Y\cos\tau_p \exp(ikx\sin\tau_p)\cos(kz\cos\tau_p) \quad (3.27)$$

($\hat{x}$ — координатный орт, $p=1, 2, \dots, P$), приводит к тому же выражению (3.24) для дифракционной характеристики $Q\cos\tau_p$, в котором нужно заменить символ θ_0 символом τ_p и сопутствующими ему формулами (3.23), (3.17), (3.18), (3.26) с заменой в (3.18) $\xi_0 = k\sin\theta_0$ на $\xi_p = k\sin\tau_p$ ($p=1, 2, \dots, P$).

Некоторые результаты численного анализа дифракции волны H_1 на апертуре показаны на рис. 3.9, 3.10. Соответствующие кривые для волны H_2 представлены на

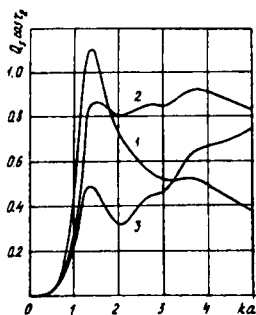


Рис. 3.11. Зависимость коэффициента прохождения Q , энергии H_2 -волны от радиуса апертуры для различных значений высоты волновода β . Кривые 1—3 соответствуют $\beta=6,5$ — $9,5$ (1,5)

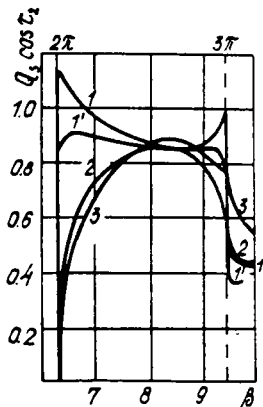


Рис. 3.12. Зависимость характеристики $Q\cos\tau_p$ для H_2 -волны от высоты волновода при различных значениях радиуса апертуры ka . Кривые 1—3 соответствуют $ka=1,5$ — $4,5$ (1,5); 1'— $ka=1,75$

рис. 3.11, 3.12. Рис. 3.9 и 3.11 дают представления о зависимости коэффициента прохождения Q , энергии H_1 - и H_2 -волн в верхнее полупространство от приведенного радиуса апертуры ka для нескольких заданных значений такой же высоты волновода β . Рис. 3.10, 3.12 иллюстрируют зависимость (при фиксированных значениях пара-

метра ka) характеристики $Q, \cos \tau_p$ от параметра β при ответственных значениях индекса $p=1, 2$.

Как видно из рис. 3.5, 3.7, 3.9, 3.11, ход кривых, описывающих зависимость энергетического коэффициента Q , прохождения для апертуры в стенке волновода от радиуса ka , в общих чертах такой же, как и для апертуры в одиночном экране, для всех типов первичных волн E_p ($p=0, 1$), H_p ($p=1, 2$) и всех значений приведенной высоты волновода β .

Вопрос о предельных значениях характеристики $Q, \cos \tau_p$ при $ka \rightarrow \infty$ решается так же, как в разд. 3.2. При этом роль плоской волны, падающей на экран с апертурой под углом θ_n , выполняет одна из бриллюэновских компонент набегающей волноводной волны с индексом p , падающая на апертуру под углом $\tau_p = \arccos(p\pi/\beta)$.

Графики зависимости характеристики $Q, \cos \tau_p$ от высоты волновода β для обоих типов первичных волн E_p и H_p , представленные на рис. 3.6, 3.8, 3.10, 3.12, в основных чертах также сходны между собой. Они характерны тем, что, начиная с нулевых значений $Q, \cos \tau_p = 0$ при $\beta = p\pi$, величина $Q, \cos \tau_p$ с ростом β резко возрастает и, варьируя, достигает в окрестности точек $\beta = (p+n)\pi$, $n=1, 2, \dots$, более или менее острых максимумов. Резонансный характер зависимости $Q, \cos \tau_p$ от β наиболее заметен при значениях радиуса апертуры ka , в свою очередь, близких к «резонансным» ($ka \approx 1, 5$). Абсциссы резонансных пиков смещены из точек $\beta = \pi, 2\pi, \dots$ влево. Для других значений ka максимумы кривых выражены менее явно и имеют большее смещение.

Вообще, форма кривых зависимости функции $Q, \cos \tau_p$ от переменной β на указанных рисунках очень быстро меняется с изменением параметра ka . Чтобы можно было проследить динамику этих вариаций, на рис. 3.8, 3.10, 3.12 приведены дополнительные кривые для промежуточных значений ka .

Все эти результаты находят физическое истолкование, если рассматривать исследуемую систему как некоторый резонатор для локального электромагнитного поля, генерируемого неоднородностью волновода в виде апертуры, нагруженный на эту апертуру.

§ 3.4. Связь между двумя смежными плоскими волноводами через круглую апертуру в общей стенке

Следующей по сложности дифракционной задачей рассматриваемого здесь класса является задача о прохождении электромагнитной энергии через круглую апертуру, связывающую два смежных плоских волновода, образованных тремя параллельными экранами, совмещенными с плоскостями $z = -b_1$, $z = 0$, $z = b_2$ в цилиндрической системе координат. Предполагается, что первичное поле представляет собой E_p - или H_p -волну, набегаящую на апертуру по нижнему волноводу, и описывается соответственно функцией (3.25) или (3.27). В первом из этих выражений подразумевается, что индекс p лежит в пределах $0, P_1$, во втором — в пределах $1, P_1$. При этом $P_1 = [\beta_1/\pi]$, а через β_1 обозначена приведенная высота нижнего волновода $\beta_1 = kb_1$.

Применение процедуры метода разрывных интегралов к поставленной задаче приводит к математическим выражениям, формально совпадающим с выражениями, выписанными в разд. 3.2, 3.3 для ключевых задач. Здесь, как и выше, в качестве главной характеристики процесса дифракции волноводной волны рассматривается коэффициент прохождения (который мы обозначим символом Q_x) ее энергии через апертуру в верхний волновод (область $0 \leq z \leq b_2$).

В случаях, когда первичное поле представляется E_p - и H_p -волнами, этот коэффициент выражается формулами:

$$Q_{x \cos \tau_p} = \frac{16k^2}{\pi \beta_2} Z \sum_{n=0}^{P_1} \varepsilon_n \chi_n \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m [Z |h_m(\xi_n)|^2 + Y |e_m(\xi_n)|^2], \quad h_0(\xi_n) \equiv 0, \quad (3.28)$$

$$Q_{x \cos \tau_p} = \frac{16k^2}{\pi \beta_2} Z \cos^2 \tau_p \sum_{n=1}^{P_2} \varepsilon_n \chi_n \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m [Z |h_m(\xi_n)|^2 + Y |e_m(\xi_n)|^2], \quad e_0(\xi_n) \equiv 0, \quad (3.29)$$

в которых используются обозначения: $\beta_2 = kb_2$, $P_2 = [\beta_2/\pi]$,

$\xi_n = k \sin \tau_n$, $x_n = k \cos \tau_n = n\pi/\beta_2$. Функции $h_m(\xi_n)$, $e_m(\xi_n)$ представляются функциональными рядами (3.14). Множества их коэффициентов h_{mv} , e_{mv} ($m, v=0, 1, 2, \dots$) находятся как решения соответственных бесконечных систем алгебраических уравнений (3.16) и (3.23). Их коэффициенты имеют прежний вид (3.17), (3.18) (с заменой в последней формуле переменной $\xi_0 = k \sin \theta_0$ на $\xi_p = k \sin \tau_p$). При этом в качестве фактора $f(\xi)$ в подынтегральных выражениях в (3.17) необходимо взять функцию

$$f(\xi) = \operatorname{ctg} \chi b_1 + \operatorname{ctg} \chi b_2. \quad (3.30)$$

На рис. 3.13, 3.14 в качестве иллюстрации полученных аналитических результатов приводятся данные расчета

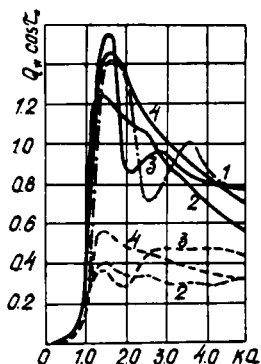


Рис. 3.13. Зависимость коэффициента прохождения Q_0 энергии E_0 -волны от радиуса апертуры ka для различных значений высоты волноводов β_1 и β_2 : 1 (штрих-пунктир): $\beta_1 = \beta_2 = 2,5$; 2, 3, 4 (сплошная): $\beta_1 = 2,5$, $\beta_2 = 4,5, 6,5, 8,5$; 2, 3, 4 (пунктир): $\beta_1 = 4,5, 6,5, 8,5$, $\beta_2 = 2,5$

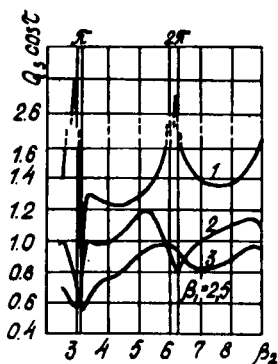


Рис. 3.14. Зависимость характеристики $Q_0 \cos^2$ для E_0 -волны от высоты волновода β_2 при $\beta_1 = 2,5$ и $ka = 1,5-3,5$ (1,0); кривые 1—3

по формулам (3.28), (3.16)—(3.18), (3.30) энергетического коэффициента прохождения через апертуру между волноводами E_0 -волны.

Зависимость дифракционной характеристики $Q_{\omega \cos \theta_0}$ от радиуса апертуры k (ka) для различных комбинаций высот волноводов β_1 и β_2 отражена на рис. 3.13. Чтобы пояснить смысл рис. 3.13, следует сказать, что штрих-пунктирная кривая 1 и сплошные кривые 2, 3, 4 относятся при фиксированном значении высоты $\beta_1 = 2,5$ волновода, по которому набегают волна, к соответствующим значениям $\beta_2 = 2,5; 4,5; 6,5; 8,5$. Штрих-пунктирная кривая 1 и штриховые кривые 2, 3, 4 соответствуют при фиксированном значении $\beta_2 = 2,5$ высотам волновода β_1 , по которому набегают первичная волна, равным $\beta_1 = 2,5; 4,5; 8,5$. На рис. 3.14 показана зависимость характеристики $Q_{\omega \cos \theta_0}$ от параметра β_2 при фиксированном значении $\beta_1 = 2,5$ для $ka = 1,5; 2,5; 3,5$ (соответственно кривые 1, 2, 3).

Из рис. 3.13 видно, что для круглого отверстия в стенке, разделяющей два волновода, характерны те же трансмиссионные свойства, что и для апертуры в одиночном экране (см. рис. 3.1). Как видно из рис. 3.14, зависимость характеристики $Q_{\omega \cos \theta_0}$ от поперечного размера волновода β_2 носит резонансный характер, который является наиболее резко выраженным для радиусов апертуры ka , близких к 1,5. При этом абсциссы вершин резонансных пиков оказываются смещенными из точек $\beta_2 = \pi, 2\pi, \dots$ влево. При больших значениях ka максимумы «расплываются» и имеют большее смещение.

На рис. 3.15 и 3.16 в графическом виде приводятся результаты численного исследования на основе выраже-

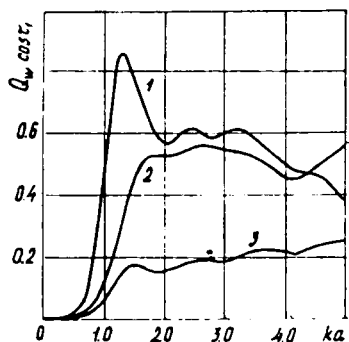


Рис. 3.15. Зависимость коэффициента прохождения $Q_{\omega \cos \theta_0}$ от радиуса апертуры ka . Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям высоты волноводов $\beta = 3,5, 5,5, 7,5$

ния (3.29) зависимости коэффициента прохождения Q_w через апертуру энергии волны типа H_1 от параметров задачи в частном случае, когда приведенные высоты волноводов $\beta_1 = kb_1$ и $\beta_2 = kb_2$ берутся равными друг другу ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$). На рис. 3.15 даны графики зависимости энергетического коэффициента Q_w от приведенного радиуса апертуры ka для трех значений ($\beta = 3,5; 5,5; 7,5$) высоты волноводов. В общих чертах они имеют тот же вид, что и на рис. 3.13 (случай E -волн). Рис. 3.16 иллюстрирует зависимость дифракционной характеристики $Q_w \cos \tau_1$ от параметра β при нескольких фиксированных значениях радиуса апертуры ka ($ka = 1,5; 3,0; 4,5$).

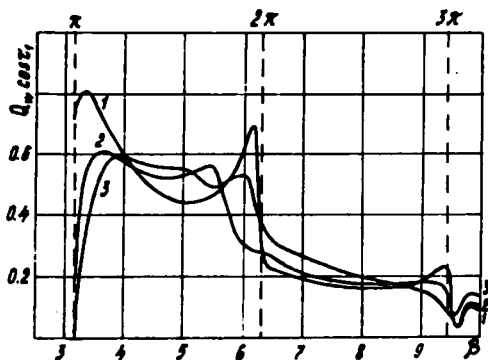


Рис. 3.16. Зависимость дифракционной характеристики $Q_w \cos \tau_1$ от высоты волноводов β . Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям радиуса апертуры $ka = 1,5; 3,0; 4,5$

Характерный ход кривых на рис. 3.16 (как и на рис. 3.14) может быть интерпретирован с физической точки зрения, если рассматривать исследуемую волноводную систему как совокупность двух связанных между собой круглой диафрагмой резонаторов для порождаемого последней локального поля. Хотя это поле в волноводах в области апертуры имеет реактивный характер, вид кривых на рис. 3.14 и 3.16 свидетельствует о наличии в рассматриваемой системе резонансных явлений. Поскольку она имеет несколько «резонансных» параметров (ka , β_1 , β_2 , $\beta_1 + \beta_2$), их совместное влияние в значительной мере

усложняет картину явления. Приведенные здесь качественные соображения дополнительно подтверждаются графиком (рис. 3.17) зависимости мощности электромагнитного поля, проникающей через аперттуру в верхний волновод, от «частоты» первичной волны при фиксированных параметрах волноводной системы ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $ka = \beta/2$).

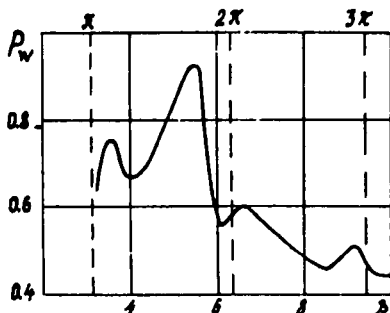


Рис. 3.17. Зависимость мощности P_w проникающего через аперттуру излучения от «частоты» первичной H_1 -волны при $ka = \beta/2$

3.5. Дифракция электромагнитных волн на системе спиральных проводников, помещенных в аперттуру плоского экрана

Если конечная область s_1 представляет собой семейство криволинейных проводников, описываемых монотонно возрастающей функцией $\rho(\varphi)$, то задание граничных условий на поверхности каждого проводника делает задачу трудноразрешимой строгими методами. Поэтому немаловажно надлежащим образом выбрать математическую модель объекта исследования. Если предположить, что расстояние между соседними проводниками намного меньше длины волны, а сами проводники являются тонкими, то в этом случае можно использовать модель поверхности с анизотропной проводимостью [48].

На следующем этапе, при формулировке задачи дифракции, возникает вопрос о задании электромагнитного поля в окрестности линии стыка поверхностей s_1 и s_2 , одна

из которых является анизотропно проводящей. В окрестности этой линии отдельные компоненты напряженности поля могут иметь сингулярность. С целью получения однозначного решения следует рассмотреть поведение электромагнитного поля в окрестности ребра идеально проводящей полуплоскости в сочленении с однопроводящей плоскостью. Такая постановка задачи дает возможность определить и потребовать надлежащее поведение полей в окрестности разрыва граничных условий для экрана и спирально проводящего диска. При использовании известного подхода Мейкснера [70] было установлено, что поведение поля в окрестности границы поверхностей s_1 и s_2 не зависит от угла наклона линий проводимости на полуплоскости по отношению к ребру, т. е. вблизи ребра идеально проводящей полуплоскости.

Пусть в круглой апертуре радиуса $a=1$ в плоском идеальном экране помещен диск того же радиуса, проводящий вдоль логарифмических спиралей $\rho(\varphi) = \rho_0 e^{a\varphi}$, где $a = \text{const}$ — параметр спирали. Диск с экраном расположен в однородной изотропной среде без потерь в плоскости $z=0$, а ось симметрии совпадает с осью z (рис. 3.18).

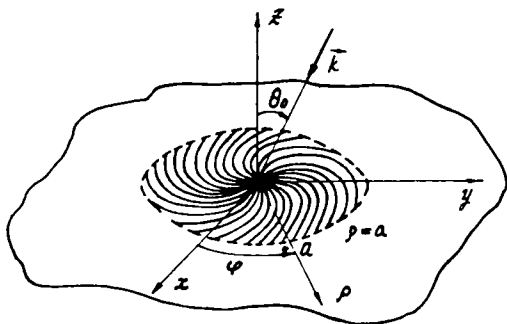


Рис. 3.18. Геометрия задачи

Структура облучается полем плоской электромагнитной волны E или H -поляризации с волновым вектором $\vec{k}$, составляющим угол θ_0 с осью z . Для получения однозначного решения необходимо компоненты напряженности полного поля подчинить граничным условиям на плос-

кости $z=0$, а также условию «на ребре» $\rho \rightarrow a$ и условию «на бесконечности» $\rho \rightarrow \infty$. Основная трудность при решении аналитическими методами такого класса задач заключается в разделении переменных в граничных условиях с учетом взаимосвязи полей по обе стороны от структуры. По этой причине невозможно совершить переход к БСЛАУ, как это сделано в разд. 3.2. Но если в исходных интегральных уравнениях производную от функции Бесселя заменить по рекуррентной формуле $I'_n(x) = I_{n-1}(x) - \frac{n}{x} I_n(x)$, затем первое слагаемое разложить в ряд по полиномам Якоби, используя их рекуррентные свойства [128]:

$$\begin{aligned}
 (\xi \rho)' J_{n-1}(\xi \rho) &= \rho^{n-1+t} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{\mu^{2\mu+n+t-1} I(\xi)}{\mu! \Gamma(\mu+n)} \cdot \\
 &\cdot [G_{\mu}(n+t, n+1; \rho^2) + \frac{\mu(\mu+t-1)}{(2\mu+n+t-2)} \cdot \\
 &\cdot \frac{1}{(2\mu+n+t-1)} G_{\mu-1}(n+t, n+1; \rho^2)],
 \end{aligned} \quad (3.31)$$

то в сочетании с (3.15) процедура алгебраизации системы интегральных уравнений труда не вызывает. В силу громоздкости выражений окончательный вид БСЛАУ не приводится. Следует подчеркнуть, что в методе разрывных интегралов матричные элементы в общем случае имеют вид

$$R_{2\nu, 2\mu} = \int_0^{\infty} f(\xi) J_{2\nu+\eta}(\xi) J_{2\mu+\beta}(\xi) d\xi, \quad \nu, \mu = 0, 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

Воспользовавшись рекуррентной формулой для цилиндрических функций, можно получить рекуррентные соотношения для вычисления интегралов типа (3.32):

$$\begin{aligned}
 R_{2\nu, 2\mu+2} &= \frac{2\mu+\beta+1}{2\nu+\eta} [R_{2\nu-1, 2\mu+1} + R_{2\nu+1, 2\mu+1}] - R_{2\nu, 2\mu} \\
 R_{2\nu+1, 2\mu+1} &= \frac{2\mu+\beta}{2\nu+\eta+1} [R_{2\nu, 2\mu} + R_{2\nu+2, 2\mu}] - R_{2\nu+1, 2\nu-1}.
 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Если определитель, составленный из матричных элементов, имеет размерность $N \times N$, достаточно вычислить $4(N-1)$ элемента, остальные $(N-2)^2$ элементов определяются по рекуррентным формулам (3.33). Например, при $N=10$ эффективность предложенной методики выра-

жается в трехкратном сокращении времени на подсчет матричных элементов СЛАУ.

Переходя к анализу, можно выделить два частных случая параметра спирали α : $\alpha=0$ соответствует системе концентрических проводников с центром в начале координат и $\alpha \rightarrow \infty$, когда ветви спиральных проводников разворачиваются в радиальные прямые. В соответствии с формулами (3.19), (3.24) на рис. 3.19 графически

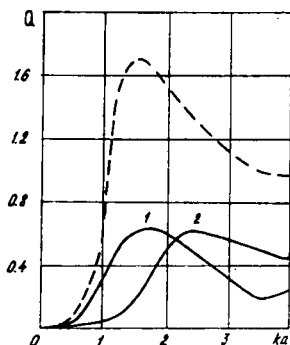


Рис. 3.19. Зависимость коэффициентов прохождения Q от радиуса апертуры ka при нормальном падении плоской волны

представлена зависимость энергетических коэффициентов прохождения (ЭКП) Q от электрического радиуса апертуры при нормальном облучении плоской волной. Кривая, нанесенная пунктиром, соответствует ЭКП для круглой апертуры в экране, кривая 2 определяет зависимость ЭКП для радиально-проводящего диска [31]. Сравнение кривых 1 и 2 дает возможность определить влияние металлизации экрана на рассеивающие свойства густой радиальной сетки. Максимум кривой 1 соответствует $ka \approx 1,7$, и его смещение в сторону длинноволновой области объясняется, главным образом, влиянием «апертурного» резонанса, наступающего при $ka = 1,57$. Рис. 3.20 иллюстрирует зависимость дифракционной характеристики $Q \cos \theta_0$ от радиуса апертуры ka при фиксированных значениях угла θ_0 и $\alpha \rightarrow \infty$. В силу частичной прозрачности исследуемой структуры все значения $Q \cos \theta_0$, соответствующие ей, меньше величины ЭКП для апертуры, свободной от проводников. Предельное значение $Q \cos \theta_0$ при $ka \gg 1$

можно вычислить строго, например с использованием результатов главы 1. Характерной особенностью кривых на рис. 3.20 является сглаживание «резонансного» максимума с увеличением угла прихода плоской волны H -поляризации.

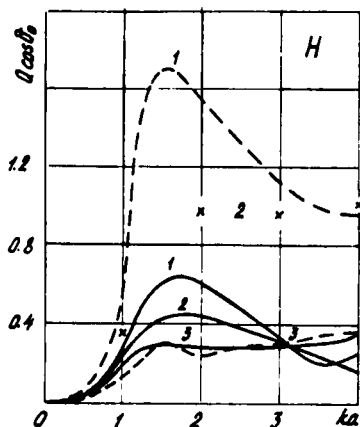
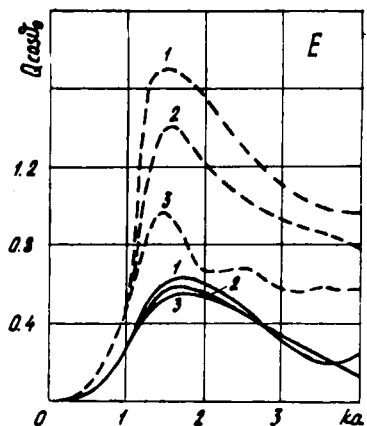


Рис. 3.20. Зависимость коэффициентов $Q \cos \theta_0$ от радиуса апертуры ka для различных углов θ_0 падения E - и H -плоских волн. Кривые 1—3 соответствуют $\theta_0 = 0-60^\circ$ (30°): сплошные—для радиальных проводников, пунктирные—без проводников

Рассмотрим другой предельный случай, когда $\alpha = 0$. На рис. 3.21 приведены зависимости $Q \cos \theta_0$ от радиуса апертуры при фиксированных значениях угла θ_0 . Плавная нарастающая кривая достигает максимального значения при $ka \approx 1,9$ и спадает до $ka \approx 2,4$. Качественное поведение приведенных зависимостей, характеризующих дифракционные свойства системы соосных кольцевых проводников, можно пояснить следующим образом. При облучении

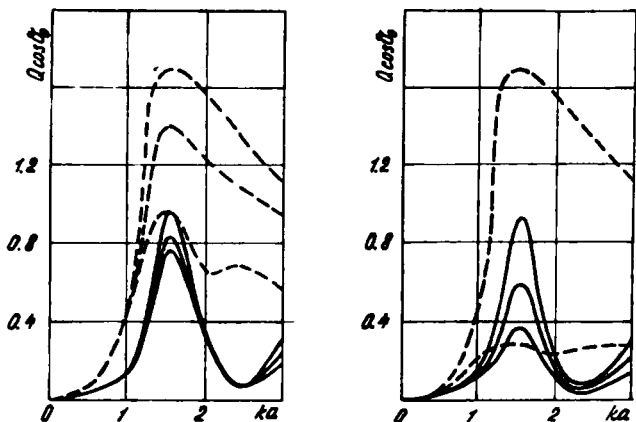


Рис. 3.21. Зависимость коэффициентов $Q \cos \theta_0$ от радиуса апертуры для различных углов θ_0 падения E - и H -плоских волн. Кривые 1—3 соответствуют $\theta_0 = 0^\circ$ — 60° (30°); сплошные — для кольцевых проводников, пунктирные — без проводников

плоской волной кольцевого проводника электрически малого размера так, что предположение о равномерном распределении тока справедливо, максимум переизлученного поля будет расположен в плоскости этого проводника. При электрических размерах кольцевых проводников, близких к резонансным, происходит излучение сферических волн под действием токов, наведенных полем плоской волны, а также переотраженным полем кольцевых проводников малого радиуса. Начиная с $ka \geq 2$, происходит заметное ослабление «резонансных» значений величины тока в проводнике, что приводит к усложнению его амплитудно-фазовой характеристики.

Зависимости $Q \cos \theta_0$ от ka при $\alpha = 0,5$ представлены на рис. 3.22. Отличие этих кривых от приведенных на рис. 3.21 связано с изменением распределения тока вдоль спирального проводника. Например, главный максимум при $ka \approx 1,6$ соответствует длине витка S , вдоль которого укладывается половина длины волны. В этом случае спиральные проводники можно считать полупроводнико-

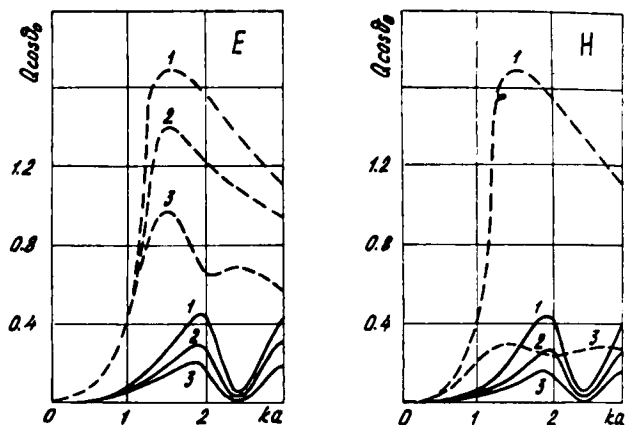


Рис. 3.22. Зависимости коэффициентов $Q \cos \theta_0$ от радиуса апертуры для различных углов θ_0 падения E - и H -плоских волн. Кривые 1—3 соответствуют $\theta_0 = 0-60^\circ$ (30°); сплошные — для проводников спиральной геометрии ($\alpha = 0,5$), пунктирные — без проводников

выми линейными вибраторами, в каждом из которых устанавливается стоячая волна тока. На рис. 3.23, 3.24 изображены диаграммы направленности дифракционного поля системы спиральных проводников в апертуре экрана при наклонном падении плоской волны для E - и H -поляризации в двух взаимно ортогональных плоскостях. Сплошной линией изображены диаграммы $|E_\psi/E_{\max}|$, пунктирной — $|E_0/E_{\max}|$, где $E_{\max}$ — абсолютный максимум, выбранный из E_ψ , E_0 . Из приведенных диаграмм видно, что при $ka \approx 3,1$ в интервале $0 < \alpha \leq 1$ и углах падения $\theta_0 \leq 60^\circ$ волновая картина поля практически неизменна. Дифракционное поле всегда симметрично относительно плоскости структуры.

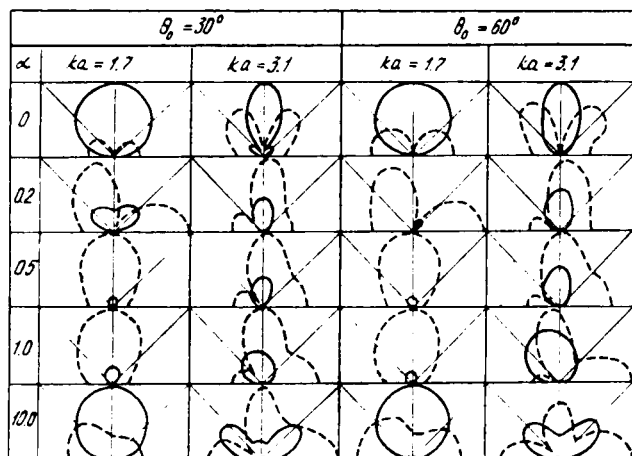
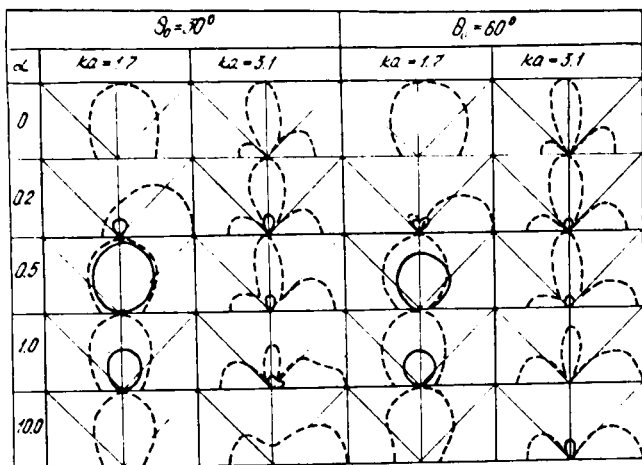


Рис. 3.23. Диаграммы дифракционного поля для разных параметров спирали α , радиусов апертуры ka и углов θ_0 падения E -поляризованной плоской волны: а — в плоскости падения $\varphi = 0, 180^\circ$; б — в плоскости $\varphi = 90^\circ, 270^\circ$

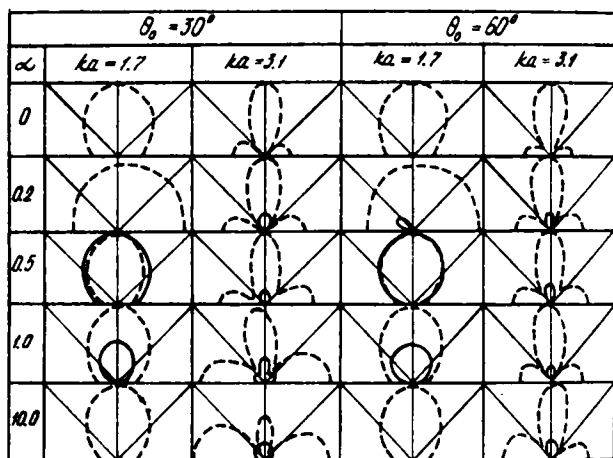
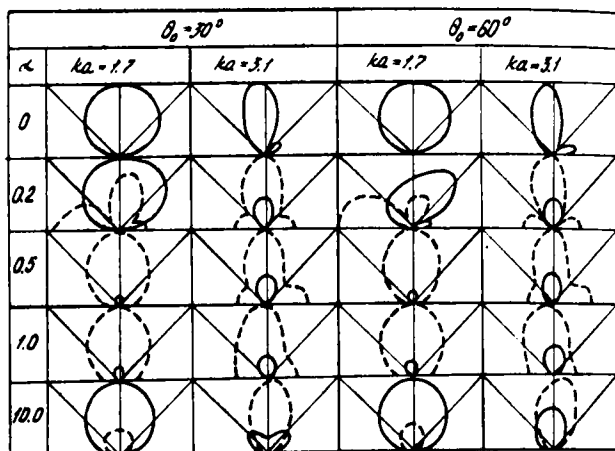


Рис. 3.24. Диаграммы дифракционного поля для разных параметров спирали α , радиусов апертуры ka и углов θ_0 падения H -поляризованной плоской волны: а — в плоскости падения $\varphi = 0, 180^\circ$; б — в плоскости $\varphi = 90^\circ, 270^\circ$

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ И ИМПЕДАНСНЫХ ТЕЛАХ

В последнее десятилетие для создания численных алгоритмов решения задач рассеяния наряду с методом интегральных уравнений большое распространение получил метод вспомогательных источников. Основная идея метода заключается в представлении искомого поля в виде суммы полей вспомогательных источников, расположенных внутри рассеивателя на некоторой нерезонансной поверхности, при этом каждое слагаемое берется с постоянным коэффициентом, который определяется с учетом граничных условий. Метод отличается идейной простотой, возможностью представления рассеянного поля в замкнутом виде вне и на поверхности тела и, как следствие этого, возможностью апостериорной оценки точности получаемого решения. К настоящему времени метод уже нашел широкое применение для решения двумерных задач рассеяния, а также класса трехмерных задач — задач рассеяния электромагнитных волн на телах вращения. Не претендуя на полноту обзора всего цикла работ, посвященных методу вспомогательных источников, отметим работы, которые, с точки зрения авторов, являются наиболее существенными. Двумерные задачи рассматриваются в [129—135]. В этих работах, кроме [135], в качестве вспомогательных источников используются нити электрических токов, неизвестные коэффициенты определяются как обычное решение системы линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей, полученной методом коллокации. Значительный вклад в развитие метода применительно к решению задач электромагнитного рассеяния на телах вращения внесены работами [136—142]. За исключением [136], в этих работах в качестве вспомогательных источников выбирают

ся совокупности электрических и магнитных диполей или мультиполей, расположенных на отрезке оси вращения (или ее отображения в комплексной плоскости). Неизвестные постоянные определяются как псевдорешения переопределенных систем линейных алгебраических уравнений, полученных путем поточечного удовлетворения граничным условиям в конечном числе точек на образующих рассеивателей. Переход к использованию псевдорешений в трехмерных задачах является существенным шагом, позволяющим получать устойчивые (в смысле значения нормы невязки граничных условий) решения рассматриваемой задачи. Развитые в [136—142] варианты метода позволяют решить широкий класс задач рассеяния на идеально проводящих, импедансных и диэлектрических телах, в том числе расположенных в полупространстве, а также на телах с диэлектрическим покрытием и многослойных телах.

К указанным выше работам непосредственное отношение имеют также работы [143—145] по аналитическому продолжению волновых полей. В упомянутых работах особенности численной реализации метода вспомогательных источников связываются со взаимным расположением этих источников и особенностей волнового поля, аналитически продолженного внутрь рассеивателя.

Во всех перечисленных работах рассматриваются либо двумерные задачи рассеяния, либо задачи рассеяния на телах вращения. Что касается задач рассеяния на телах более общей формы, не обладающих осевой симметрией, то попытки применить метод вспомогательных источников к решению таких задач весьма малочисленны. Нам известны только работы [146, 147], где рассматривается задача дифракции скалярного поля на трехосном эллипсоиде, а также работа [148], в которой метод антенных потенциалов, являющийся обобщением метода вспомогательных источников, применен к решению векторной задачи рассеяния поля магнитного диполя на трехосном эллипсоиде с идеально проводящей поверхностью.

В данной главе излагается модификация метода вспомогательных источников, пригодная для решения задач электромагнитного рассеяния на произвольных гладких и выпуклых идеально проводящих и импедансных телах. Материал главы частично опубликован в работах [149—152].

4.1. Постановка задачи и описание метода

Геометрия задачи показана на рис. 4.1. В однородной среде с электродинамическими параметрами ϵ и μ расположено импедансное тело, ограниченное замкнутой гладкой и выпуклой поверхностью S . Тело возбуждается стационарным электромагнитным полем $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$. Требуется определить поле $\{\vec{E}_s, \vec{H}_s\}$, рассеянное этим телом.

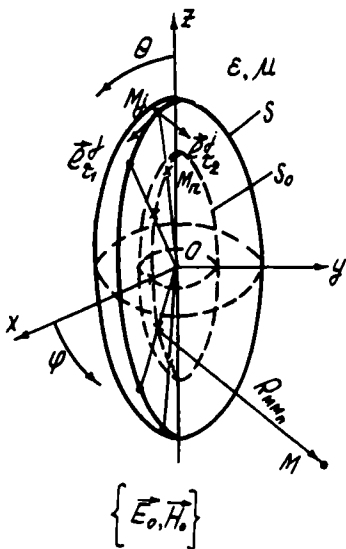


Рис. 4.1. Геометрия задачи

С математической точки зрения, поставленная задача является внешней краевой задачей для системы уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i\omega\mu \vec{H}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -i\omega\epsilon \vec{E} \quad (4.1)$$

с граничным условием

$$E_{\tau 1} = -Z \cdot H_{\tau 2}, \quad E_{\tau 2} = Z \cdot H_{\tau 1} \quad (4.2)$$

на поверхности тела S и условием излучения на бесконечности. В выражениях (4.1) и (4.2) $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — векторы полного электрического и магнитного полей: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_s$,

$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_s$, E_{t1} , E_{t2} и H_{t1} , H_{t2} — взаимно ортогональные касательные к поверхности тела S составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$; ω — частота; Z — поверхностный импеданс ($\text{Re}Z \geq 0$). Условие (4.2) означает, что импеданс изотропен, однако его значения могут меняться при переходе от одной точки поверхности S к другой. Будем предполагать, что закон изменения импеданса описывается непрерывной функцией $f(\theta_s, \varphi_s)$, где θ_s и φ_s — сферические координаты точки на поверхности тела, т. е. $Z = f(\theta_s, \varphi_s)$. В частности, при $Z=0$ рассеиватель становится идеально проводящим.

Представим рассеянное поле вне и на поверхности тела приближенно в виде суммы полей электрических диполей:

$$\begin{aligned}\vec{E}_s &= \sum_{n=1}^N \frac{i\omega}{k^2} \text{rot rot } \vec{\Pi}_n, \\ \vec{H}_s &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{\Pi}_n, \\ \vec{\Pi}_n &= \frac{\exp(ikR_{MM_n})}{R_{MM_n}} \cdot \vec{p}^n,\end{aligned}\quad (4.3)$$

где $k = \omega(\epsilon\mu)^{1/2}$; R_{MM_n} — расстояние от диполя с номером n до точки наблюдения M ; $\vec{p}^n$ — векторный дипольный момент.

Разместим диполи в точках M_n внутри тела на вспомогательной поверхности S_0 , подобной поверхности S с коэффициентом подобия K ($K < 1$). В каждой точке M_n диполи ориентируем таким образом, чтобы дипольный момент $\vec{p}^n$ лежал в плоскости, параллельной плоскости, касательной к поверхности рассеивателя в точке M , с теми же сферическими координатами θ , φ , что и координаты точки M_n . Таким образом, в выбранной плоскости $\vec{p}^n$ может быть разложен на две составляющие $p_{\tau_1}^n$ и $p_{\tau_2}^n$ вдоль взаимно ортогональных направлений $\vec{e}_{\tau_1}^i$, $\vec{e}_{\tau_2}^i$, причем для определенности $\vec{e}_{\tau_1}^i$ можно разместить в сечении $\varphi = \text{const}$. Можно показать, что при выборе указанного соответствия между точками M_n и M , дипольный момент $\vec{p}^n$ одновременно является касательным к вспомогательной поверхности S_0 .

Представления (4.3) удовлетворяют уравнениям

Максвелла (4.1) вне S и условию излучения. Компоненты векторов $p_{\tau_1}^n, p_{\tau_2}^n$ ($n = 1, 2, \dots, N$) являются неизвестными комплексными величинами, подлежащими определению с учетом граничных условий (4.2). После нахождения $p_{\tau_1}^n, p_{\tau_2}^n$ все необходимые характеристики рассеянного поля могут быть найдены из (4.3).

4.2. Различные способы определения p^n

Изложенный метод допускает различные способы определения дипольных моментов p^n . Будем аппроксимировать граничные условия (4.2) поточечно, т. е. заменим (4.2) на условия

$$E_{\tau_1}^j = -Z_j \cdot H_{\tau_2}^j, \quad E_{\tau_2}^j = Z_j \cdot H_{\tau_1}^j, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (4.4)$$

где M — конечное число точек на поверхности тела. Тогда для определения компонент $p_{\tau_1}^n, p_{\tau_2}^n$ получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$E_{st_1}^j + Z_j \cdot H_{st_2}^j = -(E_{0\tau_1}^j + Z_j \cdot H_{0\tau_2}^j), \quad (4.5)$$

$$E_{st_2}^j - Z_j \cdot H_{st_1}^j = -(E_{0\tau_2}^j - Z_j \cdot H_{0\tau_1}^j), \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

где $E_{st_1}^j, E_{st_2}^j, H_{st_1}^j, H_{st_2}^j$ и $E_{0\tau_1}^j, E_{0\tau_2}^j, H_{0\tau_1}^j, H_{0\tau_2}^j$ — тангенциальные компоненты рассеянного и возбуждающего поля в точке M_j на поверхности тела; Z_j — значение импеданса в этой точке.

Представляют интерес следующие два варианта соотношений между числом вспомогательных диполей N и числом точек аппроксимации граничных условий M : $M=N$ и $M>N$. При $M=N$ система (4.5) — это система типа

$$A\vec{p} = \vec{f}, \quad (4.6)$$

где A — квадратная матрица размерности $2N \times 2N$; $\vec{p}$ — вектор, составленный из компонент $p_{\tau_1}^n, p_{\tau_2}^n$ ($n = 1, 2, \dots, N$), а $\vec{f}$ — вектор, содержащий значения компонент $E_{0\tau_1}^j, H_{0\tau_2}^j, E_{0\tau_2}^j, H_{0\tau_1}^j$ возбуждающего поля. В этом случае (при невырожденности матрицы A) существует обычное решение системы (4.6): $\vec{p} = A^{-1} \cdot \vec{f}$, которое может быть найдено, например, методом Гаусса.

Если $M>N$, то система (4.5) представляет собой

переопределенную систему линейных алгебраических уравнений типа

$$B\vec{p} = \vec{f}, \quad (4.7)$$

где B — прямоугольная матрица размерности $2M \times 2N$. В этом случае обычно говорят об определении псевдорешения системы (4.7), то есть о нахождении такого $\vec{p}$, который доставляет минимум функционалу

$$\Phi^N = \|B\vec{p} - \vec{f}\|. \quad (4.8)$$

Функционал Φ^N имеет смысл нормы вектора невязки системы (4.7) или, что то же, нормы невязки граничных условий (4.5) на выбранной сетке точек M , на поверхности рассеивающего тела и с учетом (4.5) может быть переписан в виде

$$\Phi^N = \left\{ \sum_{j=1}^M \left[| (E_{s\tau}^j + Z_j \cdot H_{s\tau}^j) + (E_{0\tau}^j + Z_j \cdot H_{0\tau}^j) |^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + | (E_{s\tau}^j - Z_j \cdot H_{s\tau}^j) + (E_{0\tau}^j - Z_j \cdot H_{0\tau}^j) |^2 \right] \right\}^{1/2}. \quad (4.9)$$

Для определения псевдорешения $\vec{p}$ системы (4.7) может быть использована система уравнений Эйлера

$$B^*B\vec{p} = B^*\vec{f}, \quad (4.10)$$

где B^* — матрица, сопряженная матрице B . Однако применять систему (4.10) нужно с большой осторожностью, потому что матрица B^*B в задачах рассматриваемого типа является обычно чрезвычайно плохо обусловленной.

Наиболее надежными методами определения псевдорешения являются методы, основанные на сингулярном разложении матрицы B , а также итерационные методы.

Схема метода, использующего сингулярное разложение, может быть записана, например, следующим образом. Матрица B представляется в виде

$$B = U\Sigma V, \quad (4.11)$$

где U и V — унитарные матрицы, а Σ — диагональная матрица, содержащая сингулярные числа матрицы B . Если разложение (4.11) известно, решение системы (4.7) определяется по формуле

$$\vec{p} = V^*\Sigma^+U^*\vec{f}, \quad (4.12)$$

где Σ^+ — матрица, псевдообратная матрице Σ . Сильной

стороной методов такого типа является возможность улучшения обусловленности решаемой системы путем отбрасывания (по определенному критерию) малых сингулярных чисел.

Итерационные методы определения псевдорешения используют непосредственно выражение (4.9) для функционала Φ^y и реализуются по схеме

$$\vec{p}_{l+1} = \vec{p}_l + \lambda_l \vec{T}_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.13)$$

где l — номер итерации; $\vec{T}_l$ — вектор, определяющий направление спуска из точки $\vec{p}_l$; λ_l — число, величина которого определяет длину шага в направлении $\vec{T}_l$.

4.3. Сравнительный анализ различных способов определения $\vec{p}^n$

В данном разделе применительно к методу, изложенному в разд. 4.1, путем анализа результатов вычислительных экспериментов оценивается эффективность различных способов определения дипольных моментов $\vec{p}^n$. В качестве критерия эффективности используются точность получаемого решения и затраты машинного времени, необходимые для получения решения. Все численные расчеты были выполнены на ЭВМ ЕС-1033, конкретные оценки временных затрат относятся к этой машине.

Оценка точности решения осуществляется по значению величины относительной (по отношению к возбуждающему полю) нормы невязки граничных условий в точках, являющихся «промежуточными» относительно точек аппроксимации граничных условий, т. е. за меру точности выбирается величина

$$Q = \Phi^y / \Phi_0^y, \quad (4.14)$$

где Φ^y определяется выражением (4.9) с заменой точек аппроксимации граничных условий « j » на точки « m » ($m=1, 2, \dots, L$), являющиеся промежуточными относительно точек « j », а Φ_0^y — выражением

$$\Phi_0^y = \left\{ \sum_{m=1}^L \left[|E_{0n}^m + Z_m \cdot H_{0n}^m|^2 + |E_{0n}^m - Z_m \cdot H_{0n}^m|^2 \right] \right\}^{1/2}.$$

Для проведения численных экспериментов необходимо конкретизировать решаемую задачу. Выберем в качестве рассеивателя идеально проводящий трехосный эллипсоид, центр которого совмещен с началом декартовой системы координат $Oxyz$, а оси $2ka$, $2kb$ и $2kc$ — с осями Ox , Oy и Oz соответственно. Такой эллипсоид является простейшим телом, не обладающим симметрией вращения, и в то же время при различных соотношениях между полуосями ka , kb и kc он моделирует большой класс реальных объектов. Эллипсоид возбуждается плоской волной единичной амплитуды, падающей вдоль оси Oz , вектор $\vec{E}_0$ электрического поля которой ориентирован по оси Ox . В соответствии с рассматриваемой методикой диполи размещались на вспомогательной поверхности, выбранной также в виде трехосного эллипсоида с полуосями $ka_0 = K \cdot ka$, $kb_0 = K \cdot kb$, $kc_0 = K \cdot kc$, и в каждой точке размещения M_n ориентировались касательно относительно поверхности рассеивателя. В этом случае выражения для тангенциальных компонент $E'_{0\tau_1}$, $E'_{0\tau_2}$, $H'_{0\tau_1}$, $H'_{0\tau_2}$ возбуждающего и E'_{st_1} , E'_{st_2} , H'_{st_1} , H'_{st_2} рассеянного полей примут вид

$$E'_{0\tau_1} = \alpha'_1 \cdot \exp(ikz_1), \quad E'_{0\tau_2} = \alpha'_2 \cdot \exp(ikz_2), \quad (4.15)$$

$$H'_{0\tau_1} = (\varepsilon/\mu)^{1/2} \cdot \beta'_1 \cdot \exp(ikz_1),$$

$$H'_{0\tau_2} = (\varepsilon/\mu)^{1/2} \cdot \beta'_2 \cdot \exp(ikz_2),$$

$$E'_{st_1} = \sum_{n=1}^N \frac{\exp(ikR_{jn})}{kR_{jn}} \cdot [(A_{jn}^{(1)} \cdot \alpha_1^n + B_{jn}^{(1)} \cdot \beta_1^n + C_{jn}^{(1)} \cdot \gamma_1^n) \cdot \rho_{\tau_1}^n + (A_{jn}^{(1)} \cdot \alpha_2^n + B_{jn}^{(1)} \cdot \beta_2^n + C_{jn}^{(1)} \cdot \gamma_2^n) \cdot \rho_{\tau_2}^n], \quad (4.16)$$

$$E'_{st_2} = \sum_{n=1}^N \frac{\exp(ikR_{jn})}{kR_{jn}} \cdot [(A_{jn}^{(2)} \cdot \alpha_1^n + B_{jn}^{(2)} \cdot \beta_1^n + C_{jn}^{(2)} \cdot \gamma_1^n) \cdot \rho_{\tau_1}^n + (A_{jn}^{(2)} \cdot \alpha_2^n + B_{jn}^{(2)} \cdot \beta_2^n + C_{jn}^{(2)} \cdot \gamma_2^n) \cdot \rho_{\tau_2}^n],$$

$$H'_{st_1} = (\varepsilon/\mu)^{1/2} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{\exp(ikR_{jn})}{kR_{jn}} \cdot (1 + \frac{i}{kR_{jn}}).$$

$$\cdot [(D_{jn}^{(1)} \cdot \alpha_1^n + F_{jn}^{(1)} \cdot \beta_1^n + G_{jn}^{(1)} \cdot \gamma_1^n) \cdot p_{\tau_1}^n + \\ + (D_{jn}^{(1)} \cdot \alpha_2^n + F_{jn}^{(1)} \cdot \beta_2^n + G_{jn}^{(1)} \cdot \gamma_2^n) \cdot p_{\tau_2}^n],$$

$$H_{st_2}^j = (\varepsilon/\mu)^{1/2} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{\exp(ikR_{jn})}{kR_{jn}} \cdot \left(1 + \frac{i}{kR_{jn}}\right) \cdot$$

$$\cdot [(D_{jn}^{(2)} \cdot \alpha_1^n + F_{jn}^{(2)} \cdot \beta_1^n + G_{jn}^{(2)} \cdot \gamma_1^n) \cdot p_{\tau_1}^n + \\ + (D_{jn}^{(2)} \cdot \alpha_2^n + F_{jn}^{(2)} \cdot \beta_2^n + G_{jn}^{(2)} \cdot \gamma_2^n) \cdot p_{\tau_2}^n],$$

где $A_{jn}^{(1,2)} = Q_{jn} \cdot \alpha_{1,2}^j - (T_{jn}^{(1,2)}/R_{jn}) \cdot (x_j - x_n);$

$$B_{jn}^{(1,2)} = Q_{jn} \cdot \beta_{1,2}^j - (T_{jn}^{(1,2)}/R_{jn}) \cdot (y_j - y_n);$$

$$C_{jn}^{(1,2)} = Q_{jn} \cdot \gamma_{1,2}^j - (T_{jn}^{(1,2)}/R_{jn}) \cdot (z_j - z_n);$$

$$D_{jn}^{(1,2)} = (\beta_{1,2}^j(z_j - z_n) - \gamma_{1,2}^j(y_j - y_n))/R_{jn};$$

$$F_{jn}^{(1,2)} = (\gamma_{1,2}^j(x_j - x_n) - \alpha_{1,2}^j(z_j - z_n))/R_{jn}; \quad (4.17)$$

$$G_{jn}^{(1,2)} = (\alpha_{1,2}^j(y_j - y_n) - \beta_{1,2}^j(x_j - x_n))/R_{jn},$$

где, в свою очередь,

$$T_{jn}^{(1,2)} = [1 + 3i/kR_{jn} - 3/(kR_{jn})^2] \cdot [\alpha_{1,2}^j(x_j - x_n) + \\ + \beta_{1,2}^j(y_j - y_n) + \gamma_{1,2}^j(z_j - z_n)]/R_{jn};$$

$$Q_{jn} = 1 + i/kR_{jn} - 1/(kR_{jn})^2; \quad (4.18)$$

$$R_{jn} = [(x_j - x_n)^2 + (y_j - y_n)^2 + (z_j - z_n)^2]^{1/2};$$

x_j, y_j, z_j и x_n, y_n, z_n — декартовы координаты точек аппроксимации граничных условий M_j и точек размещения диполей M_n , связанные со сферическими координатами r_j, θ_j, φ_j и r_n, θ_n, φ_n этих точек соотношениями

$$x_{j,n} = r_{j,n} \cdot \sin\theta_{j,n} \cdot \cos\varphi_{j,n},$$

$$y_{j,n} = r_{j,n} \cdot \sin\theta_{j,n} \cdot \sin\varphi_{j,n},$$

$$z_{j,n} = r_{j,n} \cdot \cos\theta_{j,n}.$$

Входящие в выражения (4.15) — (4.18) величины $\alpha_{1,2}^{j,n}, \beta_{1,2}^{j,n}, \gamma_{1,2}^{j,n}$ определяются формулами:

$$\alpha_1^{j,n} = \frac{\cos\theta_{j,n} \cdot \cos\varphi_{j,n}}{(kc)^2 \cdot d_{j,n}},$$

$$\alpha_2^{j,n} = -\frac{\sin\varphi_{j,n}}{h_{j,n}} \cdot \left[\frac{\cos^2\theta_{j,n}}{(kc)^4} + \frac{\sin^2\theta_{j,n}}{(kb)^2} \cdot f_{j,n} \right],$$

$$\begin{aligned}\beta_1^{j,n} &= \frac{\cos\theta_{j,n} \cdot \sin\varphi_{j,n}}{(kc)^2 \cdot d_{j,n}}, \\ \beta_2^{j,n} &= \frac{\cos\varphi_{j,n}}{h_{j,n}} \cdot \left[\frac{\cos^2\theta_{j,n}}{(kc)^4} + \frac{\sin^2\theta_{j,n}}{(ka)^2} \cdot f_{j,n} \right], \\ \gamma_1^{j,n} &= - (f_{j,n}/d_{j,n}) \sin\theta_{j,n}, \quad \gamma_2^{j,n} = g_{j,n}/h_{j,n},\end{aligned}\tag{4.19}$$

где, в свою очередь,

$$\begin{aligned}d_{j,n} &= \left[\frac{\cos^2\theta_{j,n}}{(kc)^4} + \sin^2\theta_{j,n} \cdot f_{j,n}^2 \right]^{1/2}, \\ h_{j,n} &= \left\{ \sin^2\varphi_{j,n} \cdot \left[\frac{\cos^2\theta_{j,n}}{(kc)^4} + \frac{\sin^2\theta_{j,n}}{(kb)^2} \cdot f_{j,n} \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2\varphi_{j,n} \cdot \left[\frac{\cos^2\theta_{j,n}}{(kc)^4} + \frac{\sin^2\theta_{j,n}}{(ka)^2} \cdot f_{j,n} \right]^2 + g_{j,n}^2 \right\}^{1/2}, \\ f_{j,n} &= \frac{\cos^2\varphi_{j,n}}{(ka)^2} + \frac{\sin^2\varphi_{j,n}}{(kb)^2}, \\ g_{j,n} &= \frac{\sin\theta_{j,n} \cdot \cos\theta_{j,n} \cdot \sin\varphi_{j,n} \cdot \cos\varphi_{j,n}}{(kc)^2} \cdot \left[\frac{1}{(ka)^2} - \frac{1}{(kb)^2} \right].\end{aligned}$$

Формулы (4.15)–(4.19) справедливы для любых значений полуосей ka , kb и kc . Для удобства анализа мы будем использовать эллипсоид, в котором полуоси заданы соотношением $ka = kb(1 - \varepsilon)$, $kc = kb(1 + \varepsilon)$. В этом случае величина kb характеризует волновой размер эллипсоида, а величина ε — отклонение эллипсоида от сферы. Отметим, что для целей данного параграфа информация, содержащаяся в (4.15)–(4.19), является несколько избыточной, поскольку рассматривается идеально проводящее тело. В этом случае достаточно выражений для компонент $E_{0r_1}^j$, $E_{0r_2}^j$, $E_{st_1}^j$, $E_{st_2}^j$ электрических полей. Если же рассеиватель является импедансным, использование для решения задачи компонент $H_{0r_1}^j$, $H_{0r_2}^j$, $H_{st_1}^j$, $H_{st_2}^j$ магнитных полей обязательно.

В соответствии с общей схемой изложения рассмотрим два случая: $M=N$ и $M>N$. В первом случае задача определения дипольных моментов сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений типа (4.6), во втором — к решению системы типа (4.7). Для определения решения системы (4.6) использовался метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, а также метод сингулярного разложения (4.11)–(4.12). Для

определения псевдорешения системы (4.7) применялись уравнения Эйлера (4.10), сингулярное разложение (4.11) и итерационная схема (4.13). При численной реализации метода (4.11) — (4.12) осуществлялся переход в вещественное пространство и использовалась программа сингулярного разложения, приведенная в [153]. Система уравнений Эйлера решалась методом Гаусса. Что касается итерационных методов, укладывающихся в схему (4.13), то эти методы были предметом особого интереса авторов, поэтому исследовалась группа таких методов: метод покоординатного спуска, метод наискорейшего спуска и метод сопряженных градиентов. Остановимся кратко на существовании этих методов, подробное изложение их имеется, например, в [154].

В методе покоординатного спуска на каждой итерации $\bar{T}_l$ представляет собой совокупность всех векторов, совпадающих с одним из координатных направлений вектора $\bar{r}$. Начальный шаг λ_0 выбирается на основе имеющегося опыта, в нашем случае обычно $\lambda_0 = 0,1$. При выполнении условия

$$(\Phi_l^y - \Phi_{l+1}^y) / \Phi_l^y \leq 0,001, \quad (4.20)$$

где Φ_l^y и Φ_{l+1}^y — значения функционала (4.9) на предыдущей и последующей итерациях, осуществляется деление шага пополам.

Итерационный процесс останавливается, если в результате очередной операции деления шага выполняется условие $\lambda_l < 0,1 \cdot 10^{-3}$.

В методе наискорейшего спуска $\bar{T}_l$ представляет собой вектор антиградиента, т. е.

$$\bar{T}_l = -\text{grad} \Phi^y(\bar{\rho}_l), \quad (4.21)$$

λ_l на каждом шаге итерационного процесса определяется путем решения одномерной задачи минимизации

$$\min_{\lambda} \Phi_l^y = \Phi^y(\bar{\rho}_l + \lambda \bar{T}_l), \quad (4.22)$$

останов осуществляется при выполнении условия (4.20).

В методе сопряженных градиентов итерация с номером $l=0$ полностью совпадает с соответствующей итерацией метода наискорейшего спуска, при $l>0$ направление спуска формируется по формуле

$$\bar{T}_l = -\operatorname{grad}\Phi^N(\bar{\rho}_l) + \frac{|\operatorname{grad}\Phi^N(\bar{\rho}_l)|^2}{|\operatorname{grad}\Phi^N(\bar{\rho}_{l-1})|^2} \cdot \bar{T}_{l-1}, \quad (4.23)$$

λ_l определяется из условия (4.22), останов осуществляется при выполнении условия (4.20).

При реализации итерационных процедур обычно в качестве начального значения $\bar{\rho}_0$ вектора $\bar{\rho}$ выбиралось значение $\bar{\rho}_0 = 0$. Однако это не обязательно. В качестве $\bar{\rho}_0$ иногда целесообразнее применять, например, полученные ранее значения вектора $\bar{\rho}$ для эллипсоидов с другими (близкими) значениями полуосей. Это приводит к сокращению числа итераций. В методах наискорейшего спуска и сопряженных градиентов использовались аналитические выражения для компонент вектора градиента и λ_l . Их нетрудно получить из (4.9) с учетом (4.15) — (4.19), однако они довольно громоздки и поэтому в явном виде не приводятся. Расчет компонент вектора градиента по разностным формулам, а также численное решение задачи минимизации (4.22) приводят к существенному замедлению хода итерационного процесса, особенно при больших номерах итераций.

Рассмотрим некоторые из полученных результатов. На рис. 4.2 показана зависимость нормы невязки гранич-

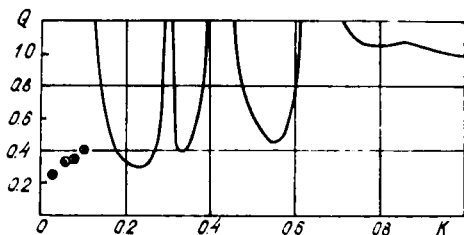


Рис. 4.2. Зависимость нормы невязки граничных условий Q от K для эллипсоида с параметрами $kb = 1.0$, $\varepsilon = 0.15$

ных условий Q , определяемой выражением (4.14), от K для эллипсоида с параметрами $kb = 1.0$, $\varepsilon = 0.15$. Число диполей N выбрано равным 30: в каждом из шести сечений $\varphi = \text{const}$ ($\varphi = 0, 60, 120, 180, 240, 300^\circ$) размещалось пять диполей (при $\theta = 18, 54, 90, 126, 162^\circ$). Число точек аппроксимации граничных условий M также выб-

рано равным 30, сферические координаты θ_j , φ_j этих точек совпадают с соответствующими сферическими координатами точек размещения диполей. Кривая зависимости Q от K рассчитывалась с использованием дипольных моментов, полученных путем решения соответствующей системы (4.6) методом Гаусса, и дипольных моментов, полученных путем решения этой же системы с использованием сингулярного разложения матрицы. В области $K > 0,15$ результаты расчетов совпадают с графической точностью. В области малых значений K ($K < 0,15$) наблюдается существенное различие между результатами, полученными с помощью метода Гаусса, и результатами, полученными методом сингулярного разложения матрицы. Вследствие плохой обусловленности матрицы решаемой системы метод Гаусса дает здесь большую погрешность, соответствующие значения Q выходят за формат рис. 4.2. В отличие от метода Гаусса, за счет отбрасывания малых сингулярных чисел метод сингулярного разложения работает надежно и в области малых K (соответствующие значения Q показаны на рис. 4.2 точками, обведенными кружками).

Таким образом, в области $K > 0,15$ результаты, получаемые методом Гаусса и методом сингулярного разложения матрицы, одинаковы (в смысле значений Q). Однако затраты машинного времени существенно различны. Решение системы (4.6) методом Гаусса заняло 1,5 мин, тогда как решение той же системы с помощью сингулярного разложения — 16 мин.

Полученная в процессе осуществления сингулярного разложения информация о сингулярных числах матрицы решаемой системы позволяет оценить, при каких порядках числа обусловленности матрицы результаты, получаемые методом Гаусса и методом сингулярного разложения, эквивалентны. На рис. 4.3 представлена зависимость числа обусловленности матрицы решаемой системы $\text{cond}(A)$ от значения параметра подобия вспомогательной поверхности K . Число обусловленности в данном случае определяется по формуле $\text{cond}(A) = \sigma_{\max}/\sigma_{\min}$, где $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$ — максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы. Принимая, что совпадение результатов наблюдается при $K \approx 0,15$, легко видеть, что этому значению K соответствует значение $\text{cond}(A) \approx 10^5$.

Обращает на себя внимание весьма своеобразный

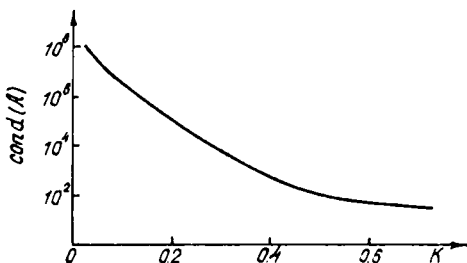


Рис. 4.3. Зависимость числа обусловленности системы $\text{cond}(A)$ от K : $k b = 1,0$, $\epsilon = 0,15$, $M = N = 30$

характер зависимости Q от K . Эта зависимость имеет вид серии минимумов, в окрестности которых Q слабо меняется при изменении K . На участках между минимумами значения Q резко меняются при малых изменениях K и достигают конечных, но больших и поэтому выходящих за формат рис. 4.2 значений. Для других параметров $k b$ и ϵ при выполнении условия $M = N$ характер зависимости Q от K сохраняется. Если вернуться к исходным выражениям (4.3), то такой характер зависимости Q от K означает, что при $M = N$ представление (4.3) является физически корректным только при определенных значениях K (соответствующих минимумам кривой зависимости Q от K). Таким образом, при использовании для определения дипольных моментов $\vec{p}^n$ систем типа (4.6) возникает необходимость выбора подходящего значения K .

Отмеченный характер кривой зависимости Q от K может быть объяснен, если привлечь результаты работ [143—145], увязывающих особенности численной реализации метода вспомогательных источников со взаимным расположением вспомогательной поверхности S_0 и особенностей волнового поля, аналитически продолженного внутрь рассеивателя. Несмотря на то, что в [145] определены особенности волнового поля только для сфероидов, используем результаты этой работы для локализации особенностей в нашем случае. Как показано в [145], для вытянутого сфероидов множество особых точек волнового поля представляет собой отрезок оси Oz , соединяющей фокусы эллипсов, являющихся сечением поверхности сфероидов плоскостью, проходящей через ось Oz , а

в случае сплюснутого сфероида — диск в плоскости xOy с радиусом, равным расстоянию от центра диска до одного из фокусов эллипсов, также являющихся сечением поверхности плоскостью, проходящей через ось Oz . Таким образом, общим для особых множеств обоих типов тел является то, что они включают в себя фокусы всех эллипсов, являющихся сечениями поверхности эллипсоида плоскостями, проходящими через ось Oz . Если принять это правило справедливым и для трехосного эллипсоида, то для того, чтобы охватить все особенности волнового поля, нужно выбрать $K > 0.7$. Как видно из рис. 4.2, наиболее сильная зависимость Q от K наблюдается именно в области $K < 0.7$, когда охваченной контуром S_0 оказывается только часть особенностей волнового поля; в области $K > 0.7$ зависимость Q от K носит более регулярный характер. Таким образом, обсуждаемый характер кривой зависимости Q от K может быть связан с использованием запрещенного теорией контура S_0 . «Платой» за это является необходимость подбора параметра K , обеспечивающего минимальные значения невязки. В двумерном случае возможность получения хороших результатов при использовании контура, не охватывающего всех особенностей дифракционного поля, отмечена в [143] при рассмотрении задачи дифракции плоской волны на эллиптическом цилиндре.

Рассмотрим теперь случай $M > N$. Как и в уже рассмотренном случае $M = N$, число диполей выбиралось равным 30. Число точек аппроксимации граничных условий было выбрано равным 40: в каждом из восьми сечений $\varphi = \text{const}$ ($\varphi = 0, 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315^\circ$) размещалось пять точек (при $\theta = 18, 54, 90, 126, 162^\circ$). Как и ранее, исследовалась зависимость относительной нормы невязки граничных условий Q от значения параметра подобия вспомогательной поверхности. При получении одной и той же зависимости Q от K использовались дипольные моменты, определяемые как решение системы уравнений Эйлера (4.10), как решение (4.12) и как результат применения итерационного процесса (4.13).

Результаты численных расчетов для эллипсоида с параметрами $kb = 1.0$, $\varepsilon = 0.15$ представлены на рис. 4.4. В области $K > 0.2$ наблюдается совпадение результатов, полученных с помощью дипольных моментов, определенных тремя отмеченными выше способами. В области

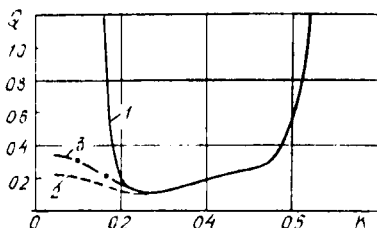


Рис. 4.4. Зависимость нормы невязки граничных условий Q от $K: kb=1,0$, $\epsilon=0,15$, $M=40$, $N=30$; 1 — система уравнений Эйлера; 2 — метод сингулярного разложения; 3 — метод сопряженных градиентов

$K < 0,2$ результаты различны. Метод Гаусса дает здесь большую погрешность, что приводит к резкому возрастанию значений Q . Наилучшие результаты получаются при использовании сингулярного разложения матрицы. Метод сопряженных градиентов дает несколько большие значения невязки. Это связано с тем, что сходимость итерационного процесса замедляется с уменьшением K , вследствие чего останов по условию (4.20) происходит раньше, чем достигается точка минимума функционала (4.9). Как видно из рис. 4.4, характер зависимости Q от K при использовании для определения дипольных моментов переопределенных систем алгебраических уравнений совершенно иной, чем при использовании для этой цели систем с квадратной матрицей. Это можно объяснить тем [143], что в алгоритм вносится дополнительная информация, т. е. осуществляется регуляризация решаемой задачи.

Несмотря на то, что в области $K > 0,2$ результаты, полученные с помощью системы уравнений Эйлера, совпадают с результатами, полученными другими способами, а время, затрачиваемое на решение этой системы, равно ≈ 2 мин (тогда как при использовании сингулярного разложения затрачивается ≈ 25 мин), мы не рекомендуем применять для определения дипольных моментов эту систему. Причиной является очень плохая обусловлен-

ность матрицы системы. Исследования показывают, что при увеличении размерности задачи (т. е. M и N), а также увеличении «сплюснутости» тела (т. е. ϵ) решение системы уравнений Эйлера становится неустойчивым к погрешностям вычислений. Поэтому для определения дипольных моментов целесообразнее использовать либо сингулярное разложение матрицы, т. е. алгоритм (4.11) — (4.12), либо итерационный метод минимизации функционала (4.13).

Чтобы окончательно сориентироваться, какой способ определения дипольных моментов больше подходит для метода, изложенного в разд. 4.1, сравним затраты машинного времени, необходимые для реализации (4.11) — (4.12) и итерационного процесса метода сопряженных градиентов. Вопрос этот требует проведения некоторых дополнительных исследований, поскольку время работы метода сопряженных градиентов при фиксации условия (4.20) зависит от скорости сходимости итерационного процесса (которая в свою очередь зависит от K , kb и ϵ).

Группа кривых, иллюстрирующих зависимость скорости сходимости итерационного процесса от выбранного значения параметра K вспомогательной поверхности, представлена на рис. 4.5. По вертикальной оси в выбран-

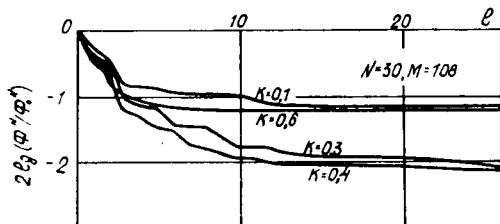


Рис. 4.5. Зависимости относительного значения функционала от номера итерации l при различных K для эллипсоида с параметрами $kb=1.0$, $\epsilon=0.15$

ном масштабе отсчитываются логарифмы относительных значений минимизируемого функционала Φ^N , по горизонтальной — номер итерации l (Φ_0^N — начальное значение функционала). Как видно из рис. 4.5, при малых и больших значениях K наблюдается уменьшение скорости сходимости итерационного процесса. Наивысшая ско-

рость сходимости достигается при $K \approx 0,3-0,5$, т. е. в окрестности минимума кривой зависимости Q от K . Это обстоятельство является очень важным, так как именно эта окрестность представляет наибольший интерес для решения задачи.

На рис. 4.6 представлены зависимости относительного значения функционала Φ^N от времени минимизации t для эллипсоидов с различными параметрами kb и ϵ .

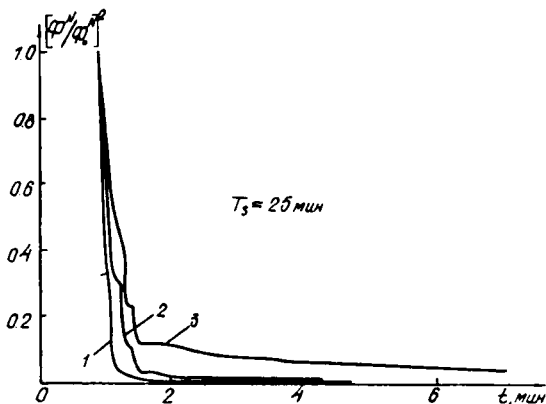


Рис. 4.6. Зависимости относительного значения функционала Φ^N от времени минимизации t для эллипсоидов с различными параметрами: 1 — $kb=1,0$, $\epsilon=0,15$; 2 — $kb=3,0$, $\epsilon=0,15$; 3 — $kb=3,0$, $\epsilon=0,3$; $N=30$, $M=40$

Параметр K выбран равным 0,4 (соответствует окрестности минимума кривой зависимости Q от K). Свободный от графиков интервал длиной ≈ 1 мин отражает время, затрачиваемое на получение информации, необходимой для осуществления итерационного процесса. Концы кривых соответствуют времени останова итерационного процесса по условию (4.20). Кривые показывают, что скорость сходимости итерационного процесса велика на первых шагах и существенно замедляется при приближении к минимуму. Вследствие этого останов можно осуществлять раньше, чем по использованному условию (4.20), сокращая тем самым время минимизации. Но даже в случае останова

итерационного процесса по условию (4.20) время, затрачиваемое на определение дипольных моментов во всех рассмотренных примерах, существенно меньше, чем время T_s , необходимое при использовании для этой цели сингулярного разложения. В данном случае $T_s \approx 25$ мин (это время показано на поле рис. 4.6). Помимо лучших временных характеристик метод сопряженных градиентов (как и другие итерационные методы) не требует хранения в оперативной памяти машины полной матрицы решаемой системы. Для его реализации в принципе достаточно хранить три вектора размерности $4N$. Всю остальную информацию можно пересчитывать на каждой итерации. Это, естественно, приводит к увеличению временных затрат. На практике при решении больших задач приходится осуществлять некоторый компромисс между объемом используемой оперативной памяти и временем работы итерационного процесса. Целесообразно задействовать для организации итерационного процесса всю имеющуюся в распоряжении оперативную память машины и перевычислять только ту информацию, которая в нее не помещается. Отмеченное свойство итерационных методов позволяет использовать их для нахождения решений (псевдорешений) систем очень высокого порядка.

Обобщая все сказанное выше, можно заключить, что применительно к методу, изложенному в разд. 4.1, при использовании для определения дипольных моментов систем алгебраических уравнений с квадратной матрицей следует отдать предпочтение методу Гаусса, при использовании переопределенных систем — методу сопряженных градиентов.

Сравним вариант метода, изложенный в разд. 4.1 (вместе с рекомендованными способами определения $\vec{p}''$), с его ближайшим известным аналогом. Таким аналогом является метод, изложенный в [134]. В работе [134] в случае идеально проводящего тела предложено использовать в качестве вспомогательных источников электрические диполи, ориентированные тангенциально относительно поверхности и размещенные (в целях достижения компромисса между обусловленностью решаемой системы и влиянием дискретности источников) относительно поверхности тела по «принципу квадратиков»: диполи размещаются на нормалях к поверхности так, чтобы расстояние между соседними диполями было равно расстоянию

диполей до поверхности. При этом неизвестные коэффициенты определяются как обычные решения систем линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей, полученных методом коллокации. Метод, изложенный в 4.1, отличается от [134] тем, что диполи размещаются не по «принципу квадратиков», а на поверхности, подобной поверхности рассеивателя. Выявленный выше характер зависимости Q от K наводит на мысль о том, что «принципу квадратиков» может соответствовать значение K , далеко отстоящее от того значения, которое обеспечивает минимальную невязку Q . Поэтому мы отказываемся от априорной фиксации положения диполей и путем перебора значений параметра K подбираем подходящее положение диполей. Вторым, более существенным, отличием рассмотренного метода от [134] является переход к определению неизвестных постоянных как псевдорешений переопределенных систем линейных алгебраических уравнений, находимых итерационным путем. Это существенно расширяет возможности метода. Отметим, что расположение вспомогательных источников на поверхности, подобной поверхности рассеивателя, применялось ранее в [129—133, 136—137], однако источники там выбирались либо другого типа [129—133], либо другой ориентации [136—137]. Отметим также, что для решения скалярной задачи метод сопряженных градиентов был использован ранее в [146]. В отличие от нашего подхода, в [146] решалась более трудоемкая нелинейная задача минимизации функционала невязки как по амплитудам вспомогательных источников, так и по координатам точек их расположения.

В заключение рассмотрим некоторые результаты, характеризующие сравнительную эффективность различных итерационных методов, укладываемых в схему (4.13). На рис. 4.7 представлены кривые, характеризующие ход итерационного процесса для различных итерационных методов: метода покоординатного спуска, метода наискорейшего спуска и метода сопряженных градиентов. По вертикальной оси отложены относительные значения функционала Φ^k , по горизонтальной оси — время, которое потребовалось для достижения этого значения Φ^k . Число диполей N выбрано равным 30, точки аппроксимации граничных условий размещались в два раза плот-

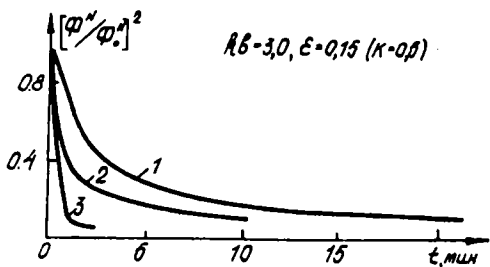
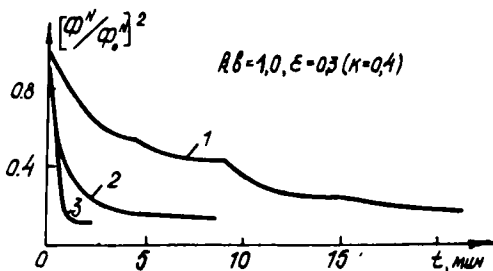
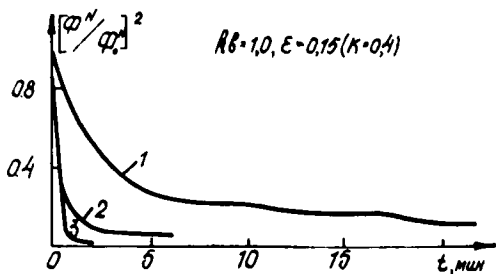


Рис. 4.7. Зависимости относительного значения функционала Φ^N от времени минимизации t для различных эллипсоидов и методов минимизации: 1 — метод покоординатного спуска; 2 — метод наискорейшего спуска; 3 — метод сопряженных градиентов

нее ($M=108$). Кривые показывают, что во всех рассмотренных случаях метод сопряженных градиентов обладает существенно большей скоростью сходимости, чем методы покоординатного и наискорейшего спуска. Именно по этой причине мы используем метод сопряженных градиентов.

4.4. Некоторые другие особенности метода

Ранее было показано, что большое значение для успешного применения исследуемого метода имеет способ определения неизвестных дипольных моментов. Показано также, что для этой цели целесообразно использовать метод сопряженных градиентов. В данном разделе будут рассмотрены другие особенности метода, в частности, влияние размеров и формы тела на скорость сходимости итерационного процесса, влияние числа источников и точек аппроксимации граничных условий на точность решения задачи, зависимость точности решения от направления прихода волны. Будут обсуждены также некоторые вопросы, связанные с областью применимости метода. Заметим, что при получении всех приведенных здесь результатов, если это не оговорено особо, дипольные моменты определялись методом сопряженных градиентов, при этом, как и ранее, использовалась ЭВМ ЕС-1033.

Как уже отмечалось, точность получаемого решения (норма невязки граничных условий) существенно зависит от значения параметра подобия K вспомогательной поверхности. Рассмотрим несколько подробно эти зависимости для эллипсоидов с различными параметрами kb , ϵ и Z . Группа таких зависимостей представлена на рис. 4.8. При их получении было выбрано 30 диполей и 108 точек аппроксимации граничных условий. Как видно из рис. 4.8, все зависимости качественно одинаковы — они имеют вид кривых с одним минимумом. Загиб кривых вверх при малых K объясняется ухудшением скорости сходимости итерационного процесса, вследствие чего при фиксированном условии (4.20) он останавливается раньше, чем достигается точка минимума, загиб кривых при больших K связан с влиянием дискретности источников. С увеличением волнового размера тела kb минимум сдвигается в сторону больших K , с увеличением ϵ положение минимума сохраняется, однако кривая смещается вверх.

Введение импеданса поверхности тела приводит также к сдвигу минимума. Очевидно, что наивысшая точность расчета характеристик рассеяния достигается при выборе $K=K_0$, соответствующего минимуму $Q_{\min}$. Глубина этого минимума определяет предельно достижимую точность решения рассматриваемой задачи при выбранной совокупности диполей и точек аппроксимации граничных условий. Значение K_0 для конкретной задачи заранее неизвестно. Однако опыт показывает, что обычно K_0 располагается в интервале $0,4 < K_0 < 0,6$, выбор любого значения K из этого интервала обеспечивает приемлемую точность решения задачи.

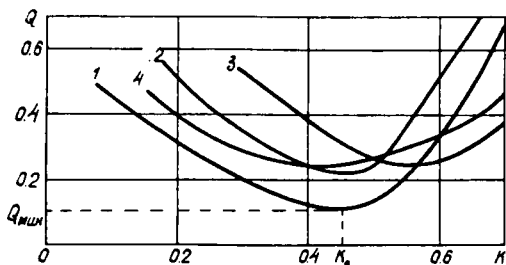


Рис. 4.8. Зависимость нормы невязки граничных условий Q от K для эллипсоидов с различными параметрами и значениями импеданса: 1— $kb=1,0$, $\epsilon=0,15$, $Z=0$; 2— $kb=1,0$, $\epsilon=0,25$, $Z=0$; 3— $kb=3,0$, $\epsilon=0,15$, $Z=0$; 4— $kb=3,0$, $\epsilon=0,15$, $Z=0,2(1+i)$

В связи с тем, что окрестность минимума кривой зависимости Q от K представляет наибольший интерес для решения задачи, рассмотрим в этой окрестности влияние размеров и формы эллипсоида на скорость сходимости итерационного процесса. Для этого вернемся к рис. 4.6, где приведены кривые, характеризующие зависимость относительного значения минимизируемого функционала Φ^* от времени минимизации для идеально проводящих эллипсоидов с различными параметрами kb и ϵ . Из рис. 4.6 следует, что как увеличение волнового размера эллипсоида, так и увеличение его «сплюснутости» приводит к уменьшению скорости сходимости итерационного процесса. Помимо выбора значения параметра подобия K большое влияние на точность получаемого решения ока-

зывает выбор числа вспомогательных источников. Это обстоятельство отмечалось ранее в [137]. Применительно к обсуждаемой модификации вопрос о влиянии числа диполей на точность получаемого решения был рассмотрен не только в том случае, когда используется итерационный способ определения неизвестных дипольных моментов, но и в случае, когда для этой цели используется прямой метод решения системы (4.6). На рис. 4.9 представлена зависимость минимального достижимого значе-

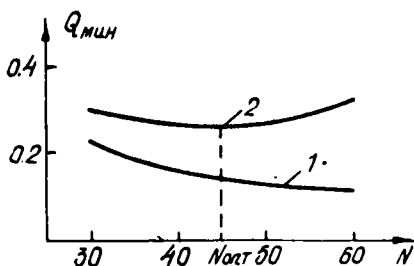


Рис. 4.9. Зависимости минимального достижимого значения нормы невязки граничных условий $Q_{\min}$ от числа диполей N для эллипсоида с параметрами $kb=1.0$, $\varepsilon=0.15$ при различных способах определения дипольных моментов: 1 — метод сопряженных градиентов; 2 — решение (4.6) методом Гаусса

ния невязки $Q_{\min}$ от числа диполей N для эллипсоида с параметрами $kb=1.0$, $\varepsilon=0.15$ для первого (кривая 1) и второго (кривая 2) случаев. При построении этих кривых предполагалось, что точки аппроксимации граничных условий имеют те же сферические координаты, что и соответствующие диполи, и их число равно числу диполей ($M=N$). Для определения значения $Q_{\min}$ при каждом фиксированном N предварительно осуществлялось построение кривой зависимости Q от K . При сравнении кривых 1 и 2 отмечено их существенное качественное различие. Кривая 1, соответствующая итерационному методу определения дипольных моментов, носит монотонный характер, т. е. в этом случае увеличение числа диполей приводит к увеличению точности получаемого решения. В отличие от кривой 1 кривая 2 имеет характер кривой с мини-

мумом, т. е. существует оптимальное количество вспомогательных источников $N_{\text{опт}}$, обеспечивающее наивысшую возможную точность решения задачи. Исследования показывают, что величина $N_{\text{опт}}$ зависит от значений параметров kb и ϵ . Немонотонный характер зависимости $Q_{\text{мин}}$ от N дополнительно ограничивает область применимости рассматриваемого метода, если дипольные моменты определяются прямым решением системы (4.6). Увеличение числа точек аппроксимации граничных условий M при фиксированном числе диполей N приводит к уменьшению нормы невязки граничных условий Q , т. е. к повышению точности решения задачи. Это понятно, так как увеличение M означает более точный учет граничных условий. Однако повышение точности не беспредельно. При определенных значениях M достигается состояние насыщения. Дальнейшее увеличение M бесполезно и даже может привести к росту значения невязки. Это объясняется ухудшением сходимости итерационного процесса. Типичная кривая зависимости Q от M при фиксированном N изображена на рис. 4.10. При ее построении предполага-

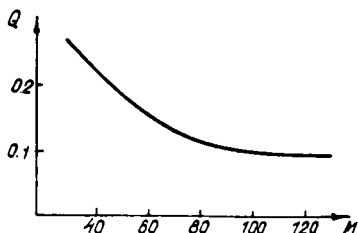


Рис. 4.10. Зависимость нормы невязки граничных условий Q от числа точек аппроксимации граничных условий M для эллипсоида с параметрами $kb=1.0$, $\epsilon=0.15$

лось $N=30$, $K=0.4$. Для данного тела в состоянии насыщения расстояние Δr^M между точками аппроксимации граничных условий находится в интервале $0.05\lambda < \Delta r^M < 0.07\lambda$, а расстояние Δr^N между диполями на вспомогательной поверхности — в интервале $0.03\lambda < \Delta r^N < 0.07\lambda$.

Таким образом, точность решения задачи существенно зависит от выбора числа источников и точек аппрокси-

мации граничных условий. Если число источников и точек аппроксимации фиксировано, то точность получаемого решения зависит от параметров эллипсоида kb и ϵ . Характер этих зависимостей показывают кривые, представленные на рис. 4.11—4.12. При их получении число диполей

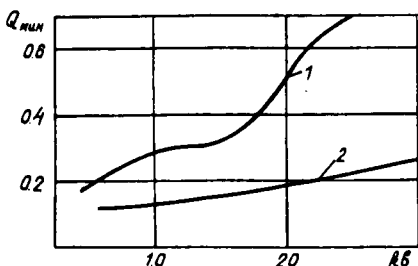


Рис. 4.11. Зависимости минимального достижимого значения невязки $Q_{\min}$ от волнового размера эллипсоида kb при $\epsilon=0,15$

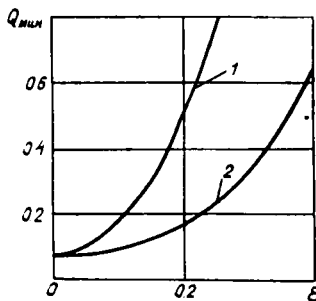


Рис. 4.12. Зависимости минимального достижимого значения невязки $Q_{\min}$ от ϵ для эллипсоида с волновым размером $kb=1,0$

было выбрано равным 30. Кривые 1 характеризуют зависимости минимальных достижимых значений $Q_{\min}$ от kb (см. рис. 4.11) и ϵ (см. рис. 4.12) в случае, если дипольные моменты определяются путем решения методом Гаусса системы (4.6), при этом $M=N$. Кривые 2 на рис. 4.11, 4.12 характеризуют те же зависимости, если дипольные моменты определяются путем решения переопределенной системы (4.7) ($M=108$) методом сопряженных градиентов. В обоих случаях с ростом kb и ϵ наблюдается увели-

чение $Q_{\min}$, т. е. уменьшение точности решения, причем увеличение ε приводит к более существенному уменьшению точности решения, чем увеличение kb . Сравнение кривых 1 и 2 показывает, что использование для определения дипольных моментов переопределенных систем и итерационных методов нахождения их псевдорешений существенно расширяет возможности рассматриваемой модификации. Отметим, что конкретные численные оценки $Q_{\min}$, представленные на рис. 4.11—4.12, справедливы только для выбранного числа диполей и точек аппроксимации граничных условий.

Приведенные на рис. 4.11—4.12 оценки относятся к случаю осевого падения плоской волны. Случай наклонного падения обычно является методически более сложным. В связи с этим представляет существенный интерес вопрос о влиянии направления прихода волны на точность решения задачи с помощью рассматриваемой модификации. Пусть волновой вектор составляет угол ψ с осью z , а вектор $\vec{E}_0$ падающей волны лежит в плоскости xOz . В этом случае тангенциальные компоненты рассеянного поля по-прежнему будут определяться выражениями (4.16), а те же компоненты падающего поля — выражениями

$$\begin{aligned} E_{0x}^i &= (\alpha_1^i \cdot \cos\psi - \gamma_1^i \cdot \sin\psi) \cdot e^{ik(z_1 \cos\psi + x_1 \sin\psi)}, \\ E_{0z}^i &= (\alpha_2^i \cdot \cos\psi - \gamma_2^i \cdot \sin\psi) \cdot e^{ik(z_1 \cos\psi + x_1 \sin\psi)}, \\ H_{0x}^i &= (\varepsilon/\mu)^{1/2} \beta_1^i \cdot e^{ik(z_1 \cos\psi + x_1 \sin\psi)}, \\ H_{0z}^i &= (\varepsilon/\mu)^{1/2} \beta_2^i \cdot e^{ik(z_1 \cos\psi + x_1 \sin\psi)}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где α_1^i , β_1^i , γ_1^i , α_2^i , β_2^i , γ_2^i определяются формулами (4.19). Неизвестные дипольные моменты находились методом сопряженных градиентов. Число диполей $N=30$, число точек аппроксимации граничных условий $M=108$. На рис. 4.13 приведены зависимости относительной нормы невязки граничных условий Q от угла ψ падения плоской волны, при этом K предполагалось фиксированным и равным 0,5. Как видно из рис. 4.13, эти зависимости довольно слабые. Конечно, приведенный результат носит частный характер, т. е. справедлив для конкретного тела, однако можно надеяться, что и для других тел он остается в силе, так как основные идеи рассматриваемой модификации никак не связаны с видом возбуждающего поля.

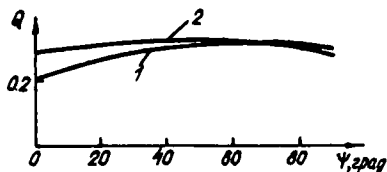


Рис. 4.13. Зависимости нормы невязки граничных условий Q от угла падения плоской волны ψ для эллипсоида с параметрами $kb=3,0$, $\epsilon=0,2$: 1— $Z=0$; 2— $Z=0,2 \cdot (1+i)$

4.5. Диаграммы рассеяния некоторых трехосных эллипсоидов

Изложенная модификация метода вспомогательных источников была использована для расчета диаграмм рассеяния некоторых идеально проводящих и импедансных трехосных эллипсоидов. Ниже приводятся и обсуждаются результаты выполненных расчетов. Отметим, что все результаты, за исключением приведенных на рис. 4.14, получены при условии определения дипольных моментов методом сопряженных градиентов, параметр подобия K выбирался в окрестности минимума кривой зависимости Q от K .

На рис. 4.14 представлены амплитудные диаграммы

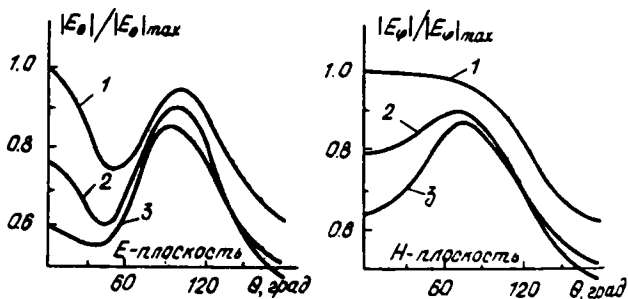


Рис. 4.14. Амплитудные диаграммы рассеяния идеально проводящего эллипсоида с волновым размером $kb=1,5$ при различных ϵ : 1— $\epsilon=0$; 2— $\epsilon=0,1$; 3— $\epsilon=0,15$

рассеянного поля в Е- и Н-плоскостях для идеально проводящего эллипсоида с волновым размером $kb=1,5$ при различных ϵ (плоская волна распространяется в положительном направлении оси z , вектор параллелен оси Ox). При получении этих диаграмм дипольные моменты определялись путем решения методом Гаусса системы алгебраических уравнений с квадратной матрицей, получающейся при $N=M=30$. Все диаграммы нормированы на максимальное значение, которое имеет место при $\epsilon=0$ в направлении падения волны ($\theta=0^\circ$). Диаграммы симметричны относительно оси z , поэтому приведены только их половины. Значения нормы невязки граничных условий Q равны 0,12 ($\epsilon=0,1$) и 0,29 ($\epsilon=0,15$). Кривая 1 ($\epsilon=0$) соответствует строгому решению. Представленные результаты говорят о том, что даже относительно небольшие изменения формы рассеивателей приводят к заметному изменению диаграмм рассеяния.

На рис. 4.15 изображены диаграммы рассеянного поля для эллипсоидов с различными значениями параметров kb и ϵ . Для каждого эллипсоида представлены три кривые: для $Z=0$ (идеально проводящий эллипсоид), $Z=0,1(1+i)$ и $Z=0,2(1+i)$, кривые нормированы на максимальное значение диаграммы для соответствующего идеально проводящего эллипсоида. Как и ранее, рассматривается осевое падение плоской волны. Введение постоянного вдоль поверхности импеданса не нарушает симметрию диаграмм относительно оси z , поэтому приведены половины диаграмм. Число источников $N=30$, число точек аппроксимации граничных условий $M=108$, $K=0,4$ при $kb=1,0$, $K=0,5$ при $kb=2,0$. Достигнутые значения невязок Q неодинаковы для различных диаграмм и обычно возрастают с ростом kb , ϵ и $|Z|$. Так, для кривых 1 Q лежит в интервале 0,10—0,25, для кривых 2 — в интервале 0,16—0,29, для кривых 3 — в интервале 0,26—0,36. Приведенные результаты показывают, что для рассмотренных тел введение поверхностного импеданса обычно приводит к увеличению амплитуды рассеянного поля в направлении падения волны ($\theta=0^\circ$) и к уменьшению амплитуды поля, рассеянного в обратном направлении ($\theta=180^\circ$), при этом меняется также форма диаграммы.

Как уже отмечалось, все приведенные результаты относятся к случаю осевого падения плоской волны. Ниже рассматриваются некоторые результаты для наклонного па-

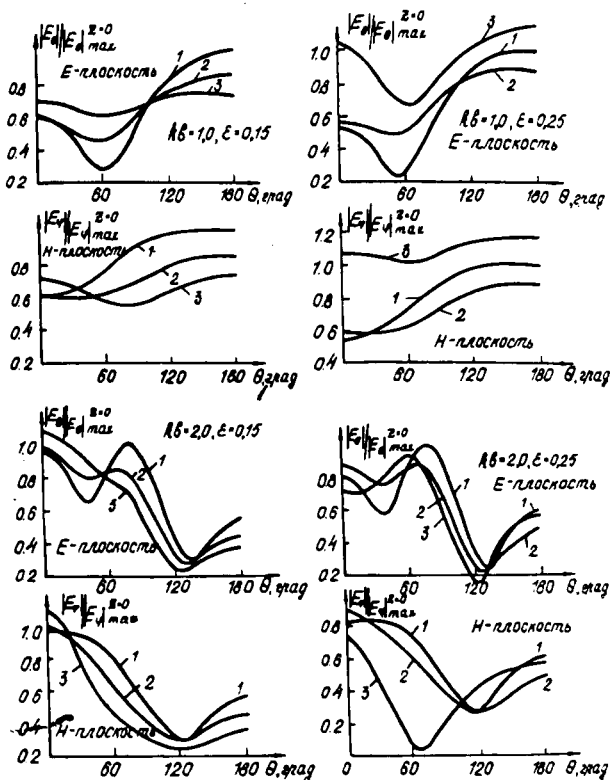


Рис. 4.15. Амплитудные диаграммы рассеяния эллипсоидов с различными параметрами kb , ϵ и Z : 1— $Z=0$; 2— $Z=0.1$ ($1+i$); 3— $Z=0.2$ ($1+i$)

дения. На рис. 4.16 представлены энергетические диаграммы рассеяния в E-плоскости для идеально проводящего эллипсоида с параметрами $kb=3.0$, $\epsilon=0.2$ при различных углах ψ падения плоской волны. Диаграммы нормированы на максимальное значение при $\psi=0^\circ$. Число источников $N=30$, число точек аппроксимации границ

ных условий $M=108$. Параметр подобия K выбирался равным 0,5 и не менялся при изменении угла ψ . Значение невязки Q во всех случаях не превышало 0,3. Как видно из рис. 4.16, при наклонном падении диаграммы становятся несимметричными относительно направления прихода волны, мощность, перенесенная в обратном направлении, зависит от угла падения.

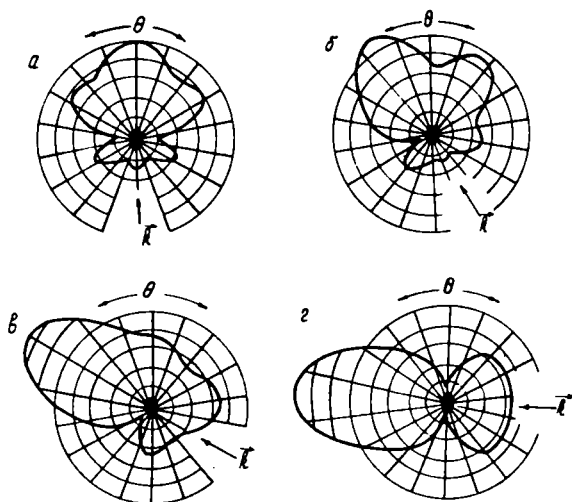


Рис. 4.16. Энергетические диаграммы рассеяния в E -плоскости идеально проводящего эллипсоида с параметрами $kb=3,0$, $\epsilon=0,2$ при различных углах ψ падения плоской волны: а — $\psi=0^\circ$; б — $\psi=30^\circ$; в — $\psi=60^\circ$; г — $\psi=90^\circ$

На рис. 4.17 представлены амплитудные диаграммы рассеянного поля в E -плоскости для эллипсоида с параметрами $kb=4,0$, $\epsilon=0,3$ при различных углах ψ падения плоской волны. Кривые 1 относятся к случаю идеально проводящего тела, кривые 2 — к случаю тела с импедансом $Z=0,5 (1+i)$. Все диаграммы нормированы на максимальное значение, которое имеет место при $\psi=90^\circ$ для импедансного эллипсоида. Левые части диаграмм относятся к полусечению $\varphi=0^\circ$, правые — к полусечению $\varphi=180^\circ$. Направлению прямого рассеяния соответствует

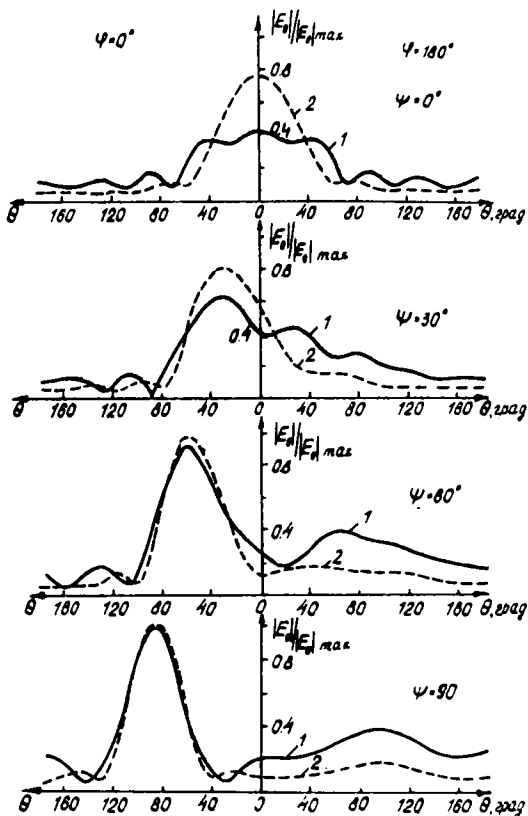


Рис. 4.17. Амплитудные диаграммы рассеяния в E -плоскости для эллипсоида с параметрами $kb=4.0$, $\varepsilon=0.3$ при различных углах ψ падения плоской волны: 1— $Z=0$; 2— $Z=0.5(1+i)$

направление $\theta=\psi$ в полусечении $\varphi=0^\circ$, направлению обратного рассеяния — направление $\theta=180^\circ$ — ψ в полусечении $\varphi=180^\circ$. Значение невязки Q для всех диаграмм не превышает 0,31. Для обеспечения такого уровня невяз-

ки потребовалось выбрать число источников равным 120, а число точек аппроксимации граничных условий равным 240. Приведенные кривые показывают, что введение большого по модулю постоянного поверхностного импеданса не приводит к смещению направления максимального излучения; оно приводит к сглаживанию боковых лепестков и уменьшению уровня обратного рассеяния.

Примеры диаграмм рассеяния для эллипсоидов с переменным импедансом представлены на рис. 4.18. Как и

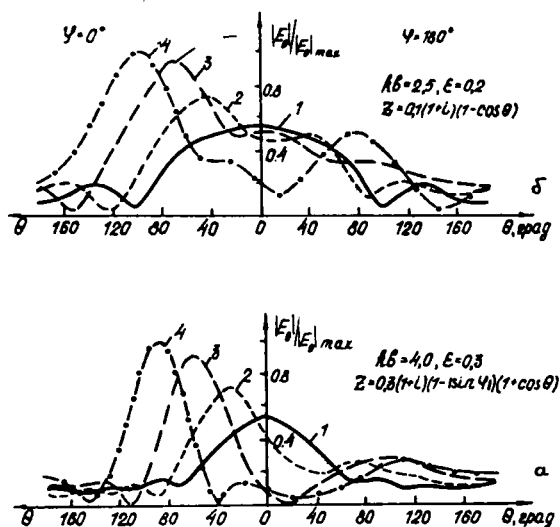


Рис. 4.18. Амплитудные диаграммы рассеяния в E -плоскости для эллипсоида с различными параметрами и законами изменения импеданса вдоль поверхности: 1 — $\psi=0^\circ$; 2 — $\psi=30^\circ$; 3 — $\psi=60^\circ$; 4 — $\psi=90^\circ$

ранее, вектор $\vec{E}_0$ ориентирован в плоскости xOz , в этой же плоскости рассматриваются и диаграммы. Рис. 4.18, б относится к эллипсоиду с параметрами $kb=2,5$, $\epsilon=0,2$, $Z=0,1(1+i)(1-\cos\theta)$, рис. 4.18, а — к эллипсоиду с параметрами $kb=4,0$, $\epsilon=0,3$, $Z=0,3(1+i)(1-|\sin\phi|)(1+\cos\theta)$. Левые части рис. 4.18 относятся к полусечению $\varphi=0^\circ$, правые — к полусечению $\varphi=180^\circ$. Все диа-

граммы на рис. 4.18 нормированы на их максимальное значение. Во всех случаях значение нормы невязки Q не превышает 0,3. Для достижения такого значения для эллипсоида с параметрами $kb=2,5$, $\epsilon=0,2$ достаточно было выбрать $N=30$, $M=108$, для эллипсоида с параметрами $kb=4,0$, $\epsilon=0,3$ — $N=120$, $M=240$. Приведенные результаты показывают, что введение переменного поверхностного импеданса в общем случае не только меняет поперечник обратного рассеяния, но и приводит к смещению направления максимального излучения.

При обсуждении результатов численных расчетов в качестве меры точности выбиралась величина сеточной нормы невязки граничных условий Q , определяемая выражением (4.14). Однако наибольший интерес представляет не само значение величины Q , а значение погрешности в определении исследуемой характеристики рассеяния (в данном случае — диаграммы рассеянного поля), которое соответствует вычисленному значению Q . Для установления этого соответствия было произведено сравнение некоторых диаграмм рассеяния (рис. 4.19).

На рис. 4.19, а изображены нормированные амплитудные диаграммы рассеяния в E - и H -плоскостях для сферы ($ka=kb=kc=6,0$). Кривая 1 соответствует строгому решению, кривая 2 — приближенному, полученному изложенным методом. Число диполей и точек аппроксимации граничных условий было выбрано равным 56, дипольные моменты определялись методом Гаусса, соответствующее значение Q при этом равно 0,3. На рис. 4.19, б представлены такие же диаграммы для сплюснутого сфероида с параметрами $ka=kb=4,0$, $kc=3,0$. Кривая 1 взята из работы [155], кривая 2 получена нами при $N=30$, $M=108$ с использованием для нахождения дипольных моментов метода сопряженных градиентов, соответствующее значение невязки $Q=0,31$. Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 4.19, а, б говорит о том, что даже при $Q \approx 0,3$ приближенное решение довольно хорошо описывает диаграммы.

Таким образом, в данной главе предложена и исследована модификация метода вспомогательных источников, основной особенностью которой является выбор в качестве вспомогательных источников электрических диполей, расположенных на поверхности, подобной поверхности рассеивателя, и ориентированных тангенциально к ней. Показано, что успех применения модификации в

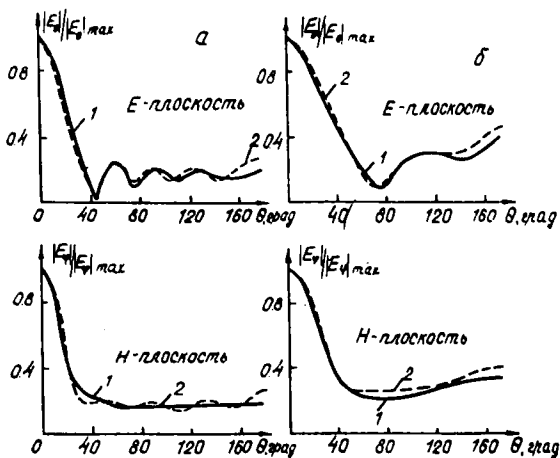


Рис. 4.19. Нормированные амплитудные диаграммы рассеяния, полученные разными методами

значительной степени зависит от способа определения неизвестных дипольных моментов. На основании анализа различных способов рекомендуется определять дипольные моменты как псевдорешения переопределенных систем линейных алгебраических уравнений, находимые с помощью итерационного процесса метода сопряженных градиентов. Эффективность рассмотренной модификации метода вспомогательных источников продемонстрирована на примере решения задачи рассеяния плоской волны, наклонно падающей на трехосный эллипсоид с постоянным или переменным по двум координатам поверхностным импедансом. Необходимо отметить, что в равной степени метод применим для решения задач рассеяния и на телах иной формы, ограниченных замкнутой, гладкой и выпуклой поверхностью, в том числе и в случае, когда направление нормали к поверхности тела задается в табличной форме. Точность полученного решения определяется после завершения процесса решения и зависит (при фиксированном числе источников и точек аппроксимации граничных условий) от геометрии рассеивателя, его волновых размеров и типа возбуждающего поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хёnl X., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
2. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.-Л.: Энергия, 1967. 376 с.
3. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 1. 552 с.
4. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 2. 558 с.
5. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. 272 с.
6. Которович М. И., Лебедев Н. Н. Об одном методе решения некоторых задач теории дифракции и родственных ей проблем // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. Вып. 10—11. С. 1192—1206.
7. Лебедев Н. Н., Которович М. И. О применении формул обращения к решению некоторых задач электродинамики // ЖЭТФ. 1939. Т. 9. Вып. 6. С. 729—741.
8. Лебедев Н. Н. Об одной формуле обращения // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52, № 8. С. 661—664.
9. Лебедев Н. Н. О разложении произвольной функции в интеграл по функциям Макдональда с комплексным значком // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58, № 6. С. 1007—1010.
10. Лебедев Н. Н. О разложении произвольной функции в интеграл по цилиндрическим функциям мнимого значка и аргумента // Прикл. матем. и механика. 1949. Т. 13, № 5. С. 465—476.
11. Лебедев Н. Н. Аналог теоремы Парсеваля для одного интегрального преобразования // Докл. АН СССР. 1949. Т. 68, № 4. С. 653—656.
12. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Новый метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на клине конечной проводимости // ЖЭТФ. 1962. Т. 32. Вып. 10. С. 1174—1183.
13. Малюжинец Г. Д. Связь между формулами обращения интеграла Зоммерфельда и формулами Которовича—Лебедева // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119, № 1. С. 49—51.
14. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 728 с.
15. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: ГИФМЛ, 1963. 380 с.

16. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.: Наука, 1968. 402 с.
17. Sneddon I. N. The use of integral transforms. N. Y.: Mc. Graw—Hill book company, 1972. 539 p.
18. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1970. Т. 2. 328 с.
19. Oberhettig F. Tables of Bessel transforms. Berlin e. a.: Springer, 1972. 290 s.
20. Jones D. S. The Kontorovich—Lebedev transform//J. Inst. Math. and Appl. 1980. V. 26, № 2. P. 133—141.
21. Wong R. Asymptotic expansions of the Kontorovich—Lebedev transform // Applicable analysis. 1981. V. 12. P. 161—172.
22. Ву Ким Туан, Якубович С. Б. Интегральное преобразование Конторовича—Лебедева в новом классе функций // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 1. С. 11—14.
23. Раппопорт Ю. М. О некоторых свойствах модифицированных интегральных преобразований Конторовича—Лебедева // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 4. С. 724—727.
24. Горянов А. С. Дифракция плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси конуса // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6, № 1. С. 47—54.
25. Pridmore-Brown D. C. Radiation from slot antennas on cones // IEEE Trans. AP. 1972. V. 20, № 1. P. 36—39.
26. Pridmore-Brown D. C. Diffraction coefficients for a slot-exited conical antenna // IEEE Trans. AP. 1972. V. 20, № 1. P. 40—49.
27. Pridmore-Brown D. C. The transition fields on the surface of a slot-exited conical antenna // IEEE Trans. AP. 1973. V. 21, № 6. P. 889—890.
28. Старовойтова Р. П., Копач В. Б. Возбуждение конической области с импедансной границей // Исследования по электродинамике и распротр. электромагн. волн. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1977. С. 12—17.
29. Pridmore-Brown D. C. The radiation of a magnetic dipole antenna in a conical sheath//J. Math. and Phys. 1964. V. 43, № 3. P. 199—217.
30. Banos R. A., Haddlestone R. H., Jr., Pridmore-Brown D. C., Taylor E. C. The radiation field of an electric dipole antenna in a conical sheath // J. Math. and Phys. 1965. V. 44, № 3. P. 189—213.
31. Гошин Г. Г. Граничные задачи электродинамики в конических областях. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987. 128 с.
32. Дорошенко В. А. Дифракция плоской волны на конусе с радиальными щелями. Харьков, 1986. С. 27—33. (Препринт / ИРЭ АН УССР, № 6).
33. Дорошенко В. А., Сологуб В. Г. О структуре поля радиального магнитного диполя, рассеянного конической поверхностью с прорезанными вдоль образующих щелями // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32, № 5. С. 1110—1112.
34. Герлингер А. Р., Кравченко Г. Г. Возбуждение системы тонких радиальных проводников, расположенных периодически на конической поверхности // Электродинамика и распротр. волн. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980. Вып. 1. С. 3—8.
35. Нобл Б. Метод Винера—Хопфа. М.: ИЛ, 1962. 280 с.
36. Шестопалов В. П. Метод задачи Римана—Гильберта в

теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. 400 с.

37. Leitner A., Wells C. P. Radiation by disks and conical structures // IRE Trans. AP. 1956. V. 4, № 10. P. 637—640.

38. Wells C. P., Leitner A. A Lebedev transform and the „baffle“ problem // Quart. Appl. Math. 1958. V. 15, № 4. P. 430—434.

39. Вайслейб Ю. В. Облучение идеально проводящего конуса конечной длины радиальным электрическим диполем // Тр. учебн. ин-тов связи. 1967. Вып. 35. С. 58—65.

40. Вайслейб Ю. В. Рассеяние звуковых волн на конечном конусе // Акустич. журнал. 1971. Т. 17. Вып. 1. С. 33—42.

41. Fridmofe-Brown D. C. A Winer—Hopf solution of a radiation problem in conical geometry // J. Math. and Phys. 1968. V. 47, № 1. P. 79—94.

42. Панасюк В. В., Колодий Б. И., Куриляк Д. Б. Дифракция электромагнитных волн на усеченном конусе конечной длины. Львов, 1982. 54 с. (Препринт / АН УССР, физико-механ. ин-т, № 63).

43. Куриляк Д. Б., Колодий Б. И. Дифракция электромагнитных волн на конических структурах. Львов, 1983. 63 с. (Препринт / АН УССР, физико-механ. ин-т, № 76).

44. Колодий Б. И., Куриляк Д. Б. Осесимметричная задача дифракции поля электрического диполя на конечной конической оболочке // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. 1986. № 12. С. 31—34.

45. Колодий Б. И., Куриляк Д. Б. Дифракция несимметричных электромагнитных волн на конечном конусе. Львов, 1984. 54 с. (Препринт / АН УССР, физико-механ. ин-т, № 87).

46. Гошин Г. Г., Кравченко Г. Г., Шерин С. Н. Рассеяние плоских волн конической «сеткой» ограниченных радиальных проводников // Электродинамика и распростр. волн. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982. Вып. 2. С. 151—157.

47. Беличенко В. П., Гошин Г. Г., Кравченко Г. Г. Дифракция поля электрического диполя на спирально проводящем конечном конусе // ЖВММФ, 1984. Т. 24, № 7. С. 1102—1106.

48. Силин Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы. М.: Сов. радио, 1966. 632 с.

49. Малюжинец Г. Д. Принцип погашаемости и задача о вынужденных колебаниях в произвольной области // ЖТФ. 1951. Т. 21, № 8. С. 881—885.

50. Бладель Я. Сингулярности поля вблизи вершины конуса // ТИИЭР. 1983. Т. 71, № 7. С. 146—147.

51. Вафиадис Э., Сахалос Д. Ж. Н. Поля у вершины эллиптического конуса // ТИИЭР. 1984. Т. 72, № 8. С. 100—102.

52. Блюме С., Каль Г. Замечания к сообщению «Поля у вершины эллиптического конуса» // ТИИЭР. 1985. Т. 73, № 12. С. 177.

53. Robin L. Tables numériques des fonctions associées de Legendre. Paris: Éditions de la Revue d'optique, 1959. 426 p.

54. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.

55. Айзенберг Г. З. Антенны для магистральных коротковолновых радиосвязей. М.: Связьиздат, 1948. 464 с.

56. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.

57. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т. 1. 296 с.

58. Малюжинец Г. Д. Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданными импедансами граней // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, № 3. С. 436—439.

59. Бобровников М. С., Старовойтова Р. П. Дифракция цилиндрических волн на импедансном клине // Изв. высш. учеб. завед. Физика. 1963. № 6. С. 168—176.

60. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

61. Гошин Г. Г., Кравченко Г. Г., Мышкин В. Г. Дифракция плоских электромагнитных волн на радиально проводящей конической поверхности // Радиотехн. и электроника. 1981. Т. 26, № 4. С. 720—727.

62. Конторович М. И., Астрахан М. И. Дифракция плоской электромагнитной волны на анизотропно проводящей плоскости (экранирующее и отражательное действие густой радиальной сетки) // Радиотехн. и электроника. 1967. Т. 12, № 1. С. 28—40.

63. Вилкова Л. П., Нефедов Е. И. Волны биконического рупора // Радиотехн. и электроника. 1979. Т. 24, № 6. С. 1017—1026.

64. Вайнштейн Л. А. Волны тока в тонком цилиндрическом проводнике. I. Ток и импеданс передающего вибратора // ЖТФ. 1959. Т. 29. Вып. 6. С. 673—688.

65. Вайнштейн Л. А. Волны тока в тонком цилиндрическом проводнике. II. Ток в пассивном вибраторе и излучение передающего вибратора // ЖТФ. 1959. Т. 29. Вып. 6. С. 689—699.

66. Вайнштейн Л. А. Волны тока в тонком цилиндрическом проводнике. III. Вариационный метод и его применение к теории идеального и импедансного проводов // ЖТФ. 1961. Т. 31. Вып. 1. С. 29—44.

67. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. радио, 1962. 244 с.

68. Saran G. S., Tadaki R. T. Incident electromagnetic field strength attenuation of a missile nose cone // IEEE Int. Symp. Electromagn. Compat. Arlington, 1983. Symp. Rec. P. 246—248.

69. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. 432 с.

70. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 324 с.

71. Мартыненко Н. А., Пустыльников Л. М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1986. 304 с.

72. Веселов Г. И., Темнов В. М. О решении некоторых систем уравнений в электродинамике и явлении «относительной сходимости» // Радиотехн. и электроника. 1981. Т. 26, № 10. С. 2034—2043.

73. Петрусенко И. В., Дмитрюк С. Г. Способ решения обобщенной задачи о разветвлении волновода // Радиотехн. и электроника. 1986. Т. 31, № 7. С. 1285—1293.

74. Заргано Г. Ф., Лерер А. М., Ляпин В. П., Синявский Г. П. Линии передачи сложных сечений. Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1983. 319 с.

75. Шестопалов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев: Наукова думка, 1983. 252 с.

76. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А.

Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. Киев: Наукова думка, 1984. 293 с.

77. Ильинский А. С., Слепян Г. Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 232 с.

78. Клеев А. И., Маненков А. Б. Расчет полей в резонаторах коаксиального типа // Радиотехн. и электроника. 1982. Т. 27, № 10. С. 1888—1896.

79. Клеев А. И., Маненков А. Б. Коаксиальный резонатор с тонким внутренним проводником // Радиотехн. и электроника. 1984. Т. 29, № 12. С. 2293—2301.

80. Розенблюм А. В., Фридберг П. Ш. Расчет линейных функционалов решений одного класса аксиально симметричных задач электродинамики // Рад. и электрон. 1986. Т. 31, № 6. С. 1057—1070.

81. Oberhettinger F. On the diffraction and reflection of waves and pulses by wedges and corners // J. Res. NBS. 1958. V. 61, № 5. P. 343—365.

82. Oberhettinger F., Dressler R. F. Electromagnetic fields in the presence of ideally conducting conical structures // Z. angew. Math. und Phys. 1971. V. 22, № 5. P. 937—950.

83. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. М.: ИЛ, 1961. 712 с.

84. Naylor D. On a finite Lebedev transform // J. Math. and Mech. 1963. V. 12, № 3. P. 375—383.

85. Уфлянд Я. С., Юшкова Е. А. Решение задачи Дирихле для конечного клина с помощью специального интегрального преобразования по цилиндрическим функциям // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 1. С. 70—72.

86. Naylor D. On a Mellin type integral transform // J. Math. and Mech. 1963. V. 12, № 2. P. 265—274.

87. Юшкова Е. А., Ефимова И. Т. Доказательство формулы обращения для интегрального преобразования типа Конторовича—Лебедева на неполном промежутке. Л., 1983. 9 с. Деп. в ВИНТИ 15.07.83, № 4735.

88. Harrington W. J., Patel K. A. Naylor transforms of Mellin type // SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4, № 1. P. 1—7.

89. Юшкова Е. А. О некоторых сингулярных краевых задачах для уравнения Бесселя и их приложениях в математической физике // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 10. С. 1403—1407.

90. Naylor D. On an integral transform of the Mellin type // J. Eng. Math. 1980. V. 14, № 2. P. 93—99.

91. Фел С. С., Фридберг П. Ш., Левинсон И. Б. К теории широкодиапазонных неперестраивающихся эхо-резонаторов сферической формы // Радиотехн. и электроника. 1962. Т. 7, № 11. С. 1916—1921.

92. Alvarez R. A., Bix D., Byrne D., Mendonca M., Johnson R. M. Generation of high-power microwave pulses using a spherical superconducting cavity and interference-type switch // IEEE Trans. Magn. 1981. V. 17, № 1. P. 935—938.

93. Brown P., Frischholz H., Geschonke G., Henke H., Wilson I. Development and first results with a storage resonator enhancing the shunt impedance of an electron accelerating cavity // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1981. V. 28, № 3. Pt. 2. P. 2707—2710.

94. Августинович В. А., Августинович Л. Я., Арте-

менко С. Н., Юшков Ю. Г. Исследование полусферического резонатора для накопления энергии // Изв. высш. учебн. завед. Радиоэлектроника. 1987. Т. 30, № 2. С. 90—92.

95. Диденко А. Н., Юшков Ю. Г. Мощные СВЧ-импульсы наносекундной длительности. М.: Энергоатомиздат, 1984. 112 с.

96. Нефедов Е. И. Открытые коаксиальные резонансные структуры. М.: Наука, 1982. 220 с.

97. Кошпаренко В. Н., Мележик П. Н., Поединчук А. Е., Шестопалов В. П. Эффект резкого изменения добротности открытых электродинамических структур внутренними неоднородностями // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10. Вып. 13. С. 827—830.

98. Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: ИЛ, 1953. 372 с.

99. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

100. Вулих Б. В. Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967. 416 с.

101. Wilcox P. H. The zeros of $P'_\nu(\cos\theta)$ and $\frac{d}{d\theta} P'_\mu(\cos\theta)$ // Math. Comput. 1968. V. 22, № 101. P. 205—208.

102. Bauer H. F. Tables of the roots of the associated Legendre function with respect to the degree // Math. Comput. 1986. V. 46, № 174. P. 601—602.

103. Гаврис И. Б. Алгоритмы расчета сферических функций Бесселя, присоединенных функций Лежандра и реализация их на языке FORTRAN // Вест. Белорус. ун-та. Сер. I. 1976. № 3. С. 8—16.

104. Murray W. Computation of the Bessel functions // Nat. Phys. Lab. (Rept.). 1967. № 66. 45 p.

105. Brent R. P. Algorithms for minimization without derivatives. N. Y.: Prentice—Hall, 1973. 195 p.

106. Малушков Г. Д. Расчет собственных частот сферического резонатора // Изв. высш. учебн. завед. Радиоэлектроника. 1975. Т. 18, № 3. С. 117—119.

107. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.

108. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Распределение электричества на тонком конечном конусе // ЖВММФ. 1969. Т. 9, № 6. С. 1336—1346.

109. Вайслейб Ю. В. Идеально проводящий конечный конус в поле точечного заряда и некоторые смежные задачи электростатики // ЖТФ. 1970. Т. 40. Вып. 9. С. 1785—1798.

110. Беличенко В. П. Электростатические поля в заземленной сферической оболочке с проводящим коническим включением // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 10. С. 1825—1831.

111. Кошелев Г. П. ТЕМ-волна в коаксиальной линии с внутренним проводником крестообразного сечения // Антенны. 1977. Вып. 25. С. 107—114.

112. Литвиненко Л. Н., Сальникова Л. П. Численное исследование электростатических полей в периодических структурах. Киев: Наукова думка, 1986. 157 с.

113. Seshadri T. K., Rajaiah K. Eigenfunction solution of a class of TEM transmission line // IEEE Proc. 1984. V. 131, № 4. P. 279—280.

114. Zeng L. R., Wang Y. X. Accurate solutions of elliptical and cylindrical striplines and microstriplines // IEEE Trans. MTT. 1986. V. 34, № 2. P. 259—265.

115. Kummer M., Oswald H. Characteristic impedance of coaxial lines with non-circular cylindrical inner conductor // URSI Int. Symp. Electromagnetic Theory. Budapest. 1986. Pt. B. P. 801—803.

116. Nomura Y., Katsura S. Diffraction of electromagnetic waves by circular plate and circular hole // J. Phys. Soc. Japan. 1955. V. 10, № 4. P. 285—304.

117. Nomura Y., Katsura S. Diffraction of electromagnetic waves by ribbon and slit // J. Phys. Soc. Japan, 1957. V. 12, № 2. P. 190—200.

118. Трантер Д. Ж. Интегральные преобразования в математической физике. М.: ГИТТЛ, 1956. 202 с.

119. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Спектральные операторы в задачах дифракции волн на плоских системах. Киев: Наукова думка, 1984. 239 с.

120. Велиев Э. И., Веремей В. В. Дифракция волн на многоугольном цилиндре и на структурах из плоских лент. Харьков, 1987. 56 с. (Препринт / АН УССР, ИРЭ, № 350).

121. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962. 1100 с.

122. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций. Часть I. М.: ИЛ, 1949. 798 с.

123. Бобровников М. С., Комаров С. А., Фисанов В. В. Метод интеграла Вебера—Шафхейтлина в задачах излучения из волновода с фланцем // VII Всесоюзный симпозиум по дифр. и распростр. волн. Тез. Докл. Ростов-на-Дону. 1977. Т. I. С. 85—88.

124. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.: ГИФМЛ, 1962. 708 с.

125. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1987. 740 с.

126. Комаров С. А. Излучение из полубесконечного волновода с импедансным фланцем // Изв. высш. учебн. завед. Радиоэлектроника. 1976. Т. 19, № 2. С. 94—99.

127. Boersma J. Electromagnetic diffraction by a unidirectionally conducting disk // SIAM J. Appl. Math. 1966. V. 14, № 6. P. 1471—1495.

128. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.

129. Поповиди Р. С., Цверикмазашвили З. С. Численное исследование задачи дифракции модифицированным методом неортогональных рядов // ЖВММФ. 1977. Т. 17, № 2. С. 384—393.

130. Поповиди-Заридзе Р. С., Талаквадзе Г. М. Исследование резонансных свойств решеток из металлических цилиндров с диэлектрическим слоем конечной толщины // Радиотехн. и электроника. 1984. Т. 29, № 1. С. 23—30.

131. Заридзе Р. С., Хатнашвили Д. Ш., Каркашадзе Д. Д. и др. Исследование резонансных свойств некоторой металло-диэлектрической структуры // Радиотехн. и электроника. 1984. Т. 39, № 7. С. 1260—1265.

132. Малакшинов Н. П., Ерихов В. Г. Об одном численном методе решения задач дифракции // Антенны. 1977. Вып. 25. С. 53—65.

133. Малакшинов Н. П., Ерихов В. Г. Решение задачи

дифракции плоской волны на линейной решетке при помощи метода вспомогательных источников // Радиотехн. и электроника. 1980. Т. 25. № 8. С. 1607—1613.

134. Овчаров В. Т. Метод вспомогательных источников для решения задач электродинамики // Лекции по электрон. СВЧ. Кн. 4. Саратов, 1978. С. 93—118.

135. Клеев А. И., Маненков А. Б. Метод адаптивной коллокации в двумерных задачах дифракции // Изв. высш. учебн. завед. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 5. С. 557—565.

136. Еремин Ю. А., Ильинский А. С., Свешников А. Г. Метод неортогональных рядов в задачах дифракции электромагнитных волн // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 6. С. 1351—1354.

137. Еремин Ю. А., Ильинский А. С., Свешников А. Г. Исследование дифракции электромагнитных волн на проводящих и импедансных телах вращения // Сб. работ вычисл. центра МГУ. 1980. № 32. С. 3—12.

138. Свешников А. Г., Еремин Ю. А., Орлов Н. В. Исследование некоторых математических моделей в теории дифракции методом неортогональных рядов // Радиотехн. и электроника. 1985. Т. 30, № 4. С. 697—704.

139. Еремин Ю. А., Лебедев О. А., Свешников А. Г. Использование мультипольных источников в методе неортогональных рядов в задачах дифракции // ЖВММФ. 1985. Т. 25, № 3. С. 466—470.

140. Еремин Ю. А., Свешников А. Г. Исследование задач дифракции на диэлектрических телах методом мультипольных источников // Изв. высш. учебн. завед. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 5. С. 647—653.

141. Еремин Ю. А., Орлов Н. В., Свешников А. Г. Исследование частотных характеристик диэлектрических рассеивателей в полупространстве // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1986. № 2. С. 8—13.

142. Еремин Ю. А., Свешников А. Г. Исследование задач дифракции на локально-неоднородном теле вращения методом вторичных источников // Изв. высш. учебн. завед. Радиофизика. 1987. Т. 30, № 6. С. 771—775.

143. Кюркчан А. Г. О методе вспомогательных токов и источников в задачах дифракции волн // Радиотехн. и электроника. 1984. Т. 29, № 11. С. 2129—2139.

144. Апельцин В. Ф., Кюркчан А. Г. Гипотеза Рэлея и аналитические свойства волновых полей // Радиотехн. и электроника. 1985. Т. 30, № 2. С. 193—210.

145. Кюркчан А. Г. Представление дифракционных полей волновыми потенциалами и метод вспомогательных токов в задачах дифракции электромагнитных волн // Радиотехн. и электроника. 1986. Т. 31, № 1. С. 20—27.

146. Гапоненко А. Л. Об одном численном методе решения трехмерных задач дифракции // ЖВММФ. 1977. Т. 17, № 41. С. 267—272.

147. Заридзе Р. С., Каркашадзе Д. Д., Цверикмазашвили З. С. Дифракция акустической волны на эллипсоиде // IX Всесоюзный симпозиум по дифр. и распростр. волн. Сб. трудов. Тбилиси. 1985. Т. 1. С. 504—506.

148. Кравцов В. В., Приклонский В. И. Использование антенных потенциалов в задаче дифракции на идеально проводящем теле // Математ. модели прикладной электродинамики. Сб. трудов фак.

вычисл. матем. и кибернетики МГУ. 1984. С. 109—115.

149. Дмитренко А. Г., Мукомолов А. И. О применении метода неортогональных рядов с поточечной интерполяцией граничных условий к решению задач электромагнитной дифракции на неосесимметричных идеально проводящих телах // IX Всесоюзный симпозиум по дифр. и распротр. волн. Сб. трудов. Тбилиси. 1985. Т. 1. С. 129—131.

150. Дмитренко А. Г., Мукомолов А. И. О варианте метода неортогональных рядов, пригодном для решения задач электромагнитного рассеяния на произвольных гладких идеально проводящих телах // Электродинамика и распространение волн. Вып. 6. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987. С. 3—7.

151. Дмитренко А. Г., Мукомолов А. И. Об оценке точности расчета диаграмм рассеяния конечных тел // Рассеяние электромагнитных волн. Вып. 6. Таганрог: Изд-во ТРТИ, 1987. С. 76—80.

152. Дмитренко А. Г., Мукомолов А. И. Об одной модификации метода неортогональных рядов для решения задач электромагнитного рассеяния на произвольных гладких идеально проводящих телах // Радиотехн. и электроника. 1988. Т. 33, № 3. С. 449—455.

153. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.

154. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 520 с.

155. Аветисян А. А. Обобщенный метод разделения переменных и дифракция электромагнитных волн на телах вращения // Радиотехн. и электроника. 1970. Т. 15, № 1. С. 3—13.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

I. Обозначения различных физических величин

U, V — электрический и магнитный потенциалы Дебая; потенциалы электростатического поля

$\vec{P}(\tau), \vec{M}(\tau)$ — электрический и магнитный векторы Герца

$\vec{E}$ — вектор напряженности электрического поля

$\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля

ϵ, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды

$\vec{j}$ — вектор поверхностной плотности электрического тока

σ — поверхностная плотность электрического заряда

Z — поверхностный импеданс

$\vec{p}$ — момент тока электрического диполя

q — величина точечного заряда

w — волновое сопротивление среды

ω — круговая частота колебаний электромагнитного поля

k — волновое число

Q — коэффициент прохождения энергии падающей волны через апертуру

II. Математические символы

$\Gamma(z)$ — гамма-функция

$\psi(z) = \frac{d}{dz} \Gamma(z) / \Gamma(z)$ — пси-функция

$J_\nu(z)$ — функция Бесселя порядка ν

$Y_\nu(z)$ — функция Неймана порядка ν

$H_\nu^{(1,2)}(z) = J_\nu(z) \pm iY_\nu(z)$ — функция Ханкеля первого и второго рода

$I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя

$K_\nu(z)$ — функция Макдональда

$j_\nu(z) = \sqrt{\pi/2z} J_{\nu+1/2}(z)$ — сферическая функция Бесселя

$h_\nu^{(1,2)}(z) = \sqrt{\pi/2z} H_{\nu+1/2}^{(1,2)}(z)$ — сферическая функция Ханкеля первого и второго рода

$P_\mu^\nu(x)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода степени ν и порядка μ ($-1 \leq x \leq 1$)

$Q_\mu^{(\nu, 1/2)}(x)$ — полиномы Якоби, ортогональные на интервале $0 \leq x \leq 1$

$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ 1 & (i = k) \end{cases}$ — символ Кронекера

$f(x) = O((x-a)^n)$, $x \rightarrow a$ означает, что $|f(x)| < A \times |x-a|^n$ для x , близких к a

$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m=0 \\ 2 & \text{при } m \geq 1 \end{cases}$ — символ Неймана

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Метод интегрального преобразования Конторовича-Лебедева в задачах дифракции для областей с коническими границами	7
1.1. Постановка общей дифракционной задачи для биконической структуры с границами из радиальных проводников и изотропного экрана	9
1.2. Условия в сингулярных точках границы	12
1.3. Эвристический подход к обобщению метода применительно к решению задач с неинтегрируемой особенностью в сингулярных точках	19
1.4. Решение дифракционной задачи в интегральной форме	26
1.5. Анализ решения и дифракционные свойства структур	33
Глава 2. Конечные интегральные преобразования и метод факторизации в задачах электродинамики и электростатики	54
2.1. Конечные интегральные преобразования типа Конторовича—Лебедева и типа Меллина	55
2.2. Возбуждение сферического резонатора с конической вставкой	58
2.3. Электростатические поля в заземленной сферической оболочке с проводящим коническим включением	74
2.4. Возбуждение разветвленной секторной области с цилиндрическим закруглением	81
2.5. ТЕМ-волна в цилиндрической коаксиальной линии с внутренним проводником сложного сечения	89
Глава 3. Метод разрывных интегралов в задачах дифракции для плоских радиально-неоднородных структур	96
3.1. Использование свойств разрывных интегралов Вебера-Шафхейтлина при решении задач электродинамики	97
3.2. Передача электромагнитной энергии через круглую апертуру в плоском идеальном экране	101
3.3. «Высвечивание» энергии собственных волн плоского волновода через апертуру в его стенке	107
3.4. Связь между двумя смежными плоскими волноводами через круглую апертуру в общей стенке	112
3.5. Дифракция электромагнитных волн на системе спиральных проводников, помещенных в апертуру плоского экрана	116

Глава 4. Метод вспомогательных источников в задачах рассеяния электромагнитных волн на неосесимметричных идеально проводящих и импедансных телах	125
4.1. Постановка задачи и описание метода	127
4.2. Различные способы определения $\vec{p}^n$	129
4.3. Сравнительный анализ различных способов определения $\vec{p}^n$.	131
4.4. Некоторые другие особенности метода	146
4.5. Диаграммы рассеяния некоторых трехосных эллипсоидов .	152
Литература	160
Список основных обозначений	169

Виктор Петрович Беличенко
Геннадий Георгиевич Гошин
Анатолий Григорьевич Дмитриенко
Александр Иванович Мукомолов
Владимир Георгиевич Мышкин
Андрей Рудольфович Чесноков

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ**

ИБ 2282

Редактор **Е. С. Юзefович**
Технический редактор **Г. Н. Грдина**
Корректор **Л. П. Бородич**

Сдано в набор 09.03.89 г. Подписано к печати 25.06.90 г. КЗ 06061. Формат 84×108¹/₃₂.
Бумага типографская № 3. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Печ. л. 5,5.
Усл. печ. л. 9,24. Уч.-изд. л. 8,97. Тираж 1000 экз. Заказ 1094. Цена 1 р. 80 к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4.
Омская областная типография
644070. Омск, ул. Декабристов, 37.