Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В. В. КОНЕВ

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Томск—1985

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ВНЫХ ОТДЕЛЕНИЙ
ЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

5

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

1-559460

В.В.Конев

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Издательство Томского университета

Томск - 1985

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА ТГУ
ДЛЯ КНИГ

519.245

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

УДК 519.24

Конев В.В. Последовательные оценки параметров стохастических динамических систем. - Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. - 11,4 - 1р.70к. - 500 экз. 1502000000.

В книге изучается проблема оценивания параметров динамических систем, описываемых стохастическими разностными и стохастическими дифференциальными уравнениями. Излагаются методы получения оценок неизвестных параметров с гарантированным качеством. Эти методы являются последовательными модификациями классических методов наименьших квадратов и максимального правдоподобия.

Большое внимание уделяется задачам оценивания корреляционных функций и спектров случайных процессов, различения гипотез, обнаружения разладок и т.п.

Для студентов, аспирантов, инженеров и научных сотрудников, работающих в области создания систем автоматического управления и обработки информации.

Рецензент - проф. А.И.Рубан

Редактор - проф. Ф.П.Тарасенко

$$К \frac{1502000000}{177(012) - 85} 53-84$$

© Издательство Томского университета, 1985.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие. 7

Сокращения и условные обозначения. 9

Глава I. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ. 10

§ I. Краткий обзор основных результатов по последовательному оцениванию параметров случайных последовательностей. 10
I.I. Точечное последовательное оценивание 11
I.2. Интервальное последовательное оценивание . . . 14
§ 2. Последовательное оценивание линейных параметров динамических систем. Постановка задачи. 16
§ 3. Несмещенное последовательное оценивание скалярного параметра 17
3.I. Построение последовательного плана. 17
3.2. Свойства последовательной оценки. 19
3.3. О достаточных условиях сходимости последовательных оценок параметров нелинейных динамических процессов. 24
§ 4. Несмещенное последовательное оценивание векторного параметра. 34
4.I. Построение последовательных планов. 35
4.2. Свойства последовательных оценок. 38
4.3. Несмещенное последовательное оценивание при линейных ограничениях на параметр. 42
4.4. Об оптимальности несмещенных последовательных оценок. 49
§ 5. О средней длительности несмещенных последовательных процедур оценивания. 55
§ 6. Асимптотические свойства последовательной оценки параметра авторегрессии. 65
§ 7. Двухэтапный последовательный метод оценивания линейных параметров стохастических систем. 69
7.I. Построение последовательных оценок. 69
7.2. Свойства последовательных оценок. 74

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

7.3. Последовательное оценивание параметров процесса авторегрессии. 75
§ 8. Последовательный метод оценивания линейных параметров динамических систем при наличии шумов в наблюдениях. 83
8.I. Постановка задачи. 84
8.2. Построение последовательных планов. . . . 85
8.3. Изучение свойств последовательных оценок. 89
8.4. Последовательное оценивание параметров процесса авторегрессии при наличии шума в наблюдениях. 93
§ 9. Последовательный непараметрический метод оценивания нелинейных параметров нелинейных авторегрессионных процессов. 98
9.I. Постановка задачи. 98
9.2. Построение интервальной последовательной оценки при монотонной зависимости функции $a(\cdot)$ от λ 99
9.3. Последовательное оценивание в случае однозначных кусочно-непрерывных функций от параметра с фиксированным множеством точек разрыва. I03
9.4. Пример построения доверительного интервала фиксированной ширины для нелинейного параметра. I06
9.5. Об одной нелинейной задаче экстремального регулирования в обстановке помех. I08
§ I0. Границы для среднего времени достижения постоянного порога неупреждающим функционалом от случайного процесса рекуррентного типа... . . . . II0
I0.I. Верхняя граница для среднего числа наблюдений. III
I0.2. Нижняя граница для среднего числа наблюдений. II7
I0.3. О среднем числе наблюдений при интервальном оценивании нелинейного параметра. . . II8
Глава 2. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОБНАРУЖЕНИЕ РАЗЛАДОК ПРОЦЕССОВ РЕКУРРЕНТНОГО ТИПА. I22
§ I. Последовательный непараметрический критерий классификации случайных процессов рекуррентного типа I22

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

I.I. Постановка задачи. I22
I.2. Построение критерия классификации и исследование его свойств в случае одинаковых дисперсионных матриц. I23
I.3. Случай неодинаковых дисперсионных матриц. . I27
I.4. Классификация процессов авторегрессии. . . I30
§ 2. Последовательный непараметрический метод обнаружения разладок случайных процессов рекуррентного типа. I34
2.I. Постановка задачи. I34
2.2. Построение решающей процедуры. I35
2.3. Выбор параметров и исследование свойств решающей процедуры. I38
2.4. Обнаружение разладки в случае неодинаковых дисперсионных матриц. I48
2.5. Обнаружение разладки процесса авторегрессии I50
2.6. Экспериментальное исследование алгоритма. . I5I
§ 3. Последовательный непараметрический метод обнаружения разладок случайных процессов рекуррентного типа при многоальтернативной конечной модели. I53
3.I. Постановка задачи. I53
3.2. Построение решающей процедуры. I53
3.3. Исследование свойств решающей процедуры. . I57
§ 4. Обнаружение моментов скачкообразных изменений параметров случайных процессов. I63
4.I. Постановка задачи. I63
4.2. Построение решающей процедуры и исследование её свойств. I64

Глава 3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА. I68
§ I. Несмещенное оценивание параметров многомерных диффузионных процессов. I68
I.I. Постановка задачи. I68
I.2. Построение и исследование последовательных оценок параметров. I69
§ 2. Двухэтапный последовательный метод оценивания

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

линейных параметров динамических систем с непрерывным временем. 172
§ 3. Последовательное оценивание нелинейных параметров диффузионных процессов. 176
§ 4. Последовательный метод обнаружения разладок в системе динамических объектов. 179
4.1. Постановка задачи. 179
4.2. Обнаружение разладки в одном объекте. . . 180
4.3. Обнаружение разладки в системе объектов. . 191
§ 5. Управление линейной динамической системой при наличии неизвестных параметров. 196
5.1. Постановка задачи. 196
5.2. Вывод уравнения Беллмана. 197
5.3. Управление одномерным процессом x. 200
5.4. Адаптивное управление многомерным процессом 204
§ 6. Байесовский подход к задаче оценивания параметров линейных марковских процессов при наблюдении части компонент. 206
6.1. Постановка задачи. 206
6.2. Случай дискретного времени. Рекуррентные соотношения для апостериорного распределения неизвестных параметров. 208
6.3. Система уравнений совместной оптимальной фильтрации ненаблюдаемых компонент и оценки неизвестных параметров. 210
6.4. Байесовские оценки неизвестных параметров корреляционных функций гауссовских процессов с дробно-рациональными спектральными плотностями. 213
6.5. Примеры 215
Глава 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ. 219
§ 1. Оценивание параметров полей дискретного аргумента 219
§ 2. Последовательное оценивание параметров сноса случайных полей диффузионного типа. 227

ПРИЛОЖЕНИЕ. 232

ЛИТЕРАТУРА. 247

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ПРЕДИСЛОВИЕ

В теоретических и прикладных исследованиях, связанных с задачами автоматического управления и регулирования, идентификации и фильтрации, с корреляционным и спектральным анализом временных рядов, большое внимание уделяется проблеме оценивания параметров динамических систем, описываемых стохастическими разностными и стохастическими дифференциальными уравнениями. Интерес к таким моделям объясняется тем, что они являются достаточно адекватными для широкого круга реальных явлений в технике, экономике, медицине и т.п. Указанная проблематика весьма обширна и, несмотря на наличие ряда монографий и огромного числа статей, далеко не исчерпана. В данной книге рассматривается лишь один из аспектов общей проблемы оценивания: её основная цель - получить неасимптотическое решение задачи оценивания для некоторого класса динамических моделей, традиционно изучаемых при асимптотических предположениях. Примером модели такого типа является модель общей регрессии

$$x_t = \lambda_1 \varphi_1(t) + \cdots + \lambda_p \varphi_p(t) + \xi_t \ , \ t = 0,1,\ldots \ ,$$

в которой сигнальная часть представляет собой линейную комбинацию случайных функций $\varphi_i(t)$.

В книге излагается подход к проблеме оценивания параметров стохастических динамических систем в неасимптотической постановке с позиций статистического последовательного анализа. Использование последовательного анализа, для которого характерно выносить окончательные решения по выборкам нефиксированного заранее (случайного) объема, представляется вполне естественным в задачах оценивания параметров динамических систем, поскольку позволяет учесть при конструировании оценок возможность вариации в широких пределах информации о неизвестном параметре, содержащейся в каждом отдельном наблюдении в зависимости от эволюции процесса в целом. Тем не менее до недавнего времени теория последовательного оценивания ограничивалась в основном рассмотрением задач, связанных со схемой независимых испытаний. Кроме того, в современной теории последовательного оценивания, как правило, делается предположение о том, что распределение наблюдений известно с точностью до конечного числа неизвестных

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

параметров, т.е. эта теория представляет собой область параметрической статистики. Для рассматриваемого ниже класса динамических моделей эти требования не выполняются, так как определяемые ими процессы, вообще говоря, зависимы, к тому же в случае дискретного времени распределения процессов являются неизвестными.

Впервые перспективность подхода с позиций последовательного анализа к проблеме оценивания параметров динамических систем с непрерывным временем была показана А.А.Новиковым, который установил, что последовательные оценки максимального правдоподобия по ряду своих свойств существенно превосходят обычные оценки МП.

Книга не претендует на полноту изложения результатов по последовательному оцениванию, её основу составляют результаты, полученные автором и его учениками.

В книге принята обычная двойная нумерация утверждений и формул, самостоятельная в каждой главе. При ссылках на утверждения и формулы другой главы номер главы ставится впереди. Автор с благодарностью примет все предложения по улучшению содержания книги.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

СОКРАЩЕНИЯ И УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

ММП - метод максимального правдоподобия

МНК - метод наименьших квадратов

МСА - метод стохастической аппроксимации

τ, σ - моменты остановки

(τ, λ^*) - последовательный план оценивания параметра λ

χ_A - индикатор множества A

б.ч. - бесконечное число

$a \vee b$ - максимальное из чисел a и b

$a \wedge b$ - минимальное из чисел a и b

δ_{ij} - символ Кронекера

R^m - m- мерное евклидово пространство

E - единичная матрица

A^+ - псевдообратная для A матрица

A^T - транспонированная матрица A

$\emptyset$ - пустое множество

$\mathcal{F}_\tau$ - σ-алгебра событий, наблюдаемых до момента остановки τ

$\sigma\{\xi_i, i \in J\}$ - наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы случайные величины $\xi_i, i \in J$

$\langle a \rangle_i$ - i-я координата вектора a

$\langle B \rangle_i$ - i-я строка матрицы B

$\langle B \rangle_{ij}$ - элемент матрицы B, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца

$M_\lambda(\cdot)$ - математическое ожидание, вычисленное в предположении, что истинное значение параметра равно λ

ПН - почти наверное

УЗБЧ - усиленный закон больших чисел

н.о.р. - независимые одинаково распределенные

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Глава I

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В данной главе излагаются методы оценивания параметров динамических систем с дискретным временем, разработанные на основе подхода с позиций последовательного анализа [16, 18, 24, 29, 82, 88, 90, 91 и др.]. Предполагается, что динамика системы описывается стохастическими разностными уравнениями, причем точный вид распределения возмущений неизвестен. Основная цель заключается в построении процедур оценивания с гарантированным качеством.

В общей регрессии для оценивания линейных параметров предлагаются последовательные планы, которые обеспечивают заданную среднеквадратическую точность.

Для оценивания нелинейных параметров дается способ получения доверительного интервала фиксированной ширины.

§1. КРАТКИЙ ОБЗОР ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМУ ОЦЕНИВАНИЮ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Теория последовательного оценивания как область последовательного анализа стала развиваться с момента опубликования фундаментальных результатов А.Вальда [22]. К настоящему времени в этой области получено много интересных результатов, которые не только обогатили теоретическую статистику, но и привели к созданию новых весьма эффективных последовательных решающих процедур обработки статистических данных. Подавляющее большинство работ по последовательному оцениванию относится к схеме независимых экспериментов, когда наблюдения представляют собой реализации последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\{x_n, n \geq 1\}$ с функцией распределения $F(x;\theta)$, содержащей неизвестный параметр θ. При этом обращение к последовательному анализу для оце -

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

нивания неизвестного параметра осуществляется либо с целью сокращения среднего числа необходимых наблюдений, либо для получения оценок такого качества, которое не может быть достигнуто при использовании выборок фиксированного объема.

I.I. Точечное последовательное оценивание

Проблеме точечного последовательного оценивания посвящено большое число работ советских и зарубежных авторов. Не имея возможности подробно остановиться на содержании этих работ, отметим характерные моменты в постановках задач и основные направления исследований. Обычно речь идет о последовательном оценивании самого неизвестного параметра θ, хотя иногда оценивается некоторая функция от него $g(\theta)$. Процедура последовательной точечной оценки определяется парой - правилом остановки и правилом оценивания. Правило остановки задается с помощью последовательности функций $\{\varphi(X_1,\dots,X_m), m\geq 1\}$, принимающих значения 0 или I. При этом длительность наблюдений определяется как

$$\tau = \inf\{n\geq 1 : \varphi(x_1,\dots,x_n)=1\}.$$

Правило оценивания задается последовательностью функций $\{\hat\theta(X_1,\dots,X_n), n\geq 1\}$. В момент прекращения наблюдений τ неизвестный параметр θ оценивается величиной $\hat\theta(x_1,\dots,x_\tau)$. Обозначим последовательную процедуру $T=(\tau,\hat\theta_\tau)$. Выбор последовательных оценок осуществляется обычно с помощью функций потерь. В [60] выделяются потери двух типов: $L_1(\theta,T)$ и $L_2(\theta,T)$, которые определяют соответственно потери, обусловленные ошибочным оцениванием, и издержки, связанные с правилом остановки τ. Наиболее часто полагают

$$L_1(\theta,T)=(\theta-\hat\theta_\tau)^\alpha,\quad L_2(\theta,T)=c\tau, \tag{I.I}$$

причем обычно $\alpha = 2$. Мерами качества последовательной процедуры, как правило, служат средние риски

$$R_i(\theta,T)=M_\theta L_i(\theta,T)$$

или их сумма. Более сложные стоимостные структуры, выходящие за рамки классической теории А.Вальда и использующие несколько функ-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ций потерь рассматривались в работе Ю.В.Линника [I06]. В задачах оптимизации последовательных процедур оценивания широко используются следующие критерии:

I. При заданной верхней границе для среднеквадратического уклонения найти последовательную оценку, минимизирующую среднее число наблюдений равномерно по θ .

2. При заданной верхней границе для среднего числа наблюдений найти несмещенную последовательную точечную оценку, равномерно минимизирующую дисперсию оценки.

3. Найти последовательную оценку, минимизирующую средние потери

$$M_\theta [(\theta - \hat{\theta}_\tau)^\alpha + c\tau] \qquad (I.2)$$

равномерно по θ .

Задачи с такими критериями решены для ряда конкретных распределений, так как в общем случае равномерно наиболее мощных процедур оценивания не существует.

Отметим некоторые результаты: Роббинс в [258] рассмотрел задачу оценивания среднего нормального распределения при неизвестной дисперсии. Для оценивания он использовал критерий типа 3 при $\alpha = 2$. В дальнейшем процедуру Роббинса подробно изучал Старр [268-270]. Указанную задачу, а также задачу последовательного оценивания параметра биноминального распределения исследовали Бхаттачария и Маллик [198], которые нашли предельное распределение моментов остановки соответствующих последовательных процедур при стоимости наблюдений $C \to 0$. В случае экспоненциального семейства и счетного множества значений параметра задача последовательного оценивания изучалась в [242]. Интересные результаты в задаче оценивания параметра сдвига получены И.А.Ибрагимовым и Р.З.Хасьминским [67], которые для случая разрывных плотностей построили две инвариантные (относительно сдвига) последовательные процедуры оценивания, более эффективные (при степенной функции потерь), чем наилучшая инвариантная процедура, построенная по выборке фиксированного объема. Задачу оценивания параметра сдвига при распределении, сосредоточенном на конечном интервале, изучал А.И.Шалыт [178,179], который для случая равномерного распределения показал, что последовательная процедура оценивания может существенно превосходить по качеству [для критерия вида

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

(I.2) при $\alpha = 2$] наилучшие процедуры, построенные по выборке фиксированного объема. Результаты работ [178,179] для равномерного распределения были обобщены М.С.Тиховым [157], который использовал критерий (I.2) (без предположения $\alpha = 2$). В ряде работ исследовались минимаксные последовательные процедуры оценивания [22,241 и др.]. При этом использовались критерии трех типов:

I. Минимаксная процедура минимизирует $\sup_\theta R_1(\theta,T)$ при условии, что $\sup_\theta R_2(\theta,T) \le L_2$.

2. Минимаксная процедура минимизирует $\sup_\theta R_2(\theta,T)$ при условии, что $\sup_\theta R_1(\theta,T) \le L_1$.

3. Минимаксная процедура минимизирует

$$\sup_\theta \{R_1(\theta,T) + R_2(\theta,T)\}.$$

Точное решение минимаксных задач последовательного оценивания получено лишь в частных случаях, которые подробно описаны в [60]. Основные результаты в проблеме минимаксных последовательных оценок, как правило, имеют асимптотический характер. А.Вальд доказал асимптотическую минимаксность последовательных оценок для критерия типа 3 при стоимости наблюдения $c \to 0$. Принципиально важные асимптотические результаты были получены в работах [68, 107], в которых рассматривался случай, когда граница для среднего числа наблюдений неограниченно возрастает. Как было установлено Ю.В.Линником и И.В.Романовским [107], при достаточно гладкой зависимости плотности распределения наблюдений от неизвестного параметра асимптотически несмещенные последовательные планы оценивания не имеют в асимптотике преимущества перед планом постоянного объема в смысле квадратичной функции потерь. И.А.Ибрагимов и Р.З.Хасьминский [68] доказали асимптотическую минимаксность планов оценивания, основанных на выборках неслучайного объема, в классе последовательных планов при квадратичной функции потерь. В [69] те же авторы доказали неравенство, обобщающее известное неравенство Гаека, из которого следует, что в минимаксном смысле последовательное оценивание не дает асимптотически выигрыша также для степенных функций потерь. Ценность отмеченных асимптотических результатов, на наш взгляд, прежде всего в том, что они указывают на бесплодность попыток построить последовательные оценки, которые были бы при большом числе наблюдений эффективнее оценок, построенных по выборке фиксированного объема. При этом, конечно, не исключается возможность существования последователь-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ных оценок, которые при малых и умеренных объемах выборки более предпочтительны, чем наилучшие оценки, использующие выборки фиксированного объема.

I.2. Интервальное последовательное оценивание

Принципы построения последовательных оценок посредством интервалов и множеств были сформулированы А.Вальдом [22]. При этом Вальд опирался на теорию доверительного оценивания, развитую Дж.Нейманом. Так же, как и точечная последовательная оценка, интервальная последовательная оценка определяется парой – правилом остановки и правилом оценивания, но отличается от неё выбором правила оценивания. Пусть S_m – множество выборок $E_m=(x_1,\dots,x_m)$, при которых наблюдения прекращаются в момент $\tau=m$, т.е.

$$S_m=\{(x_1,\dots,x_m):\varphi(x_1,\dots,x_\ell)=0,\ 1\le\ell<m,$$
$$\varphi(x_1,\dots,x_m)=1\}.$$

Правило оценивания задается сопоставлением каждому элементу E_m из S_m, $m=1,2,\dots$, множества $\omega(E_m)$ в параметрическом пространстве Θ, которое объявляется доверительной областью для неизвестного параметра θ, если $\tau=m$. Основная задача последовательной оценки множествами заключается в правильном выборе последовательностей $\{\varphi(x_1,\dots,x_m),m\ge1\}$ и $\{\omega(E_m),m\ge1\}$. Относительно выбора $\omega(E_m)$ А.Вальд [22] оговаривает два условия. Во-первых, это множество "должно удовлетворять некоторым установленным требованиям, касающимся его геометрической формы", во-вторых, доверительное множество $\omega(E_\tau)$ должно иметь заданный коэффициент доверия γ, т.е. для всех $\theta\in\Theta$ должно выполняться неравенство

$$P_\theta[\theta\in\omega(E_\tau)]\ge\gamma.$$

Сформулировав общую задачу интервального последовательного оценивания, А.Вальд не дал её решения. Специфические задачи интервального последовательного оценивания рассматривались в ряде работ (частично они отражены в книге Ш.Закса [60]). Общая же теория интервального последовательного оценивания остается до сих пор разработанной слабо. Завершая краткий обзор результатов, полученных в области последовательного оценивания параметров случайных процессов с дискретным временем, сделаем следующее резюме.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Теория последовательного оценивания в настоящее время разработана в основном для схемы независимых наблюдений, причем общие результаты носят, как правило, асимптотический характер. Однако нет сомнений в том, что идеи построения последовательных оценок и многие конструктивные выводы этой теории должны иметь общий характер и сохранять свою силу для зависимых наблюдений. Это, конечно, не исключает возможности наличия у теории последовательного оценивания для зависимых наблюдений своих отличительных черт, связанных с тем или иным типом рассматриваемой зависимости. Излагаемые ниже методы последовательного оценивания параметров зависимых случайных процессов, описываемых стохастическими разностными уравнениями, также имеют свои особенности. Так,в большинстве случаев последовательные планы оценивания находятся не из решения оптимизационных задач, а строятся путем модификации соответствующих оценок МНК. Такой подход может быть оправдан, по-видимому, тем, что он приводит к решению задач оценивания в неасимптотической постановке, а также позволяет во многих случаях получить процедуры со свойствами, недоступными в настоящее время для других методов.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) выделена неубывающая система σ-подалгебр $\{F_t,\ t=0,1,\dots\}$ и задан многомерный случайный процесс $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))^T$, описываемый системой уравнений

$$x(t+1)=A_0(t)+A_1(t)\lambda+\varepsilon(t+1), \qquad t=0,1,\dots \tag{2.1}$$

Здесь $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_p)^T$ – неизвестный вектор параметров, который необходимо оценить по наблюдениям за процессами $x(t)$, $A_0(t)$ и $A_1(t)$; $\{\varepsilon(t)\}$ – ненаблюдаемая последовательность шумов. Предположим, что случайные процессы $\{\varepsilon(t)\}$ и $A_i(t)$ согласованы с системой $\{F_t\}$, т.е. все компоненты векторов $\varepsilon(t)=(\varepsilon_1(t),\dots,\varepsilon_n(t))^T$, $A_0(t)=(a_{01}(t),\dots,a_{0n}(t))^T$ и все элементы матрицы $A_1(t)=\|a_{ij}(t)\|$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,p}$ измеримы относительно σ-алгебры F_t, $t=0,1,\dots$ На последовательность $\{\varepsilon(t)\}$ наложим также следующие требования:

$$\begin{aligned}
&1.\ M_\lambda(\|\varepsilon(t)\|^2)<\infty, \quad t=0,1,\dots,\ \lambda\in R^p;\\
&2.\ M_\lambda(\varepsilon(t+1)\mid F_t)=0;\\
&3.\ M_\lambda(\varepsilon(t+1)\varepsilon^T(t+1)\mid F_t)=\mathcal{D}(t).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Распределения процессов $A_i(t)$ и $\varepsilon(t)$ считаются неизвестными. Уравнения (2.1) задают линейную модель общей регрессии. Эта модель отличается от хорошо изученной модели детерминированной регрессии тем, что значения функции $A_i(t)$, хотя и становятся известными в эксперименте, являются случайными. Уравнениями (2.1) может, например, описываться поведение стохастического динамического объекта. В этом случае $A_0(t)$ и $A_1(t)$ являются некоторыми измеримыми функциями от $t, x(0),\dots,x(t)$. Если $\{\varepsilon(t)\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с конечными вторыми моментами, то условия (2.2) будут выполняться при $F_t=\sigma\{x(0),\varepsilon(1),\dots,\varepsilon(t)\}$. Нас будет интересовать решение задачи оценивания вектора $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_p)^T$ в неасимптотической постановке. Цель состоит в том, чтобы для каждой координаты λ_i построить план оценивания, который по

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

заданной точности оценки (допустимому среднеквадратическому уклонению) указывал бы момент прекращения наблюдений, в который эта точность достигается.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать подход с позиций последовательного анализа. Сложность решения зависит от размерности вектора λ. Начнем рассмотрение с простейшего случая, когда λ является скалярной величиной.

§ 3. НЕСМЕЩЕННОЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СКАЛЯРНОГО ПАРАМЕТРА

3.1. Построение последовательного плана

Последовательный план оценивания параметра λ задается парой - правилом остановки и правилом оценивания, причем элементы пары являются неупреждающими функционалами от наблюдаемых процессов. Будем строить последовательный план, основываясь на методе наименьших квадратов. Оценка МНК определяется из условия минимума по λ выражения

$$\sum_{t=0}^{N} (x(t+1)-A_0(t)-A_1(t)\lambda)^T \mathcal{D}^+(t)(x(t+1)-A_0(t)-A_1(t)\lambda \qquad (3.1)$$

и имеет вид

$$\hat{\lambda}_N = \frac{\left[\sum_{t=0}^{N} A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)(x(t+1)-A_0(t))\right]}{\left[\sum_{t=0}^{N} A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)A_1(t)\right]}.$$

Эта оценка является, вообще говоря, смещенной, и нахождение её среднеквадратического уклонения связано с большими трудностями, так как она представляет собой нелинейный функционал от наблюдаемых процессов. Чтобы построить последовательный план, зададимся произвольной постоянной H, $0<H<\infty$, и определим правило остановки $\tau=\tau(H)$ по формуле

$$\tau(H)=\min\left\{N\geq 0:\sum_{t=0}^{N} A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)A_1(t)\geq H\right\}. \qquad (3.2)$$

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА ДЛЯ КНИГ

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

(Полагаем $\tau(H)=+\infty$, если множество в фигурных скобках пусто.) Последовательную оценку $\lambda^*=\lambda^*(H)$, отвечающую правилу остановки $\tau(H)$, возьмем в виде

$$\lambda^*(H)=\frac{\sum_{t=0}^{\tau-1} A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)(x(t+1)-A_0(t))+\alpha_\tau(H)A_1^T(\tau)\mathcal{D}^+(\tau)(x(\tau+1)-A_0(\tau))}{\sum_{t=0}^{\tau-1} A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)A(t)+\alpha_\tau(H)A_1^T(\tau)\mathcal{D}^+(\tau)A_1(\tau)}, \quad (3.3)$$

причем коэффициент $\alpha_\tau=\alpha_\tau(H)$ выберем так, чтобы в момент $\tau(H)$ знаменатель в (3.3) в точности равнялся H, т.е. положим

$$\alpha_\tau(H)=\frac{H-\sum_{t=0}^{\tau-1} A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)A_1(t)}{A_1^T(\tau)\mathcal{D}^+(\tau)A_1(\tau)}.$$

Последовательная оценка (3.3) получается из оценки МНК путем замены N на τ и введения весового множителя $\alpha_\tau(H)$, $0<\alpha_\tau(H)\leq 1$, у последних слагаемых в суммах числителя и знаменателя. Как будет видно из дальнейшего, переход к случайному моменту остановки и специальный выбор весового множителя упрощают исследование свойств оценки. Полагая

$$\tilde{g}_\tau(t)=\begin{cases}\frac{A_1^T}{H}(t)\mathcal{D}^+(t), & \text{если } t<\tau(H);\\ \frac{\alpha_\tau(H)}{H}A_1^T(\tau)\mathcal{D}^+(\tau), & \text{если } t=\tau(H),\end{cases} \quad (3.4)$$

запишем (3.3) более компактно:

$$\lambda^*(H)=\sum_{t=0}^{\tau(H)}\tilde{g}_\tau(t)(x(t+1)-A_0(t)). \quad (3.5)$$

Последовательный план построен.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

3.2. Свойства последовательной оценки

Основные свойства последовательной оценки неизвестного параметра сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3.I. Пусть для процесса $x(t)$, описываемого уравнением (2.I), при всех λ, $-\infty<\lambda<\infty$, с вероятностью единица расходится ряд

$$\sum_{t=0}^{\infty} A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)A_1(t)=\infty. \tag{3.6}$$

Тогда при любом $H\,(0<H<\infty)$ последовательный план $(\tau(H)$, $\lambda^*(H))$ обладает свойствами:

а) оценка $\lambda^*(H))$ – несмещенная: $M_\lambda\lambda^*(H)=\lambda$;

б) среднеквадратическое уклонение оценки равномерно ограничено:

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} M_\lambda\left[\lambda^*(H)-\lambda\right]^2\le\frac{1}{H}; \tag{3.7}$$

в) момент остановки $\tau(H)$ конечен с вероятностью единица.

Доказательство. а) Подставив (2.I) в (3.5), получим

$$\lambda_\tau^*(H)=\lambda+R_\tau(H); \tag{3.8}$$

$$R_\tau(H)=\sum_{t=0}^{\tau(H)}\tilde{g}_\tau(t)\varepsilon(t+1).$$

Несмещенность оценки λ_τ^* эквивалентна равенству

$$M_\lambda R_\tau(H)=0. \tag{3.9}$$

Введем "усеченный" момент остановки $\bar{\tau}(H,N)=\min(\tau(H),N)$ и установим сначала, что

$$M_\lambda F_N=0,\quad F_N=\sum_{t=0}^{\bar{\tau}}\tilde{g}_\tau(t)\varepsilon(t+1). \tag{3.I0}$$

Рассмотрим величину

$$M_\lambda F_N^2=M_\lambda\left[\sum_{s=0}^{\bar{\tau}}\sum_{t=0}^{\bar{\tau}}\tilde{g}_\tau(s)\varepsilon(s+1)\varepsilon^T(t+1)\tilde{g}_\tau^T(t)\right]= \tag{3.II}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$= M_\lambda\Big[\sum_{s=0}^{\bar\tau} \tilde g_\tau(s)\mathcal{E}(s+1)\mathcal{E}^T(s+1)\tilde g_\tau^T(s) +$$

$$+ 2M\Big[\sum_{0\le s<t\le\bar\tau} \tilde g_\tau(s)\mathcal{E}(s+1)\mathcal{E}^T(t+1)\tilde g_\tau^T(t)\Big].$$

Первое слагаемое можно оценить, используя свойства условных математических ожиданий и учитывая неотрицательность суммируемых случайных величин:

$$M_\lambda\Big[\sum_{s=0}^{\bar\tau}(\cdot)\Big] = \sum_{s=0}^{N} M_\lambda\Big[\chi_{(s\le\bar\tau)}\tilde g_\tau(s)\mathcal{E}(s+1)\mathcal{E}^T(s+1)\tilde g_\tau^T(s)\Big] =$$

$$= \sum_{s=0}^{N} M_\lambda\Big\{\chi_{(s\le\bar\tau)}\tilde g_\tau(s) M_\lambda\Big[\mathcal{E}(s+1)\mathcal{E}^T(s+1)\Big|F_s\Big]\tilde g_\tau^T(s)\Big\} =$$

$$= M_\lambda\sum_{s=0}^{\bar\tau}\tilde g_\tau(s)\mathcal{D}(s)\tilde g_\tau^T(s) \le M_\lambda\sum_{s=0}^{\tau}\tilde g_\tau(s)\mathcal{D}(s)\tilde g_\tau^T(s) \le \tag{3.I2}$$

$$\le \frac{1}{H^2} M_\lambda\Big[\sum_{s=0}^{\tau-1} A_1^T(s)\mathcal{D}^{-1}(s)A_1(s) + \alpha_\tau(H)A_1^T(\tau)\mathcal{D}^{-1}(\tau)A_1(\tau)\Big] = \frac{1}{H}.$$

Вторая сумма в (3.II) равна нулю, поскольку $M_\lambda\Big\{\sum_{0<s<t\le\bar\tau}(\cdot)\Big\} =$

$$= \sum_{0\le s<t\le N} M_\lambda\Big\{\tilde g_\tau(s)\mathcal{E}(s+1)M_\lambda\big(\mathcal{E}^T(t+1)\big|F_t\big)\tilde g_\tau^T(t)\chi_{(t\le\bar\tau)}\Big\} = 0. \tag{3.I3}$$

Переход к условному математическому ожиданию здесь возможен в силу конечности математического ожидания каждого слагаемого, которая следует из (3.I2) и элементарного неравенства

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$2|ab| \le a^2+b^2 \quad \text{при } a=\tilde{g}_\tau(s)\varepsilon(s+1), \quad b=\tilde{g}_\tau(t)\varepsilon(t+1).$$

С учетом (3.12), (3.13) из (3.11) получаем неравенство

$$\sup_{N>1} M_\lambda F_N^2 \le \frac{1}{H}. \tag{3.14}$$

Далее находим

$$M_\lambda F_N = \sum_{s=0}^{N} M_\lambda\left[\tilde{g}_\tau(s)\chi_{(s\le\tau)} M_\lambda(\varepsilon(s+1)|F_s)\right]=0.$$

Так как $\lim F_N = R_\tau(H)$ почти наверное и условие (3.14) обеспечивает равномерную интегрируемость последовательности $\{F_N, N\ge 1\}$ (в силу теоремы Валле-Пуссена [123]), то оправдан предельный переход в (3.10)

$$0=\lim M_\lambda F_N = M_\lambda R_\tau(H).$$

Несмещенность доказана.

б) Для доказательства (3.7) используем (3.8), (3.14) и теорему Фату-Лебега

$$M_\lambda[\lambda_\tau^*(H)-\lambda]^2 = M_\lambda R_\tau^2 = M_\lambda\left(\varliminf_{N\to\infty} F_N^2\right) \le \varliminf M_\lambda F_N^2 \le \frac{1}{H}.$$

в) Последнее утверждение теоремы I следует непосредственно из условия (3.6) и конечности H. Теорема I доказана.

Заметим, что условие теоремы I является, по-видимому, необходимым и достаточным для того, чтобы с помощью последовательного плана можно было оценить неизвестный параметр со сколько угодно высокой точностью. В случае детерминированных функций $A_1(t)$ и $\mathcal{D}(t)$ необходимость (3.6) следует из формулы для дисперсии оценки МНК (3.1)

$$M_\lambda(\hat{\lambda}_N-\lambda)^2 = \frac{1}{\sum_{t=0}^{N} A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)A_1(t)}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Если (3.6) заменить на условие

$$P_\lambda\left\{\sum_{t=0}^{\infty} A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)A_1(t) \geq c\right\} = 1 \qquad (0 < c < \infty),$$

то последовательный план (3.2), (3.3), вообще говоря, не гарантирует, что дисперсия оценки может быть сделана меньше $1/c$. Из теоремы I получаем

<u>Следствие 3.I</u>. Пусть $\{H_n, n \geq 1\}$ – возрастающая последовательность порогов, а $\{\tilde{\lambda}(n)$ – соответствующая последовательность оценок: $\{\tilde{\lambda}(n) = \lambda^*_\tau(H_n),\ \tau = \tau(H_n)\}$. Тогда:
I) если $H_n \to \infty$, то $\tilde{\lambda}(n)$ сходится к λ в среднеквадратическом;
2) если, кроме того, $\sum_{n\geq 1} 1/H_n < \infty$, то сходимость $\tilde{\lambda}(n) \to \lambda$ будет иметь место и почти наверное.

<u>Доказательство следствия 3.I</u>. Утверждение I) следует из неравенства: $M_\lambda[\tilde{\lambda}_n - \lambda]^2 \leq 1/H_n$. Второе утверждение легко получаем с помощью леммы Бореля-Кантелли. Пусть $A_n(\varepsilon) = \{|\tilde{\lambda}(n) - \lambda| > \varepsilon\}$, $n \geq 1$. Так как

$$\sum_{n\geq 1} P_\lambda(A_n(\varepsilon)) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n\geq 1} M_\lambda[\tilde{\lambda}(n) - \lambda]^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n\geq 1} 1/H_n < \infty,$$

то по лемме Бореля-Кантелли $P(\limsup A_n(\varepsilon)) = 0$ для $\forall \varepsilon > 0$. Последнее условие необходимо и достаточно для сходимости почти наверное.

Пример 3.I

I. Пусть $x(t)$ – одномерный процесс авторегрессии:

$$x(t+1) = \lambda x(t) + \xi(t+1), \quad -\infty < \lambda < \infty, \tag{3.I5}$$

причём $\{\xi(t)\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с

$$M\xi(t) = 0, \quad M\xi^2(t) = \sigma^2 > 0.$$

Последовательный план оценивания λ согласно (3.2), (3.3) определяется формулами:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\tau = \tau(H) = \min\left\{N \geq 0 : \sum_{t=0}^{N} x^2(t) \geq \sigma^2 \cdot H\right\};$$

$$\overset{*}{\lambda}(H) = \frac{\sum\limits_{t=0}^{\tau-1} \frac{x(t)x(t+1)}{\sigma^2} + \frac{\alpha_\tau(H)x(\tau)x(\tau+1)}{\sigma^2}}{H}, \quad \sum_{t=0}^{\tau-1} \frac{x^2(t)}{\sigma^2} + \alpha_\tau(H)\frac{x^2(\tau)}{\sigma^2} = H. \tag{3.16}$$

Покажем, что этот план позволяет оценить параметр λ с любой требуемой точностью. Условие (3.6) теоремы 3.1 в данном случае принимает вид

$$\sum_{t=0}^{\infty} x^2(t) = \infty \quad \text{п.н.} \tag{3.17}$$

Очевидно, достаточно установить, что с вероятностью единица $\overline{\lim}\,|x(t)| > 0$ при $t \to \infty$. Допустим противное: $\overline{\lim}\,|x_t| = 0$. Тогда, переходя к пределу в (3.15), получим

$$0 = \lim_{t\to\infty} x(t+1) - \lambda \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim \xi(t).$$

С другой стороны, по лемме Бореля-Кантелли $\overline{\lim}\,\xi(t) > 0$ почти наверное. Это противоречие и доказывает, что $\overline{\lim}\,|x_t| > 0$ при $t \to \infty$. Поэтому выполнено условие (3.17), обеспечивающее возможность оценивания λ с любой заданной точностью. Согласно следствию 3.1 последовательность оценок $\hat{\lambda}(n)$ при подходящем выборе системы порогов $\{H_n\}$ будет сходиться к λ как в среднеквадратическом смысле, так и с вероятностью единица.

Замечание 3.1. Асимптотические свойства оценок параметров процесса (3.15) изучались в ряде работ. Сходимость почти наверное алгоритма стохастической аппроксимации для оценки параметра авторегрессии доказал Ю.Ш.Верулава [26], который рассматривал случай устойчивого процесса ($|\lambda| < 1$). Согласно [26] оценка МНК сходится почти наверное, если $M\xi^4(t) < \infty$. Сильную состоятельность оценки МНК для всех значений параметра λ доказал, используя мартингальный подход, А.Н.Ширяев [186], который требует конечности только вторых моментов шумов ξ_t.
При этом в случае разнораспределенных случайных величин $\{\xi_t\}$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

достаточные условия сходимости почти наверное имеют вид

$$\sup_{t\geq 0}\frac{\mathcal{D}(t+1)}{\mathcal{D}(t)}<\infty,\ \sum_{t\geq 1}^{\infty}M\left(\frac{\xi^2(t)}{\mathcal{D}(t)}\wedge 1\right)=\infty,\ \mathcal{D}(t)=M\xi^2(t). \tag{3.18}$$

Как видно из приведенного примера, в задаче последовательного оценивания наиболее трудно проверяемым является условие (3.6), которое носит неконструктивный характер. В связи с этим представляет интерес рассмотрение более узких классов случайных процессов, для которых можно надеяться получить легко проверяемые условия на функции $A_i(t)$ и $\mathcal{D}(t)$, обеспечивающие расходимость ряда (3.6). Изучим этот вопрос подробнее для процессов рекуррентного типа, причем ограничимся для простоты случаем скалярного процесса. Будем следовать работе [86].

3.3. О достаточных условиях сходимости последовательных оценок параметров нелинейных динамических процессов

Пусть наблюдаемый процесс $\{x(t)\}$ задается уравнением

$$x_{t+1}=\lambda a(t,x_t)+\sigma(t,x_t)\xi_{t+1},\quad t=0,1,\ldots, \tag{3.19}$$

где $\{\xi_t\}$ – независимо случайные величины с $M\xi_t=0$ и $M\xi_t^2=1$; $a(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ – некоторые борелевские функции. Последовательный план оценивания параметра λ определяется формулами:

$$\tau=\tau(H)=\inf\left\{N\geq 0:\sum_{s=0}^{N}\frac{a^2(s,x_s)}{\sigma^2(s,x_s)}\geq H\right\}; \tag{3.20}$$

$$\lambda^*(H)=\frac{1}{H}\left\{\sum_{s=0}^{\tau-1}\frac{a(s,x_s)}{\sigma^2(s,x_s)}x_{s+1}+\alpha_H\frac{a(\tau,x_\tau)}{\sigma^2(\tau,x_\tau)}x_{\tau+1}\right\}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Цель данного параграфа – найти легко проверяемые условия на функции $a(s, x)$ и $\sigma(s, x)$, при которых раходится ряд

$$\sum_{t \geq 0} \frac{a^2(t, x_t)}{\sigma^2(t, x_t)} = \infty. \tag{3.21}$$

Рассмотрим следующие случаи:

A_I) для любой последовательности вещественных чисел $\{\beta_t\}$ выполнены неравенства

$$0 < m \leq \varliminf_{t \to \infty} |\sigma(t, \beta_t)| \leq \varlimsup_{t \to \infty} |\sigma(t, \beta_t)| \leq M < \infty;$$

A_2) $\varliminf_{t \to \infty} |\sigma(t, \beta_t)| = 0$ и существует подпоследовательность моментов $\{t_j\}$, на которой достигается нижний предел при любом выборе последовательности $\{\beta_t\}$;

A_3) $\varlimsup_{t \to \infty} |\sigma(t, \beta_t)| = +\infty$ и существует подпоследовательность моментов $\{s_j\}$, на которой достигается верхний предел при любом выборе $\{\beta_t\}$;

A_4) существует (борелевское) множество Γ и число M, $0 < M < \infty$, такие, что для любой последовательности $\{\beta_t\}$ справедливы соотношения:

$$\sum_{t \geq 0} P\{\sigma(t, \beta_t)\xi_{t+1} \in \Gamma\} = +\infty;$$

$$\varlimsup_{t \to \infty} |\sigma(t, \beta_t)| \leq M < +\infty.$$

Отметим, что любая функция $\sigma(t, x)$, не зависящая от x, удовлетворяет одному из требований $A_1 - A_3$. Условие A_4 сводится к положительности вероятности $P\{\xi_1 \in \Gamma\}$, если $\sigma(t) = 1$ и $\{\xi_t\}$ одинаково распределены.

<u>ТЕОРЕМА 3.2</u>. Пусть $\sigma(t, x)$ удовлетворяет ограничениям A_1

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Если функция $a(t,x)$ такова, что при некотором $0<\delta<m$ хотя бы одно из неравенств:

$$1^\circ\ \inf_{|x|\le M+\delta}|a(t,x)|>0; \qquad 2^\circ\ \inf_{|x|\ge m-\delta}|a(t,x)|>0$$

справедливо для бесконечного числа значений t, то ряд (3.21) раходится.

Доказательство теоремы 3.2 основывается на двух леммах.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\{\xi_t\}$ - последовательность независимых случайных величин с $M\xi_t=0$ и $M\xi_t^2=1$. Тогда для любого

$$A>1 \qquad P(\overline{\lim}\{|\xi_t|\le A\})=1. \tag{3.22}$$

Это утверждение тривиально следует из леммы Бореля-Кантелли.

ЛЕММА 3.2. В условиях леммы 3.1 для любого $\varepsilon>0$

$$P(\overline{\lim_{t\to\infty}}|\xi_t|\ge\varepsilon)=1. \tag{3.23}$$

Свойство (3.23) является следствием закона 0-1 Колмогорова.

Поскольку, в силу условия A_1,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{a(t,x_t)}{\sigma(t,x_t)}\ge\frac{1}{M}\overline{\lim}|a(t,x_t)|,$$

то для доказательства (3.21) достаточно установить, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}|a(t,x_t)|>0 \qquad (P_\lambda-\text{п.н.}). \tag{3.24}$$

1. Пусть для функции $a(t,x)$ найдется последовательность моментов $\{t_j\}$, при которых справедливо 1°. Неравенство 1° заведомо выполнится б.ч.раз, если для б.ч. j имеет место хотя бы одно из неравенств:

$$|x_{t_j}|\le M+\delta;\ |\lambda a(t_j,x_{t_j})|\ge\frac{\delta}{2} \qquad (P_\lambda-\text{п.н.}).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Предположим противное, т.е. что для всех t_j, начиная с некоторого номера j_0, выполняются одновременно противоположные неравенства (с положительной вероятностью):

$$|x_{t_j}| > M+\delta \quad \text{и} \quad |\lambda a(t_j, x_{t_j})| < \frac{\delta}{2}.$$

Тогда при $j \geq j_0$ имеем

$$|\sigma(t_j, x_{t_j})\xi_{t_j+1}| = |x_{t_j+1} - \lambda a(t_j, x_{t_j})| > M + \frac{\delta}{2}. \qquad (3.25)$$

Однако, полагая $A = 1+\delta/2M$ в лемме 3.I, получаем, что для б.ч. j

$$|\xi_{t_j+1}| \leq 1 + \frac{\delta}{2M} \quad (P_\lambda - п.н)$$

и, следовательно, $|\sigma(t_j, x_{t_j})\xi_{t_j+1}| \leq M + \frac{\delta}{2}$, что противоречит (3.25) и доказывает справедливость теоремы 3.2 при условии I°.

2. Пусть $\{s_j\}$ – последовательность моментов, для которой выполняется 2°. Для доказательства (3.24) покажем, что существует б.ч. моментов s_j, для которых справедливо одно из неравенств:

$$|x_{s_j}| \geq m-\delta; \quad |\lambda a(s_j, x_{s_j})| \geq \frac{\delta}{2}.$$

Предположим противное, т.е. что для всех достаточно больших j одновременно

$$|x_{s_j}| < m-\delta; \quad |\lambda a(s_j, x_{s_j})| < \frac{\delta}{2}.$$

Тогда для этих j

$$|\sigma(s_j, x_{s_j}) \cdot \xi_{s_j+1}| < m - \frac{\delta}{2}. \qquad (3.26)$$

С другой стороны, положив $\varepsilon = 1 - \frac{\delta}{2m}$ в лемме 3.2, получим, что для б.ч. j

$$|\xi_{s_j+1}| \geq 1 - \frac{\delta}{2m}; \quad |\sigma(s_j, x_{s_j})\xi_{s_j+1}| \geq m - \frac{\delta}{2} \quad (P_\lambda - п.н.).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Это противоречит (3.26) и завершает доказательство теоремы 3.2.

Замечание 3.2. Можно показать, что в случае, когда функция $\sigma(t, x)$ не зависит от x, требование 2^0 теоремы (3.2) можно заменить на более слабое:

$$\inf_{x \notin [\alpha, \beta]} |a(t, x)| > 0,$$

где $[\alpha, \beta]$ – произвольный интервал длины $2(m-\delta)$.

Замечание 3.3. Класс функций $a(t, x)$, выделенный в теореме 3.2, определяется только верхней и нижней границами для функций $\sigma(t, x)$ и не зависит от её конкретного вида. Если функция $\sigma(t, x)$ неизвестна, то в формулах (3.20) для последовательных оценок следует заменить $\sigma^2(t, x)$ на M^2. Полученные оценки, как нетрудно проверить, обладают свойствами, указанными в теореме 3.1.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\sigma(t, x)$ удовлетворяет ограничениям A_2. Тогда условие (3.21) выполняется для всякой функции $a(t, x)$, для которой найдутся $\delta > 0$ и подпоследовательность $\{t'_j\}$ последовательности $\{t_j\}$, такие, что

$$\inf_{|x| \leq \delta} |a(t'_j, x)| > 0, \qquad j \geq 1.$$

Доказательство. Поскольку $\lim |\sigma(t_j, x_{t_j})| = 0$, для любого $A > 1$ существует номер j_0, начиная с которого

$$|\sigma(t_j, x_{t_j})| < \frac{\delta}{2M}.$$

Так как

$$\lim_{j \to \infty} \left| \frac{a(t'_j, x'_{t_j})}{\sigma(t'_j, x'_{t_j})} \right| \geq \frac{2A}{\delta} \cdot \lim_{j \to \infty} |a(t'_j, x_{t_j})|,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

то для доказательства теоремы 3.3 достаточно установить, что

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} |a(t'_j, x_{t'_j})| > 0 \qquad (P_\lambda - п.н.).$$

Последнее выполняется, если для б.ч. j имеет место, по крайней мере, одно из неравенств:

$$|x_{t'_j}| \leq \delta; \quad |\lambda a(t'_j, x_{t'_j})| > \frac{\delta}{2}.$$

Предположим, что для всех достаточно больших j одновременно справедливы противоположные неравенства:

$$|x_{t'_j}| > \delta; \quad |\lambda a(t'_j, x_{t'_j})| < \frac{\delta}{2},$$

а значит,

$$|\sigma(t'_j, x_{t_j})\xi_{t'_j+1}| > \frac{\delta}{2}.$$

Однако по лемме 3.I для б.ч. моментов t'_j

$$|\xi_{t'_j+1}| \leq A$$

и, следовательно,

$$|\sigma(t'_j, x_{t'_j})\xi_{t'_j+1}| < A\frac{\delta}{2A} = \frac{\delta}{2}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. В теоремах 3.2, 3.3 были выделены классы функций, обладающих свойством отделимости от нуля в той или иной области. В следующей теореме, относящейся к случаю неограниченных дисперсией, приходится требовать, чтобы функция $|a(t, x)|$ асимптотически росла не медленнее, чем линейно. При этом предполагается, что дисперсии шумов растут не быстрее геометрической прогрессии.

<u>ТЕОРЕМА 3.4</u>. Пусть функция $\sigma(t, x)$ удовлетворяет ограничениям A_3 и для любой последовательности $\{\beta_{s_j}, j \geq 1\}$ (моменты s_j те же, что и в условии A_3) вещественных чисел

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \left| \frac{\sigma(s_{j-1}, \beta_{s_{j-1}})}{\sigma(s_j, \beta_{s_j})} \right| > d, \quad 0 < d < 1.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда условие (3.21) выполняется для любой функции $a(t,x)$, для которой найдутся вещественное число B ($0<B<\infty$) и подпоследовательность $\{s'_j\}$ последовательности $\{s_j\}$ такие, что

$$\inf_{|x|\geq B}\left|\frac{a(s'_j,x)}{x}\right|\geq\rho>0,\quad j\geq 1.$$

<u>Доказательство.</u> Докажем, что

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\left|\frac{a(s'_j,x'_j)}{\sigma(s'_j,x_{s'_j})}\right|>0\quad(P_\lambda-\text{п.н.}).$$

С этой целью установим, что для б.ч. j имеет место одно из неравенств:

$$\left|\frac{x_{s'_j+1}}{\sigma(s'_j,x_{s'_j})}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2};\quad\left|\frac{\lambda a(s'_j,x_{s'_j})}{\sigma(s'_j,x_{s'_j})}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2},\qquad 0<\varepsilon<1. \tag{3.27}$$

Допустим противное, т.е. что, начиная с некоторого j, выполняются одновременно противоположные неравенства. Тогда для этих j получаем

$$|\xi_{s'_j+1}|=\left|\frac{x_{s'_j+1}}{\sigma(s'_j,x_{s'_j})}-\frac{\lambda a(s'_j,x_{s'_j})}{\sigma(s'_j,x_{s'_j})}\right|<\varepsilon.$$

Однако по лемме 3.2 для б.ч. j $|\xi_{s'_j+1}|\geq\varepsilon$ $(P_\lambda-\text{п.н})$.
Из полученного противоречия следует, что для б.ч. j справедливо одно из неравенств (3.27). Если для б.ч. j выполнено второе неравенство, то утверждение теоремы 3.4 следует очевидным образом. Пусть для б.ч. j имеет место первое из неравенств (3.27). Поскольку

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\left|\sigma(s_j,x_{s_j})\right|=+\infty$$

и, следовательно, для достаточно больших j

$$\left|\sigma(s_j,x_{s_j})\right|>2\frac{B}{\varepsilon},$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

то для б.ч. j

$$\left|x_{s'_j+1}\right| \geq \left|\sigma(s'_j, x_{s'_j})\right| \frac{\varepsilon}{2} > \frac{2B}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon}{2} = B.$$

Отсюда для б.ч. j имеем $\left|\frac{a(s'_j, x_{s'_j})}{\sigma(s'_j, x_{s'_j})}\right| =$

$$= \left|\frac{a(s'_j, x_{s'_j})}{x_{s'_j}}\right| \cdot \left|\frac{x_{s'_j}}{\sigma(s'_{j-1}, x_{s_{j-1}})}\right| \cdot \left|\frac{\sigma(s'_{j-1}, x_{s'_{j-1}})}{\sigma(x_{s'_j}, x_{s_j})}\right| \geq$$

$$\geq \rho\frac{\varepsilon}{2}\cdot d > 0.$$

Теорема 3.4 доказана.

В теоремах 3.2-3.4 классы функций $a(t,x)$ выделялись в зависимости от дисперсионных свойств шумов. При этом распределения шумов могли быть произвольны. Следующая теорема относится к случаю, когда плотности распределений шумов (относительно некоторой меры) положительны в известной области (знание вида этих плотностей не предполагается).

<u>ТЕОРЕМА 3.5</u>. Пусть выполнено условие A_4. Тогда любая функция $a(t,x)$, для которой существует $\delta > 0$, такое, что

$$\inf_{x\in\Gamma_\delta} |a(t,x)| > 0, \qquad t \geq 1, \tag{3.28}$$

Γ_δ - δ-окрестность множества Γ, обладает свойством (3.21).

<u>Доказательство</u>. Покажем, что для б.ч. t либо $x_t \in \Gamma_\delta$, либо $|\lambda a(t, x_t)| \geq \frac{\delta}{2}$. Очевидно, что обе возможности приводят к выполнению (3.21). Предположим, что, начиная с некоторого t_0, одновременно

$$x_t \notin \Gamma_\delta \quad \text{и} \quad |\lambda a(t, x_t)| < \frac{\delta}{2}. \tag{3.29}$$

Тогда для $t \geq t_0$

$$\sigma(t, x_t)\xi_{t+1} \in R \setminus \Gamma_{\delta/2} \subset R \setminus \Gamma \quad (P_\lambda\text{-п.н.}).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Но по лемме Бореля-Кантелли с вероятностью единица должно наступить б.ч. событий:

$$\{\sigma(t, x_t)\xi_{t+1} \in \Gamma\}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему 3.5.

Следствие 3.2. Пусть $\sigma(t,x)=1$, $\{\xi_t\}$ – последовательнос независимых одинаково распределенных случайных величин и $f(x)$- плотность распределения P_{ξ_1} относительно σ - конечной меры μ. Если $f(x)$ положительна на борелевском множестве Γ и $\mu(\Gamma)>0$, то всякая функция $a(t,x)$, для которой существует $\delta>0$, такое, что

$$\inf_{x\in\Gamma_\delta} |a(t,x)| > 0, \qquad t \geq 1,$$

удовлетворяет условию (3.21).

Замечание 3.4. Условие теоремы 3.5 о расходимости ряда

$$\sum_{t\geq 0} P\{\sigma(t,\beta_t)\xi_{t+1} \in \Gamma\} = \infty \tag{3.30}$$

является не только достаточным, но и необходимым в том смысле, что, если оно нарушается, то найдется функция, удовлетворяющая (3.28), для которой утверждение теоремы 3.5 неверно. Проиллюстрируем это на примере. Пусть $\Gamma = R \setminus [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$,

$$\sum_{t\geq 0} P\{\sigma(t,x_t)\xi_{t+1} \in \Gamma\} < \infty \tag{3.31}$$

и

$$a(t,x) = \begin{cases} c, & \text{если } x < \alpha; \\ 0, & \text{если } x \in [\alpha, \beta]; \\ c, & \text{если } x > \beta. \end{cases}$$

Условие (3.21) для функции $a(t,x)$ не выполнится, если, начиная с некоторого t, $x_t \in [\alpha, \beta]$. Предположим, что это не так, т.е. существует б.ч. моментов t, для которых $x_t \notin [\alpha, \beta]$ Тогда для этих t имеет место одно из неравенств:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sigma(t,x_t)\xi_{t+1} > \beta + \lambda c; \qquad \sigma(t,x_t)\xi_{t+1} < \alpha - \lambda c.$$

Если неизвестный параметр $\lambda \geq 0$, то для б.ч. значений t

$$\sigma(t,x_t)\xi_{t+1} \notin [\alpha,\beta]. \tag{3.32}$$

С другой стороны, из (3.31) по лемме Бореля-Кантелли

$$P_\lambda\left(\overline{\lim}\left\{\sigma(t,x_t)\xi_{t+1} \in [\alpha,\beta]\right\}\right) = 1,$$

что противоречит (3.32). Таким образом, сходится ряд

$$\sum_{t\geq 0} \frac{a^2(t,x_t)}{\sigma^2(t,x_t)} < \infty \qquad (P_\lambda - п.н.).$$

следовательно, утверждение теоремы 3.5 без условия (3.30) неверно.

В заключение данного пункта сравним полученные результаты с известными ранее. Прежде всего вернемся к примеру 3.1 и рассмотрим случай, когда шумы $\xi(t)$ в (3.15) могут иметь разные распределения. В этом случае последовательные оценки определяются по формулам (3.20), в которых надо положить $a(s,x_s)=x_s^\lambda$, $\sigma(s,x_s)=\mathcal{D}(s)$. Чтобы последовательные оценки позволяли оценить параметр λ с любой требуемой точностью, должно выполняться условие (3.21), которое принимает вид

$$\sum_{t\geq 0} \frac{x_t^\lambda}{\mathcal{D}(t)} = \infty \qquad (P_\lambda - п.н.). \tag{3.33}$$

Как нетрудно проверить, используя теоремы 3.2, 3.4, этот ряд расходится в любом из следующих случаев:

A_1) $\sup\limits_{t\geq 0} |\mathcal{D}(t)| < \infty$ и $\varliminf\limits_{t\to\infty} \mathcal{D}(t) > 0$; (3.34)

A_3) $\sup\limits_{t\geq 0} |\mathcal{D}(t)| = \infty$ и последовательность $\{\mathcal{D}(t)\}$ мажорируется некоторой геометрической прогрессией. Заметим, что

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

любое из условий A_1, A_3 обеспечивает справедливость только первого из соотношений (3.18), которые, как отмечалось в замечании 3.1, требовались в [186] для доказательства сходимости почти наверное оценок МНК. Рассмотрим теперь случай, когда выполняется условие

$$A_2) \qquad \lim_{t\to\infty} |\mathcal{D}(t)| = 0, \tag{3.35}$$

причем A_3 не имеет места. В этом случае вопрос о сходимости последовательных оценок параметра процесса авторегрессии (3.15) остается открытым, поскольку в соответствующей теореме 3.3 нарушается требование локальной отделимости от нуля функции $a(\lambda,x)$ в точке $x=0$. Однако при условии (3.35) в некоторых случаях могут выполняться, по-видимому, соотношения (3.18), гарантирующие сходимость оценок МНК.

Рассмотрим теперь более общий пример, когда

$$x_{t+1} = \lambda a(x_t) + \xi_{t+1}. \tag{3.36}$$

Как следует из теорем 3.2, 3.4, последовательные оценки сходятся почти наверное и в среднем квадратическом при выполнении любого из условий (3.34), если только функция $a(x)$ с ростом x растет не медленнее, чем линейно. При выполнении условия (3.35) для такой сходимости требуется наложить упомянутое условие отделимости в точке $x=0$. Требования на функцию $a(x)$ могут быть существенно ослаблены в случае, когда $\{\xi_t\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью, положительной на всей прямой. При этом согласно теореме 3.5 последовательные оценки сходятся для любой кусочно-непрерывной функции на прямой, отличной от тождественного нуля. Таким образом, для гауссовских шумов условие сходимости последовательных оценок выполняется практически всегда.

§ 4. НЕСМЕЩЕННОЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ВЕКТОРНОГО ПАРАМЕТРА

Вернемся теперь к исходной задаче и рассмотрим случай, когда в уравнениях (2.1) λ является вектором, размерность которого не превышает размерности процесса $x(t)$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

4.I. Построение последовательных планов

Последовательные планы оценивания координат вектора $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_p)^T$ будем строить на основе обобщенного метода наименьших квадратов со специальным выбором весовой матрицы. Оценка обобщенного МНК для вектора неизвестных параметров находится из условия минимума по λ выражения

$$\sum_{t=0}^{N}(x(t+1)-A_0(t)-A_1(t)\lambda)^T V(t)(x(t+1)-A_0(t)-A_1(t)\lambda)$$

и имеет вид

$$\hat{\lambda}(N)=\left[\sum_{t=0}^{N}A_1^T(t)V(t)A_1(t)\right]^{-1}\sum_{t=0}^{N}A_1^T(t)V(t)(x(t+1)-A_0(t)). \qquad (4.I)$$

Весовую матрицу $V(t)$ определим по формуле

$$V(t)=\begin{cases} c(t)V_0(t) & \text{, если матрица } A_1^*(t)\equiv; \\ =A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)A_1(t) & \text{не вырождена;} \\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases} \qquad (4.2)$$

Здесь $V_0(t)=\mathcal{D}^+(t)A_1(t)(A^T(t)\mathcal{D}^+(t)A_1(t))^{-2}A_1(t)\mathcal{D}^+(t)$,
$c(t)$ – некоторая измеримая неупреждающая скалярная функция от наблюдаемых процессов $x(t)$ и $A_1(t)$, равная нулю при вырожденной матрице $A_1^*(t)$. Весовая матрица (4.2) обладает, как легко проверить, следующими свойствами:

$$A_1^T(t)V(t)A_1(t)=c(t)E, \quad A_1^T(t)V(t)=c(t)W(t) \qquad (4.3)$$

$$W(t)=(A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)A_1(t))^+A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t),$$

$$W(t)\mathcal{D}(t)W^T(t)=(A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)A_1(t))^+. \qquad (4.4)$$

Используя (4.3), запишем оценку (4.I) покоординатно

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\hat{\lambda}_i(N) = \frac{1}{\sum_{t=0}^{N} c(t)} \sum_{t=0}^{N} c(t) \langle W(t)(x(t+1) - A_0(t)) \rangle_i \qquad i = \overline{1,p}, \tag{4.5}$$

$\langle a \rangle_i$ – обозначает i-ю координату вектора $a = (a_1, \dots, a_p)$. После подстановки $x(t+1)$ из (2.I) в (4.5) получим

$$\hat{\lambda}_i(N) = \lambda_i + \frac{1}{\sum_{t=0}^{N} c(t)} \sum_{t=0}^{N} c(t) \langle W(t) \xi(t+1) \rangle_i . \tag{4.6}$$

Чтобы решить вопрос о выборе функции $c(t)$, обратимся к случаю детерминированных матриц $A_1(t)$ и $\mathcal{D}(t)$. Ясно, что при этом функция $c(t)$ также должна быть неслучайной, а поэтому с помощью условия (2.2) и (4.4), (4,6) легко находим формулу для среднеквадратического уклонения

$$d_i(N) = M_\lambda(\hat{\lambda}_i(N) - \lambda_i)^2 = \frac{1}{\left[\sum_{t=0}^{N} c(t)\right]^2} \sum_{t=0}^{N} c^2(t) \rho_i(t),$$
$$\rho_i(t) = \langle [A_1^T(t) \mathcal{D}^+(t) A_1(t)]^{-1} \rangle_{ii} . \tag{4.7}$$

Оптимальной естественно считать последовательность $\{c(t), t \geq 0\}$, для которой величины уклонений $d_i(N)$ убывают с ростом N наискорейшим образом. Как видно из (4.7), оптимальная последовательность может быть определена с точностью до постоянного множителя. Поэтому положим $c_i(0) = \frac{1}{\rho_i(0)}$.

<u>ЛЕММА 4.I</u>. Оптимальная последовательность $\{c(t), t \geq 0\}$ определяется равенством

$$c_i(t) = \frac{1}{\rho_i(t)} . \tag{4.8}$$

Утверждение леммы 4.I проверим, пользуясь индукцией. Пусть (4.8) выполняется для $t = 0, 1, \dots, N$. Тогда из (4.7) следует, что

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$d_i(N+1) = \frac{\sum_{t=0}^{N} c_i(t) + \rho_i(N+1)\, c^2(N+1)}{\left[\sum_{t=0}^{N} c_i(t) + c(N+1)\right]^2}.$$

Величина $c_i(N+1)$, минимизирующая $d_i(N+1)$, находится из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial c(N+1)}\left[d_i(N+1)\right] = 0$$

и равна $1/\rho(N+1)$. Шаг индукции, а вместе с ним и справедливость леммы 4.I доказаны. Приведенные соображения наводят на мысль и в общем случае, когда функции $A_1(t)$ и $\mathcal{D}(t)$ являются случайными, взять за основу при построении последовательных планов обобщенные оценки МНК, определяемые равенствами:

$$\hat{\lambda}_i(N) = \frac{1}{\sum_{t=0}^{N} c_i(t)} \sum_{t=0}^{N} c_i(t) \langle W(t)(x(t+1) - A_0(t))\rangle_i, \quad i = \overline{1,p};$$

$$c_i(t) = \frac{1}{\left\langle \left[A_1^T(t)\,\mathcal{D}^+(t)\,A_1(t)\right]^{-1}\right\rangle_{ii}}. \tag{4.9}$$

<u>Определение 4.I</u>. Последовательный план оценивания вектора параметров $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^T$ задается парой $(\tau^*(H), \lambda^*(H))$, в которой $\tau^*(H) = (\tau_1^*(H), \ldots, \tau_p^*(H))^T$ и $\lambda^*(\tau) = (\lambda_1^*(\tau_1), \ldots, \lambda_p^*(\tau_p))^T$ – векторы с координатами:

$$\tau_i^* = \tau_i^*(H) = \inf\left\{N \geq 0 : \sum_{t=0}^{N} c_i(t) \geq H\right\};$$

$$\lambda_i^*(\tau_i) = \frac{1}{H}\left[\sum_{t=0}^{\tau_i^*-1} c_i(t) \langle W(t)\left(x(t+1) - A_0(t)\right)\rangle_i + \right.$$

$$\left. + \alpha_{\tau_i}(H)\, c_i(\tau_i) \langle W(\tau_i)\left(x(\tau_i+1) - A_0(\tau_i)\right)\rangle_i\right]; \tag{4.10}$$

$$\alpha_{\tau_i}(H) = \left[H - \sum_{t=0}^{\tau_i-1} c_i(t)\right] \Big/ c_i(\tau_i),$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

указывающими соответственно момент прекращения наблюдений при оценивании параметра λ_i и формулу для вычисления оценки этого параметра.

4.2. Свойства последовательных оценок

Основные свойства построенных последовательных планов сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 4.I. Пусть для процесса, описываемого уравнением (2.I), при всех $\lambda \in R^p$ и $i=\overline{1,p}$ с вероятностью единица выполнены условия:

$$\sum_{t=0}^{\infty} c_i(t) = \infty \qquad (P_\lambda - п.н.)$$

Тогда последовательный план $(\tau_i, \lambda_i^*(\tau_i))$ оценивания λ_i $(i=\overline{1,p})$ при любом H, $0<H<\infty$, обладает свойствами:

а) оценка $\lambda_i^*(\tau_i)$ – несмещенная: $M_\lambda \lambda_i^*(\tau_i) = \lambda_i$;

б) её среднеквадратическое уклонение равномерно ограничено:

$$\sup_{\lambda \in R^p} M_\lambda \left[\lambda_i^*(\tau_i) - \lambda_i\right]^2 \leq \frac{1}{H};$$

в) момент остановки τ_i конечен с вероятностью единица.

Доказательство теоремы 4.I. Полагая

$$\tilde{g}_{\tau_i}(t) = \begin{cases} \dfrac{c_i(t)\, W(t)}{H}, & \text{если } t < \tau_i(H); \\ \alpha_{\tau_i}(H) \dfrac{c_i(\tau_i)\, W(\tau_i)}{H}, & \text{если } t = \tau_i(H), \end{cases} \tag{4.II}$$

запишем (4.I0) более компактно:

$$\lambda_i^*(\tau_i) = \sum_{t=0}^{\tau_i} \langle \tilde{g}_{\tau_i}(t)(x(t+1) - A_0(t)) \rangle_i .$$

Отсюда с учетом (2.I) получим

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\lambda_i^*(\tau_i)=\lambda_i+R_{\tau_i}(H), \qquad R_{\tau_i}(H)=\sum_{t=0}^{\tau_i}\langle \tilde{g}_{\tau_i}(t)\varepsilon(t+1)\rangle_i . \tag{4.12}$$

Далее нам потребуется

ЛЕММА 4.2. Для последовательности $\{F_N^i,\ N\geq 1\}$, определяемой равенством

$$F_N^i=\sum_{t=0}^{\bar{\tau}_i}\langle \tilde{g}_{\tau_i}(t)\varepsilon(t+1)\rangle_i, \quad \bar{\tau}_i=\tau_i(H)\wedge N,$$

при всех $\lambda\in R^p$ выполняется соотношение

$$\sup_{N\geq 1} M_\lambda (F_N^i)^2\leq \frac{1}{H} . \tag{4.13}$$

<u>Доказательство леммы 4.2</u>. Имеем

$$M_\lambda (F_N^i)^2=M_\lambda\sum_{t=0}^{\bar{\tau}_i}\langle \tilde{g}_{\tau_i}(t)\varepsilon(t+1)\varepsilon^T(t+1)\tilde{g}_{\tau_i}^T(t)\rangle_{ii}+$$

$$+2M_\lambda\sum_{0\leq s<t\leq\bar{\tau}_i}\langle \tilde{g}_{\tau_i}(s)\varepsilon(s+1)\varepsilon^T(t+1)\tilde{g}_{\tau_i}^T(t)\rangle_{ii} .$$

Отсюда получаем

$$M_\lambda (F_N^i)^2=M_\lambda\sum_{t=0}^{\bar{\tau}_i}\langle \tilde{g}_{\tau_i}(t)M_\lambda(\varepsilon(t+1)\varepsilon^T(t+1)|F_t)\tilde{g}_{\tau_i}^T(t)\rangle_{ii}+$$

$$+2M_\lambda\sum_{0\leq s<t\leq\bar{\tau}_i}\langle \tilde{g}_{\tau_i}(s)\varepsilon(s+1)M_\lambda(\varepsilon^T(t+1)|F_t)\tilde{g}_{\tau_i}^T(t)\rangle_{ii}=$$

$$=M_\lambda\sum_{t=0}^{\bar{\tau}_i}\langle \tilde{g}_{\tau_i}(t)\mathcal{D}(t)\tilde{g}_{\tau_i}^T(t)\rangle_{ii}\leq\frac{1}{H^2}M_\lambda\Big[\sum_{t=0}^{\tau_i-1}c_i^2(t)\langle W(t)\mathcal{D}(t)W^T(t)\rangle_{ii}+$$

$$+\alpha_{\tau_i}c_i^2(\tau_i)\langle W(\tau_i)\mathcal{D}(\tau_i)W^T(\tau_i)\rangle_{ii}\Big]=$$

$$=\frac{1}{H^2}M\Big[\sum_{t=0}^{\tau_i-1}c_i(t)+\alpha_{\tau_i}c_i(\tau_i)\Big]=\frac{1}{H}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Лемма 4.2 доказана. Так как последовательность F_N^i сходится почти наверное к $R_{\tau_i}(H)$, то из (4.I2) с помощью теоремы Фату и леммы получаем утверждение б) теоремы:

$$M_\lambda\left[\lambda_i^*(\tau_i)-\lambda_i\right]^2=M_\lambda \underline{\lim}\left(F_N^i\right)^2\leq \overline{\lim_{N\to\infty}}\, M_\lambda\left(F_N^i\right)^2\leq \frac{1}{H}.$$

Доказательство несмещенности оценки $\lambda_i^*(\tau_i)$ основано на равенстве

$$M_\lambda F_N^i=\sum_{t=0}^{N}<M_\lambda\left[\tilde{g}_{\tau_i}(t)\chi_{(t\leq\bar{\tau}_i)}M_\lambda(\varepsilon(t+1)\mid F_t\right]>_i=0, \qquad (4.I4)$$

которое выполняется в силу марковости момента $\bar{\tau}_i$ относительно системы σ - алгебр $\{F_t,\ t\geq 0\}$, измеримости функции $\tilde{g}_{\tau_i}(t)$ и индикатора $\chi_{(t\leq\bar{\tau}_i)}$ относительно F_t, а также условия $M_\lambda(\varepsilon(t+1)\mid F_t)=0$. Принимая во внимание равномерную интегрируемость последовательности $\{F_N^i\}$, которая имеет место в силу леммы и критерия Валле-Пуссена [123], можем совершить предельный переход в (4.I4), доказывающий несмещенность

$$0=\lim_{N\to\infty} M_\lambda F_N^i=M_\lambda R_{\tau_i}(H)=M_\lambda\lambda_i^*(\tau_i)-\lambda_i.$$

Последнее утверждение теоремы 4.I непосредственно следует из условия.

<u>Предложение 4.I</u>. Пусть выполнены условия теоремы 4.I и матрица $A_1^T(t)\mathcal{D}^T(t)A_1(t)$ является диагональной. Тогда последовательные оценки $\lambda_i^*(\tau_i)$ и $\lambda_j^*(\tau_j)$ при $i\neq j$ некоррелированы.

<u>Доказательство</u>. Переходя к усеченным моментам и используя свойства условных математических ожиданий, нетрудно показать, что

$$M_\lambda\left(\lambda_i^*(\tau_i)-\lambda_i\right)\left(\lambda_j^*(\tau_j)-\lambda_j\right)=M_\lambda\sum_{t=0}^{\tau_i\wedge\tau_j}<\tilde{g}_{\tau_i}(t)\mathcal{D}(t)\tilde{g}_{\tau_j}^T(t)>_{ij}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Для $t < \tau_i \wedge \tau_j$ с учетом обозначений получаем

$$<\tilde{g}_{\tau_i}(t)\mathcal{D}(t)\tilde{g}^T_{\tau_j}(t)>_{ij} = <c_i(t)c_j(t)W(t)\mathcal{D}(t)W^T(t)>_{ij} =$$

$$= c_i(t)c_j(t)<\left[A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)A_1(t)\right]^+>_{ij} = 0 \qquad i \neq j.$$

Ясно, что последнее равенство выполнено и для $t = \tau_i \wedge \tau_j$.
Предложение 4.1 доказано.

Пример 4.1

Рассмотрим задачу последовательного оценивания двумерного параметра $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ по наблюдениям за процессом $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, описываемым уравнениями:

$$x_1(t+1) = \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) + \varepsilon_1(t+1);$$

$$x_2(t+1) = \lambda_2 x_1(t) - \lambda_1 x_2(t) + \varepsilon_2(t+1), \qquad (4.15)$$

где $\lambda \in R^2$; $(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))$, $t \geq 1$ – последовательность независимых случайных величин с $M\varepsilon_i(t) = 0$, $M\varepsilon_i^2 = 1$ и $M\varepsilon_1(t)\varepsilon_2(t) = 0$. В данном случае имеем

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ -x_2(t) & x_1(t) \end{pmatrix}, \quad A_1^T(t)\mathcal{D}^{-1}(t)A_1(t) = \|x(t)\| \cdot E.$$

Согласно (4.10) последовательные планы оценивания параметров определяются формулами:

$$\tau_1(H) = \tau_2(H) = \inf\left\{N \geq 0 : \sum_{t=0}^{N} \|x(t)\|^2 \geq H\right\}; \qquad (4.16)$$

$$\lambda_1^*(\tau_1) = \frac{1}{H}\left\{\sum_{t=0}^{\tau_1}{}' \left[x_1(t)x_1(t+1) - x_2(t)x_2(t+1)\right]\right\};$$

$$\lambda_2^*(\tau_2) = \frac{1}{H}\left\{\sum_{t=0}^{\tau_2}{}' \left[x_1(t+1)x_2(t) + x_1(t)x_2(t+1)\right]\right\},$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где штрихи у знаков сумм означают, что последние слагаемые берутся с весом $\alpha_{\tau_1} = \left[H - \sum_{t=0}^{\tau_1-1} \|x(t)\|^2\right] / \|x(t)\|^2$. Используя лемму Бореля-Кантелли, нетрудно проверить, что с вероятностью единица расходится ряд $\sum_{t=1}^{\infty} \|x(t)\|^2 = \infty$. Это условие в соответствии с теоремой 4.I обеспечивает возможность оценивать неизвестные параметры с помощью последовательных планов (4.I6) с любой заданной точностью, а при подходящем выборе последовательности порогов $\{H_n\}$ (см. следствие 3.I) – и сходимость последовательных оценок к истинным значениям почти наверное и в среднем квадратическом. Как следует из предложения 4.I, последовательные оценки $\lambda_1^*(\tau_1)$ и $\lambda_2^*(\tau_2)$ некоррелированы.

4.3. Несмещенное последовательное оценивание при линейных ограничениях на параметр

В п. 4.I при построении несмещенных последовательных планов оценивания вектора λ предполагалось, что каждая координата λ_i имеет свое время оценивания. Ниже предлагаются несмещенные последовательные оценки вектора λ с общим моментом остановки. Эти оценки могут быть полезны, например, в случае, когда неизвестен точный вид дисперсионной матрицы шумов в условиях (2.2). Рассмотрена также задача оценивания параметров, когда неизвестный параметр удовлетворяет линейному ограничению типа равенства. Задачи оценивания с такими ограничениями изучались, например, в [1,121].

<u>ТЕОРЕМА 4.2</u>. Пусть матричные функции $A_1(t)$ и $\mathcal{D}(t)$ в (2.I), (2.2) таковы, что найдется симметричная неотрицательно определенная весовая матрица $V(t)$ в (4.I), для которой выполнены свойства:

I) $A_1^T(t) V(t) A_1(t) = c(t) E$ ($c(t)$ – F_t – измеримая скалярная функция);

2) $V(t) \geq V(t) \mathcal{D}(t) V(t)$ (в смысле квадратичных форм);

3) с вероятностью единица расходится ряд

$$\sum_{t \geq 0} c(t) = \infty .$$

Тогда последовательная оценка

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\lambda^*(H)=\{\lambda_1^*(H),\ \dots,\ \lambda_p^*(H)\}^T;$$

$$\lambda^*(H)=\frac{1}{H}\sum_{s=0}^{\tau(H)} A_1^T(s)V'(s)\left(x_{s+1}-A_0(s)\right);$$

$$V'(s)=\begin{cases} V(s), & \text{если} \quad s<\tau(H); \\ \alpha_H V(\tau(H)), & \text{если} \quad s=\tau(H); \end{cases} \tag{4.17}$$

$$\alpha_H=\left[H-\sum_{s=0}^{\tau(H)-1} c(s)\right]\Big/ c(\tau(H)),$$

с моментом остановки наблюдений

$$\tau=\tau(H)=\inf\left\{t\geq 0:\sum_{s=0}^{t} c(s)\geq H\right\} \tag{4.18}$$

является несмещенной: $M_\lambda[\lambda^*(H)]=\lambda,\ \lambda\in R^p$, и её условная ковариация удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{cov}(\lambda^*(H),\ \lambda^*(H)\,|\,\lambda)\leq E/H. \tag{4.19}$$

Доказательство теоремы 4.2 по существу повторяет доказательство теоремы 4.1. Справедливость свойства (4.19) следует из условий на весовую матрицу и определения момента остановки (4.18):

$$\operatorname{cov}(\lambda^*(H),\lambda^*(H)\,|\,\lambda)=M_\lambda\left[\lambda^*(H)-\lambda\right]\left[\lambda^*(H)-\lambda\right]^T=$$

$$=\frac{1}{H^2}M_\lambda\sum_{s=0}^{\tau} A_1^T(s)V'(s)\mathcal{D}(s)V'(s)A_1(s)\leq$$

$$\leq\frac{1}{H^2}M_\lambda\sum_{s=0}^{\tau} A_1^T(s)V'(s)A_1(s)=\frac{1}{H^2}M_\lambda\left[\sum_{s=0}^{\tau-1}c(s)+\alpha_H c(\tau)\right]E=\frac{1}{H}E.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Чтобы получить явные формулы для последовательных оценок (4.17), необходимо найти весовую матрицу со свойствами 1), 2). Положим

$$c(t)=\begin{cases}1/\nu^*(t), & \text{если } A_1^+(t)A_1=E;\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$\nu^*(t)$ – максимальное собственное значение матрицы $\mathcal{U}(t)=A_1^T(t)\mathcal{D}(t)(A_1^+(t))^T$. Заметим, что в случае, когда матрица $A_1^T(t)A_1(t)$ не вырождена, $A_1^+(t)=(A_1^T(t)A_1(t))^{-1}A_1^T$ и условие $A_1^+(t)A_1(t)=E$ выполняется.

<u>ЛЕММА 4.3</u>. Матричная функция

$$V(t)=c(t)\left[A_1^+(t)\right]^T A_1^+(t) \tag{4.20}$$

удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 4.2.

<u>Доказательство</u>. Условие 1) проверяется непосредственной подстановкой. Условие 2) с учетом (4.20) запишется следующим образом:

$$V-V\mathcal{D}V=c(A_1^+)^T[E-c\mathcal{U}]A_1^+\geq 0,$$

или, что эквивалентно,

$$z^T(E-c\mathcal{U})z\geq 0 \tag{4.21}$$

для всех векторов $z=(z_1,\dots,z_p)^T$. Представим матрицу $\mathcal{U}$ в виде

$$\mathcal{U}=Q^T\Lambda Q,$$

где Q – ортогональная матрица, $\Lambda=\|\nu_i\delta_{ij}\|$, ν_i – собственные значения матрицы $\mathcal{U}$. Тогда

$$z^T(E-c\mathcal{U})z=z^T(Q^TQ-cQ^T\Lambda Q)z=$$

$$=(Qz)^T(E-c\Lambda)Qz=\sum_{i=1}^{p}(1-\nu_i/\nu^*)y_i^2\geq 0,$$

$$y=(y_1,\dots,y_p)^T=Qz,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

что и доказывает неравенство (4.21), а вместе с ним и лемму 4.3.

Замечание 4.1. Как следует из доказательства леммы 4.3 и формулы (4.18), весовая матрица 4.20 в случае, когда матрица $A_1'(t)A_1(t)$ не вырождена, является наилучшей в классе весовых матриц, удовлетворяющих условиям 1), 2), в том смысле, что она минимизирует время оценивания параметра с требуемой точностью. Отметим, кстати, что выбор весовых коэффициентов с целью улучшения свойств оценок рассматривался также в [119].

Подстановка (4.20) в (4.17) и (4.18) приводит к явным выражениям для последовательного плана оценивания вектора неизвестных параметров λ :

$$\lambda^*(H) = \frac{1}{H}\sum_{s=0}^{\tau(H)}{}' \frac{\alpha(s)}{\nu^*(s)} A_1^+(s)(x_{s+1} - A_0(s)); \tag{4.22}$$

$$\tau = \tau(H) = \inf\left\{ t \geq 0 : \sum_{s=0}^{t} \frac{1}{\nu^*(s)} \geq H \right\}; \tag{4.23}$$

$$\alpha(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s < \tau; \\ \nu^*(\tau)\left[H - \sum_{\ell=0}^{\tau-1} \frac{1}{\nu^*(\ell)} \right], & \text{если } s = \tau. \end{cases}$$

Штрих у знака суммы в (4.22) означает, что суммирование производится только по тем s , для которых не вырождена матрица $A_1'(s)A_1(s)$. Искомые последовательные оценки с общим моментом остановки построены.

Замечание 4.2. Последовательные оценки (4.22), (4.23) сложнее в вычислительном отношении последовательных оценок с индивидуальными моментами остановки. Более простые последовательные оценки можно получить из формул (4.22), (4.23), подставив в них вместо ν^* любую верхнюю оценку для ν^* , например, $t \geq \mathcal{U}$. Если при этом момент остановки $\tau = \tau(H)$ по-прежнему останется конечным почти наверное при любом H , то все свойства последовательной оценки сохранятся. Указанным способом можно построить последовательные оценки и в том случае, когда неизвестен точный вид дисперсионной матрицы $\mathcal{D}(t)$. Пусть все элементы матрицы $\mathcal{D}(t)$ ограничены:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$|\mathcal{D}_{kl}(t)| \leq L(t) < \infty$, причем $L(t)$ – известная (F_t – измеримая) функция. Тогда последовательные оценки определятся по формулам (4.22), (4.23) путем замены в них $\nu^*(s)$ на величину $L(t)\,tr(A_1'(t)A_1'(t))$, являющуюся верхней оценкой для $tr\,U(t)$.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть неизвестный параметр λ, оцениваемый по наблюдениям процесса (2.I), удовлетворяет ограничению:

$$P\lambda = p, \tag{4.24}$$

где P и p – известные постоянные матрицы размерности $k \times p$ и $k \times 1$ соответственно. Предположим, что ранг матрицы P равен k, причем $k < p \leq n$. Задача состоит в построении формул для последовательных оценок и изучении влияния условия (4.24) на качество этих оценок.

<u>Построение последовательных оценок</u>. Согласно [I] общее решение уравнения (4.24) представляется в виде

$$\lambda = P^+ p + z, \tag{4.25}$$

где P^+ – псевдообратная матрица для P, которая в силу условия $rank\,P = k$ определяется формулой $P^+ = P^T(PP^T)^{-1}$;

z – произвольный вектор из ядра $N(P)$ матрицы P $(Pz = 0)$. Так как размерность $N(P)$ равна $l = p - k$, в $N(P)$ можно ввести ортонормированный базис $\{z_i = (z_{i1}, \ldots, z_{ip})^T,\ i = \overline{1,l}\}$. Обозначим $R = \|z_i\|$. Тогда для каждого z найдется единственный вектор $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)^T$ такой, что $z = R\mu$. С учетом этого равенства и (4.25) процесс (2.I) можно записать в виде

$$x(t+1) = A_0(t) + A_1(t)P^+p + A_1(t)R\mu + \xi(t+1). \tag{4.26}$$

Таким образом, исходная задача сводится к построению последовательной оценки $\mu^*(H)$ параметра μ по наблюдениям процесса (4.26). Формулы для $\mu^*(H)$ получаются из (4.22), (4.23) путем замены в них A_0 и A_I соответственно на $A_0 + A_1P^+p$ и A_1R. Оценку параметра определим с помощью равенства

$$\hat{\lambda}(H) = P^+p + R\mu^*(H). \tag{4.26'}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Исследуем свойства этой оценки. Согласно теореме 4.2, оценка $\mu^*(H)$ несмещенная и

$$\operatorname{cov}(\mu^*(H), \mu^*(H) \mid \mu) \leq E/H.$$

Отсюда и из (4.26) следует, что

$$\operatorname{cov}(\hat{\lambda}(H), \hat{\lambda}(H) \mid \lambda) = R \operatorname{cov}(\mu^*(H), \mu^*(H) \mid \mu) R^T \leq RR^T/H. \qquad (4.27)$$

Поскольку матрица RR^T идемпотентная (по построению R), то её собственные значения равны нулю или единице и, следовательно, $RR^T \leq E$. Из этого неравенства и из (4.27) получаем

$$M_\lambda \| \hat{\lambda}(H) - \lambda \|^2 \leq \frac{1}{H} \operatorname{tr} RR^T = \frac{\ell}{H} = \frac{p-k}{H}.$$

С другой стороны, для последовательной оценки λ без учета априорной информации имеем

$$M_\lambda \| \lambda^*(H) - \lambda \|^2 \leq \frac{p}{H}.$$

Таким образом, условие (4.24) дает возможность построить оценки с меньшей верхней границей для среднеквадратического уклонения.

<u>Численный пример</u>. Чтобы проиллюстрировать поведение построенных оценок, моделировался четырехмерный процесс (2.I) при гауссовских шумах $\xi(t)$ и матрицах:

$$A_0 = 0; \quad D = 0{,}09E;$$

$$A_1(t) = 4 \begin{Vmatrix} \langle x_1(t) \rangle & \langle x_2(t) \rangle & \langle x_3(t) \rangle & \langle x_4(t) \rangle \\ \langle x_1(t) x_2(t) \rangle & \langle x_2(t) x_3(t) \rangle & \langle x_3(t) x_4(t) \rangle & 0 \\ \langle x_1(t) x_2(t) x_3(t) \rangle & \langle x_2(t) x_3(t) x_4(t) \rangle & 0 & 0 \\ \langle x_1(t) x_2(t) x_3(t) x_4(t) \rangle & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Здесь $\langle a \rangle$ означает дробную часть числа a. Вычисление последовательных оценок проводилось при истинных значениях параметров $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -10$, $\lambda_4 = 15$ для двух случаев: при отсутствии ограничений и при наличии одного ограничения: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 9$. Результаты вычислений сведены в табл.I.

Таблица I

Последовательные оценки при отсутствии ограничений и при наличии одного ограничения

H	τ^*	$\hat{\tau}$	λ_1^*	$\hat{\lambda}_1$	λ_2^*	$\hat{\lambda}_2$	λ_3^*	$\hat{\lambda}_3$	λ_4^*	$\hat{\lambda}_4$
100	41 4	-0,979	-0,957	-1,065	5,061	5,061	-9,925	-10,11	15,01	15,01
200	71 11	-0,972	-1,004	-1,013	5,013	5,050	-9,959	-10,04	15,03	15,00
400	131 20	-0,981	-0,987	-1,000	4,999	5,024	-9,961	-10,03	14,99	14,99
800	268 35	-0,973	-0,981	-1,000	5,034	5,029	-9,981	-10,02	15,00	14,97

В табл. I звездочкой помечены величины, относящиеся к случаю отсутствия ограничений, а крышечкой – соответствующие величины при учете ограничения на параметры. Как видно из табл.I, учет связи между параметрами λ_i позволяет значительно сократить длительность наблюдения процесса для получения оценок с той же точностью.

В табл.2 для сравнения приведены оценки МНК $\tilde{\lambda}_i$, вычисленные по формуле (4.I) при $V = E$. Из табл.I,2 видно, что точности последовательных оценок и оценок МНК примерно одинаковы. Однако отсутствие явных формул для дисперсий оценок МНК и медленный характер их сходимости к истинным значениям могут затруднить выбор момента прекращения наблюдений.

Таблица 2

Оценки по методу наименьших квадратов

n	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$	$\tilde{\lambda}_4$
10	-0,151	4,803	-8,306	16,04
20	-0,720	4,815	-9,265	15,05
50	-0,897	4,956	-9,775	14,98
100	-0,937	4,967	-9,871	14,97
200	-0,969	4,992	-9,942	14,97
250	-0,976	4,992	-9,957	14,98

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

4.4. Об оптимальности несмещенных последовательных оценок

В заключение данного параграфа рассмотрим вопрос об оптимальности построенных выше несмещенных последовательных оценок. Покажем, что эти оценки являются оптимальными в среднеквадратическом смысле в некотором классе несмещенных планов оценивания параметра. Начнем со случая скалярного параметра λ. Если, кроме того, матричные функции $A_1(t)$ и $D(t)$ детерминированные, то, как хорошо известно, несмещенными и оптимальными в среднеквадратическом смысле в классе линейных оценок являются оценки МНК, которые сохраняют эти свойства и тогда, когда вместо условий (2.2) выполнено более слабое требование некоррелированности шумов $\varepsilon(t)$. Поскольку при детерминированной регрессии для последовательных оценок также достаточно требование некоррелированности шумов, то интересно сравнить их с оценками МНК. Оценка МНК, вычисленная по формуле (3.I) в момент $\tau^*(H)$, имеет следующую дисперсию:

$$M_\lambda(\hat{\lambda}_{\tau^*}-\lambda)^2 = 1\Big/\sum_{t=0}^{\tau^*} A_1^T(t)\,D^+(t)\,A_1(t).$$

Отсюда и из (3.2) следует, что

$$M_\lambda(\hat{\lambda}_{\tau^*-1}-\lambda)^2 > \frac{1}{H}; \quad M_\lambda(\hat{\lambda}_{\tau^*}-\lambda)^2 \leq \frac{1}{H}.$$

Так как согласно теореме 3.I для последовательной оценки (3.5) среднеквадратическое уклонение также не превышает $1/H$, то приходим к следующему выводу: для достижения одной и той же точности оценивания $1/H$ оценка МНК и последовательная оценка требуют одинакового числа наблюдений τ^*. В общем случае, когда функции $A_1(t)$ и $D(t)$ в (2.I), (2.2) случайны, ситуация значительно сложнее. Оценка МНК, задаваемая формулой

$$\hat{\lambda}_N = \sum_{t=0}^{N} \hat{g}_N(t)\,(x_{t+1} - A_0(t)),$$

где

$$\hat{g}_N(H) = A_1^T(t)\,D^+(t)\Big/\sum_{s=1}^{N} A_1^T(s)\,D^+(t)\,A_1(s),$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

оказывается смещенной. (Причина этого, по-видимому, в том, что весовые функции $\hat{g}_N(t)$ оказываются неизмеримыми относительно σ - алгебры F_t .) Однако можно предложить следующий способ построения несмещенных оценок МНК. Возьмем положительное число H и определим последовательность оценок $\{\tilde{\lambda}_N(H),\ N>0\}$ равенством

$$\tilde{\lambda}_N(H)=\sum_{t=0}^{N}\tilde{g}_N(t)\left[x(t+1)-A_0(t)\right], \tag{4.28}$$

где

$$\tilde{g}_N(t)=\begin{cases}\frac{1}{H}A_1^{\tau}(t)\mathcal{D}^{+}(t), & \text{если } 0\le t<N;\\ \frac{\alpha_N(H)}{H}, & \text{если } t=N,\end{cases}$$

а $\alpha_N(H)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{t=0}^{N}\tilde{g}_N(t)\,A_1(t)=1. \tag{4.29}$$

Оценка (4.29) отличается от оценки МНК тем, что в ней вместо суммы $\sum_{t=0}^{N}A_1^{\tau}(t)\mathcal{D}^{+}(t)A_1(t)$ стоит постоянная H , а последнее слагаемое взято с весом $\alpha_N(H)$. Обозначим через $\mathcal{P}_H$ множество всех моментов остановки τ (относительно системы σ - алгебр $\{F_t\}$), для которых выполнено неравенство

$$M_\lambda\left\{A_1^{\tau}(\tau)\mathcal{D}^{+}(\tau)A_1(\tau)\max\left(|\alpha_\tau(H)|,\ \alpha_\tau^2(H)\right)\right\}<\infty. \tag{4.30}$$

Каждому τ из $\mathcal{P}_H$ отвечает свой план оценивания $(\tau,\hat{\lambda}_\tau(H))$ параметра λ ; $\tilde{\lambda}_\tau(H)$ определяется по формуле (4.28) подстановкой на место N . Как будет показано ниже, условие (4.30) обеспечивает конечность дисперсии оценки $\hat{\lambda}_\tau(H)$. При этом справедливо следующее утверждение.

<u>ЛЕММА 4.4</u>. Для любого $\tau\in\mathcal{P}_H$ план $(\tau,\tilde{\lambda}_\tau(H))$ является несмещенным; $M_\lambda\tilde{\lambda}_\tau(H)=\lambda$, причем

$$M_\lambda(\tilde{\lambda}_\tau(H)-\lambda)^2=\frac{1}{H}-M_\lambda\Delta_\tau(H); \tag{4.31}$$

$$\Delta_\tau(H)=\frac{\alpha_\tau(H)(1-\alpha_\tau(H))}{H^2}A_1^{\tau}(t)\mathcal{D}^{+}(t)A_1(t).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

<u>Доказательство</u>. Подставляя (2.I) в (4.28), получим

$$\tilde{\lambda}_\tau(H) = \lambda + R_\tau, \quad R_\tau = \frac{1}{H}\sum_{t=0}^{\tau} g_\tau(t)\xi(t+1).$$

Введем вспомогательную последовательность

$$F_N = \frac{1}{H}\sum_{t=0}^{N} \chi_{(t<\tau)}\, g_\tau(t)\xi(t+1), \qquad N \geq 1,$$

сходящуюся к R_τ почти наверное при $N \to \infty$. Используя свойства условных математических ожиданий, приходим к равенствам:

$$M_\lambda F_N^2 = \frac{1}{H^2}\sum_{t=0}^{N} M_\lambda\left\{\chi_{(t<\tau)} g_\tau(t)\mathcal{D}(t) g_\tau^T(t)\right\}; \tag{4.32}$$

$$M_\lambda\left[F_{N+K} - F_N\right]^2 = \frac{1}{H^2}\sum_{t=N+1}^{N+K} M_\lambda\left\{\chi_{(t<\tau)} g_\tau(t)\mathcal{D}(t) g_\tau^T(t)\right\}, \quad K \geq 1. \tag{4.33}$$

Переходя к пределу в (4.32) и учитывая условие (4.30), получим

$$\lim_{N\to\infty} M_\lambda F_N^2 = \frac{1}{H^2}\sum_{t=0}^{\infty} M_\lambda \chi_{(t<\tau)} g_\tau(t)\mathcal{D}(t) g_\tau^T(t) =$$

$$= \frac{1}{H^2} M_\lambda\left[\sum_{t=0}^{\infty} \chi_{(t<\tau)}\, g_\tau(t)\mathcal{D}(t) g_\tau^T(t)\right] =$$

$$= \frac{1}{H^2} M_\lambda\left[\sum_{t=0}^{\tau-1} A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t) + \alpha_\tau^2 A_1^T(\tau)\mathcal{D}^+(\tau)A_1(\tau)\right] =$$

$$= \frac{1}{H} M_\lambda \Delta_\tau(H) < \infty. \tag{4.34}$$

Из (4.33), (4.34) следует, что последовательность $\{F_N,\ N \geq 1\}$ является фундаментальной в L_2. В силу полноты L_2 эта пос-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ледовательность сходится в среднем квадратическом, а значит, и по вероятности к некоторому элементу F из L_2. Так как одновременно $F_N \xrightarrow{P} R_\tau$, то $F = R_\tau$ почти наверное и, следовательно, $M_\lambda F_N^2 \to M_\lambda F^2 = M R_\tau^2$. Отсюда и из (4.34) получаем (4.31). Утверждение о несмещенности оценки $\tilde{\lambda}_\tau(H)$ вытекает из равенств:

$$M_\lambda F_N = 0, \; M_\lambda \tilde{\lambda}_\tau - \lambda = M_\lambda R_\tau = M_\lambda \lim_{N\to\infty} F_N = \lim_{N\to\infty} M_\lambda F_N .$$

Возможность поменять местами интегрирование и переход к пределу в последнем равенстве обеспечивается равномерной интегрируемостью последовательности $\{F_N\}$, следующей из (4.34). Лемма 4.4 доказана.

Основной результат об оптимальности для скалярного λ сформулируем в виде теоремы.

<u>ТЕОРЕМА 4.3</u>. Пусть для процесса (2.1) выполнены условия (2.2) и с вероятностью единица расходится ряд

$$\sum_{t=0}^{\infty} A_1^T(t) \mathcal{D}^+(t) A_1(t) = +\infty.$$

Тогда для каждого $H > 0$ в классе несмещенных планов $\{(\tau, \tilde{\lambda}_\tau(H)), \tau \in \mathcal{P}_H\}$ существует единственный оптимальный в среднеквадратическом смысле план $(\tau^*, \tilde{\lambda}_{\tau^*})$ такой, что для всех λ $(-\infty < \lambda < \infty)$

$$\inf_{\tau \in \mathcal{P}_H} M_\lambda (\tilde{\lambda}_\tau(H) - \lambda)^2 = M_\lambda (\tilde{\lambda}_{\tau^*}^{(H)} - \lambda)^2.$$

Этот план соответствует правилу остановки $\tau^* = \tau^*(H)$, определяемому соотношением

$$\tau^*(H) = \inf \left\{ N \geq 0 : \sum_{t=0}^{N} A_1^T(t) \mathcal{D}^+(t) A_1(t) \geq H \right\}.$$

<u>Доказательство</u>. Момент остановки τ^* входит в $\mathcal{P}_H$, так как

$$0 < \alpha_{\tau^*} \leq 1, \quad \alpha_{\tau^*} A_1^T(\tau^*) \mathcal{D}^+(t) A_1(\tau^*) \leq H,$$

и, следовательно, для него выполнено свойство (4.30). Поскольку $\Delta_{\tau^*}(H) \geq 0$, то

$$M_\lambda (\tilde{\lambda}_{\tau^*}(H) - \lambda)^2 \leq \frac{1}{H}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Пусть τ – произвольный момент из $\mathcal{P}_H$. Легко проверить, что $\alpha_\tau<0$, если $\tau>\tau^*$, и $\alpha_\tau>1$, если $\tau<\tau^*$. Поэтому на множестве $[\tau\neq\tau^*]$ величина $\Delta_\tau(H)$ отрицательна. Оптимальность момента τ^* следует из (4.31) и соотношений:

$$M_\lambda\Delta_\tau(H)= \tag{4.35}$$

$$=M_\lambda\Delta_{\tau^*}(H)\chi_{\{\tau=\tau^*\}}+M_\lambda\Delta_\tau(H)\chi_{\{\tau\neq\tau^*\}}\leq M_\lambda\Delta_{\tau^*}(H).$$

Оптимальный момент τ^* является единственным, поскольку равенство в (4.35) достигается только в случае, когда с вероятностью единица τ и τ^* совпадают. Теорема 4.3 доказана.

Как видно из доказательства теоремы 4.3, для момента $\tau\in\mathcal{P}_H$ имеет место строгое неравенство

$$M_\lambda(\tilde\lambda_\tau(H)-\lambda)^2>\frac{1}{H},$$

если он не совпадает с τ^* почти наверное.

Рассмотрим теперь случай векторного параметра λ.

<u>Определение 4.2</u>. Будем называть планом оценивания вектора параметров $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_p)^T$ пару $(N,\tilde\lambda(N))$, в которой $N=(N_1,\dots,N_p)$, N_i – количество наблюдений, используемых при оценивании параметра λ_i, $\tilde\lambda(N)=(\tilde\lambda_1(N_1),\dots,\tilde\lambda_p(N_p))$, $\tilde\lambda_i(N_i)$ – оценка λ_i, вычисляемая в момент N_i по формуле

$$\tilde\lambda_i(N_i)=\frac{1}{H}\sum_{t=0}^{N_i-1}c_i(t)\langle\mathcal{D}(t)(x(t+1)-A_0(t))\rangle_i+$$

$$+\frac{\alpha_i(H_i)}{H}c_i(N_i)\langle\mathcal{D}(N_i)(x(N_i+1)-A_0(N_i))\rangle_i,$$

где $\alpha_i(N_i)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{t=0}^{N_i-1}c_i(t)+\alpha_i(N_i)c_i(N_i)=H,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

H - положительное число.

Пусть $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_p)$ - детерминированное или случайное правило остановки наблюдений (τ_i - марковский момент относительно системы $\{F_t\}$). Обозначим через $\mathcal{P}_H$ множество всех правил τ, для которых выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{p} M_\lambda \left\{ \frac{\max\left(|\alpha_i(\tau_i)|,\ \alpha_i^2(\tau_i)\right)}{\left\langle \left[A_1^T(\tau_i)\, \mathcal{D}^+(\tau_i)\, A_1(\tau_i)\right]^{-1} \right\rangle_{ii}} \right\} < \infty .$$

Это условие обеспечивает конечность дисперсий всех оценок $\hat{\lambda}_i(\tau_i)$. При этом справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 4.5. Для любого $\tau \in \mathcal{P}_H$ план оценивания является несмещенным: $M_\lambda \hat{\lambda}_i(\tau_i) = \lambda_i$, $1 \le i \le p$, причем

$$M_\lambda (\hat{\lambda}_i(\tau_i) - \lambda_i)^2 = \frac{1}{H} - M_\lambda \Delta_i(\tau_i), \quad \Delta_i(\tau_i) = \frac{\alpha_i(\tau_i)(1-\alpha_i(\tau_i))\, c_i(\tau_i)}{H^2}.$$

Доказательство леммы 4,5 аналогично доказательству леммы 4.4 и опускается. Сформулируем основной результат данного раздела.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть для процесса (2.I) выполнены условия (2.2) и при любом истинном значении $\lambda \in R^p$ с вероятностью единица расходятся ряды :

$$\sum_{t>0} c_i(t) = \infty, \qquad i = \overline{1,p}.$$

Тогда для каждого $H > 0$ в классе несмещенных планов $\{(\tau, \tilde{\lambda}(\tau)),\ \tau \in \mathcal{P}_H\}$ существует единственный оптимальный план $(\tau^*, \tilde{\lambda}(\tau^*))$ такой, что для всех $\lambda \in R^p$ справедливо равенство

$$\inf_{\tau \in \mathcal{P}_H} M_\lambda \|\tilde{\lambda}(\tau) - \lambda\|^2 = M_\lambda \|\tilde{\lambda}(\tau^*) - \lambda\|^2.$$

Этот план соответствует правилу остановки $\tau^* = (\tau_1^*, \ldots, \tau_p^*)$, определяемому формулой

$$\tau_i^*(H) = \inf\left\{ N \ge 0 : \sum_{t=0}^{N} c_i(t) \ge H \right\}, \quad i = \overline{1,p}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Доказательство. Используя те же рассуждения, что и в теореме 4.3, можно показать, что для каждого i план $(\tau_i^*(H), \tilde{\lambda}_i(\tau_i^*))$ для оценивания λ_i является единственным оптимальным в среднеквадратическом смысле. Отсюда следует утверждение теоремы 4.4.

В данном разделе был изучен вопрос об оптимальности несмещенных последовательных планов оценивания. Другой вопрос, который, естественно, возникает в связи с построенными оценками, касается длительности последовательного оценивания. Выше было показано, что при выполнении определенных условий объем выборки при последовательном оценивании конечен с вероятностью единица. Однако для практических целей важно знать также среднюю длительность наблюдений. Исследуем этот вопрос для определенного класса рекуррентных процессов, который включает, в частности, рассмотренные примеры.

§ 5. О СРЕДНЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕСМЕЩЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР ОЦЕНИВАНИЯ

Рассмотрим n-мерный случайный процесс $x(t)$, описываемый рекуррентными уравнениями:

$$x(t+1) = A_1(t, x)\lambda + \varepsilon(t+1), \tag{5.I}$$

где $\varepsilon(t) = (\varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_n(t))^T$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с $M\varepsilon(t) = 0$ и $cov(\varepsilon(t), \varepsilon(t)) = E$; $A_1(t, x)$ – матричная функция размера $n \times p$ $(p \leq n)$, элементы которой в момент t могут зависеть от $x(0), \ldots, x(t)$. В данном случае последовательные планы оценивания параметров λ_i определяются формулами:

$$\tau_i(H) = \inf\left\{t \geq 0 : \sum_{s=0}^{t} c_i(s, x) \geq H\right\};$$

$$\lambda_i^*(H) = \frac{1}{H}\sum_{s=0}^{\tau_i} \alpha_i(s) c_i(s, x) \langle A^+(s, x)\, x_{s+1} \rangle_i,$$

где

$$c_i(s, x) = \begin{cases} 1/\langle [A^T(s, x) A(s, x)]^{-1} \rangle_{ii}, & \text{если } \operatorname{rank} A(s, x) = m; \\ 0, & \text{если } \operatorname{rank} A(s, x) < m; \end{cases}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\alpha_i(s)=\begin{cases}1, & \text{если } s=\tau_i;\\ \left(H-\sum\limits_{k=0}^{\tau_i-1} c_i(k,x)\right)/c_i(\tau_i,x), & \text{если } s=\tau_i;\\ A^+(s,x)=\left[A^T(s,x)A(s,x)\right]^{-1}A(s,x).\end{cases}$$

Учитывая структуру уравнений (5.I), естественно ожидать, что существуют функции $A(s,x)$, определяющие $c_i(s,x)$, и распределения шумов $\varepsilon(t)$, при которых среднее время наблюдения $M_\lambda \tau_i(H)$ равномерно ограничено сверху по λ. Класс таких функций указан ниже.

Сформулируем основные результаты в виде двух теорем, в которых устанавливаются верхняя и нижняя границы для $M_\lambda \tau_i(H)$.

ТЕОРЕМА 5.I. Пусть плотность $f(x)$ распределения $\varepsilon(t)$ (относительно меры Лебега) обладает свойствами сферической симметрии $(\|x\|=\|y\|\to f(x)=f(y))$ и монотонности $(\|x\|\le\|y\|\to f(x)\ge f(y))$. Если функция $A(s,x)$ такова, что при некотором положительном числе β выполняется неравенство

$$c_i(s,x)\ge\beta\|x_s\|^2, \tag{5.2}$$

то среднее время наблюдений $\tau_i(H)$ равномерно по λ ограничено сверху:

$$M_\lambda\tau_i(H)\le M\hat{\tau}(H/\beta);\quad \hat{\tau}(H)=\inf\left\{t\ge1:\sum_{s=1}^{t}\|\varepsilon(s)\|^2\ge H\right\}.$$

Доказательство теоремы 5.I основано на следующей лемме.

ЛЕММА 5.I. В условиях теоремы для всех $k=1,\dots,t$ справедливо неравенство

$$P_\lambda\left\{\sum_{s=1}^{t}\|x(s)\|^2<H\right\}\le P_\lambda\left\{\sum_{s=1}^{t-k}\|x(s)\|^2+\sum_{s=t-k+1}^{t}\|\varepsilon(s)\|^2<H\right\}. \tag{5.3}$$

Доказательство леммы 5.I проводится по индукции. Пусть $k=1$. Обозначим $\varepsilon_j^{j+c}=\{\varepsilon_j,\dots,\varepsilon_{j+c}\}$ и $z=\left(H-\sum\limits_{s=1}^{t-1}\|x_s\|^2\right)^{1/2}$. Используя свойства плотности $f(x)$, имеем

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$P_\lambda\left\{\sum_{s=1}^{t}\|x_s\|^2<H\,|\,x_0,\ \varepsilon_1^{t-1}\right\}=$$

$$=P_\lambda\left\{\sum_{s=1}^{t-1}\|x_s\|^2+\|A(t-1,x)\lambda+\varepsilon(t)\|^2<H\,|\,x_0,\ \varepsilon_1^{t-1}\right\}=$$

$$=P_\lambda\left\{\|A(t-1,x)\lambda+\varepsilon(t)\|<z\,|\,x_0,\ \varepsilon_1^{t-1}\right\}= \tag{5.4}$$

$$=\int_{\Sigma_\lambda(z)} f(u)\,du\leqslant\int_{\Sigma_0(z)} f(u)\,du=$$

$$=P_\lambda\left\{\sum_{s=1}^{t-1}\|x(s)\|^2+\|\varepsilon(t)\|^2<H\,|\,x_0,\ \varepsilon_1^{t-1}\right\},$$

где $\Sigma_\lambda(z)=\left\{u\in R^n:\|A(t-1,x)\lambda+u\|<z\right\}$. Взяв математическое ожидание от обеих частей неравенства (5.4), получаем неравенство (5.3) при k = I. Предположим, что (5.3) выполняется при некотором k. Покажем справедливость неравенства (5.3) и при k + I. Повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$P_\lambda\left\{\sum_{s=1}^{t}\|x(s)\|^2<H\right\}\leqslant M_\lambda\left\{P_\lambda\left[\sum_{s=1}^{t-k}\|x(s)\|^2+\sum_{s=t-k+1}^{t}\|\varepsilon(s)\|^2<\right.\right.$$

$$\left.\left.<H\,|\,x_0,\ \varepsilon^{t-k-1},\ \varepsilon_{t-k+1}^{t}\right]\right\}=$$

$$=M_\lambda\left\{P_\lambda\left[\sum_{s=1}^{t-k-1}\|x(s)\|^2+\|A(t-k-1,x)\lambda+\varepsilon(t-k)\|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{s=t-k+1}^{t}\|\varepsilon(s)\|^2<H\,|\,x_0,\ \varepsilon_1^{t-k-1},\ \varepsilon_{t-k+1}^{t}\right]\right\}\leqslant$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\leq M_\lambda \Big\{ P_\lambda \Big[\sum_{s=1}^{t-k-1} \|x(s)\|^2 +$$

$$+ \sum_{s=t-k}^{t} \|\varepsilon(s)\|^2 < H \,|\, x(0), \varepsilon_1^{t-k-1}, \varepsilon_{t-k+1}^{t} \Big] \Big\} =$$

$$= P_\lambda \Big\{ \sum_{s=1}^{t-k-1} \|x(s)\|^2 + \sum_{s=t-k} \|\varepsilon(s)\|^2 < H \Big\},$$

что и завершает доказательство леммы 5.I. Из условия (5.2) и леммы при $k = t$ следует

$$P_\lambda \Big\{ \sum_{s=0}^{t} c_i(s, x) < H \Big\} \leq P_\lambda \Big\{ \sum_{s=1}^{t} \|x(s)\|^2 < \frac{H}{\beta} \Big\} \leq$$

$$\leq P_\lambda \Big\{ \sum_{s=1}^{t} \|\varepsilon(s)\|^2 < \frac{H}{\beta} \Big\} \qquad (t = 1, 2, \ldots).$$

Суммируя по t и учитывая (5.2), находим

$$M_\lambda \tau_i(H) = \sum_{t=0}^{\infty} P_\lambda \big\{ \tau_i(H) > t \big\} \leq 1 +$$

$$+ \sum_{t \geq 1} P_\lambda \Big\{ \sum_{s=0}^{t} c_i(s, x) < H \Big\} \leq M_\lambda \hat{\tau} \Big(\frac{H}{\beta} \Big).$$

Теорема 5.I доказана.

Замечание 5.I. Если неравенство (5.2) справедливо только для некоторых значений i, то средние длительности наблюдений равномерно ограничены только при оценивании соответствующих параметров λ_i.

Замечание 5.2. Как видно из доказательства, утверждение теоремы 5.I остается в силе для любого распределения вектора $\varepsilon(t)$, такого, что вероятность попадания в шар произвольного радиуса максимальна при совпадении центра шара с началом координат. В частности, распределение $\varepsilon(t)$ может быть дискретным.

Найденная верхняя граница для среднего времени наблюдения является неулучшаемой в указанном классе функций $A(s, x)$, пос-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

кольку она достигается, например, для процесса авторегрессии первого порядка при нулевом значении параметра λ.

Учитывая, что граница

$$M\hat{\tau}\left(\frac{H}{\beta}\right)=1+\sum_{\ell\geq 1} P\left\{\|\varepsilon(1)\|+\dots+\|\varepsilon(\ell)\|^2<\frac{H}{\beta}\right\} \tag{5.5}$$

явно не вычисляется во многих простых случаях, получим для неё приближения. Если воспользоваться тождеством Вальда

$$M\left\{\|\varepsilon_{(1)}\|^2+\dots+\|\varepsilon(\hat{\tau}(H/\beta))\|^2\right\}=M\hat{\tau}\left(\frac{H}{\beta}\right)\cdot M\left\{\|\xi_1\|^2\right\}$$

и пренебречь эффектом перескока порога $\frac{H}{\beta}$ величиной $\sum_{k=1}^{t}\|\xi_k\|^2$, то придем к приближению

$$M\hat{\tau}\left(\frac{H}{\beta}\right)\approx\frac{H}{n\cdot\beta}.$$

Эта оценка является, очевидно, заниженной. Получим теперь верхние границы для $M\hat{\tau}\left(\frac{H}{\beta}\right)$ при конкретных распределениях процесса $\varepsilon(t)$.

<u>Предложение 5.I</u>. Если шумы $\varepsilon(t)$ – гауссовские, то справедливы неравенства:

$$M\hat{\tau}\left(\frac{H}{\beta}\right)\leq\begin{cases}\frac{H}{\beta}+2, & \text{если } n=1;\\ \frac{H}{2^{\nu}\beta}+1, & \text{если } n\geq 2,\end{cases} \tag{5.6}$$

где $\nu=[\log_2 n]$; $[a]$ обозначает целую часть числа a. Если компоненты вектора $\varepsilon(t)$ имеют равномерное распределение и независимы в совокупности, то

$$M\hat{\tau}\left(\frac{H}{\beta}\right)\leq\begin{cases}\frac{H}{\beta}+3, & \text{если } n=1;\\ \frac{H}{2^{\nu}\beta}+2, & \text{если } n\geq 2.\end{cases} \tag{5.7}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Для доказательства (5.6) положим

$$g_{t,n} = \sum_{s=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2(s); \qquad s(n) = \sum_{t=1}^{\infty} P\left\{ g_{t,n} < H/\beta \right\}.$$

Учитывая, что все компоненты вектора $\varepsilon(t)$ независимы и одинаково распределены, имеем

$$s(n) = \sum_{t=1}^{\infty} P\left\{ g_{2t,n} < H/\beta \right\} + \sum_{t=1}^{\infty} P\left\{ g_{2t-1,n} < H/\beta \right\} \geq$$

$$\geq 2 \sum_{t=1}^{\infty} P\left\{ g_{2t,n} < H/\beta \right\} = 2s(2n). \tag{5.8}$$

По индукции при $n = 2^k$ получаем

$$s(2^k) \leq s(2)/2^{k-1}.$$

Таким образом,

$$M\hat{\tau}\left(\frac{H}{\beta}\right) \leq \begin{cases} 1 + s(1), & \text{если } n = 1; \\ 1 + s(2)/2^{\nu-1}, & \text{если } \nu = [\log_2 n] \geq 1. \end{cases} \tag{5.9}$$

В гауссовском случае при $n = 2$ величина $\sum_{s=1}^{t} \| \varepsilon(s) \|^2$ имеет χ^2 – распределение с $2t$ степенями свободы. Поэтому

$$s(2) = \sum_{t=1}^{\infty} P\left\{ \sum_{s=1}^{t} \| \varepsilon(s) \|^2 < \frac{H}{\beta} \right\} =$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \int_0^{H/\beta} \frac{z^{t-1} e^{-z/2}}{2^t \Gamma(t)} dz =$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$= \int_0^{H/\beta} e^{-z} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{z^{t-1}}{(t-1)!} dz = \frac{H}{\beta}.$$

Сумму $s(1)$ легко оценить через $s(2)$:

$$s(1) = \sum_{t=1}^{\infty} P\left\{ \sum_{s=1}^{2t} \varepsilon_1^2(s) < \frac{H}{\beta} \right\} + \sum_{t=1}^{\infty} P\left\{ \sum_{s=1}^{2t-1} \varepsilon_1^2(s) < \frac{H}{\beta} \right\} \leq$$

$$\leq 1 + 2s(2) = \frac{H}{\beta} + 1.$$

Отсюда и из (5.9) вытекает (5.6).

Если $\varepsilon_1(t)$ имеет равномерное распределение (на интервале $[-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$), то, учитывая неравенства:

$$\sum_{s=1}^{\hat{\tau}(H/\beta)^{-1}} \varepsilon_1^2(s) < \frac{H}{\beta}; \qquad \varepsilon_1^2\left(\hat{\tau}\left(\frac{H}{\beta}\right)\right) \leq 3.$$

и используя тождество Вальда, получим

$$\frac{H}{\beta} + 3 \geq M \sum_{s=1}^{\tau(H/\beta} \varepsilon_1^2(s) = M\hat{\tau}\left(\frac{H}{\beta}\right) - 1 + s(1). \tag{5.10}$$

Из (5.8) – (5.10) следует (5.7). Предложение 5.1 доказано.

Перейдем к выводу нижней границы для среднего времени наблюдения. Предположим, что столбцы матрицы A попарно ортогональны и имеют одинаковую норму:

$$A^T(s,x)\, A(s,x) = \| c(s,x)\, \delta_{ij} \|. \tag{5.11}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В этом случае все статистики $c_i(s,x)$ равны $c(s,x)$ и все моменты остановки совпадают: $\tau_1(H)=\dots=\tau_p(H)=\tau(H)$. Положим для простоты $x_0=0$.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть функции $A(s,x)$ такова, что при некотором $\gamma\ (0<\gamma<\infty)$ выполняется неравенство

$$c(s,x)\le\gamma\|x(s)\|. \tag{5.12}$$

Тогда для всех $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_p)^T$

$$M_\lambda\tau\ge\frac{H}{n}\left(\frac{1}{\gamma}-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^2\right)_+,$$

где $a_+=\max(0,a)$.

Доказательство. Из (5.1), (5.12) и определения $\tau(H)$ имеем

$$H\le\sum_{s=0}^{\tau}c(s,x)\le\gamma\sum_{s=1}^{\tau}\|x(s)\|^2=$$

$$=\gamma\sum_{s=1}^{\tau}\Big[\lambda^TA^T(s-1,x)A(s-1,x)\lambda+$$

$$+\lambda^TA^T(s-1,x)\varepsilon(s)+\varepsilon^T(s)A(s-1,x)\lambda+\varepsilon^T(s)\varepsilon(s)\Big].$$

Учитывая, что

$$M_\lambda\left\{\sum_{s=1}^{\tau}\lambda^TA^T(s-1,x)\varepsilon(s)\right\}=0$$

(это равенство доказывается так же, как и несмещенность последовательных оценок в § 4) и условие (5.11), получаем

$$\frac{H}{\gamma}\le\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^2M_\lambda\sum_{s=0}^{\tau-1}c(s,x)+M_\lambda\sum_{s=1}^{\tau}\xi^T(s)\xi(s).$$

Из тождества Вальда и неравенства $\sum_{s=0}^{\tau-1}c(s,x)<H$ вытекает, что

$$H/\gamma\le H\sum_{s=1}^{p}\lambda_j^2+nM_\lambda\tau.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Отсюда следует утверждение теоремы 5.2.

Примеры

I. Рассмотрим одномерный процесс авторегрессии:

$$x(t+1)=\lambda x(t)+\varepsilon(t+1), \qquad x_0=0, \tag{5.13}$$

при гауссовских и равномерных шумах $\varepsilon(t)$. В первом случае среднее время последовательного оценивания параметра λ удовлетворяет неравенствам:

$$H(1-\lambda^2)_+ \leq M_\lambda \tau(H) \leq H+2,$$

во втором –

$$H(1-\lambda^2)_+ \leq M_\lambda \tau(H) \leq H+3.$$

Эти неравенства легко получить из теорем 5.I, 5.2, если учесть, что для рассматриваемого процесса $c(s,x)=x^2(s)$ и $\gamma=\beta=1$. Чтобы выяснить, как ведет себя функция $M_\lambda \tau$ в зависимости от параметра λ, проводилось моделирование на ЭВМ процесса (5.I3) при различных значениях λ и вычислялось по 50 реализациям процесса $x(t)$ выборочное среднее время последовательного оценивания $\overline{\tau}$ при $H=100$. На рис.I кривая I указывает поведение выборочного среднего $\overline{\tau}$ при гауссовских шумах; кривая 2 – при равномерных шумах; кривая 3 и линия 4 дают нижнюю и верхнюю границы для $M_\lambda \tau$. Как видно из рис.I, выборочные средние $\overline{\tau}$ в обоих случаях практически совпадают с теоретической нижней границей для $M_\lambda \tau$ в области устойчивости процесса $x(t)$ (такое совпадение не является случайным и находит свое объяснение в § 6). Полученная зависимость $\overline{\tau}$ от λ использовалась для сравнения последовательных оценок с оценками МНК. При этом объем выборки оценки МНК полагался равным среднему числу наблюдений при последовательном оценивании. На рис.2 кривые I,2 представляют зависимости выборочных среднеквадратических уклонений $\hat{\lambda}$ последовательных оценок и оценок МНК. Сравнение кривых показывает, что последовательные оценки являются более устойчивыми, чем оценки МНК, в том смысле, что для них среднеквадратическое уклонение практически не превышает заданный уровень $1/H=0{,}01$. Это объясняется, по-видимому, тем, что у оценки МНК

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

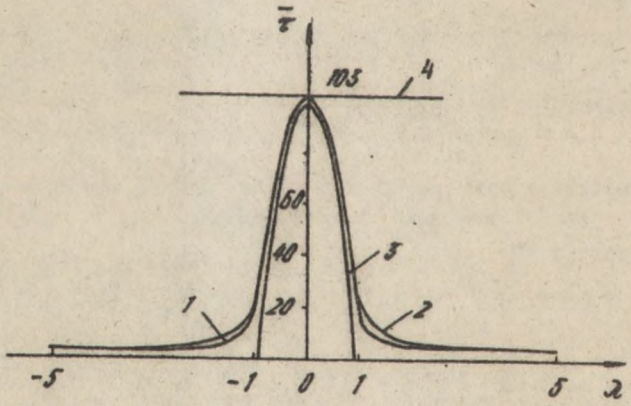

Рис. 1. Выборочное среднее число наблюдений в зависимости от параметра λ

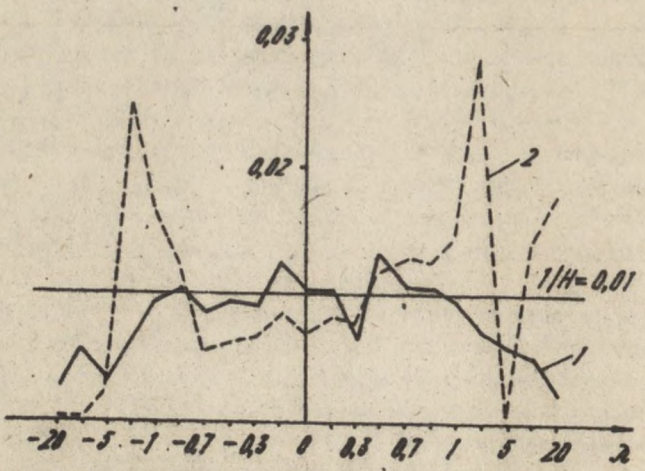

Рис. 2. Выборочное среднеквадратическое уклонение последовательной оценки и оценки МНК

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\hat{\lambda}(t)=\sum_{s=1}^{t} x(s)\,x(s+1)\Big/\sum_{s=1}^{t} x^2(s)$$

знаменатель в момент прекращения наблюдений является случайной величиной, которая может колебаться в широких пределах, в то время как последовательная оценка строится таким образом, чтобы знаменатель в момент прекращения наблюдений в точности равнялся заданному порогу H.

2. В качестве второго примера рассмотрим процесс, определяемый уравнениями (4.15). Так как в данном случае $c_1(t,x)=c_2(t,x)=\|x(t)\|^2$, то $\alpha=\beta=1$.

Используя (5.6), (5.7) и (5.12), получаем

$$\frac{H}{2}\left(1-\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)_+ \leq M_\lambda \tau \leq \frac{H}{2}+1$$

при гауссовском распределении $\varepsilon(t)$ и

$$\frac{H}{2}\left(1-\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)_+ \leq M_\lambda \tau \leq \frac{H}{2}+2$$

при равномерном распределении $\varepsilon(t)$.

§ 6. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА АВТОРЕГРЕССИИ

В данном параграфе устанавливаются асимптотические свойства последовательных оценок параметра процесса авторегрессии. Полученные результаты оказываются полезными в задачах классификации и обнаружения разладок случайных процессов рекуррентного типа, которые будут рассмотрены в дальнейшем. Изучим сначала асимптотические свойства последовательного плана оценивания параметра авторегрессии первого порядка. Некоторые асимптотические свойства этого плана уже отмечались в примере 3.1. Другие свойства со-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

держит

ТЕОРЕМА 6.I. Для устойчивого процесса (3.I5) последовательный план $(\tau(H), \lambda^*(H))$, определяемый формулами (3.I6), обладает следующими асимптотическими свойствами:

I°. $\lim\limits_{H\to\infty} \frac{\tau(H)}{H} = (1-\lambda^2) \quad (P_\lambda - п.н.)$. (6.1)

2°. случайная величина $\sqrt{H}(\lambda^*(H)-\lambda)$ асимптотически нормальна с параметрами (0,I), т.е.

$$\lim_{H\to\infty} P\left\{\sqrt{H}(\lambda^*(H)-\lambda) \leq z\right\} = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\,dt. \tag{6.2}$$

Докажем первое утверждение теоремы 6.I. По определению $\tau(H)$ имеем

$$\frac{\tau(H)}{H} = \frac{\tau(H)}{\sum\limits_{k=0}^{\tau(H)-1} \frac{x_k^2}{\sigma^2} + \alpha(H)\frac{x_\tau^2}{\sigma^2}}. \tag{6.3}$$

Из предложения 7.I, доказанного в следующем параграфе, следует, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} \frac{x_k^2}{\sigma^2} = \frac{1}{1-\lambda^2} \qquad (P_\lambda - п.н.). \tag{6.4}$$

Отсюда и из (6.3) получаем свойство I°. Далее, рассмотрим величину

$$\sqrt{H}(\lambda^*(H)-\lambda) = \frac{1}{\sqrt{H}}\sum_{k=0}^{[f\cdot H]} \frac{x_k \varepsilon_{k+1}}{\sigma^2} + \frac{R(H)}{\sigma^2}, \tag{6.5}$$

где $f = (1-\lambda^2)$; $[a]$ обозначает целую часть числа a;

$$R(H) = \frac{1}{\sqrt{H}}\begin{cases} \sum\limits_{k=[f\cdot H]+1}^{\tau-1} x_k\varepsilon_{k+1} + \alpha(H)x_\tau\varepsilon_{\tau+1}, & \text{если } \tau(H) > [f\cdot H], \\ -\sum\limits_{k=\tau+1}^{[f\cdot H]} x_k\varepsilon_{k+1} - (1-\alpha(H))x_\tau\varepsilon_{\tau+1}, & \text{если } \tau(H) \leq [f\cdot H]. \end{cases} \tag{6.6}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Первое слагаемое в правой части (6.5) асимптотически нормально с параметрами (0,I). Это следует из равенства

$$\frac{1}{\sqrt{H}}\sum_{k=1}^{[f\cdot H]}\frac{x_k\varepsilon_{k+1}}{\sigma^2}=\sqrt{\frac{[f\cdot H]}{H}}\cdot\frac{1}{\sqrt{[f\cdot H]}}\sum_{k=1}^{[f\cdot H]}\frac{x_k\varepsilon_{k+1}}{\sigma^2} \tag{6.7}$$

и известной теоремы об асимптотической нормальности оценки МНК [4], согласно которой второй сомножитель в (6.7) имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами $(0, f^{-1})$. Чтобы получить утверждение 2^0, требуется показать, что остаток $\ell(H)$, определяемый формулой (6.6), сходится к нулю по вероятности при $H\to\infty$. Легко проверить, что

$$M_\lambda \ell^2(H)\le M_\lambda\varphi(H);\qquad \varphi(H)=\frac{1}{H}\sum_{k=\sigma_1}^{\sigma_2}{}' x_k^2; \tag{6.8}$$

$$\sigma_1=\sigma_1(H)=\min(\tau(H)\quad[f\cdot H]);$$

$$\sigma_2=\sigma_2(H)=\max(\tau(H)\quad[f\cdot H]).$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что слагаемое x_τ^2 берется с весовым множителем

$$\tilde{\alpha}(H)=\begin{cases}\alpha(H), & \text{если } \tau(H)>[f\cdot H];\\ 1, & \text{если } \tau(H)\le[f\cdot H].\end{cases}$$

Докажем, что

а) $P_\lambda-\lim\varphi(H)=0$; б) система случайных величин $\{\varphi(H),\ H>0\}$ равномерно интегрируема. Это позволит перейти в (6.8) к пределу при $H\to\infty$ и получить требуемый результат: $P_\lambda-\lim\ell(H)=0$

Воспользуемся оценкой

$$\varphi(H)\le\frac{1}{H}\sum_{k=\sigma_1}^{\sigma_2}x_k^2=\frac{\sigma_2(H)}{H}\,\frac{1}{\sigma_2(H)}\sum_{k=1}^{\sigma_2(H)}x_k^2-\frac{\sigma_1-1}{H}\,\frac{1}{\sigma_1-1}\sum_{k=1}^{\sigma_1-1}x_k^2. \tag{6.9}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Переходя к пределу по вероятности в (6.9) и используя I^0 и (6.4), получим а). Проверим необходимые и достаточные условия равномерной интегрируемости. Имеем

$$\varphi(H)=\varphi(H)\chi_{(\tau(H)<[f\cdot H])}+\varphi(H)\chi_{(\tau(H)\geq[f\cdot H])}\leq$$

$$\leq\frac{1}{H}\sum_{k=1}^{\tau}{}' x_k^2+\frac{1}{H}\sum_{k=1}^{[f\cdot H]} x_k^2\leq\sigma^2+\frac{1}{[H]}\sum_{k=1}^{[H]} x_k^2 . \qquad (6.10)$$

Отсюда следует, что

$$M_\lambda\varphi(H)\chi_A\leq P_\lambda(A)\,\sigma^2+\frac{1}{[H]}\sum_{k=1}^{[H]} M_\lambda x_k^2\chi_A .$$

Так как

$$M_\lambda\left[x_n^2\chi_A\right]=M_\lambda\chi_A\left(\sum_{\ell=0}^{n}\lambda^\ell\varepsilon_{n-\ell}\right)^2\leq\frac{1}{(1-|\lambda|)^2}\sup_{k\geq0}M_\lambda\chi_A\varepsilon_k^2 ,$$

то

$$\sup_{H>0}M_\lambda\varphi(H)\chi_A\leq\sigma^2P_\lambda(A)+\frac{1}{(1-|\lambda|)^2}\sup M_\lambda\chi_A\varepsilon_k^2\to0$$

при $P_\lambda(A)\to0$, что доказывает равномерную абсолютную непрерывность. Равномерная ограниченность выполняется в силу неравенства

$$M_\lambda\varphi(H)\leq\frac{\sigma^2}{1-\lambda^2}+\sigma^2,$$

которое следует из (6.10). Теорема 6.I доказана. Некоторым обобщением теоремы 6.I является следующая

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $\{x_t\}$ – устойчивый процесс авторегрессии p-го порядка и последовательность $\{a_t,\ t\geq0\}$ определяется равенством

$$a_t=\sum_{i=1}^{p}\rho_i\cdot x_{t-i+1}\ ,\quad |\rho_i|<\infty .$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда случайная величина

$$\varphi(H)=\frac{1}{\sqrt{H}}\left[\sum_{t=0}^{\tau-1}\frac{a_t}{\sigma^2}\xi_{t+1}+\alpha(H)\frac{a_\tau}{\sigma^2}\xi_{\tau+1}\right],$$

где

$$\tau=\tau(H)=\min\left\{N\geq 0:\sum_{t=0}^{N}\frac{a_t^2}{\sigma^2}\geq H\right\};$$

$$\sum_{t=0}^{\tau-1}\frac{a_t^2}{\sigma^2}+\alpha(H)\frac{a_\tau^2}{\sigma^2}=H,$$

является асимптотически нормальной с параметрами (0,I).

Доказательство теоремы 6.2 подобно доказательству теоремы (6.I).

§ 7. ДВУХЭТАПНЫЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В данном параграфе будет завершено решение задачи, поставленной в § 2. До сих пор предполагалось, что размерность вектора неизвестных параметров не превышает размерности наблюдаемого процесса. Это условие, однако, является ограничительным и не выполняется для многих практически интересных процессов, например, для скалярного процесса авторегрессии, имеющего порядок больше единицы. Кроме того, в § 4 при построении последовательных планов для векторного параметра требовалась специальная весовая матрица, которая, хотя и обеспечивает несмещенность последовательных оценок, но существует не всегда. Ниже предлагается последовательный метод оценивания параметров стохастических систем типа (2.I), пригодный при любом конечном числе параметров. Метод не гарантирует несмещенность оценок, но по-прежнему позволяет контролировать среднеквадратические уклонения оценок и обоснованно выбирать момент прекращения наблюдений в зависимости от требуемой точности оценивания.

7.I. Построение последовательных оценок

Последовательные планы оценивания параметров λ_i, $i=\overline{1,p}$, будем строить в два этапа, взяв за основу оценки МНК (4.I) при

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$V(t)=\mathcal{D}^{+}$:

$$\hat{\lambda}(N)=[G(N)]^{-1}\Phi(N);\quad G(N)=\|g_{ij}(N)\|=\sum_{t=0}^{N}A_1^{T}(t)\mathcal{D}^{+}(t)A_1(t),$$

$$\Phi(N)=(\Phi_1(N),\dots,\Phi_p(N))^{T}=\sum_{t=0}^{N}A_1^{T}(t)\mathcal{D}^{+}(t)(x(t+1)-A_0(t)). \tag{7.I}$$

Подставив $x(t+1)$ из (2.I) в (7.I), получим систему уравнений

$$\Phi(N)=G(N)\lambda+\xi(N),\quad \xi(N)=\{\xi_1(N),\dots,\xi_p(N)\}^{T};$$

$$\xi_j(N)=\langle A_1^{T}(t)\mathcal{D}^{+}(t)\varepsilon(t+1)\rangle_i, \tag{7.2}$$

описывающих стохастическую связь между статистиками $\Phi(N)$ и $G(N)$, через которые выражаются оценки МНК. На первом этапе модифицируем систему статистик с помощью случайной замены времени. Пусть $\{c_n,\ n\geq 1\}$ – неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. Определим p последовательностей моментов остановки $\{\tau_i(n),\ n\geq 1\}$, $i=\overline{1,p}$, по формуле

$$\tau_i(n)=\inf\{N\geq 0:\sum_{t=0}^{N}\psi_i(t)\geq c_n\},\qquad n\geq 1; \tag{7.3}$$

$$\psi_i(t)=\langle A_1^{T}(t)\mathcal{D}^{+}(t)A_1(t)\rangle_{ii}$$

(полагаем $\tau_i(n)=+\infty$, если множество в фигурных скобках пусто). Чтобы обеспечить конечность этих моментов, будем предполагать, что с вероятностью единица расходятся ряды

$$\sum_{t=0}^{\infty}\psi_i(t)=+\infty,\qquad i=\overline{1,p}. \tag{7.4}$$

Перейдем к модифицированным статистикам. Положим

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\Phi'(n)=\{\Phi_1'(n),\dots,\Phi_p'(n)\}^T;$$

$$G'(n)=\|g_{ij}'(n)\|,\ \xi'(n)=\{\xi_1'(n),\dots,\xi_p'(n)\}^T;$$

$$\Phi_i'(n)=\sum_{t=0}^{\tau_i(n)}{}'\langle A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)(x(t+1)-A_0(t))\rangle_i;\tag{7.5}$$

$$g_{ij}'(n)=\sum_{t=0}^{\tau_i(n)}{}'\langle A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)A_1(t)\rangle_{ij};$$

$$\xi_i'(n)=\sum_{t=0}^{\tau_i(n)}{}'\langle A_1^T(t)\mathcal{D}^+(t)\varepsilon(t+1)\rangle_i,$$

где штрих у знака суммы обозначает, что последнее слагаемое берется с весом $\alpha_i(\tau_i(n))$, определяемым из уравнения

$$\sum_{t=0}^{\tau_i(n)-1}\psi_i(t)+\alpha_i(\tau_i(n))\psi_i(\tau_i(n))=C_n.\tag{7.6}$$

Эти статистики получаются из соответствующих статистик (7.I) путем замены N на $\tau_i(n)$ и введения весового множителя $\alpha_i(\tau_i(n))$, $0<\alpha_i(\tau_i(n))\leq 1$, у последнего слагаемого. Статистики (7.5), как нетрудно проверить, связаны системой уравнений типа (7.2):

$$\Phi'(n)=G'(n)\lambda+\xi'(n).\tag{7.7}$$

Однако эта связь становится более контролируемой в том смысле, что дисперсии шумов $\xi'(n)$ (в отличие от $\xi(N)$) легко оценить сверху. Первый этап построения последовательных оценок завершает

ЛЕММА 7.I. Для процесса $\xi'(n)=\{\xi_1'(n),\dots,\xi_p'(n)\}^T$, $n\geq 1$,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

имеют место неравенства:

$$M_\lambda \xi_i'^2(n) \leq c_n, \qquad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in R^p, \quad i = \overline{1, p}. \tag{7.8}$$

Утверждение леммы 7.I следует из цепочки неравенств:

$$M_\lambda \varepsilon_i^2(n) \leq$$

$$\leq M_\lambda \sum_{t=0}^{\tau_i(n)}{}' \langle A_1^T(t) \mathcal{D}^+(t) M_\lambda (\varepsilon(t+1)\, \varepsilon^T(t+1) | F_t) A_1^T(t) \rangle_{ii} =$$

$$= M_\lambda \sum_{t=0}^{\tau_i(n)}{}' \langle A_1^T(t) \mathcal{D}^+(t) A_1(t) \rangle_{ii} = c_n,$$

в которой учтено условие на шумы (2.2) и равенство (7.6).

Необходимость второго этапа возникает только при случайной матрице $G'(n)$, поскольку в противном случае решение поставленной задачи дает оценка МНК, определяемая из уравнения (7.7)

$$\lambda'(n) = [G'(n)]^{-1} \Phi'(n). \tag{7.9}$$

Пусть, например, матрица $A_1^T(t) \mathcal{D}^+(t) A_1(t)$ является диагональной. Тогда $G'(n) = c_n' \cdot E$,

$$\lambda'(n) = \Phi'(n) = \lambda + \frac{\xi'(n)}{c_n}.$$

Отсюда и из леммы 7.I следует, что

$$M[\lambda'(n) - \lambda][\lambda'(n) - \lambda]^T \leq \frac{E}{c_n}.$$

Если матрица $G'(n)$ случайна, оценки $\lambda'(n)$ трудны для анализа. Однако на основе последовательности этих оценок можно построить последовательные планы оценивания с нужными свойствами. Подставляя (2.I) в (7.9) и переходя к покоординатной форме записи,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

получим

$$\lambda_i'(n) = \lambda_i + \sum_{k=1}^{p} \frac{G_{ik}'(n)}{\Delta_n'} \xi_k'(n), \tag{7.10}$$

где $\Delta_n' = \det G'(n)$, $G_{ik}'(n)$ – алгебраическое дополнение элемента $g_{ij}'(n)$ в матрице $G'(n)$. Далее зададимся последовательностью положительных чисел $\{\varkappa_n\}$ и преобразуем (7.10) к виду

$$z_i(n) = \lambda_i b_i(n) + \eta_i(n), \quad n \geq 1, \quad i = \overline{1,p}. \tag{7.11}$$

Здесь

$$z_i(n) = \frac{\lambda_i(n)\Delta_n'}{R_i'(n)\varkappa_n}, \quad b_i(n) = \frac{\Delta_n'}{R_i'(n)\varkappa_n}; \tag{7.12}$$

$$R_i'(n) = \max_{1 \leq k \leq n} |G_{ik}'(n)|, \quad \eta_i(n) = \frac{1}{\varkappa_n} \sum_{k=1}^{p} d_{ik}(n)\xi_k'(n);$$

$$d_{ik}(n) = G_{ik}'(n) / R_i'(n).$$

Из (7.8) и элементарного неравенства

$$(a_1 + \ldots + a_p)^2 \leq p(a_1^2 + \ldots + a_p^2)$$

следует, что

$$M_\lambda \eta_i(n) \leq \frac{p}{\varkappa_n^2} \sum_{k=1}^{p} M_\lambda d_{ik}^2(n) \xi_k'^2 \leq p^2 c_n / \varkappa_n^2. \tag{7.13}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Выбором последовательностей $\{c_k\}$ и $\{\chi_k\}$ согласно (7.13) можно влиять на статистические свойства шума $\ell_i(n)$ в (7.11). Будем оценивать неизвестные параметры λ_i по наблюдениям $z_i(n)$ и $b_i(n)$. Определим искомые последовательные планы по формулам:

$$\sigma_i = \sigma_i(H) = \inf\left\{k \geq 1 : \sum_{\ell=1}^{k} b_i^2(\ell) \geq H\right\}, \quad H > 0;$$

$$\lambda_i^*(H) = \frac{1}{H}\left\{\sum_{n=1}^{\sigma_i - 1} z_i(n) b_i(n) + \beta_i z_i(\sigma_i) b_i(\sigma_i)\right\}; \tag{7.14}$$

$$\beta_i = \frac{H - \sum_{n=1}^{\sigma_i - 1} b_i^2(n)}{b_i^2(\sigma_i)}.$$

<u>Замечание 7.1</u>. Оценки $\lambda_i^*(H)$ имеют наглядный смысл. С учетом обозначений (7.12) представим $\lambda_i^*(H)$ в виде

$$\lambda_i^*(H) = \sum_{n=1}^{\sigma_i} \nu_i(n)\, \lambda_i'(n);$$

$$\nu_i(n) = \frac{1}{H}\begin{cases} b_i^2(n), & \text{если } n < \sigma_i; \\ \beta_i b_i^2(\sigma_i), & \text{если } n = \sigma_i. \end{cases}$$

Поскольку $\nu_i(n) \geq 0$ и $\sum_{n=1}^{\sigma_i} \nu_i(n) = 1$, то последовательные оценки $\lambda_i^*(H)$ представляют собой взвешенные суммы оценок по методу наименьших квадратов $\lambda_i'(n)$, вычисленных в случайные моменты времени $\tau_n = \max_{1 \leq i \leq p} \tau_i(n)$.

7.2. Свойства последовательных оценок

Основные свойства построенных последовательных планов сформулируем в виде теоремы.

<u>ТЕОРЕМА 7.1</u>. Пусть функции $A_1(t)$ и $\mathcal{D}(t)$ удовлетворяют почти наверное условиям:

$$\sum_{t \geq 0} \langle A_1^T(t) \mathcal{D}^+(t) A_1(t) \rangle_{ii} = +\infty, \quad i = \overline{1, p}, \tag{7.15}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и для последовательностей положительных чисел $\{c_n\}$ и $\{\varkappa_n\}$, таких, что $\sum_{n\geq 1} c_n/\varkappa_n^2 < \infty$, с вероятностью единица расходятся ряды:

$$\sum_{n\geq 1} \left[b_i(n) \right]^2 = +\infty, \quad i=\overline{1,p}. \tag{7.16}$$

Тогда для любого $H>0$ последовательные планы (7.14) обладают свойством равномерной ограниченности среднеквадратического уклонения

$$M_\lambda \left[\lambda_i^*(H) - \lambda_i \right]^2 \leq \rho/H, \quad i=\overline{1,p}, \quad \rho = p^2 \sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{\varkappa_n^2} \tag{7.17}$$

и все моменты $\sigma_i(H)$ конечны с вероятностью единица.

<u>Доказательство</u>. Из (7.11) и (7.14) следует, что

$$\lambda_i^*(H) - \lambda_i = \frac{1}{H} \left\{ \sum_{n=1}^{\sigma_i - 1} b_i(n)\eta_i(n) + \beta_i b_i(\sigma_i)\eta_i(\sigma_i) \right\}.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и учитывая, что

$$\sum_{n=1}^{\sigma_i - 1} b_i^2(n) + \beta_i^2 b_i^2(\sigma_i) \leq H,$$

с помощью (7.13), (7.17) получаем

$$M_\lambda \left[\lambda_i^*(H) - \lambda_i \right]^2 = \frac{1}{H} M_\lambda \left[\sum_{n=1}^{\sigma_i} \eta_i^2(n) \right] \leq \frac{1}{H} M_\lambda \left[\sum_{n\geq 1} \eta_i^2(n) \right] =$$
$$= \frac{1}{H} \sum_{n\geq 1} M_\lambda \eta_i^2(n) \leq \frac{1}{H} \sum_{n\geq 1} p^2 c_n / \varkappa_n^2 = \frac{\rho}{H}.$$

Утверждение конечности почти наверное момента остановки $\sigma_i(H)$ следует из (7.15), (7.16). Теорема 7.1 доказана.

7.3. Последовательное оценивание параметров процесса авторегрессии

Рассмотрим задачу оценивания вектора параметров скалярного процесса авторегрессии p-го порядка:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$x_{t+1}=\lambda_1 x_t+\lambda_2 x_{t-1}+\dots+\lambda_p x_{t-p+1}+\varepsilon_{t+1}, \qquad (7.18)$$
$$t=0,1,\dots,$$

где $x_s=0$ при $s<0$ и $\{\varepsilon_t\ ,\ t\geq 1\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\varepsilon_t=0$ и $M\varepsilon_t^2=\sigma^2>0$. Пусть процесс (7.18) устойчив, т.е. все корни характеристического уравнения лежат в единичном круге. Покажем, что в данном случае выполнены условия теоремы (7.1), обеспечивающие возможность оценивания параметров λ_i с требуемой точностью за конечное время с помощью последовательных планов (7.14). При этом будем предполагать, что $\{c_n\}$ и $\{K_n\}$ – произвольные последовательности положительных чисел, такие, что

$$\sum_{n\geq 1}\frac{c_n}{K_n^2}<\infty, \qquad \varliminf_{n\to\infty}\frac{c_n}{K_n^2}>0. \qquad (7.19)$$

(Эти неравенства выполняются, например, если $c_n=K_n$ и $\sum_n \frac{1}{c_n}<\infty$.) Проверка условий теоремы 7.1 основана на вспомогательном утверждении, для формулировки которого уравнения процесса авторегрессии удобно представить в виде векторного стохастического разностного уравнения первого порядка. Полагая

$$x(t)=(x_t,\dots,x_{t-p+1})^T; \qquad \xi(t)=(\varepsilon_t,0,\dots,0)^T;$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & \lambda_p\\ 1 & 0\dots & 0\\ 0 & 1\ 0\dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0\dots & 0\ 1 & 0\end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix}\sigma^2 & 0\dots\\ 0 & 0\dots\\ \dots & \dots\\ 0 & \dots\end{pmatrix}, \qquad (7.19')$$

получим

$$x(t+1)=\Lambda\, x(t)+\xi(t+1), \qquad t=0,1,\dots . \qquad (7.20)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Предложение 7.I. Для устойчивого процесса авторегрессии с вероятностью единица имеет место сходимость

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{t=0}^{N} x(t)\, x^{T}(t)}{N} = F, \qquad (7.21)$$

причем, $F = \|f_{ij}\| = \sum_{j\geq 0} \Lambda^{j} B (\Lambda^{T})^{j}$ – положительно определенная матрица.

Заметим, что сходимость (7.21) по вероятности была доказана Т.Андерсоном [4]. Доказательство предложения 7.I существенно опирается на результаты работы [4].

ЛЕММА 7.2. Для любого ν, большего по абсолютной величине максимального по абсолютной величине характеристического корня матрицы Λ, найдется такая постоянная c, что все элементы матрицы Λ^{n} будут меньше $c\cdot\nu^{n}$, $n = 0, 1, \ldots$

Доказательство этого утверждения приведено в [4]. Далее определим векторный стационарный случайный процесс $\{y(n), -\infty < n < \infty\}$ по формуле

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{k} \xi(n-k), \qquad (7.22)$$

где $\{\xi(n), -\infty < n < \infty\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с $M\xi(n) = 0$ и $M\xi(n)\xi^{T}(n) = B$. Сходимость ряда (7.22) понимается в среднем квадратическом. Эта сходимость имеет место в силу леммы 7.2 благодаря тому, что для матрицы Λ, отвечающей устойчивому процессу (7.20), число ν может быть взято меньше единицы.

ЛЕММА 7.3. Для устойчивого процесса (7.22) почти наверное выполняется предельное соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y(n)\, y^{T}(n) = F. \qquad (7.23)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Доказательство леммы 7.3. Учитывая, что процесс (7.22) удовлетворяет уравнению

$$y(n)=\Lambda y(n-1)+\xi(n), \qquad -\infty<n<\infty,$$

приходим к следующему равенству:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y(n)y^T(n)-\Lambda\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y(n)y^T(n)\right)\Lambda^T-$$

$$=\Lambda\frac{y(0)y^T(0)}{N}\Lambda^T-\Lambda R_1(N)\Lambda^T+ \tag{7.24}$$

$$+\Lambda R_2(N)+R_2^T(N)\Lambda^T+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\xi(n)\xi^T(n),$$

где

$$R_1(N)=\frac{y(N)y^T(N)}{N}, \quad R_2(N)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y(n-1)\xi^T(n).$$

Покажем, что матрицы $R_i(N)$ сходятся к нулевым при $N\to\infty$ с вероятностью единица. Из (7.22) с учетом того, что $\|\Lambda^k\|\le\rho\cdot c\cdot\nu^k$, $0<\nu<1$, получаем оценку

$$\|R_1(N)\|\le\frac{1}{N}\|y(N)\|^2\le\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\|\Lambda^k\|\cdot\|\xi(N-k)\|\right]^2\le$$

$$\le\frac{c^2\rho^2}{N}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k\|\xi(N-k)\|\right]^2\le$$

$$\le\frac{2c^2\rho^2}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\nu^k\|\xi(N-k)\|\right]^2+\frac{2c^2\rho^2}{N}\left[\sum_{k=N}^{\infty}\nu^k\|\xi(N-k)\|\right]^2\le$$

$$\le\frac{2c^2\rho^2}{(1-\nu)}\sum_{k=0}^{N-1}\nu^k\frac{\|\xi(N-k)\|^2}{(N-k)}\frac{(N-k)}{N}+$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$+\frac{2c^2\rho^2}{N}\,\frac{\vartheta^N}{N}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta^k\|\xi(N-k)\|\Big]^2\leq$$

$$\leq\frac{2c^2\rho^2}{(1-\vartheta)}\sum_{k=0}^{T}\vartheta^k\,\frac{\|\varepsilon(N-k)\|^2}{N-k}+$$

$$+\frac{2c^2\rho^2}{(1-\vartheta)}L_1(\omega)\sum_{k=T+1}^{N-1}\vartheta^k+2c^2\rho^2\frac{\vartheta^N}{N}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta^k\|\xi(-k)\|\Big]^2,$$

где

$$0<T<N-1,\quad L_1(\omega)=\sup_{\substack{-\infty<j<\infty\\ j\neq 0}}\frac{\|\xi_j\|^2}{|j|}<\infty.$$

Устремляя в этом неравенстве в бесконечность N, а затем T, устанавливаем, что $\lim R_1(N)=0$. Далее воспользуемся оценкой

$$\|R_2(N)\|=\frac{1}{N}\Big\|\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{T}\Lambda^k\varepsilon(n-1-k)\varepsilon^T(n)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=T+1}^{\infty}\Lambda^k\varepsilon(n-1-k)\varepsilon^T(n)\Big\|\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{T}\|\Lambda^k\|\|\varphi_1(N,k)\|+\sum_{k=T+1}^{N}\|\Lambda^k\|\cdot\|\varphi_1(N,k)\|+\sum_{k=N+1}^{\infty}\sqrt{k}\,\|\Lambda^k\|\cdot\|\varphi_2(N,k)\|,\quad 0<T<N-1,$$

где

$$\varphi_1(N,k)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varepsilon(n-1-k)\varepsilon^T(n)\qquad \varphi_2(N,k)=\frac{\varphi_1(N,k)}{\sqrt{k}}.$$

Так как с вероятностью единица выполняются неравенства:

$$\|\varphi_1(N,k)\|^2\leq\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|\varepsilon(n-1-k)\|^2\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|\varepsilon(n)\|^2\leq$$

$$\leq\Big(\frac{1}{N}\sum_{n=-N}^{N}\|\varepsilon(n)\|^2\Big)^2\leq$$

$$\leq\sup_{N>0}\Big(\frac{1}{N}\sum_{n=-N}^{N}\|\varepsilon(n)\|^2=L_2(\omega)<\infty,$$

при $k\leq N$, и

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\|\varphi_2(N,k)\|^2 \leq \frac{1}{k}\sum_{n=-k}^{k}\|\varepsilon(n)\|^2 \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\|\varepsilon(n)\|^2 \leq$$

$$\leq \sup_{k>0}\frac{1}{k}\sum_{n=-k}^{k}\|\varepsilon(n)\|^2 \sup_{N>0}\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\|\varepsilon(n)\|^2 =$$

$$= L_3(\omega) < \infty,$$

при $k > N$, то получаем

$$\|R_2(N)\| \leq$$

$$\leq \rho\cdot c\sum_{k=0}^{T}\nu^k\|\varphi_1(N,k)\| + \rho\cdot c L_2(\omega)\sum_{k=T+1}^{N}\nu^k +$$

$$+ c\cdot\rho L_3(\omega)\sum_{k=N+1}^{\infty}\sqrt{k}\,\nu^k.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по N, а затем по T, и принимая во внимание, что $\varphi_1(N,k)\to 0$ почти наверное при $N\to\infty$, находим $\lim R_2(N)=0$.

Для завершения доказательства леммы 7.3 остается перейти к пределу в уравнении (7.24) и воспользоваться тем, что F является единственным решением уравнения $X-\Lambda X\Lambda^T=B$.

Продолжим доказательство предложения 7.I. Чтобы получить (7.2I), в соответствии с леммой 7.3 требуется показать, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(x(n)x^T(n)-y(n)y^T(n)\right)=0 \qquad (P_\Lambda - \text{п.н.}).$$

В силу неравенства

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(x(n)\,x^T(n)-y(n)\,y^T(n)\right)\right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|x(n)-y(n)\|^2 + \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\|y(n)\|\cdot\|x(n)-y(n)\| \leq$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \| x(n) - y(n) \|^2 +$$

$$+ \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} \| y(n) \|^2 \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \| x(n) - y(n) \|^2$$

для этого достаточно проверить, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \| x(n) - y(n) \|^2 = 0 \quad (P_\Lambda - \text{п.н.}). \tag{7.25}$$

Из (7.20) следует, что

$$x(n) = \sum_{k=0}^{n} \Lambda^k \xi(n-k).$$

Отсюда и из (7.22) получаем

$$\| x(n) - y(n) \| = \| \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^{k+n} \xi(-k) \| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \| \Lambda^k \| \cdot \| \Lambda^k \| \cdot \| \xi(-k) \| \leq$$

$$\leq \rho c \nu^n L_4(\omega); \quad L_4(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \| \Lambda^k \| \cdot \| \xi(-k) \| < \infty.$$

Используя эту оценку, приходим к неравенству

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \| x(n) - y(n) \|^2 \leq \frac{\nu^2 \rho^2 c^2 L_4(\omega)}{(1-\nu^2)\, N},$$

из которого следует (7.25). Предложение 7.I доказано.

Проверим для процесса (7.I8) условия теоремы 7.I. Условия (7.I5) в данном случае принимают вид

$$\sum_{t=0}^{\infty} x^2_{t-i+1} = \infty, \qquad i = \overline{1, p}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Расходимость этих рядов имеет место, поскольку согласно (7.21)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N} x^2_{t-i+1} = f_{ii}, \tag{7.26}$$

причем величина f_{ii} положительна. Для справедливости условия (7.16) достаточно, чтобы либо $\overline{\lim}\ b_i(n) > 0$ либо, что эквивалентно, для всех $j=\overline{1,p}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{\Delta'_n}{c_n G'_{ij}(n)} \right| > 0 \qquad (P_\lambda - \text{п.н.}). \tag{7.27}$$

По определению $\tau_i(n)$ имеем неравенство

$$c_n \leq \sum_{t=0}^{\tau_i(n)} x^2_{t-i+1}.$$

Используя это неравенство, найдем

$$\left| \frac{\Delta'_n}{c_n G'_{ij}(n)} \right| \geq \frac{\tau_i(n)}{\sum\limits_{t=0}^{\tau_i} x^2_{t-i+1}} \left| \frac{\det \left\| \dfrac{g'_{ij}(n)}{\tau_i(n)} \right\|}{\det \left\| \dfrac{g'_{ij}(n)}{\tau_i(n)} \right\|^j_i} \right|, \tag{7.28}$$

где $\|A\|^j_i$ - матрица, получаемая из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Согласно предложению 7.1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g'_{ij}(n)}{\tau_i(n)} = \lim_{N\to\infty} \frac{g_{ij}(N)}{N} = \frac{f_{ij}}{\sigma^2}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Поскольку из (7.26) следует также, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau_i(n)} \sum_{t=0}^{\tau_i(n)} x^2_{t-i+1} = f_{ii},$$

то существует предел при $n \to \infty$ правой части неравенства (7.26), равный $1/f_{ii}|f^{-1}_{ji}|$; f^{-1}_{ji} обозначает элемент обратной матрицы F^{-1}. Таким образом, почти наверное выполняется предельное соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{\Delta'_n}{c_n G'_{ij}(n)} \right| = \frac{1}{f_{ii}|f^{-1}_{ji}|} > 0,$$

доказывающее (7.27) и справедливость последнего условия теоремы 7.I. Таким образом, установлена возможность оценивания параметров устойчивого процесса авторегрессии с помощью последовательных планов (7.I4) за конечное время с любой требуемой точностью.

Замечание 7.I. Утверждение следствия (3.I), касающееся построения последовательностей последовательных оценок, сходящихся к истинным значениям параметров в среднем квадратическом и с вероятностью единица, остается в силе и для построенных в данном параграфе оценок.

§ 8. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ШУМОВ В НАБЛЮДЕНИЯХ

В данном параграфе метод последовательного оценивания параметров рекуррентных процессов, предложенный выше, получает дальнейшее развитие. Так же, как и до сих пор, предполагается, что неизвестные параметры входят в уравнения процесса линейно. Существенное отличие рассматриваемой модели состоит в том, что шумы, задающие динамику процесса, могут быть зависимыми. Это допущение значительно расширяет область применения последовательного метода и дает возможность, например, решать в неасимптотической постановке задачу оценивания параметров линейных динамических систем, наблюдаемых с помехой. При этом могут быть неизвестны или

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

известны неточно распределения помехи и шумов, определяющих динамику процесса.

8.I. Постановка задачи

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) выделена неубывающая система σ - подалгебр $\{F_t, t \geq 0\}$ и задан многомерный случайный процесс $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))^T$, описываемый системой уравнений

$$z(t+1) = A(t)\lambda + \varepsilon(t+1), \qquad t = 0, 1, \dots . \tag{8.I}$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T$ - неизвестный постоянный вектор параметров, который необходимо оценить по наблюдениям за процессами $z(t)$ и $A(t)$. Предположим, что случайные последовательности $\{z(t)\}$ и $\{A(t)\}$ согласованы с системой $\{F_t, \ t \geq 0\}$, т.е. все элементы матрицы $A(t) = \| a_{ij}(t) \|$, $t \geq 0$ и все компоненты вектора $\varepsilon(t) = \{\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_n(t)\}^T$, $t \geq 1$, измеримы относительно σ - подалгебры F_t. Шумовая последовательность $\{\varepsilon(t)\}$ удовлетворяет требованиям:

I) $M_\lambda \| \varepsilon(t) \|^2 < \infty, \quad t = 0, 1, \dots, \quad \lambda \in R^p;$

2) для некоторого натурального числа m и известной последовательности неотрицательно определенных симметричных матриц $\{D(t), t \geq 0\}$, согласованной с $\{F_t, \ t \geq 0\}$ и определяемой по процессам $z(t)$ и $A(t)$, справедливы соотношения:

а) $M_\lambda(\varepsilon(t+m) \mid F_t) = 0, \quad t = 0, 1, \dots, \quad \lambda \in R^p;$

б) $M_\lambda(\varepsilon(t+m)\varepsilon^T(t+m) \mid F_t) \leq D(t)$ (в смысле квадратичных форм). (8.2)

Указанные условия на $A(t)$ и $\varepsilon(t)$ являются довольно общими. Они выполнены, например, если:

α) $A(t)$ является функцией только от $A(0)$ и наблюдений $z(1), \dots, z(t)$;

β) $\varepsilon(t+m)$ не зависит от системы $\{A(0, \varepsilon(1), \dots, \varepsilon(t)\}$ для всех $t \geq 1$.

При этом в качестве F_n можно взять σ - алгебру, порожденную $A(0), \varepsilon(1), \dots, \varepsilon(t)$. Требованиям α, β удовлетворяет, в частности, широко используемый процесс авторегрессии и скользящего среднего. В данном параграфе построим и исследуем свойства последовательных оценок неизвестных параметров процесса (8.I).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

8.2. Построение последовательных планов

Построение последовательных планов для параметров λ_i при зависимых шумах ε имеет свои особенности. Если до сих пор последовательные оценки строились на основе оценки МНК, то в данном случае от критерия МНК приходится отказаться, поскольку с его помощью не удается получить последовательные оценки с желаемыми свойствами. Будем строить последовательные планы, исходя из оценок $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_p)^T$, которые находятся из модифицированного критерия МНК:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \sum_{t=0}^{N} \left[z(t+1) - A(t)\lambda \right]^T W_i(t) \left[z(t+1) - A(t)\lambda \right] = 0, \qquad (8.3)$$

$$i = \overline{1, p}.$$

Этот критерий отличается от МНК тем, что весовые матрицы $W_i(t)$ зависят от i. Вид весовых матриц конкретизируется ниже. Производя дифференцирование в (8.3), приходим к системе уравнений для $\hat{\lambda}$

$$\Phi(N) = G(N)\hat{\lambda}(N),$$

где вектор $\Phi(N) = (\Phi_1(N), \dots, \Phi_p(N))^T$ и матрица $G(N) = \| g_{ij}(N) \|$ определяются формулами:

$$\Phi_i(N) = \sum_{t=0}^{N} A_i^T(t) W_i(t) z(t+1); \qquad (8.4)$$

$$g_{ij}(N) = \sum_{n=0}^{N} A_i^T(t) W_i(t) A_j(t);$$

$A_i(t)$ обозначает i-й столбец матрицы $A(t)$. Подстановка $z(t+1)$ из (8.I) в формулу для $\Phi_i(N)$ приводит к системе уравнений

$$\Phi(N) = G(N)\lambda + \xi(N); \qquad (8.5)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\xi(N)=\{\xi_1(N),\dots,\xi_p(N)\}^T;$$

$$\xi_i(N)=\sum_{t=0}^{N} 1_i^T(t)W_i(t)\varepsilon(t+1),$$

описывающих стохастическую связь между статистиками $\Phi(N)$, $G(N)$, через которые выражается оценка $\hat{\lambda}(N)$.

Потребуем, чтобы весовые матрицы $W_i(N)$ удовлетворяли следующим условиям:

I) матрицы $W_1(k),\dots,W_p(k)$ являются нулевыми при $k<m-2$;

II) последовательности $\{\Psi_{i,t}(A,z),\ t\geq 0\}$; $i=\overline{1,p}$, определяемые равенством

$$\Psi_{i,t}(A,z)=A_i^T(t+m-1)\ W_i(t+m-1),$$

согласованы с системой $\{F_t,\ t\geq 0\}$ и обладают свойствами:

а) $M_\lambda \Psi_{i,t}(A,z)\mathcal{D}(t)\Psi_{i,t}^T(A,z)<\infty,\quad i=\overline{1,p},\quad t\geq 0;$ (8.6)

б) $\sum_{t\geq 0}\Psi_{i,t}(A,z)\mathcal{D}(t)\Psi_{i,t}^T(A,z)=+\infty \qquad (P_\lambda-п.н.),\quad i=\overline{1,p}.$

Построение последовательных оценок осуществляется, как и в § 7, в два этапа. На первом этапе модифицируется система статистик с помощью случайной замены времени. Пусть $\{c_n,\ n\geq 1\}$ – неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. Определим p последовательностей моментов остановки $\{\tau_i(n),\ n\geq 0\}$ по формуле

$$\tau_i(n)=\inf\left\{s\geq m-1:\sum_{t=m-1}^{s} v_i(t-m+1)\geq c_n\right\}, \tag{8.7}$$

где

$$v_i(t)=\Psi_{i,t}(A,z)\mathcal{D}(t)\Psi_{i,t}^T(A,z).$$

Свойство (8.6) обеспечивает конечность почти наверное всех этих моментов. Перейдем к модифицированным статистикам. Положим

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\Phi'(n) = \{\Phi_1'(n), \ldots, \Phi_p'(n)\}^T;$$

$$G'(n) = \|g_{ij}'(n)\|, \quad \xi'(n) = \{\xi_1'(n), \ldots, \xi_p'(n)\}^T;$$

$$\Phi_i'(n) = \frac{1}{C_n}\left[\Phi_i(\tau_i(n)-1) + \alpha_i(\tau_i(n))\Psi_{i,\tau_i(n)-m+1}(A,z)z_{\tau_i(n)+1}\right]; \tag{8.8}$$

$$g_{ij}'(n) = \frac{1}{C_n}\left[g_{ij}(\tau_i(n)-1) + \right.$$

$$\left. + \alpha_i(\tau_i(n))\Psi_{i,\tau_i(n)-m+1}(A,z)A_j(\tau_i(n))\right];$$

$$\xi_i'(n) = \frac{1}{C_n}\left[\xi_i(\tau_i(n)-1) + \right.$$

$$\left. + \alpha_i(\tau_i(n))\Psi_{i,\tau_i(n)-m+1}(A,z)\varepsilon_{\tau_i(n)+1}\right],$$

где

$$\alpha_i(\tau_i(n)) = \frac{C_n - \sum\limits_{t=n-1}^{\tau_i(n)-1} v_i(t-m+1)}{v_i(\tau_i(n)-m+1)}, \quad 0 < \alpha_i(\tau_i(n)) \leq 1;$$

$$\Phi_i(N) = \sum_{t=m-1}^{N} \Psi_{i,t-m+1}(A,z)z_{t+1};$$

$$g_{ij}(N) = \sum_{t=m-1}^{N} \Psi_{i,t+1-m}(A,z)A_j(t);$$

$$\xi_i(N) = \sum_{t=m-1}^{N} \Psi_{i,t-m+1}(A,z)\varepsilon_{t+1}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Подставляя (8.5) в формулу для $\Phi_i'(n)$, получим систему уравнений, связывающих статистики (8.4):

$$\Phi'(n) = G'(n)\lambda + \xi'(n). \tag{8.9}$$

Преимущество этой системы уравнений по сравнению с (8.5) в том, что вторые моменты случайных величин $\xi_i'(n)$ – в отличие от $\xi_i(N)$ – допускают, как будет показано ниже, оценку сверху. Далее преобразуем систему уравнений (8.9) так, чтобы в каждое уравнение входил лишь один неизвестный параметр. Умножив обе части (8.9) слева на матрицу $\left[G'(n) \right]^{-1}$, получим

$$\sum_{k=1}^{p} \Delta_{k_i}(n)\Phi_k'(n) = \Delta(n)\lambda_i + \sum_{k=1}^{p} \Delta_{k_i}(n)\xi_k'(n),$$
$$i=\overline{1,p},$$

где $\Delta_{k_i}(n)$ – алгебраическое дополнение элемента $g_{ik}'(n)$ в матрице $G'(n)$, а $\Delta(n) = \det G'(n)$. Обозначив

$$\bar{\Delta}_i(n) = \max_{1\le k\le p} |\Delta_{k_i}(n)|; \qquad f_i(n) = \frac{\Delta(n)}{\bar{\Delta}_i(n)};$$

$$y_i(n) = \frac{1}{\bar{\Delta}_i(n)} \sum_{k=1}^{p} \Delta_{k_i}(n)\Phi_k'(n); \quad \eta_i(n) = \frac{1}{\bar{\Delta}_i(n)} \sum_{k=1}^{p} \Delta_{k_i}(n)\xi_k'(n),$$

представим эту систему уравнений в виде

$$y_i(n) = \lambda_i f_i(n) + \eta_i(n), \qquad n \ge 1; \quad i=\overline{1,p}. \tag{8.10}$$

Таким образом, исходная задача сведена к скалярному случаю. Построим последовательный план оценивания параметра $\lambda_i\,(i=\overline{1,p})$ по наблюдениям $y_i(n)$ и $f_i(n)$ следующим образом. Выберем некоторый порог $H>0$ и наблюдения будем проводить до момента

$$\sigma_i(H) = \inf\left\{ K \ge 1 : \sum_{n=1}^{K} f_i(n) \ge H \right\}. \tag{8.11}$$

Последовательную оценку параметра λ_i определим по формуле

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\lambda_i^*(H) = \frac{\sum_{n=1}^{\sigma_i} f_i(n)\, y_i(n)}{\sum_{n=1}^{\sigma_i} f_i^2(n)}. \qquad (8.12)$$

8.3. Изучение свойств последовательных оценок

Основные свойства последовательных планов сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 8.I. Пусть

а) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{c_n} < \infty$;

б) для всякого $\lambda \in \ell^p$ с вероятностью единица расходятся ряды:

$$\sum_{t\geq 0} v_i(t) = +\infty; \quad \sum_{n\geq 1} f_i^2(n) = +\infty, \quad i=\overline{1,p}; \qquad (8.13)$$

в) весовые матрицы в критерии (8.3) обладают свойствами I,П.

Тогда для любого $H>0$

I) $\sup_{\lambda\in\ell^p} M_\lambda\left[\lambda_i^*(H)-\lambda_i\right]^2 \leq \frac{\rho}{H}; \quad \rho = mp^2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{c_n};$

2) $\tau_i(H) < \infty, \quad i=\overline{1,p} \qquad (P_\lambda - п.н.).$

Доказательство теоремы 8.I опирается на следующую лемму.

ЛЕММА 8.I. При выполнении условий теоремы 8.I справедливы соотношения:

I°. $\sup_{\lambda\in\ell^p} M_\lambda\left[\xi_i'(n)\right]^2 \leq \frac{m}{c_n};$

2°. $M_\lambda \xi_i'(n) = 0, \quad \lambda\in\ell^p.$

Доказательство леммы 8.I. Используя (8.8), представим $\xi_i'(n)$ в виде

$$\xi_i'(n) = \frac{1}{c_n} \sum_{k=0}^{\infty} u_i(k, \tau_i(n)), \qquad (8.14)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где

$$U_i(k,\tau_i(n))=\begin{cases}0, \text{ если } k<m-1;\\ \Psi_{i,k-m+1}(A,z)\varepsilon_{k+1}, \text{ если } m-1\le k<\tau_i(n);\\ \alpha_i(k)\Psi_{i,k-m+1}(A,z)\varepsilon_{k+1}, \text{ если } k=\tau_i(n);\\ 0, \text{ если } k>\tau_i(n).\end{cases}$$

Сгруппируем в (8.I4) в отдельные суммы слагаемые с номерами k, совпадающими по модулю m :

$$\xi_i'(n)=\frac{1}{C_n}\sum_{j=0}^{m-1}U_j(\tau_i(n)),\quad U_j(\tau_i(n))=\sum_{\ell=0}^{\infty}U_i(\ell m+j,\tau_i(n)).$$

Отсюда с помощью элементарного неравенства

$$(a_1+\dots+a_m)^2\le m(a_1^2+\dots+a_m^2)$$

получим

$$M_\lambda[\xi_i'(n)]^2\le\frac{m}{C_n^2}M_\lambda\sum_{j=0}^{m-1}U_j^2[\tau_i(n)]. \tag{8.I5}$$

Покажем, что для всех N справедливо неравенство

$$M_\lambda\Big\{\sum_{j=0}^{m-1}U_j^2[\tau_i(n)\wedge N]\Big\}\le C_n. \tag{8.I6}$$

Имеем

$$M_\lambda\Big\{\sum_{j=0}^{m-1}U_j^2[\tau_i(n)\wedge N]\Big\}= \tag{8.I7}$$

$$=M_\lambda\Big\{\sum_{j=0}^{m-1}\Big[\sum_{\ell=0}^{N}U_i(\ell m+j,\ \tau_i(n)\wedge N)\Big]^2\Big\}=A_1+A_2,$$

где

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$A_1 = M_\lambda \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\ell=0}^{N} U_i^2 (\ell m + j, \tau_i(n) \wedge N);$$

$$A_2 = 2 M_\lambda \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{0 \le \ell < k \le N} U_i (\ell m + j, \tau_i(n) \wedge N) \times$$

$$\times U_i (k m + j, \tau_i(n) \wedge N).$$

Учитывая монотонность функции U_i^2 по второму аргументу и заменяя в пределе суммирования N на ∞, приходим к оценке

$$A_1 \le M_\lambda \left\{ \sum_{k=m-1}^{\infty} U_i^2 (k, \tau_i(n)) \right\}. \tag{8.18}$$

Из условий на шум и требований на весовые матрицы, следует, что

$$M_\lambda [U_i^2(k, \tau_i(n)) | F_{k-m+1}] = \begin{cases} 0, \text{ если } k < m-1; \\ \Psi_{i,k-m+1}(A,z) \mathcal{D}(k-m+1) \Psi^T_{i,k-m+1}(A,z); \\ \text{если } m-1 \le k < \tau_i(n); \\ \alpha_i^2(k) \Psi_{i,k-m+1}(A,z) \mathcal{D}(k-m+1) \Psi_{i,k-m+1}(A,z); \\ \text{если } k = \tau_i(n); \\ 0, \text{ если } k > \tau_i(n). \end{cases} \tag{8.19}$$

При взятии условного математического ожидания здесь использовалась измеримость $\alpha_i(k)$, $\Psi_{i,k-m+1}$, а также индикаторов событий $[k < \tau_i(n)]$, $[k = \sigma_i(n)]$ и $[k > \tau_i(n)]$ относительно σ-алгебры F_{k-m+1}. Подставив (8.19) в (8.18), получим

$$A_1 \le M_\lambda \left[\sum_{k=m-1}^{\tau_i(n)-1} \Psi_{i,k-m+1}(A,z) \mathcal{D}_{(k-m+1)} \Psi^T_{i,\tau_i(n)-m+1}(A,z) + \right. \tag{8.20}$$

$$\left. + \alpha_i^2(\tau_i(n)) \Psi_{i,\tau_i(n)-m+1}(A,z) \mathcal{D}(\tau_i(n)-m+1) \Psi^T_{i,\tau_i(n)-m+1}(A,z) \right] \le C_\lambda.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Последнее неравенство имеет место по определению $\tau_i(n)$. Слагаемое A_2 в (8.17) равно нулю, поскольку при $\ell < k$

$$M_\lambda\{u_i(\ell m+j, \tau_i(n)\wedge N)\, u_i(km+j, \tau_i(n)\wedge N)\} = \tag{8.21}$$

$$= M_\lambda\{u_i(\ell m+j, \tau_i(n)\wedge N) M_\lambda[u_i(km+j, \tau_i(n)\wedge N) \mid F_{k-m+1}]\} = 0.$$

Из (8.17), (8.20) и (8.21) следует справедливость неравенства (8.16). Переходя в (8.16) к пределу при $N \to \infty$, по теореме Фату-Лебега получим неравенство

$$M_\lambda \sum_{j=0}^{m-1} u_j^2(\tau_i(n)) \leq c_n,$$

которое вместе с (8.15) доказывает утверждение I° леммы 8.I. Аналогично, путем перехода к усеченным моментам остановки, доказывается и второе утверждение леммы 8.I.

Перейдем к доказательству теоремы 8.I. Подставляя $y_i(n)$ из (8.10) в формулу для $\lambda_i^*(H)$, получим

$$\lambda_i^*(H) - \lambda_i = \frac{\sum_{n=1}^{\sigma_i} f_i(n)\eta_i(n)}{\sum_{n=1}^{\sigma_i} f_i^2(n)}.$$

По определению $\sigma_i(H)$ и неравенству Коши-Буняковского отсюда следует

$$M_\lambda[\lambda_i^*(H) - \lambda_i]^2 \leq \frac{1}{H} M \left\{ \frac{\sum_{n=1}^{\sigma_i} f_i(n)\eta_i(n)}{\sum_{n=1}^{\sigma_i} f_i^2(n)} \right\}^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{H} M_\lambda \sum_{n=1}^{\sigma_i} \eta_i^2(n) \leq \frac{1}{H} \sum_{n\geq 1} M_\lambda \eta_i^2(n).$$

В силу леммы 8.I имеем

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$M_\lambda \eta_i^2(n) = M_\lambda \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\Delta_{ki}(n)}{\bar{\Delta}_i(n)} \xi_k'(n) \right)^2 \leq$$

$$\leq p\, M_\lambda \left[\sum_{k=1}^{p} \left(\xi_k'(n) \right)^2 \right. \leq \frac{p^2 m}{c_n}.$$

Таким образом,

$$M_\lambda \left[\lambda_i^*(H) - \lambda_i \right]^2 \leq \frac{m p^2}{H} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{c_n},$$

что и доказывает утверждение теоремы 8.I о равномерной ограниченности среднеквадратического уклонения. Конечность почти наверное моментов остановки $\sigma_i(H)$, $i=\overline{1,p}$, а значит, и длительности последовательной процедуры, следует из (8.I3). Теорема 8.I доказана.

8.4. Последовательное оценивание параметров процесса авторегрессии при наличии шума в наблюдениях

Рассмотрим задачу оценивания параметров p устойчивого процесса авторегрессии p-го порядка

$$x_{t+1} = \lambda_1 x_t + \dots + \lambda_p x_{t-p+1} + \xi_{t+1}, \qquad t=0,1,\dots, \tag{8.22}$$

по наблюдениям процесса

$$z_t = x_t + \eta_t. \tag{8.23}$$

Будем предполагать, что $\lambda_p \neq 0$; $x_s = z_s = 0$, если $s < 0$; $\xi = \{\xi_t\}$ и $\eta = \{\eta_t\}$ - последовательности н.о.р. случайных величин с параметрами: $M\xi_t = M\eta_t = 0$; $M\xi_t^2 = \mathcal{D}_\xi$ и $M\eta_t^2 = \mathcal{D}_\eta$. Пусть процессы ξ, η и x_0 независимы в совокупности. Покажем, что решение поставленной задачи можно получить с помощью последовательных планов (8.II), (8.I2).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Подставляя x_t из (8.23) в (8.24), получим

$$z_{t+1} = \lambda_1 z_t + \dots + \lambda_p z_{t-p+1} + \varepsilon_{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots;$$
$$z_s = 0 \quad \text{при} \quad s < 0; \quad \varepsilon_{t+1} = \xi_{t+1} - \lambda_1 \eta_t - \dots - \lambda_p \eta_{t-p+1} + \eta_{t+1}. \tag{8.24}$$

Процесс $\{z_t\}$ является скалярным процессом типа (8.I), причем

$$A(t) = (z_t, z_{t-1}, \dots, z_{t-p+1}), \quad A_i(t) = z_{t-i+1};$$
$$M_\lambda \varepsilon^2_{t+1} = D_\xi + D_\eta + D_\eta \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \leq L_p < \infty.$$

[существование конечной границы L_p следует из устойчивости процесса (8.22)]. Для процесса (8.24), очевидно, выполнены требования α, β из пункта 8.I при $m = p + 1$. Поэтому имеем

$$M_\lambda\left(\varepsilon_{t+p+1} \,\middle|\, A(0), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t\right) = 0, \quad M_\lambda\left(\varepsilon^2_{t+p+1} \,\middle|\, A(0), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t\right) \leq L_p.$$

Весовые коэффициенты в критерии (8.3) выберем из условия

$$\Psi_{i,\ell}(A, z) \equiv A_i(\ell + p) W_i(\ell + p) = A_i(\ell), \quad \ell \geq 0,$$

т.е. положим

$$W_i(t) = \begin{cases} \dfrac{z_{t-p-i+1}}{z_{t-i+1}}, & \text{если } t \geq p; \\ 0, & \text{если } t < p. \end{cases}$$

Тогда, используя (8.7), (8.8), найдем явный вид величин, через которые определяется последовательный план (8.II), (8.I2):

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\tau_i(n) = \inf\left\{ s \geq p : \sum_{k=0}^{s} z^2_{k-p-i+1} \geq \frac{c_n}{L_p} \right\};$$

$$\Phi_i(N) = \sum_{k=0}^{N} z_{k-p-i+1} z_{k+1}, \quad g_{ij}(N) = \sum_{k=0}^{N} z_{k-p-i+1} z_{k-j+1};$$

$$\alpha_i(\tau_i) = \frac{\left(\frac{c_n}{L_p} - \sum_{k=0}^{\tau_i - 1} z^2_{k-p-i+1} \right)}{z^2_{\tau_i - p - i + 1}}. \qquad (8.25)$$

<u>Предложение 8.I</u>. Последовательные планы оценивания параметров процесса (8.22) по наблюдениям процесса (8.23) обладают свойствами, указанными в теореме 8.I.

Для доказательства предложения 8.I согласно теореме 8.I требуется показать, что ряды

$$\sum_{l=1}^{\infty} z_l^2 = \infty, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 = \infty \qquad (8.26)$$

расходятся почти наверное. Воспользуемся асимптотическими результатами для линейных моделей [4]. Положив

$$\tilde{x}(n) = (x_n, \ldots, x_{n-p+1})^T; \quad \tilde{\xi}(n) = (\xi_n, 0, \ldots, 0)^T;$$

$$\tilde{z}(n) = (z_n, \ldots, z_{n-p+1})^T; \quad \tilde{\eta}(n) = (\eta_n, \ldots, \eta_{n-p+1})^T,$$

представим процесс (8.22), (8.23) в некоторой форме

$$x(n+1) = \Lambda \tilde{x}(n) + \tilde{\xi}(n+1), \quad \tilde{z}(n) = \tilde{x}(n) + \tilde{\eta}(n).$$

Отсюда и из (8.25) получаем

$$\frac{Q(N)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \tilde{z}(n-p) \tilde{z}^T(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \tilde{x}(n-p) \tilde{x}^T(n) + \qquad (8.27)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$+\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\tilde{\eta}(n-p)\tilde{\eta}^{T}(n)+\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\tilde{x}(n-p)\tilde{\eta}^{T}(n)+\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\tilde{\eta}(n-p)\tilde{x}^{T}(n).$$

При $N\to\infty$ все слагаемые, кроме первого, сходятся к нулю почти наверное. Второе слагаемое сходится к нулю в силу усиленного закона больших чисел. Доказательство сходимости к нулю с вероятностью единица двух последних слагаемых проводится тем же приемом, который был использован в лемме 7.3 при доказательстве сходимости к нулю матрицы $R_2(N)$, определяемой формулой (7.24). Первое слагаемое в (8.27) с учетом того, что

$$x(n)=\Lambda^{p}x(n-p)+\sum_{j=0}^{p-1}\Lambda^{j}\xi(n-j),$$

может быть записано в виде

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}x(n-p)x^{T}(n)-\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}x(n-p)x^{T}(n-p)(\Lambda^{T})^{p}+$$

$$+\sum_{s=0}^{p-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}x(n-p)\xi^{T}(n-s)\right)(\Lambda^{T})^{s}. \qquad (8.28)$$

Подставляя (8.28) в (8.27) и переходя к пределу при $N\to\infty$, получим

$$\lim_{N\to\infty}\frac{G(N)}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}x(n-p)x^{T}(n-p)(\Lambda^{T})^{p}=F(\Lambda^{T})^{p} \qquad (8.29)$$

$$(P_{\Lambda}-\text{п.н.}).$$

Последнее равенство имеет место в силу (7.21). Заметим, что при $\lambda_p\neq 0$ матрица $T=\|t_{ij}\|=F(\Lambda^{T})^{p}$ является невырожденной. Теперь нетрудно проверить расходимость рядов (8.26). Первый из них расходится в силу того, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{\infty}z_{\ell}^{1}=\mathcal{D}_{t}+f_{11}>0. \qquad (8.30)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Для расходимости второго ряда (8.26) достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\Delta(n)}{\Delta_{ij}(n)}\right|>0 \qquad (P_r - п.н.) \tag{8.31}$$

для всех $j=\overline{1,p}$. Учитывая, что

$$\sum_{\ell=0}^{\tau_i(n)} z_\ell^2 \geq C_n,$$

получаем

$$\left|\frac{\Delta(n)}{\Delta_{ij}(n)}\right| \geq \frac{\tau_i(n)}{\sum\limits_{\ell=0}^{\tau_i(n)} z_\ell^2}\left|\frac{\det\|\hat{g}_{ij}(\tau_i)\|}{\det\|\tilde{g}_{ij}(\tau_i)\|_i^j}\right|, \tag{8.32}$$

где

$$\hat{g}_{ij}(\tau_i)=\frac{1}{\tau_i(n)}\left[g_{ij}(\tau_i-1)+\alpha_i(\tau_i)z_{\tau_i-p-i+1}\,z_{\tau_i-j+1}\right].$$

Поскольку согласно (8.29), (8.30) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{g}_{ij}(\tau_i(n))=\langle F(\Lambda^T)^p\rangle_{ij}=t_{ij};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{\ell=0}^{\tau_i(n)} z_\ell^2}{\tau_i(n)}=\mathcal{D}_\ell+f_{11},$$

то существует предел при $n\to\infty$ правой части неравенства (8.32), равный положительной величине $1/(\mathcal{D}_\ell+f_{11})\,|t_{ji}^{-1}|$, t_{ji}^{-1} обозначает элемент обратной матрицы T^{-1}. Поэтому из (8.32) следует требуемое неравенство (8.31). Предложение 8.1 доказано.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 9. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Выше были построены и исследованы последовательные планы оценивания параметров, линейно входящих в уравнения процесса. В этом параграфе рассматривается задача оценивания нелинейных параметров. Изучаемая модель включает, в частности, нелинейную регрессию и авторегрессию. Как отмечалось в [223], оценка параметров, нелинейно входящих в функцию регрессии, является важной прикладной задачей. Оценке нелинейных параметров детерминированной регрессии в схеме независимых наблюдений посвящены работы [233, 274]. Интересные асимптотические результаты для нелинейной регрессии в более общем случае были получены А.Я.Дороговцевым [64, 65], А.В.Ивановым [83] и другими авторами. Особенность предлагаемого ниже подхода в том, что он приводит к решению задачи в неасимптотической обстановке. Для простоты рассматривается случай одномерного параметра, для которого требуемые предположения не являются слишком ограничительными. Последовательные планы оценивания строятся иначе, чем в случае линейных параметров. Дело в том, что при линейном вхождении параметров в уравнения процесса последовательные оценки строились путем модификации оценок МНК. При нелинейном параметре такая возможность отпадает, так как явные выражения для оценок МНК отсутствуют и даже численное нахождение их затруднительно. Суть предлагаемого ниже метода заключается в том, чтобы построить доверительный интервал фиксированной ширины для неизвестного параметра. При этом количество наблюдений не фиксируется заранее, а является случайной величиной, которая зависит от выбранного коэффициента доверия.

9.I. Постановка задачи

Пусть требуется оценить скалярный параметр λ по наблюдениям процессов на входе $x = \{x_t\}$ и выходе $z = \{z_t\}$ некоторого динамического объекта, которые связаны стохастическими разностными уравнениями:

$$x_{t+1} = a(t, z; \lambda) + b(t, z)\xi_{t+1}, \qquad t = 0, 1, \ldots \tag{9.I}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Процесс z может быть многомерным, включающим x в качестве компоненты. Случайные функции $\{a(t,z;\lambda)\}$ и $\{b(t,z)\}$ являются измеримыми неупреждающими функционалами относительно процесса z, т.е. при каждом t и λ функции $a(t,z;\lambda)$ и $b(t,z)$ могут быть определены по значениям $z_0,\dots,z_t$. Относительно последовательности шумов предположим, что выполнены условия:

1) $M(\xi_{t+1} \mid \xi_1,\dots,\xi_t, z_0,\dots,z_t)=0;$

2) $M(\xi^2_{t+1} \mid \xi_1,\dots,\xi_t, z_0,\dots,z_t)=1.$

Эти условия имеют место, например, если $x=z$. (т.е. когда x_t - нелинейный авторегрессионный процесс и $\{\xi_t\}$ - последовательность независимых случайных величин с $M\xi_t=0$ и $M\xi_t^2=1$).

Распределения шумов ξ_t неизвестны. Областью изменения неизвестного параметра λ является интервал (α,β), $-\infty\le\alpha<\beta\le+\infty$.

Последовательный метод доверительного оценивания параметра λ реализуется следующим образом. Область значений λ разбивается на некоторое число интервалов в зависимости от требований к точности оценивания. С каждым интервалом связывается свой момент прекращения наблюдений и некоторая статистика, определяемая в этот момент. По характеру поведения статистик выносится решение о том, какой из интервалов объявить доверительной областью.

9.2. Построение интервальной последовательной оценки при монотонной зависимости функции $a(t,z;\lambda)$ от λ

Пусть функция $a(t,z;\lambda)$ при фиксированных значениях $t,z_0,\dots,z_t$ монотонна по λ. Возьмем некоторое разбиение интервала (α,β): $\alpha=\lambda_0<\lambda_1<\dots<\lambda_{m+1}=\beta$. С каждым интервалом $(\lambda_i,\lambda_{i+1})$ свяжем неубывающий во времени функционал от реализации процесса $\{z_t\}$:

$$\varphi_i(t)=\sum_{k=0}^{t}\left[b^+(k,z)\right]^2\left[a(k,z;\lambda_i)-a(k,z;\lambda_{i+1})\right]^2,\quad b^+=\begin{cases}\frac{1}{b}, & b\neq 0;\\ 0, & b=0;\end{cases}$$

момент достижения этим функционалом некоторого заданного положительного порога H:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\tau_i(H) = \inf\{t \geq 0 : \Phi_i(t) \geq H\} \tag{9.2}$$

и статистику

$$\varphi_i(H) = \frac{1}{H}\sum_{k=0}^{\tau_i(H)}{}' \left[a(k,z;\lambda_i) - a(k,z;\lambda_{i+1})\right](b^+(k,z))^2\left[x_{k+1} - a(k,z;\lambda_{i+1})\right]. \tag{9.3}$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что последнее слагаемое берется с весом $\alpha_i(H)$, который определяется из уравнения

$$\sum_{k=0}^{\tau_i(H)-1}(b^+(k,z))^2\left[a(k,z;\lambda_i) - a(k,z;\lambda_{i+1})\right]^2 +$$

$$+\alpha_i(H)\left[b^+(\tau_i,z)\right]^2\left[a(\tau_i,z;\lambda_i) - a(\tau_i,z;\lambda_{i+1})\right]^2 = H.$$

Статистики $\varphi_0(H), \ldots, \varphi_m(H)$ обладают свойствами, позволяющими построить доверительный интервал для неизвестного параметра λ. Из (9.I), (9.3) имеем

$$\varphi_i(H) = y_i(H) + \xi_i(H),$$

где

$$y_i(H) = \frac{1}{H}\sum_{k=0}^{\tau_i}{}'\left[b^+(k,z)\right]^2\left[a(k,z;\lambda_i) - \right.$$

$$\left. - a(k,z;\lambda_{i+1})\right]\left[a(k,z;\lambda) - a(k,z;\lambda_{i+1})\right]; \tag{9.4}$$

$$\xi_i(H) = \frac{1}{H}\sum_{k=0}^{\tau_i}{}'\left[a(k,z;\lambda_i) - a(k,z;\lambda_{i+1})\right]b^+(k,z)\xi_{k+1}.$$

Пусть значение неизвестного параметра λ принадлежит интервалу $[\lambda_\ell, \lambda_{\ell+1}]$. Тогда, используя монотонность функции $a(t,z;\lambda)$ относительно λ и определение τ_i, легко проверить, что (при любом характере монотонности) величины y_i отрицательны при $i < \ell$, больше единицы при $i > \ell$, а величина y_ℓ заключена в пределах от нуля до единицы. Скачок, который претерпевают случайные величины y_i при переходе через интервал, содержащий неизвест-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ный параметр, естественно использовать при построении последовательной оценки. Возьмем некоторое число $0<\delta<\frac{1}{2}$ и введем случайную величину

$$\nu=\nu(H,\delta)=\max\{i\geq 0:\varphi_0(H)\leq\delta,\ldots,\varphi_i(H)\leq\delta\}. \tag{9.5}$$

Доопределим $\nu(H,\delta)=-1$, если множество в фигурных скобках пусто. Положим

$$S(\nu)=\begin{cases}[\lambda_0,\lambda_1], & \text{если } \nu(H,\delta)=-1;\\ [\lambda_\nu,\lambda_{\nu+2}], & \text{если } 0\leq\nu(H,\delta)<m;\\ [\lambda_m,\lambda_{m+1}], & \text{если } \nu(H,\delta)=m.\end{cases} \tag{9.6}$$

<u>Теорема 9.I</u>. Пусть с вероятностью единица расходятся ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(b^{+}(k,z)\right)^2\left[a(k,z;\lambda_i)-a(k,z;\lambda_{i+1})\right]^2=+\infty,\quad i=0,1,\ldots,m.$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ интервал $S(\nu(H,\delta))$ при пороге H, удовлетворяющем неравенству $H\geq(m+1)/\varepsilon\delta^2$, является $(1-\varepsilon)$ - доверительным интервалом, т.е.

$$P_\lambda\{\lambda\in S(\nu(H,\delta))\}\geq 1-\varepsilon,\qquad \lambda\in(\alpha,\beta). \tag{9.7}$$

<u>Доказательство</u> Для того чтобы множество $S(\nu(H,\delta))$ содержало неизвестный параметр λ, достаточно одновременного выполнения неравенств:

$$\zeta_0(H)\leq\delta,\ldots;\ \zeta_m(H)\leq\delta, \tag{9.8}$$

поскольку в этом случае по поведению статистик φ_i можно точно определить, на каком из доверительных множеств произошел скачок величин y_i. Оценим вероятность одновременного выполнения неравенств (9.8). В силу определения моментов остановки τ_i и теоремы 3.I имеем

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$M_\lambda \zeta_i^2(H) = \frac{1}{H^2} M \left\{ \sum_{k=0}^{\tau_i - 1} \left[a(k, z; \lambda_i) - a(k, z; \lambda_{i+1}) \right]^2 \left[b^+(k, z) \right]^2 + \right.$$

$$+ \alpha_i^2(H) \left[a(\tau_i, z; \lambda_i) - \right.$$

$$\left. \left. - a(\tau_i, z; \lambda_{i+1}) \right]^2 \left[b^+(\tau_i, z) \right]^2 \right\} \leq \frac{1}{H}. \qquad (9.9)$$

Используя неравенства Буля, Чебышева и (9.9), получим

$$P\{|\zeta_0(H)| \leq \delta, \ldots, |\zeta_m(H)| \leq \delta\} \geq 1 - \sum_{i=0}^{m} P\{|\zeta_i(H)| > \delta\} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{(m+1) M \zeta_i^2(H)}{\delta^2} \geq 1 - \frac{(m+1)}{\delta^2 H}.$$

Отсюда при $H \geq (m+1)/\varepsilon \cdot \delta^2$ следует утверждение теоремы 9.I.

Замечание 9.I. Выше допускалось, что область неизвестного параметра $[\alpha, \beta]$ может быть неограниченной. Если α и β конечны и длина максимального из интервалов $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ не превышает $\Delta/2$, то, как следует из теоремы 9.I, неизвестный параметр накрывается доверительным интервалом длины Δ с доверительным уровнем $1-\varepsilon$.

Замечание 9.2. В случае, когда требуется оценить неизвестный параметр с высокой точностью, для уменьшения объема вычислений целесообразно использовать описанную процедуру повторно. Пусть, например, требуется оценить параметр с точностью $\Delta = 1/3^n$. Тогда можно предложить следующий алгоритм оценивания. На первом шаге интервал (α, β) делится на три части $(m-2)$ и определяется, какой из них накрывает истинное значение параметра. Процедура повторяется сначала для полученного доверительного интервала. Алгоритм заканчивается на n-м шаге и требует вычисления ψ_i статистик в то время, как при однократном применении процедуры потребовались бы 3^n статистики.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Замечание 9.3. Выше предполагалось, что неизвестный параметр λ является постоянной величиной. Однако легко убедиться, что рассмотренная процедура позволяет построить доверительный интервал и в случае, когда λ является ненаблюдаемым случайным процессом $\lambda = \{\lambda_t\}$, не выходящим за время оценивания за пределы некоторого из интервалов разбиения области (α, β).

Использованный подход к построению доверительной области в монотонном случае можно применить в более общей ситуации.

9.3. Последовательное оценивание в случае однозначных кусочно-непрерывных функций от параметра с фиксированным множеством точек разрыва

Предположим, что для почти всех реализаций процесса z функции $a(t, z; \lambda)$ параметра λ при каждом t являются однозначными кусочно-непрерывными, причем все точки разрыва входят в некоторое конечное подмножество T интервала (α, β), не зависящее от реализации процесса z. Метод оценивания параметра λ при этих предположениях сводится с помощью сортировки наблюдений к методу, описанному в монотонном случае, но сложнее его в вычислительном отношении.

Включим точки множества T в разбиение $\alpha = \lambda_1 < \ldots < \lambda_{m+1} = \beta$. Обозначим

$$I_i = (\lambda_i, \lambda_{i+1});$$

$$A_i(t, z) = \{a(t, z; \lambda) : \lambda_i < \lambda < \lambda_{i+1}\}.$$

В силу условий на функцию $a(t, z; \cdot)$ для образов $A_i(t, z)$ и $A_j(t, z)$ интервалов I_i и I_j при $i \neq j$ выполнено одно из отношений

$$A_i(t, z) < A_j(t, z)$$

(т.е. $x < y \quad \forall x \in A_i(t, z)$ и $\forall y \in A_j(t, z)$) либо

$$A_j(t, z) < A_i(t, z).$$

Будем говорить, что в момент t выполнено $(m+1)$-арное отноше-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ние $R(j_0, \ldots, j_m)$, если

$$A_{j_0}(t, z) < A_{j_1}(t, z) < \ldots < A_{j_m}(t, z),$$

где $j_0, \ldots, j_m$ – некоторая перестановка чисел $0, 1, \ldots, m$. Введенное отношение разбивает последовательность функций $\{a(t, z, \cdot), t \geq 1\}$ на $(m+1)$ классов. Рассмотрим класс $M(\{z_t\}, j_0, \ldots, j_m)$, содержащий бесконечное число функций (такой класс, очевидно, найдется). Введем для этого класса последовательные планы по формулам:

$$\tau_i = \tau_i(H; j_0, \ldots, j_m) = \inf\{t \geq 0 : \varphi_i(t; j_0, \ldots, j_m) \geq H\};$$

$$\varphi_i(H; j_0, \ldots, j_0) = \frac{1}{H} \sum_{t=0}^{\tau_i}{}' \left[a_i^+(t, z) - z_{t+1}\right] \psi_i(t; j_0, \ldots, j_m), \tag{9.10}$$

где

$$\varphi_i(t; j_0, \ldots, j_m) = \sum_{l=0}^{t} \psi_i^2(l; j_0, \ldots, j_m);$$

$$\psi_i(t; j_0, \ldots, j_m) = \begin{cases} a_i^+(t, z) - a_i^-(t, z), & \text{если } a(t, z; \cdot) \in M(\{z_t\}, j_0, \ldots, j_m); \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$a_i^+(t, z) = \max\{a(t, z; \lambda_i), a(t, z; \lambda_{i+1})\};$$

$$a_i^-(t, z) = \min\{a(t, z; \lambda_i), a(t, z; \lambda_{i+1})\}.$$

Представим статистики φ_i, $i = \overline{0, m}$, в виде

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\varphi_i(H; j_0, \dots, j_m) = y_i(H; j_0, \dots, j_m) - \zeta_i(H; j_0, \dots, j_m),$$

где

$$y_i(H; j_0, \dots, j_m) = \frac{1}{H}\sum_{t=0}^{\tau_i}{}' \left[a_i(t, z) - a(t, z, \lambda)\right] \psi_i(t; j_0, \dots, j_m);$$

$$\zeta_i(H; j_0, \dots, j_m) = \frac{1}{H}\sum_{t=0}^{\tau_i}{}' \psi_i(t; j_0, \dots, j_m)\xi_{t+1}.$$

Построение доверительной области основано на свойстве случайных величин y_i. Расположим интервалы I_i, $i = \overline{0, m}$, в следующем порядке:

$$I_{j_0}, \dots, I_{j_m}.$$

Пусть $\lambda \in I_{j_k}$. Тогда из (6) следует, что

$$y_{j_0} \leq 0, \dots, y_{j_{k-1}} \leq 0; \quad 0 \leq y_{j_k} \leq 1; \quad y_{j_{k+1}} \geq 1, \dots, y_{j_m} \geq 1,$$

т.е. происходит скачок величин y_{j_ℓ} при переходе через интервал, содержащий неизвестный параметр. Доверительная область S_ν для параметра λ определяется из системы множеств $\{S_{-1}, S_0, \dots, S_m\}$,

$$S_\ell = \begin{cases} I_{j_0}, & \text{если } \ell = -1; \\ I_{j_\ell} + I_{j_{\ell+1}}, & \text{если } 0 \leq \ell < m; \\ I_{j_m}, & \text{если } \ell = m, \end{cases}$$

с помощью случайной величины $\nu = \nu(H, \delta; j_0, \dots, j_m) =$

$$= \max\{0 \leq k \leq m: \max \varphi_{j_\ell}(H; j_0, \dots, j_m) \leq \delta\},$$

$0 < \delta < \frac{1}{2}$; $\nu = -1$, если пусто множество в фигурных скобках.

<u>ТЕОРЕМА 9.2</u>. Пусть с вероятностью единица расходятся ряды

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sum_{t=0}^{\infty} \psi_i^2(t; j_0, \ldots, j_m) = +\infty, \quad i = \overline{0,m}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P_\lambda \{\lambda \in S_D\} \geq 1 - \varepsilon, \quad \lambda \in [\alpha, \beta],$$

при $H \geq (m+1) / \varepsilon \cdot \delta^2$.

Это утверждение доказывается так же, как и теорема 9.I.

9.4. Пример построения доверительного интервала фиксированной ширины для нелинейного параметра

Пусть требуется оценить параметр λ по наблюдениям процесса

$$x_{t+1} = k|x_t|^\lambda \operatorname{sgn} x_t + \xi_{t+1}, \quad t = 0, 1, \ldots; \quad \lambda \geq 0, \tag{9.II}$$

где k - известная постоянная, $k \neq 0$; $\{\xi_t\}$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью, положительной на всей прямой. Распределение ξ_t предполагается неизвестным.

В данном случае $z_t = x_t$ и функция $a(t, z; \lambda) = k|z_t|^\lambda \operatorname{sgn} z_t$ монотонная по λ. Статистики (9.3) принимают вид

$$\varphi_i(H) = \frac{1}{H} \sum_{t=0}^{\tau_i(H)}{}' k\left[|x_t|^{\lambda_i} - |x_t|^{\lambda_i+1}\right]\left[x_{t+1} - k|x_t|^{\lambda_i+1} \operatorname{sgn} x_t\right] \operatorname{sgn} x_t, \tag{9.I2}$$

где

$$\tau_i(H) = \inf\left\{n \geq 0 : \sum_{t=0}^{n} \left[|x_t|^{\lambda_i} - |^{\lambda_i+1}\right]^2 \geq H / k^2\right\}, \tag{9.I3}$$

$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ - разбиение интервала $[0, \infty)$. Согласно теореме 9.I последовательная процедура, основанная на статистиках (9.I2), позволяет построить для неизвестного параметра доверительный интервал заданной ширины со сколько угодно высоким доверительным уровнем, если только с вероятностью единица выполняется условие

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left[\left||x_t|^{\lambda'}-|x_t|^{\lambda''}\right|\right]=+\infty \qquad (P_\lambda - п.н.) \tag{9.14}$$

для любых λ', λ'', $(\lambda'<\lambda'')$.

Проверим это условие. Пусть $\delta>0$ и $\mathcal{D}$ удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{D}>\max\,(1,|k|)(2+2\delta).$$

Так как все события $A_t=\{|\xi_t|>\mathcal{D}\}$, $t=1,2,\ldots$, имеют одинаковую положительную вероятность, то из соотношения

$$|\xi_{t+1}|=|x_{t+1}-k|x_t|^{\lambda}\operatorname{sgn} x_t|$$

и леммы Бореля-Кантелли получаем, что для бесконечного числа моментов выполнено одно из неравенств:

$$|x_{t+1}|>\frac{\mathcal{D}}{2}>1+\delta; \quad |x_t|^{\lambda}>\frac{\mathcal{D}}{2|k|}>1+\delta.$$

Поэтому при $\delta'=\min(\delta,(1+\delta)^{1/\lambda}-1$ для бесконечного числа моментов t справедливы неравенства $|x_t|>1+\delta'$ и, следовательно,

$$\left||x_t|^{\lambda''}-|x_t|^{\lambda'}\right|=|x_t|^{\lambda'}\left||x_t|^{\lambda''-\lambda'}-1\right|>$$

$$>(1+\delta')^{\lambda'}\left[(1+\delta')^{\lambda''-\lambda'}-1\right]>0,$$

что и доказывает расходимость ряда (9.14).

Таким образом, установлено, что последовательные интервальные оценки, построенные в данном параграфе, дают решение задачи оценивания в неасимптотической постановке. Для сравнения заметим, что при использовании точечных оценок МНК определить необходимое число наблюдений для достижения заданной точности оценивания не

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

представляется возможным, поскольку эти оценки в случае нелинейного параметра обычно удается исследовать лишь при асимптотических предположениях.

Таблица 3

Границы доверительного интервала и средняя длительность последовательного оценивания

λ	0,2	0,5	0,7	I
$\underline{\lambda}$	0,I84	0,485	0,685	0,963
$\overline{\lambda}$	0,225	0,524	0,724	I
$\overline{\tau}$	I387	69	I2	7

Рассмотрим некоторые численные результаты, полученные при реализации последовательных оценок на ЭВМ. Процесс (9.II) моделировался при $k=5$, $\lambda=0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 1$ и гауссовских случайных величинах с параметрами (0,I). Оценивание λ производилось с помощью модификации последовательной процедуры, отмеченной в замечании 9.I, до получения доверительного интервала с длиной, меньшей 0,05. При этом использовалась информация о том, что λ принадлежит интервалу $[0,1]$, и выбирался порог $H = 65$. Результаты вычислений сведены в табл. 3, где $\underline{\lambda}$ и $\overline{\lambda}$ обозначают нижнюю и верхнюю доверительные границы для λ; $\overline{\tau}$ – среднее время оценивания по 50 реализациям процесса.

9.5. Об одной нелинейной задаче экстремального регулирования в обстановке помех

Пусть выход экстремального регулятора описывается уравнением

$$x(t) = W(|\lambda(t) - u(t)|) + \xi(t),$$

где $W(x)$ – возрастающая функция на $[0, \infty)$ (функция качества), $W(0) = 0$; $\lambda(t)$ – медленно меняющийся дрейф, $u(t)$ – управляющее воздействие, которое в момент t может зависеть от наблюдений $x(1), \ldots, x(t-1)$; $\{\xi(t)\}$ – последовательность независимых случайных величин с $M\xi(t) = 0$, $M\xi^2(t) = 1$. Распределение

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

шумов $\xi(t)$ неизвестно. Требуется оценить дрейф $\lambda(t)$ по реализациям процессов $x(t), u(t)$. Необходимость оценки дрейфа часто возникает в задачах экстремального регулирования [148,199].

Возможность использования последовательных планов для отслеживания дрейфа $\lambda(t)$ основана на предположениях:

а) известны границы α и β, в которых дрейф пребывает достаточно долго;

б) за время оценивания дрейф $\lambda(t)$ не выходит за пределы некоторого из интервалов разбиения $\alpha = \lambda_0 < \ldots < \lambda_{m+1} = \beta$.

При этом задача сводится к построению доверительного интервала для неизвестного параметра λ процесса

$$x(t) = w(|\lambda - u(t)|) + \xi_t, \qquad \lambda \in [\alpha, \beta].$$

Решение задачи зависит от ограничений на выбор управляющего воздействия $u(t)$. Если допускается выбор значений $u(t)$ за пределами $[\alpha, \beta]$, приходим к случаю монотонной зависимости от параметра λ. Если управление u_t остается в интервале $I_\ell \subset [\alpha, \beta]$ в течение времени оценивания, то для построения доверительной области можно использовать статистики (9.10). При этом в зависимости от того, какому из интервалов разбиения принадлежит неизвестное значение λ, будет с вероятностью, близкой к единице, наблюдаться один или два скачка статистик φ_i. Интервалы скачков объединяются и образуют искомую доверительную область. В случае двух скачков доверительную область можно сократить, учитывая медленный характер дрейфа и используя оценку дрейфа, полученную на предыдущем шаге. Для этого можно взять интервал скачка, ближайший к предыдущей оценке дрейфа. В случае, если нет возможности фиксировать интервал для u_t на время наблюдений, следует провести сортировку наблюдений, подобную той, которая использовалась в п. 9.3.

Описанная процедура была опробована на ЭВМ. По результатам наблюдений за процессом $\{x_t\}$;

$$x_{t+1} = (x_t - \lambda_t)^2 + \xi_{t+1}, \qquad x_0 = 2,$$

производилась оценка дрейфа λ_t. В качестве дрейфа моделировался процесс авторегрессии первого порядка со средним 2,9:

$$\lambda_{t+1} - 2.9 = 0.05\ (\lambda_t - 2.9) + 0.05\,\eta_{t+1}, \qquad \lambda_0 = 2.9.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Шумы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ выбирались гауссовскими с параметрами (0,1). При построении доверительного интервала использовалась информация о том, что дрейф лежит в интервале (-5,5) и в течение всего времени оценивания остается в промежутке ширины 0,2, совпадающем с одним из интервалов разбиения : $-5=\lambda_0<\lambda_1<\ldots$ $\ldots<\lambda_{50}=5$, $\lambda_i=-5+0{,}2i$. Во всех 30 реализациях процедуры доверительный интервал совпадал с одним из интервалов (2,6; 3,0), (2,8;3,2) и накрывал интервал, в котором изменялся дрейф λ_t. Среднее время оценивания $\bar{\tau}=8$.

Завершив рассмотрение примеров, продолжим изучение общих вопросов. Первый из них связан с длительностью нелинейного последовательного оценивания. Хотя согласно теоремам (9.1), (9.2) последовательные интервальные оценки обладают хорошими статистическими свойствами, однако можно допустить, что эти свойства обеспечиваются, например, ценой бесконечной в среднем длительности последовательной процедуры оценивания. В связи с этим представляет интерес вопрос о средней длительности нелинейного последовательного оценивания. В § 5 были получены нижняя и верхняя границы для среднего числа наблюдений при несмещенном последовательном оценивании линейных параметров. В следующем параграфе задача о нахождении границ для средней длительности последовательных процедур изучается с более общих позиций, позволяющих рассматривать случай нелинейного оценивания.

§ 10. ГРАНИЦЫ ДЛЯ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ПОСТОЯННОГО ПОРОГА НЕУПРЕЖДАЮЩИМ ФУНКЦИОНАЛОМ ОТ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА РЕКУРРЕНТНОГО ТИПА

Рассмотрим следующую задачу. Пусть наблюдаемый n-мерный случайный процесс $x=\{x_t\}$ описывается уравнениями:

$$x_{t+1}=A(t,x;\lambda)+B(t,x)\xi_{t+1}\ ,\quad t=0,1,\ldots, \tag{10.1}$$

где $\lambda\in\Lambda\subset R^p$, $\xi=\{\xi_t\}$ - последовательность независимых n-мерных случайных векторов с $M\xi_t=0$ и $cov(\xi_t,\xi_t)=E$, распределение ξ_t неизвестно; $A(t,x;\lambda)$ и $B(t,x)$ - матричные функции соответствующих размеров, элементы которых в момент t могут зависеть от реализации процесса x до момента t включительно, т.е. $F_t^x=\sigma\{\omega: x_0,\ldots,x_t\}$ измеримы. Предположим, что задан функционал от процесса x вида

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\mathcal{J}_t(x) = \sum_{s=0}^{t} C(s,x),$$

где $C(s,x)$ – неотрицательная F_s^x – измеримая функция. Обозначим через τ момент достижения этим функционалом положительного порога H, т.е.

$$\tau = \tau(H) = \inf\{t \geq 0 : \mathcal{J}_t(x) \geq H\}. \qquad (10.2)$$

В данном параграфе при определенных условиях на функцию $C(s,x)$ получены нижняя и (равномерная по λ) верхняя границы для среднего времени $M_\lambda \tau$. Такая задача возникает при последовательном оценивании как линейных, так и нелинейных параметров. Случай линейного параметра $(A(t,x;\lambda) = A_1(t,x)\lambda)$ изучался в § 5. Однако использованный там метод позволил решить задачу только в предположении, что выполнены следующие условия: $B(t,x) = E$, плотность распределения вектора ξ_t обладает свойством сферической симметрии. Кроме того, на поведение функции $A_1(t,x)$ налагались требования, которые в скалярном случае сводятся к существованию для нее модульной миноранты и мажоранты:

$$\beta |x_t| \leq |A_1(t,x)| \leq \gamma |x_t|,$$

β, γ – постоянные, $0 < \beta < \gamma < \infty$. Подобные условия являются довольно ограничительными и могут быть существенно ослаблены. Сначала получим верхнюю границу для среднего числа наблюдений.

10.1. Верхняя граница для среднего числа наблюдений

Предположим, что матрица $B(t,x)$ невырождена при всех значениях аргументов и что распределение ξ_t $(t = 1, 2, \ldots)$ имеет плотность $g(\cdot)$.

Построение верхней границы опирается на следующую лемму Т.Андерсона [70].

<u>ЛЕММА 10.1</u>. Пусть ξ – случайная величина со значениями из R^n, плотность распределения $f_\xi(x)$ которой центрально-симметрична $f_\xi(x) = f_\xi(-x)$, а множество

$$K_u = \{x : f_\xi(x) \geq u\}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

выпукло для любого u, $0<u\leq\infty$. Тогда для любого вектора $y\in R^n$ и любого выпуклого центрально-симметричного множества $\mathcal{D}$ справедливо неравенство

$$P\{\xi+y\in\mathcal{D}\}\leq P\{\xi\in\mathcal{D}\}.$$

Точное равенство имеет место в том и только в том случае, когда $\mathcal{D}\cap K_u=(\mathcal{D}-y)\cap K_u+z_u$ для всех $u\geq 0$ и некоторого вектора z_u. (Запись $\mathcal{D}\pm y$ обозначает сдвиг множества $\mathcal{D}$ на $\pm y$.)

Как будет видно из дальнейшего, лемма 10.1 предопределяет требования, которые следует наложить на функцию $c(s,x)$, чтобы для среднего числа наблюдений $M_\lambda\tau$ существовала равномерная (по λ) верхняя граница. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех вещественных функций двух переменных $W(s,z)$, $s=0,1,\ldots,z\in R^n$, обладающих свойствами:

α) $W(s,-z)=W(s,z)$;

β) множество $\{z: W(s,z)\leq u\}$ выпукло для всех s и u, $0<u<\infty$.

Последнее условие выполняется, например, для выпуклых по z функций. С помощью $\mathfrak{M}$ выделяется класс допустимых функций $c(s,x)$. Пусть Φ_ℓ - множество функций $c(s,x)$, для которых найдутся функция $W(s,z)$ из класса $\mathfrak{M}$ и некоторая борелевская функция ψ_s от $s,x_0,\ldots,x_s$ со значениями в R^n, такие, что функция $W(s,\psi_{s-\ell-1}+x_{s-\ell})$ является минорантной функции $c(s,x)$, т.е. при всех значениях аргументов выполняются неравенства

$$c(s,x)\geq W(s,\psi_{s-\ell-1}+x_{s-\ell}), \tag{10.3}$$

$\psi_s=0$ при $s<0$. При выводе верхней границы будем предполагать, что функции $c(s,x)$ принадлежат классу $\Phi=\bigcup_{\ell\geq 0}\Phi_\ell$. Сформулируем основной результат данного параграфа в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть 1) плотность $g(z)$ распределения ξ_t, $t=1,2,\ldots$ удовлетворяет условиям леммы 10.1; 2) функция $c(\cdot)$ и отвечающая ей по определению класса Φ_ℓ функция $W\in\mathfrak{M}$ удовлетворяют неравенству

$$W(s,B(s,x)y)\geq W_0(s,y),\quad y\in R^n,\ s=0,1,\ldots, \tag{10.4}$$

где $W_0(s,y)$ - некоторая вещественная борелевская функция;

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

3) случайная величина

$$\eta_\ell = \inf\{t \geq 1 : \sum_{s=1}^{t} W_0(s+\ell, \xi_s) \geq H\}$$

имеет конечное математическое ожидание. Тогда средняя длительность наблюдений равномерно ограничена сверху:

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \tau(H) \leq M\eta_\ell + \ell + 1.$$

Доказательство теоремы 10.1. Сначала установим вспомогательные предложения.

Следствие леммы 10.1. Пусть ξ – многомерная величина со значениями из R^n, удовлетворяющая условиям леммы 10.1, а – B – невырожденная матрица (размера $n \times n$). Тогда утверждение леммы 10.1 справедливо и для вектора $\eta = B\xi$.

Доказательство следствия сводится к проверке выполнения условий леммы 10.1 для плотности вектора η. Центральная симметричность f_η имеет место в силу формулы

$$f_\eta(y) = \frac{1}{|\det B|} f_\xi(B^{-1}y)$$

и центральной симметричности функции f_ξ. Покажем выпуклость множества $\{y : f_\eta(y) \geq u\}$. Пусть $f_\eta(y_1) \geq u$, $f_\eta(y_2) \geq u$ и $0 < \lambda < 1$. Обозначив $x_i = B^{-1}y_i$, получим

$$f_\eta(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) = \frac{1}{|\det B|} f_\xi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq u,$$

что и завершает доказательство следствия.

Для доказательства теоремы 10.1 нам потребуется следующая лемма, которая доказывается аналогично лемме 10.1.

ЛЕММА 10.2. Пусть ξ – случайный элемент, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со значениями в измеримом пространстве $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$; ξ и η – случайные величины со значениями из R^n, а $B = \|b_{ij}\|$ – невырожденная случайная матрица размера $n \times n$, причем η и b_{ij} измеримы относительно σ-алгебры $\mathcal{A}_\zeta$, порожденной отображением ζ. Если условная плотность $f_{\xi/\zeta}(x/y)$ центрально-симметрична

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$f_{\xi/\zeta}(x|y) = f_{\xi/\zeta}(-x|y), \; x \in R^n, \; y \in Y,$$

а множество

$$\{x: f_{\xi/\zeta}(x|y) \geq u\}$$

выпукло для любых u, $0 \leq u < \infty$, $y \in Y$, то для любого выпуклого центрально-симметричного множества $\mathcal{D}$, определяемого по ζ, справедливо неравенство

$$P\{B\xi + \eta \in \mathcal{D}|\zeta\} \leq P\{B\xi \in \mathcal{D}|\zeta\}.$$

Лемма I0.2 переносит утверждения леммы I0.I и следствия из нее на случай условных распределений.

<u>ЛЕММА I0.3</u>. Пусть φ_t – случайная величина, измеримая относительно σ – алгебры, порожденной процессом $\{\xi_{t+1}, \xi_{t+2}, \dots\}$. Тогда справедливо неравенство

$$P_\lambda\{\sum_{s=\ell+1}^{t} W(s, \psi_{s-\ell-1} + x_{s-\ell}) + \varphi_t < H\} \leq$$

$$\leq P_\ell\{\sum_{s=\ell+1}^{t-1} W(s, \psi_{s-\ell-1} + x_{s-\ell}) + \varphi_{t-1} < H\},$$

где $\varphi_{t-1} = \varphi_t + W_0(t, \xi_{t-\ell})$, $t > \ell$.

Для доказательства леммы I0.3 введем случайный вектор $\zeta = \{x_0, \xi_1, \dots, \xi_{t-1}, \varphi_t\}$. Так как случайная величина ξ_t не зависит от ζ в силу условий, наложенных на процесс ξ, то справедливо равенство

$$f_{\xi_t/\zeta}(x|y) = g(x)$$

и, следовательно, условная плотность удовлетворяет требованиям леммы I0.2. Рассмотрим вероятность

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$P_\lambda\left\{\sum_{s=\ell+1}^{t} W(s, \psi_{s-\ell-1} + x_{s-\ell}) + \varphi_t < H \,|\, \zeta\right\} =$$

$$= P_\lambda\left\{W(t, \psi_{t-\ell-1} + A(t-\ell-1, x; \lambda) + B(t-\ell-1, x)\xi_{t-\ell}) < \tilde{H} \,|\, \zeta\right\}, \tag{10.5}$$

$$\tilde{H} = H - \sum_{s=\ell+1}^{t-1} W(s, \psi_{s-\ell-1} + x_{s-\ell}) - \varphi_t .$$

Вводя множество

$$\tilde{\mathcal{D}}_t = \{z \in R^n : W(t, z) < \tilde{H}\}$$

и обозначив

$$\eta_t = \psi_{t-\ell-1} + A(t-\ell-1, x; \lambda),$$

правую часть (10.5) можно записать более компактно:

$$P_\lambda\left\{\sum_{s=\ell+1}^{t} W(s, \psi_{s-\ell-1} + x_{s-\ell}) + \varphi_t < H \,|\, \zeta\right\} =$$

$$= P\{B(t-\ell-1, x)\xi_{t-\ell} + \eta_t \in \tilde{\mathcal{D}}_t \,|\, \zeta\}.$$

Благодаря тому, что $B(t-\ell-1, x)$ и η_t являются функциями от ζ, $W(t, z) \in \mathfrak{M}$, а также в силу требований на распределение ξ_t, выполнены все условия леммы 10.2. Поэтому, применяя лемму 10.2, имеем

$$P_\lambda\left\{\sum_{s=\ell+1}^{t} W(s, \psi_{s-\ell-1} + x_{s-\ell}) + \varphi_t < H \,|\, \zeta\right\} \leq$$

$$\leq P\{B(t-\ell-1, x)\xi_{t-\ell} \in \tilde{\mathcal{D}}_t \,|\, \zeta\} =$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$= P_\lambda \Big\{ \sum_{s=\ell+1}^{t-1} W(s, \psi_{s-\ell-1} + x_{s-\ell}) +$$

$$+ W[t, B(t-\ell-1, x)\xi_{t-\ell}] + \varphi_t < H \,|\, \zeta \Big\} \leq$$

$$\leq P_\lambda \Big\{ \sum_{s=\ell+1}^{t-1} W(s, \psi_{s-\ell-1} + x_{s-\ell}) + \varphi_{t-1} < H \,|\, \zeta \Big\}.$$

Это неравенство после усреднения дает утверждение леммы I0.3. Теперь нетрудно завершить доказательство теоремы I0.I. Исходя из определения момента остановки (I0.2), производя очевидные оценки и используя (I0.3), получаем

$$M_\lambda \tau(H) = \sum_{t=0}^{\infty} P_\lambda \{\tau(H) > t\} = \sum_{t=0}^{\infty} P_\lambda \Big\{ \sum_{s=0}^{t} c(s,x) < H \Big\} \leq$$

$$\leq \ell + 1 + \sum_{t=\ell+1}^{\infty} P_\lambda \Big\{ \sum_{s=\ell+1}^{t} c(s,x) < H \Big\} \leq$$

$$\leq \ell + 1 + \sum_{t=\ell+1}^{\infty} P_\lambda \Big\{ \sum_{s=\ell+1}^{t} W(s, \psi_{s-\ell-1} + x_{s-\ell}) < H \Big\}. \qquad (I0.6)$$

Оценим слагаемое суммы по t в правой части неравенства с помощью повторного применения леммы I0.3, положив

$$P_\lambda \Big\{ \sum_{s=\ell+1}^{t} W(s, \psi_{s-\ell-1} + x_{s-\ell}) < H \Big\} \leq$$

$$\leq P_\lambda \Big\{ \sum_{s=\ell+1}^{t-1} W(s, \psi_{s-\ell-1} + x_{s-\ell}) + W_0(t, \xi_{t-\ell}) < H \Big\} \leq$$

$$\leq \ldots \leq P_\lambda \{\varphi_0 < H\} = P_\lambda \Big\{ \sum_{s=\ell+1}^{t} W_0(s, \xi_{s-\ell}) < H \Big\} = \qquad (I0.7)$$

$$= P_\lambda \Big\{ \sum_{s=1}^{t-\ell} W_0(s+\ell, \xi_s) < H \Big\}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Из неравенств (10.6), (10.7) следует утверждение теоремы 10.1.

Замечание 10.1. Условие (10.4) накладывает ограничение на дисперсионные свойства шума процесса (10.1). В случае скалярного процесса x, когда выполняется требование отделимости:

$$\inf_{\{x\}} |B(s,x)| \geq B_0(s) > 0,$$

функцию $W_0(s,y)$ можно определить, например, по формуле

$$W_0(s,y) = \overline{W}(s, B_0(s,y)).$$

Замечание 10.2. Если функция $W_0(s,y)$ не зависит от s, $W_0(s,y) \equiv W_0'(y)$, то для среднего значения случайной величины

$$\eta_\ell = \inf\left\{ t \geq 1 : \sum_{s=1}^{t} W_0'(\xi_s) \geq H \right\}$$

с помощью тождества Вальда [23]

$$M \sum_{s=1}^{\hat{t}} W_0'(\xi_s) = M W_0'(\xi_1) M_\lambda \eta_\ell ,$$

пренебрегая эффектом перескока порога H величиной $\sum_{s=1}^{t} W_0'(\xi_s)$, получаем приближенную формулу

$$M\eta_\ell \approx \frac{H}{M W_0'(\xi_1)} . \tag{10.8}$$

Таким образом, для $M_\lambda \tau(H)$ находим приближенно верхнюю границу

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \tau(H) = \frac{H}{M W_0'(\xi_1)} + \ell + 1 . \tag{10.9}$$

10.2. Нижняя граница для среднего числа наблюдений

При выводе нижней границы характер требований на функционал J_t и процесс (10.1) изменяется и вводится ограничение на рост во времени функции $C(s,x)$. Положим для простоты $C(0,x)=0$.

ТЕОРЕМА 10.2. Пусть $M_\lambda C(s,x) < \infty$ и найдутся вещественные функции $\rho(\lambda)$ и $d(\lambda)$ $(d(\lambda) > 0)$, такие, что

$$M_\lambda [C(s+1,x) | x_0, \ldots, x_s] \leq \rho(\lambda) C(s,x) + d(\lambda), \lambda \in \Lambda, s \geq 0. \tag{10.10}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда выполняется неравенство

$$M_\lambda \tau(H) \geqslant \frac{H}{d(\lambda)} (1 - \rho(\lambda))_+ .$$

<u>Доказательство</u>. Запишем тождество

$$M_\lambda \left\{ \sum_{s=1}^{\tau} c(s,x) \right\} = M_\lambda \left\{ \sum_{k=0}^{\tau-1} M_\lambda \left[c(k+1,x) \mid x_0, \ldots, x_k \right] \right\}. \qquad (10.11)$$

Справедливость (10.11) для усеченного момента остановки $\tau_N = \min(N, \tau)$ следует из свойств условных математических ожиданий

$$M_\lambda \sum_{s=1}^{\tau_N} c(s,x) = M_\lambda \sum_{k=0}^{\tau_N - 1} c(k+1,x) =$$
$$= M_\lambda \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[k \leq \tau_N - 1]} c(k+1,x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} M_\lambda \left\{ \chi_{[k \leq \tau_N - 1]} M_\lambda \left[c(k+1,x) \mid x_0, \ldots, x_k \right] \right\} =$$
$$= M_\lambda \left\{ \sum_{k=0}^{\tau_N - 1} M_\lambda \left[c(k+1,x) \mid x_0, \ldots, x_k \right] \right\}.$$

Предельный переход при $N \to \infty$ дает (10.11). Далее по определению момента остановки $\tau = \tau(H)$ имеем

$$H \leq \sum_{s=1}^{\tau} c(s,x).$$

Отсюда, используя (10.11) и условие (10.10), получаем неравенство

$$H \leq \rho(\lambda) M_\lambda \sum_{k=0}^{\tau-1} c(k,x) + d(\lambda) M_\lambda \tau \leq \rho(\lambda) H + d(\lambda) M_\lambda \tau,$$

которое и доказывает утверждение теоремы 10.2.

10.3. О среднем числе наблюдений при интервальном оценивании нелинейного параметра

а) Предположим, что наблюдаемый процесс $\{x_t\}$ является процессом авторегрессии первого порядка

$$x_{t+1} = \lambda x_t + \sigma \xi_{t+1}, \quad x_0 = 0, \quad \sigma \neq 0,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где ξ_t – последовательность н.о.р. случайных величин, причем $M\xi_t = 0$, $M|\xi_t|^r < \infty$. Распределение ξ_t неизвестно. Зададим функционал формулой

$$\mathcal{J}_t = \sum_{s=1}^{t} |x_s|^r, \quad r > 0.$$

Тогда, полагая $c(s,x) = |x_s|^r$ и используя элементарное неравенство

$$|a+b|^r \leq \varkappa_r |a|^r + \varkappa_r |b|^r, \quad \varkappa_r = \begin{cases} 1, & 0 < r \leq 1; \\ 2^{r-1}, & r \geq 1, \end{cases}$$

получаем

$$M_\lambda\left[|x_{s+1}|^r | x_0, \ldots, x_s\right] \leq \rho_r(\lambda)|x_s|^r + d_r;$$

$$d_r = \varkappa_r |\sigma|^r M|\xi_1|^r; \quad \rho_r(\lambda) = \varkappa_r |\lambda|^r.$$

Отсюда с помощью теоремы 10.2 находим нижнюю границу для $M_\lambda \tau$

$$M_\lambda \tau \geq \frac{H}{d_r}\left(1 - \varkappa_r |\lambda|^r\right)_+ .$$

Предположим дополнительно, что при каждом t случайная величина ξ_t имеет плотность, которая симметрична и не возрастает с увеличением $|x|$. Воспользуемся теоремой 10.1. В данном случае

$$W(s,z) = |z|^r, \ \ell = 0, \ \psi = 0, \ W_0(s,y) = W(s,\sigma y) = |\sigma|^r |y|^r;$$

поэтому

$$M_\lambda \tau \leq M\eta_0 + 1; \quad \eta_0 = \inf\left\{t \geq 1 : \sum_{s=1}^{t} |\xi_s|^r \geq \frac{H}{|\sigma|^r}\right\}.$$

Используя тождество Вальда и пренебрегая эффектом перескока порога $H/|\sigma|^r$ величиной $\sum_{s=1}^{t} |\xi_s|^r$, получим для $M_\lambda \tau$ приближенную верхнюю границу

$$\sup_{-\infty < \lambda < \infty} M_\lambda \tau \approx \frac{H}{|\sigma|^r \cdot M|\xi_1|^r} + 1.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

б) Пусть наблюдаемый процесс описывается уравнением

$$x_{t+1} = K|x_t|^{\lambda} \operatorname{sgn} x_t + \sigma \xi_{t+1}, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

где K, σ – известные постоянные; λ – оцениваемый параметр; $0 \le \lambda \le \beta < \infty$, β – известно; $\{\xi_t\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\xi_t = 0$ и $M\xi_t^2 = 1$. Плотность распределения ξ неизвестна, однако предполагается, что она симметрична и не возрастает при увеличении $|x|$. Решающая процедура оценивания определяется с помощью статистик (9.2), (9.3). Число наблюдений, используемых в оценке, определяется величиной $\tau(H) = \max\limits_{0 \le i \le m} \tau_i(H)$.
Оценим сверху среднее число наблюдений при равномерном выборе точек λ_i в интервале $[0, \beta]$: $\lambda_i = i\beta/(m+1)$. Введем функцию

$$C(s,x) = \min_{0 \le i \le m} C_i(s,x);$$

$$C_i(s,x) = \frac{K^2}{\sigma^2}\left(|x_s|^{\lambda_i} - |x_s|^{\lambda_{i+1}}\right)^2, \tag{10.12}$$

и момент остановки

$$\sigma(H) = \inf\left\{t \ge 0 : \sum_{s=0}^{t} C(s,x) \ge H\right\}.$$

Поскольку $\tau(H) \le \sigma(H)$, оценим $M_\lambda \sigma(H)$. Для функции (10.12) находим выпуклую миноранту

$$W(x_s) = \begin{cases} \frac{K^2}{\sigma^2}\left(1 - |x_s|^{\lambda_{i+1} - \lambda_i}\right)^2, & \text{если } |x_s| \ge 1; \\ 0, & \text{если } |x_s| < 1, \end{cases}$$

которая, очевидно, является минорантой и для $C(s,x)$. Положив $W^\circ(y) = W(\sigma, y)$, по формуле (10.9) находим приближенно верхнюю границу для $M_\lambda \sigma(H)$:

$$\frac{H}{M W^\circ(\xi_1)} + 1,$$

которая дает оценку и для средней длительности последовательного оценивания $M_\lambda \tau(H)$. Отметим, что

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$M_\lambda W^\circ(\xi_1) = \frac{K^2}{\sigma^2}\left\{P(|\sigma\xi_1| \geq 1) - 2M|\sigma\xi_1|^{\beta/(m+1)}\chi_{[|\sigma\xi_1|\geq 1]} + \right.$$

$$\left. + M|\sigma\xi_1|^{2\beta/(m+1)}\chi_{[|\sigma\xi_1|\geq 1]}\right\};$$

$$\chi_{[a,b]} = \begin{cases} 1, \text{ если } a \geq b; \\ 0, \text{ если } a < b. \end{cases}$$

В частности, если случайная величина ξ_t является гауссовской, получаем

$$MW^\circ(\xi_1) =$$

$$= \frac{K^2}{\sigma^2}\left\{\left[1 - 2\Phi(|\sigma|^{-1})\right] - \frac{2}{\sqrt{\pi}}(2\sigma^2)^{\beta/2(m+1)}\Gamma\left(\frac{\beta}{2(m+1)}, \frac{1}{2\sigma^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{(2\sigma^2)^{\beta/(m+1)}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\beta}{m+1} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right)\right\},$$

где $\Gamma(a,x) = \int\limits_x^\infty z^{a-1}e^{-z}dz$ – неполная гамма-функция,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt.$$

Другой пример использования найденных границ для среднего числа наблюдений будет приведен в следующей главе.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Глава 2

КЛАССИФИКАЦИЯ И ОБНАРУЖЕНИЕ РАЗЛАДОК ПРОЦЕССОВ РЕКУРРЕНТНОГО ТИПА

В данной главе построен последовательный критерий классификации конечного числа процессов, описываемых стохастическими разностными уравнениями, а также изучается задача о разладке в процессах такого типа.

§ 1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ КЛАССИФИКАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ РЕКУРРЕНТНОГО ТИПА

1.1. Постановка задачи

Пусть относительно наблюдаемого n-мерного случайного процесса $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))^T$, $t\geq 0$, имеется s различных статистических гипотез $h_1,\dots,h_s$, одна из которых истинна. Согласно гипотезе h_i процесс $\{x(t)\}$ описывается стохастическим разностным уравнением

$$x(t+1)=A_i(t,x)+B_i(t,x)\xi_i(t+1)\quad (t=0,1,\dots). \qquad (1.1)$$

Здесь $A_i(t,x)$ и $B_i(t,x)$ – матричные функции размеров $n\times 1$ и $n\times l$ соответственно; элементы этих функций в момент t могут зависеть от $x(0),\dots,x(t)$. Последовательность $\{\xi_i(t), t\geq 1\}$ не зависит от $x(0)$ и состоит из независимых l-мерных случайных векторов с $M\xi_i(t)=0$ и $cov(\xi_i(t),\xi_i(t))=E$. Распределения шумов $\xi_i(t)$ неизвестны. Необходимо по наблюдениям за процессом $\{x(t)\}$ отдать предпочтение одной из гипотез.

Поскольку при каждой гипотезе распределение наблюдений неизвестно, задача является непараметрической и для ее решения нельзя воспользоваться отношением правдоподобия. Заметим, что и при известном распределении шумов $\xi_i(t)$ решение задачи в неасимптотической постановке вызывает трудности. Пусть, например, шумы гауссовские. Тогда легко найти функцию правдоподобия и построить решающую процедуру классификации. Однако свойства этой процедуры исследовать, вообще говоря, не удается, если только длительность наблюдений фиксирована. А поэтому остается открытым вопрос, как долго следует наблюдать процесс, чтобы обеспечить требуемое качество распознавания. Ниже предлагается подход к решению постав-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ленной задачи в неасимптотической постановке с позиций последовательного оценивания.

I.2. Построение критерия классификации и исследование его свойств в случае одинаковых дисперсионных матриц

Пусть $B_i(t,x) \equiv B(t,x)$, $i=\overline{1,s}$, причем матрица BB^T не вырождена. Предположим, что шумы $\xi_i(t)$ имеют гауссовское распределение. Обозначим через $f_j(x(1),\dots,x(N))$ условную плотность наблюдений $x(1),\dots,x(n)$ при фиксированном $x(0)$ и при условии, что наблюдения проводятся при истинности гипотезы h_j. Имеем

$$f_j(x(1),\dots,x(N)) = \prod_{t=1}^{N}\left[(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det B(t-1,x)B^T(t-1,x)}\right]^{-1}\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}\left[x(t)-A_j(t-1,x)\right]^T(BB^T)^{-1}(t-1,x)\left[x(t)-A_j(t-1,x)\right]\right\}.$$

Согласно критерию максимального правдоподобия принимается гипотеза h_ℓ, если

$$f_\ell(x(1),\dots,x(N)) = \max_{0\le j\le s} f_j(x(1),\dots,x(N)). \qquad (I.2)$$

Чтобы избежать неопределенности, случай, когда максимум в (I.2) достигается одновременно для нескольких плотностей, должен быть оговорен особо. Условимся в этом случае принимать ту из конкурирующих гипотез, которая имеет наибольший номер. При таком условии критерий (I.2) допускает следующую эквивалентную форму: гипотеза h_ℓ принимается тогда и только тогда, когда система величин L_{kj}, определяемых формулой

$$L_{kj} = \ln\frac{f_j(x(1),\dots,x(N))}{f_k(x(1),\dots,x(N))} = \sum_{t=1}^{N}\left[A_j(t-1,x)-A_k(t-1,x)\right]^T(BB^T)^{-1}(t-1,x)x(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}\left[A_k^T(t-1,x)(BB^T)^{-1}(t-1,x)A_k(t-1,x)-\right.$$

$$\left.-A_j^T(t-1,x)(BB^T)^{-1}(t-1,x)A_j(t-1,x)\right],$$

удовлетворяет неравенствам

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$L_{k\ell} \geq 0 \text{ при } 1 \leq k < \ell; \quad L_{\ell j} < 0 \text{ при } \ell < j \leq s.$$

Наконец, взяв систему статистик $\{\varphi_{kj}(N),\ 0 \leq k < j \leq s\}$, задаваемых равенствами:

$$\varphi_{kj}(N) = \frac{1}{\sum_{t=1}^{N} \tau_{kj}(t-1,x)} \sum_{t=1}^{N} \left[A_j(t-1,x) - A_k(t-1,x)\right]^T (BB^T)^{-1}(t-1,x) \times \tag{I.3}$$

$$\times \left[x(t) - A_k(t-1,x)\right],$$

$$\tau_{kj}(t-1,x) = \left[A_j(t-1,x) - A_k(t-1,x)\right]^T (BB^T)^{-1}(t-1,x)\left[A_j(t-1,x) - A_k(t-1,x)\right],$$

и воспользовавшись тем, что неравенство $L_{kj} \geq 0$ равносильно неравенству $\varphi_{kj}(N) \geq \frac{1}{2}$, критерию (I.2) можно придать другой вид: гипотеза h_ℓ принимается по выборке $x(1), \ldots, x(N)$ тогда и только тогда, когда система статистик $\{\varphi_{kj}(N)\}$ удовлетворяет неравенствам:

$$\varphi_{k\ell}(N) \geq \frac{1}{2} \text{ при } 1 \leq k < \ell; \quad \varphi_{\ell j}(N) < \frac{1}{2} \text{ при } j < \ell \leq s. \tag{I.4}$$

Система неравенств (I.4) выделяет в выборочном пространстве R^N область принятия ℓ-й гипотезы $\mathcal{D}_\ell$. Важной статистической характеристикой критерия (I.2) является вероятность правильного решения, определяемая интегралом

$$\int_{\mathcal{D}_\ell} f_\ell(x(1), \ldots, x(N))\, dx(1) \cdot \ldots dx(N). \tag{I.5}$$

Если функции A, B в (I.I) детерминированные, то плотность $f_\ell(x(1), \ldots, x(N))$ гауссовская, ограничения (I.4) являются линейными относительно наблюдений $x(t)$ и вероятности (I.5) легко находятся. В более общем случае, когда функции A и B зависят от процесса $x(t)$, область $\mathcal{D}_\ell$ становится сложной, соответствующая плотность - негауссовской, а поэтому не только вычисление, но и оценка вероятностей (I.5) затруднительна. Основная причина этих трудностей вызвана, по-видимому, тем, что при выборе числа наблюдений N никак не учитывалось, что динамические модели

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

(I.I), отвечающие различным гипотезам, могут быть в отдельные моменты времени весьма близки, а поэтому соответствующие наблюдения оказываются малоинформативными.

Идея построения критерия классификации в случае, когда распределение шумов $\xi_i(t)$ неизвестно, состоит в том, чтобы использовать рассмотренный критерий в форме (I.4). Построение процедуры включает два момента:

I) модификацию статистик (I.3);

2) определение объема выборки для вычисления каждой статистики.

Пусть $H>0$. Рассмотрим следующую модификацию системы статистик (I.3):

$$\varphi^*_{ij}(H) = \frac{1}{H}\sum_{t=0}^{\tau_{ij}}{}' \left[A_i(t,x)-A_j(t,x)\right]^T (BB^T)^{-1}(t,x)\left[x(t+1)-A_j(t,x)\right] \qquad (1\le i<j\le s). \tag{I.6}$$

Здесь $\tau_{ij}=\tau_{ij}(H)$ – момент остановки, определяемый формулой

$$\tau_{ij}(H) = \inf\left\{N\geqslant 0 : \sum_{t=0}^{N} \tau_{ij}(t,x)\geqslant H\right\};$$

штрих у знака суммы в (I.6) означает, что последнее слагаемое берется с весом $\alpha_{ij}(H)$, причем

$$\alpha_{ij}(H)=\frac{\left[H-\sum_{t=0}^{\tau_{ij}-1}\tau_{ij}(t,x)\right]}{\tau_{ij}(\tau_{ij},x)}.$$

Выбор такой системы статистик обусловлен тем, что при истинности любой из гипотез она с вероятностью, которую можно сделать сколько угодно близкой к единице за счет увеличения порога H, обладает свойством, позволяющим определить верную гипотезу. Положим

$$\nu^*_{ij}(H)=\begin{cases} 1, \text{ если } & \varphi^*_{ij}(H)\geqslant \frac{1}{2}; \\ 0, \text{ если } & \varphi^*_{ij}(H)< \frac{1}{2}. \end{cases}$$

<u>Определение I.I</u>. Будем говорить, что система чисел $\{\nu_{ij}, 1\le i<j\le s\}$, принимающих значения $0, 1$, обладает I) свойством π_1, если $\nu_{1,2}=\ldots=\nu_{1,s}=1$;

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

2) свойством π_k, $1 < k < s$, если
$\nu_{1,k} = \ldots = \nu_{k-1,k} = 0$ и $\nu_{k,k+1} = \ldots = \nu_{k,s} = 1$;
3) свойством π_s, если $\nu_{1,s} = \ldots = \nu_{s-1,s} = 0$.

Последовательный критерий классификации. Будем принимать гипотезу h_k, если система статистик $\{\nu^*_{ij}(H),\ 1 \le i < j \le s\}$ обладает свойством π_k. Если ни одно из свойств π_k не выполнено, наблюдения необходимо продолжить.

В основе этого критерия лежит следующая

Теорема I.I. Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и при истинности любой гипотезы с вероятностью единица расходятся ряды: $\sum_{t=0}^{\infty} \tau_{ij}(t,x),\ 1 \le i < j \le s$. Тогда, если истинна гипотеза h_k, $k = 1, \ldots, s$, то система статистик $\{\nu^*_{ij}(H)\}$ при $H \ge 4(s-1)/\varepsilon$ обладает свойством π_k с вероятностью не меньшей, чем $1-\varepsilon$. Время классификации конечно почти наверное.

Доказательство. Пусть верна гипотеза h_k. Тогда процесс $x(t)$ описывается уравнением

$$x(t+1) = A_k(t,x) + B(t,x)\,\xi_k(t+1) \quad (t = 0, 1, \ldots). \tag{I.7}$$

Подставляя (I.7) в (I.6), получаем

$$\varphi^*_{ik}(H) = \frac{1}{H}\sum_{t=0}^{\tau_{ik}}{}' \left[A_i(t,x) - A_k(t,x)\right]^T \left[B(t,x)B^T(t,x)\right]^{-1} B(t,x)\,\xi_k(t+1)$$

при $1 \le i < k$;

$$\varphi_{kj}(H) = 1 + \frac{1}{H}\sum_{t=0}^{\tau_{kj}} \left[A_k(t,x) - A_j(t,x)\right]^T \left[B(t,x)B^T(t,x)\right]^{-1} B(t,x)\,\xi_k(t+1)$$

при $k < j \le s$.

Отсюда по определению моментов τ_{ij} следует, что

$$M_k\left[\varphi^*_{ik}(H)\right]^2 \le \tag{I.8}$$

$$\le \frac{1}{H^2} M\left[\sum_{t=0}^{\tau_{ik}}{}' \left(A_i(t,x) - A_k(t,x)\right)^T (BB^T)^{-1}(t,x)\left(A_i(t,x) - A_k(t,x)\right)\right] = \frac{1}{H};$$

$$M_k\left[\varphi^*_{kj}(H) - 1\right]^2 \le \frac{1}{H}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

[$M_k(\cdot)$ обозначает усреднение по распределению P_k, отвечающему k-й гипотезе]. Вероятность правильного решения определяется формулой

$$P_k(\pi_k) = P_k\{\nu^*_{ik}(H)=0,\ 1\le i<k;\ \nu^*_{kj}(H)=1,\ k<j\le s\} =$$
$$= P_k\{\varphi^*_{ik}(H)<\tfrac{1}{2},\ 1\le i<k;\ \varphi^*_{kj}(H)\ge\tfrac{1}{2},\ k<j\le s\}.$$

Используя неравенства Буля, Чебышева и (I.8), получим

$$P_k(\pi_k) \ge 1-\sum_{i=1}^{k-1} P_k\{\varphi^*_{ik}(H)\ge\tfrac{1}{2}\} - \sum_{j=k+1}^{s} P_k\{\varphi^*_{kj}(H)<\tfrac{1}{2}\} \ge$$

$$\ge 1-\sum_{i=1}^{k-1} P_k\{|\varphi^*_{ik}(H)|\ge\tfrac{1}{2}\} - \sum_{j=k+1}^{s} P_k\{|\varphi^*_{kj}(H)-1|>\tfrac{1}{2}\} \ge$$

$$\ge 1-4\sum_{i=1}^{k-1} M_k[\varphi^*_{ik}(H)]^2 - 4\sum_{j=k+1}^{s} M_k[|\varphi^*_{kj}(H)-1|]^2 \ge$$

$$\ge 1-\frac{4(s-1)}{H}.$$

Взяв $H\ge 4(s-1)/\varepsilon$, приходим к первому утверждению теоремы: $P_k(\pi_k)\ge 1-\varepsilon$. Конечность длительности классификации следует из расходимости рядов $\sum_{t=0}^{\infty} \tau_{ij}(t,x)$. Теорема I.I доказана.

I.3. Случай неодинаковых дисперсионных матриц

Пусть матричные функции $B_i(t,x)$, отвечающие различным гипотезам, не совпадают. Тогда в описанной процедуре классификации изменятся только статистики $\varphi^*_{ij}(H)$. Определим их по фор-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

мулам:

$$\varphi^*_{ij}(H)=\frac{1}{H}\sum_{t=0}^{\tau_{ij}}{}'\left[A_i(t,x)-A_j(t,x)\right]^T V^{ij}(t)\left[x(t+1)-A_j(t,x)\right];$$

$$\tau_{ij}(H)=\inf\left\{N\geq 0:\sum_{t=0}^{N}\|A_i(t,x)-A_j(t,x)\|^2_{V^{ij}(t)}\geq H\right\}; \tag{I.9}$$

$$\|a\|^2_{V^{ij}(t)}=a^T V^{ij}(t)\,a,$$

где $V^{ij}(t)$ – симметричная положительно определенная весовая матрица, удовлетворяющая неравенствам (в смысле соответствующих квадратичных форм):

$$V^{ij}(t)B_i(t,x)B_i^T(t,x)V^{ij}(t)\leq V^{ij}(t),\quad V^{ij}(t)(B_jB_j^T)(t,x)V^{ij}(t)\leq V^{ij}(t). \tag{I.10}$$

Штрих у знака суммы обозначает, что последнее слагаемое берется с весом. $\alpha_{ij}(H)$, который находится из уравнения

$$\sum_{t=0}^{\tau_{ij}(H)-1}\|A_i(t,x)-A_j(t,x)\|^2_{V^{ij}}+\alpha_{ij}(H)\|A_i(\tau_{ij},x)-A_j(\tau_{ij},x)\|^2=H.$$

Для конечности процедуры классификации с вероятностью единица должны расходиться ряды

$$\sum_{t=0}^{\infty}\|A_i(t,x)-A_j(t,x)\|^2_{V^{ij}(t)}=+\infty,\quad 1\leq i<j\leq s.$$

При этих условиях утверждение теоремы I.I остается справедливым. Чтобы убедиться в этом, очевидно, достаточно проверить выполнение неравенств (I.8). Поскольку

$$\varphi^*_{ik}(H)=\frac{1}{H}\sum_{t=0}^{\tau_{ik}}{}'\psi^T(t)\xi_k(t+1),\quad \psi^T(t)=\left[A_i(t,x)-A_k(t,x)\right]^T V^{ik}(t)B_k(t,x),$$

то

$$M_k\left[\varphi^*_{ik}(H)\right]^2\leq\frac{1}{H^2}M_k\left[\sum_{t=0}^{\tau_{ik}}{}'\|\psi(t)\|^2\right].$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Учитывая, что $\|\psi(t)\|^2 \leq \|A_i(t,x) - A_k(t,x)\|^2_{V^{ik}}$, а также в силу условий на весовые матрицы приходим к требуемому неравенству

$$M_k[\varphi^*_{ik}(H)]^2 \leq \frac{1}{H^2} M_k\Big[\sum_{t=0}^{\tau_{ik}}{}' \|A_i(t,x) - A_k(t,x)\|^2_{V^{ik}}\Big] = \frac{1}{H}.$$

Аналогично доказывается второе неравенство (I.8).

Чтобы минимизировать число наблюдений, необходимых для классификации процессов, в классе весовых матриц, удовлетворяющих условиям (I.10), в каждый момент времени t следует выбирать такую матрицу, которая обращает в максимум квадратичную форму $\|A_i(t,x) - A_j(t,x)\|^2_{V^{ij}(t)}$. Наиболее просто оптимальная весовая матрица находится в случае, когда матрицы $B_i(t,x)$ пропорциональны: $B_i(t,x) = g_i B(t,x)$, $i = \overline{1,s}$, g_i – постоянные, не равные нулю. Тогда имеем

$$V^{ij}(t) = \frac{1}{max(g_i^2, g_j^2)}\left[B(n,x)B^T(n,x)\right]^{-1}, \quad 1 \leq i < j \leq s.$$

<u>Замечание I.I.</u> При постановке задачи классификации предполагалось, что известен вид матричной функции $B_i(t,x)$ для каждой гипотезы h_i. Предполагаемая процедура классификации работоспособна, однако, и в случае, когда некоторые или все матричные функции $B_i(t,x)$ неизвестны, но их элементы ограничены известными постоянными. Вид названных функций сказывается только на выборе весовых матриц. Пусть элементы матричной функции $B_i(t,x)B_i^T(t,x)$ ограничены величиной L_i. Тогда в процедуре классификации используются статистики (I.9) с весовой матрицей

$$V^{ij}(t) = E / max(L_i, L_j).$$

<u>Замечание I.2.</u> При рассмотрении случая одинаковых матриц $B_i(t,x)$ требовалась невырожденность матрицы BB^T. Если это условие нарушается, вместо $(BB^T)^{-1}$ в формулах (I.6) следует

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

использовать весовую матрицу V, удовлетворяющую условию $VBB^TV \le V$. При этом, очевидно, все свойства процедуры классификации сохранятся.

I.4. Классификация процессов авторегрессии

Проиллюстрируем полученные результаты на примере различения процессов авторегрессии p-го порядка. Такие процессы часто используются в качестве модельных в различных областях естествознания [13, 14, 172]. Пусть при истинности гипотезы h_i наблюдаемый скалярный случайный процесс $x = \{x(t)\}$ описывается рекуррентным уравнением

$$x(t+1) = \lambda_1^i x(t) + \ldots + \lambda_p^i x(t-p+1) + \sigma_i \xi_i(t+1), \quad \sigma_i \ne 0. \qquad (I.II)$$

Предполагается, что векторы $(\lambda_1^i, \ldots, \lambda_p^i)$ и $(\lambda_1^j, \ldots, \lambda_p^j)$ при $i \ne j$ различаются хотя бы по одной координате, т.е.

$$\max_{1 \le k \le p} |\lambda_k^i - \lambda_k^j| > 0 .$$

Исходные статистики $\{\varphi_{ij}^*(H)\}$ определяются в данном случае по формулам (I.9), в которых полагаем

$$V_{ij}(t,x) = \frac{1}{\max(\sigma_i^2, \sigma_j^2)}, \quad A_i(t,x) = \lambda_1^i x(t) + \ldots + \lambda_p^i x(t-p+1).$$

Покажем, что выполнено условие теоремы I.I, обеспечивающее конечную длительность процедуры. Это условие требует расходимости рядов

$$\sum_{t=1}^{\infty} c_{ij}^2(t,x) = +\infty, \quad 1 \le i < j \le s, \qquad (I.I2)$$

где

$$c_{ij}(t,x) = A_i(t,x) - A_j(t,x) = \nu_{ij}^1 x(t) + \ldots + \nu_{ij}^p x(t-p+1), \quad \nu_{ij}^\ell = \lambda_\ell^i - \lambda_\ell^j .$$

Воспользуемся следующей леммой, которая легко доказывается с помощью закона $0-1$ Колмогорова [78].

<u>ЛЕММА I.I</u>. Пусть $\{\zeta(t), t \ge 1\}$ – последовательность независимых случайных величин с $M\zeta(t) = 0$ и $M\zeta^2(t) = b^2 < \infty$. Тогда

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$P\left(\overline{\lim}\,|\zeta(t)|>\varepsilon\right)=1$$

для всех $0<\varepsilon<b^2$.

Пусть верна гипотеза h_k. Тогда процесс $c_{ij}(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$c_{ij}(t+1,x)=\lambda_1^k c_{ij}(t,x)+\ldots+\lambda_p^k c_{ij}(t-p+1)+\eta_{ij}^k(t+1),$$

где

$$\eta_{ij}^k(t)=\sigma_k\left[\nu_{ij}^1\xi^k(t)+\ldots+\nu_{ij}^p\xi^k(t-p+1)\right].$$

Так как

$$M_k\eta_{ij}^k(t)=0,\quad M_k\left[\eta_{ij}^k(t)\right]^2=\sigma_k^2\left[(\nu_{ij}^1)^2+\ldots+(\nu_{ij}^p)^2\right]\equiv æ_{ij}^k$$

и величины $\eta_{ij}^k(p),\ \eta_{ij}^k(2p),\ldots$ независимы, то по лемме I.I получаем

$$P_k\left(\overline{\lim_{t\to\infty}}\,|\eta_{ij}^k(t)|>\varepsilon\right)=1,\quad 0<\varepsilon<æ_{ij}^k.$$

Отсюда следует, что для бесконечного числа моментов t с вероятностью единица выполняется неравенство

$$\left|c_{ij}(t+1,x)-\lambda_1^k c_{ij}(t,x)-\ldots-\lambda_p^k c_{ij}(t-p+1,x)\right|>\varepsilon,$$

а, значит, одно из неравенств

$$|c_{ij}(t+1,x)|>\frac{\varepsilon}{p+1},\quad |\lambda_i^k c_{ij}(t-m+1,x)|>\frac{\varepsilon}{p+1},\quad m=\overline{1,p},$$

справедливо для бесконечного числа t, что и доказывает расходимость ряда (I.I2).

Таким образом, установлено, что предложенный критерий классификации позволяет различить процессы авторегрессии (независимо от того, устойчивы они или нет) за конечное время при любых рас-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

пределениях шумов.

С помощью результатов § 10 главы I можно найти также среднюю длительность процедуры классификации. Число наблюдений, используемых в процедуре, определяется величиной

$$\tau(H) = \max_{1 \le i < j \le s} \tau_{ij}(H),$$

где

$$\tau_{ij}(H) = \inf\left\{ t \geqslant 0 : \sum_{s=0}^{t} C_{ij}(s,x) \geqslant H \right\}.$$

В предположении, что плотность распределения ξ_t^{κ} симметрична и убывает при увеличении $|x|$, получим верхнюю оценку для средней продолжительности наблюдений. Учитывая, что при истинности гипотезы h_{κ}^{*}

$$M_{\kappa}\tau(H) \le \sum_{1 \le i < j \le s} M_{\kappa}\tau_{ij}(H),$$

оценим каждое слагаемое в последней сумме. Представим $C_{ij}(s,x)$ в виде

$$C_{ij}(s,x) = \left(\nu_{ij}^{\tau} x_{s-\tau+1} + \ldots + \nu_{ij}^{p} x_{s-p+1} \right)^2, \qquad (1.13)$$

где τ – номер первой координаты, по которой различаются векторы $(\lambda_1^i, \ldots, \lambda_p^i)$ и $(\lambda_1^j, \ldots, \lambda_p^j)$, т.е.

$$\tau = \tau(i,j) \doteq \min\left\{ 1 \le a \le p : \nu_{ij}^{a} \ne 0 \right\}.$$

Воспользуемся теоремой I.10.1. В данном случае естественно положить

$$W(s,z) \equiv \left(\nu_{ij}^{\tau} \right)^2 z^2, \quad \ell = \tau - 1,$$

$$\psi_{s-\ell-1} = \left[\nu_{ij}^{\tau+1} x_{s-\ell-1} + \ldots + \nu_{ij}^{p} x_{s-p+1} \right] / \nu_{ij}^{\tau},$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$W_0(s,z) = W(s, \sigma_k \cdot z) = (\nu_{ij}^{\tau} \sigma_k)^2 z^2.$$

Поскольку эти функции удовлетворяют всем условиям теоремы I.10.I, то

$$M_k \tau_{ij}(H) \leq M_k \eta_{ij}(H) + \tau(i,j), \quad \eta_{ij}(H) = \inf\left\{t \geq 1 : \sum_{s=1}^{t} \xi_s^2 \geq H / [\nu_{ij}^{\tau} \sigma_k]^2\right\}.$$

Используя (I.10.8), находим приближенную верхнюю границу для $M_k \tau_{ij}(H)$:

$$M_k \tau_{ij}(H) \leq \frac{H}{[\nu_{ij}^{\tau} \cdot \sigma_k]^2} + \tau(i,j),$$

а также для средней длительности процедуры

$$M_k \tau(H) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq s} \left[\tau(i,j) + H / (\nu_{ij}^{\tau} \sigma_k)^2\right].$$

В частности, если все векторы $(\lambda_1^i, \ldots, \lambda_p^i)$ различаются по первому параметру ($\tau(i,j) \equiv 1$), причем

$$\min_{1 \leq i < j \leq s} \left| \lambda_1^i - \lambda_1^j \right| = \Delta > 0, \quad \sigma_k^2 \equiv 1,$$

для средней длительности классификации s процессов авторегрессии получаем простую оценку

$$M_k \tau(H) \leq C_s^2 \left(1 + \frac{H}{\Delta}\right),$$

которая выполняется при истинности любой гипотезы h_k, $k = \overline{1,s}$.

Замечание I.3. Теорема I.I. указывает, как по заданной вероятности правильного решения выбрать параметр H, определяющий длительность процедуры. Рекомендуемое значение H является вообще говоря, завышенным, поскольку при оценке вероятности правильного решения используется неравенство Чебышева. В задаче

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

классификации устойчивых процессов авторегрессии (I.II) при выборе порога H может быть полезна теорема 1.6.2 . Согласно этой теореме статистики $\varphi^*_{ij}(H)$ нормализуются при больших значениях H, причем при истинности гипотезы h_k статистики $\{\varphi^*_{ik}(H),\ 1 \le i < k\}$ асимптотически нормальны с параметрами $(0, 1/H)$, а статистики $\{\varphi^*_{kj}(H),\ k < j \le s\}$ асимптотически нормальны с параметрами $(1, 1/H)$. Поэтому при больших H выполняется неравенство

$$P_k(\pi_k) \geqslant 1 - (s-1)\,\Phi\left(-\frac{\sqrt{H}}{2}\right).$$

Таким образом, чтобы обеспечить выполнение неравенства $P_k(\pi_k) \geqslant 1-\varepsilon$ при истинности любой гипотезы h_k, достаточно положить

$$H = 4\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{s-1}\right)\right]^2.$$

§ 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДОК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ РЕКУРРЕНТНОГО ТИПА

В этом параграфе, а также в двух следующих рассматриваются задачи обнаружения разладок случайных процессов. Такая задача возникает во многих практических ситуациях при оценивании момента появления полезного сигнала, при диагностике технических систем когда требуется скорейшим образом обнаружить нарушение нормального течения процесса и т.п. Теория обнаружения разладок насчитывает около двух десятилетий и продолжает интенсивно разрабатываться. Если на первых этапах развития этой теории преимущественно изучались задачи, относящиеся к схеме независимых наблюдений с полным статистическим описанием, то в последние годы все больший интерес вызывает непараметрический подход к задаче о разладке, при котором распределения процессов до и после разладки точно неизвестны, а предполагается только, что они принадлежат некоторым классам распределений. Наблюдается также тенденция к использованию для описания явления разладки зависимых случайных процессов.

2.I. Постановка задачи

Пусть наблюдаемый многомерный случайный процесс $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}^T$ описывается системой стохастических разностных уравнений

$$x(t+1) = A_1(t,x) + B_1(t,x)\xi(t+1), \quad t = 0, 1, \dots, \theta-1, \tag{2.I}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

до момента разладки θ и системой уравнений

$$x(t+1)=A_2(t,x)+B_2(t,x)\xi(t+1), \qquad t=\theta,\theta+1,\ldots, \tag{2.2}$$

начиная с момента θ. Здесь $\{\xi(t)\}$ – не зависящая от $x(0)$ последовательность s-мерных одинаково распределенных случайных векторов с $M\xi(t)=0$ и $M\xi(t)\xi^T(t)=E$; E – единичная матрица. Распределение $\xi(t)$ неизвестно. Элементы матричных функций $A_i(t,x)$ и $B(t,x)$ (размера $n\times 1$ и $n\times s$) могут зависеть от реализации процесса x до момента t включительно. Момент разладки θ может быть детерминированным или случайным. В последнем случае предполагается, что случайная величина θ имеет неизвестное распределение и не зависит от процесса $\{\xi(t)\}$ и $x(0)$. Задача состоит в том, чтобы построить последовательную процедуру обнаружения разладки момента θ.

2.2. Построение решающей процедуры

Начнем рассмотрение со случая, когда $B_i(t,x)=B(t,x)$ и момент разладки θ не случаен. Учитывая, что распределение процесса неизвестно, для оценивания θ естественно использовать метод наименьших квадратов. Предположим временно, что имеется достаточно длинная реализация процесса (длины N), включающая момент разладки. Тогда оценка θ определяется из условия минимума по m функционала

$$J(m)=\sum_{t=0}^{m-1}\left[x(t+1)-A_1(t,x)\right]^T(BB^T)^+(t,x)\left[x(t+1)-A_1(t,x)\right]+ \tag{2.3}$$

$$+\sum_{t=m}^{N}\left[x(t+1)-A_2(t,x)\right]^T(BB^T)^+(t,x)\left[x(t+1)-A_2(t,x)\right].$$

Этот функционал может быть преобразован в вид

$$J(m)=2\sum_{t=0}^{m-1}\left(A_2(t,x)-A_1(t,x)\right)^T(BB^T)^+(t,x)\left[x(t+1)-\frac{A_1(t,x)+A_2(t,x)}{2}\right]+C_N,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где

$$C_N = \sum_{t=0}^{N} \left[x(t+1) - A_2(t,x) \right]^T (BB^T)^+(t,x) \left[x(t+1) - A_2(t,x) \right].$$

С помощью уравнений (2.1), (2.2) получаем

$$J(m) = -\sum_{t=0}^{m\wedge\theta-1} \tau(t,x) + \sum_{t=\theta\wedge m}^{m-1} \tau(t,x) + C_N + 2\sum_{t=0}^{m-1} \eta(t+1),$$

где (2.4)

$$\tau(t,x) = \left[A_2(t,x) - A_1(t,x) \right]^T (BB^T)^+(t,x) \left[A_2(t,x) - A_1(t,x) \right];$$

$$\eta(t+1) = \left[A_2(t,x) - A_1(t,x) \right]^T (BB^T)^+(t,x) B(t,x) \xi(t+1);$$

$\theta \wedge m$ обозначает минимальную из величин θ и m.

Проанализируем поведение функционала $J(\cdot)$. В простейшем случае, когда шумы отсутствуют $(\eta(t) \equiv 0)$, $J(m)$ убывает при увеличении m от 0 до θ и возрастает после этого момента, причем приращение функционала $\Delta J(t) = J(t) - J(t-1) = \pm\, \tau(t,x)$ зависит от различия моделей процесса в момент t. Далее замечаем, что для оценивания момента разладки по методу наименьших квадратов не требуется проводить все N наблюдений процесса x, необходимые для вычисления $J(m)$, а достаточно следить лишь за приращениями функционала $\Delta J(t)$, которые находятся по текущим наблюдениям $x(0), \ldots, x(t)$. Присутствие шумов сказывается на поведении функционала $J(\cdot)$. Однако принципиальный вывод о том, что разладку с помощью метода наименьших квадратов можно обнаружить по приращениям $\Delta J(t)$ в текущем времени, остается верным и в этом случае. Естественно, что при наличии шумов выводы о разладке по отдельным значениям $\Delta J(t)$ являются ненадежными. Поэтому логично выделить некоторую возрастающую последовательность моментов $\{\tau_i,\ i \geq 0\}$ и принимать решения по приращениям $J(\tau_i) - J(\tau_{i-1})$. Выбором моментов τ_i можно

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

регулировать как вероятность ложных тревог, так и величину запаздывания в обнаружении разладки. Моменты τ_i, очевидно, должны выбираться с учетом различия конкурирующих моделей в отдельные моменты времени. В качестве меры близости моделей в момент t будем использовать величину $r(t,x)$, определяемую равенством (2.4). Пусть H – положительное число. Введем последовательность моментов $\{\tau_i(H),\ i \geq 0\}$ по формулам:

$$\tau_0(H)=0,\quad \tau_i(H)=\inf\Big\{k \geq \sigma_i(H) : \sum_{t=\sigma_i(H)}^{k} r(t,x) \geq H\Big\},\ i \geq 1;$$

$$\sigma_i(H)=\begin{cases} 0, & \text{если } i=1; \\ \tau_{i-1}(H)+1, & \text{если } i \geq 2. \end{cases} \tag{2.5}$$

Для конечности почти наверное величин τ_i ряд

$$\sum_{t=0}^{\infty} r(t,x)=+\infty \tag{2.6}$$

должен расходиться с вероятностью единица. С каждым интервалом $(\tau_{i-1},\tau_i]$ (i -м циклом наблюдений) свяжем статистику $y_i(H)$, определяемую равенствами:

$$y_i(H)=\frac{2}{H}\sum_{t=\sigma_i}^{\tau_i} \alpha_i(t)\Big[A_2(t,x)-A_1(t,x)\Big](BB^T)^{+}(t,x)\Big[x(t+1)-$$

$$-\frac{A_1(t,x)+A_2(t,x)}{2}\Big],\quad i \geq 1; \tag{2.7}$$

$$\alpha_i(t)=\begin{cases} 1, \text{ если } \sigma_i \leq t < \tau_i; \\ \Big[H-\sum_{s=\sigma_i}^{\tau_i-1} r(s,x)\Big] / r(\tau_i,x), \text{ если } t=\tau_i; \\ 0, \text{ если } t > \tau_i \text{ и } t < \sigma_i. \end{cases}$$

Эта статистика совпадает с приращением функционала $J(\cdot)$ на интервале $(\tau_{i-1},\tau_i]$ с точностью до постоянного множителя и последнего слагаемого, которое берется с весом $0 < \alpha_i(\tau_i) \leq 1$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Используя (2.I), (2.2), получим

$$y_i(H)=\begin{cases}-1+\varepsilon_i(H), & \text{если } \tau_i<\theta;\\ +1+\varepsilon_i(H), & \text{если } \tau_{i-1}\geq\theta;\end{cases} \tag{2.8}$$

$$\varepsilon_i(H)=\frac{2}{H}\sum_{t=\sigma_i}^{\tau_i}\alpha_i(t)\eta(t+1), \tag{2.9}$$

где $\eta(t+1)$ определяется формулой (2.4). В случае $\tau_{i-1}<\theta\leq\tau_i$ статистика $y_i(H)$ представляет собой сумму $\varepsilon_i(H)$ и некоторой случайной величины, не превосходящей по модулю единицы. Учитывая, что статистики $y_i(H)$ претерпевают скачок после разладки, процедуру обнаружения разладки естественно определить следующим образом. Зададим порог δ $(|\delta|<1)$ и при выполнении в i-м цикле неравенства

$$y_i(H)>\delta \tag{2.10}$$

будем принимать решение о разладке.
Решающая процедура обнаружения разладки построена.

2.3. Выбор параметров и исследование свойств решающей процедуры

При решении вопроса о выборе параметров процедуры H и δ будем исходить из того, что заданы допустимые вероятности ложной тревоги α и ложного спокойствия β в каждом цикле. Поэтому ограничимся рассмотрением множества пар (H,δ), удовлетворяющих неравенствам:

$$P_0^i(H,\delta)\leq\alpha\ ,\quad P_1^i(H,\delta)\leq\beta\ ,\ i\geq1, \tag{2.11}$$

где $P_0^i(H,\delta)$ и $P_1^i(H,\delta)$ - соответственно вероятности ложной тревоги и ложного спокойствия в i-м цикле. В этом множестве оптимальной является пара (H,δ) с минимальным значением H.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Такая пара, обеспечивая заданную надежность процедуры, приводит к минимальной длине цикла, а следовательно, и к минимальному запаздыванию в обнаружении момента разладки. Так же, как в [184], будем предполагать, что моменту появления разладки предшествует длительный процесс наблюдений. Тогда для большого числа циклов вероятность "захвата" момента разладки θ остается малой, т.е. $P\{\tau_i < \theta\}$ близка к единице. При этом условии верны формулы:

$$P_0^i(H,\delta) = \lim_{\theta\to\infty} P\{y_i(H) > \delta \mid \tau_i < \theta\} = P\{\varepsilon_i(H) > 1+\delta\}; \tag{2.12}$$

$$P_1^i(H,\delta) = P\{y_i(H) < \delta \mid \tau_{i-1} \geq \theta\} =$$

$$= P\{\varepsilon_i(H) < -1+\delta \mid \tau_{i-1} \geq \theta\}.$$

Поскольку точные значения этих вероятностей не могут быть найдены при сделанных предположениях относительно наблюдаемого процесса, получим верхние оценки вероятностей (2.12) и для них решим поставленную задачу параметрической процедуры. Полученная в результате процедура будет обладать требуемой надежностью (2.11).

<u>ТЕОРЕМА 2.1</u>. Пусть для процесса (2.1), (2.2) выполнено условие (2.6). Тогда:

1°. Для любой пары (H,δ), $H>0$, $-1<\delta<1$, справедливы неравенства:

$$P_0^i(H,\delta) \leq \frac{4}{H(\delta+1)^2}; \quad P_1^i(H,\delta) \leq \frac{4}{H(\delta-1)^2}. \tag{2.13}$$

2°. Для любой пары (α,β), $0<\alpha,\ \beta<1$, последовательная процедура (2.7), (2.10) с параметрами:

$$H^* = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2; \quad \delta^* = \frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} \tag{2.14}$$

имеет вероятность ложной тревоги не больше, чем α, и вероятность ложного спокойствия не больше, чем β.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

3°. Для пары (H^*, δ^*) среднее число циклов между ложными тревогами N_0 и среднее число циклов запаздывания в обнаружении разладки N_1 удовлетворяет неравенствам:

$$N_0 \geq \frac{1}{\alpha}\ ; \quad N_1 \leq \frac{1}{1-\beta}\ . \tag{2.15}$$

<u>Доказательство теоремы 2.1</u>. Нам потребуется следующая

<u>ЛЕММА 2.1</u>. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ заданы: а) неубывающая система σ-подалгебр $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$; б) σ – конечный марковский момент относительно $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$; в) $\{\eta_n\}_{n\geq 0}$ и $\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ – согласованные с $\{\mathcal{F}_n\}$ последовательности случайных величин, такие, что

$$M[\eta_{\sigma+k+1} | \mathcal{F}_{\sigma+k}] = 0,\ M[\eta^2_{\sigma+k+1} | \mathcal{F}_{\sigma+k}] \leq \tau_{\sigma+k}\ ,\ k \geq 0, \tag{2.16}$$

причем с вероятностью единица $\sum_{k\geq 0} \tau_k = +\infty$. Тогда для момента τ_σ, определяемого по формуле

$$\tau_\sigma = \inf\{k \geq \sigma : \sum_{j=\sigma}^{k} \tau_j \geq H\}\ ,\ \tau_\sigma = \inf\{\varnothing\} = +\infty,$$

при любом $H > 0$ имеют место соотношения:

$$M\Big[\sum_{k=\sigma}^{\tau_\sigma} \alpha(k;\sigma,\tau_\sigma)\, \eta_{k+1} \,\Big|\, \mathcal{F}_\sigma\Big] = 0;$$

$$M\Big[\Big(\sum_{k=\sigma}^{\tau_\sigma} \alpha(k;\sigma,\tau_\sigma)\, \eta_{k+1}\Big)^2 \,\Big|\, \mathcal{F}_\sigma\Big] \leq H, \tag{2.17}$$

где

$$\alpha(k;\sigma,\tau_\sigma) = \begin{cases} 1, \text{ если } \sigma \leq k < \tau_\sigma; \\ \Big[H - \sum_{j=\sigma}^{\tau_\sigma - 1} \tau_j\Big] / \tau_{\tau_\sigma}\ , \text{ если } k = \tau_\sigma; \\ 0, \text{ если } k > \tau_\sigma; \end{cases}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$\mathcal{F}_\sigma$ – σ -алгебра событий, наблюдаемых до момента σ .

Доказательство леммы 2.1. Будем использовать свойства марковских моментов [185]. Система σ -алгебр $\{\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{\sigma+1}, \dots\}$ является монотонно неубывающей, а τ_σ – марковский момент относительно этой системы. Для проверки условия марковости момента τ_σ :

$$[\tau_\sigma \le k] \in \mathcal{F}_{\sigma+k}, \quad k \ge 0,$$

требуется показать, что для любого k имеет место включение

$$[\tau_\sigma \le k] \cap [\sigma + k = \ell] \in \mathcal{F}_\ell, \quad \ell \ge k.$$

Это включение следует из равенства

$$[\tau_\sigma \le k] \cap [\sigma + k = \ell] = \left\{ \sum_{j=\sigma}^{k} \tau_j \ge H \right\} \cap [\sigma = \ell - k],$$

условия согласованности последовательности $\{\tau_n\}$ и марковости момента σ . Введем усеченный марковский момент $\bar{\tau}_\sigma = \min(\tau_\sigma, N)$ и обозначим

$$T_N = \sum_{k=\sigma}^{\bar{\tau}_\sigma} \alpha(k; \sigma, \tau_\sigma)\, \eta_{k+1}.$$

Докажем сначала, что

$$M[T_N | \mathcal{F}_\sigma] = 0 \quad \text{и} \quad M[T_N^2 | \mathcal{F}_\sigma] \le H. \tag{2.18}$$

Имеем

$$M[T_N^2 | \mathcal{F}_\sigma] = M\left[\sum_{k=\sigma}^{\bar{\tau}_\sigma} \sum_{\ell=\sigma}^{\bar{\tau}_\sigma} \alpha(k; \sigma, \tau_\sigma)\alpha(\ell; \sigma, \tau_\sigma)\eta_{k+1}\eta_{\ell+1} \,\Big|\, \mathcal{F}_\sigma \right] =$$

$$= M\left[\sum_{k=\sigma}^{\bar{\tau}_\sigma} \alpha^2(k; \sigma, \tau_\sigma)\, \eta_{k+1}^2 \,\Big|\, \mathcal{F}_\sigma \right] + \tag{2.19}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$+2M\Big[\sum_{\sigma\le k<l\le\bar\tau_\sigma}\alpha(k;\sigma,\tau_\sigma)\alpha(l;\sigma,\tau_\sigma)\eta_{k+1}\eta_{l+1}\,\Big|\,\mathcal{F}_\sigma\Big].$$

Рассмотрим первое слагаемое. Используя свойства условных математических ожиданий, условия (2.16) и учитывая, что $0<\alpha\le 1$, получаем

$$M\Big[\sum_{k=\sigma}^{\bar\tau_\sigma}(\cdot)\,\Big|\,\mathcal{F}_\sigma\Big]=$$

$$=M\Big\{\sum_{k=0}^{N}\alpha^2(\sigma+j;\sigma,\tau_\sigma)\,\eta^2_{\sigma+j+1}\,\chi_{[\sigma+j\le\bar\tau_\sigma]}\,\Big|\,\mathcal{F}_\sigma\Big\}=$$

$$=\sum_{j=0}^{N}M\Big\{\alpha^2(\sigma+j;\sigma,\tau_\sigma)\,\chi_{[\sigma+j\le\bar\tau_\sigma]}\,M(\eta^2_{\sigma+j+1}\,|\,\mathcal{F}_\sigma)\Big\}\le$$

$$\le\sum_{j=0}^{N}M\Big\{\alpha(\sigma+j;\sigma,\tau_\sigma)\,\tau_{\sigma+j}\,\chi_{[\sigma+j\le\bar\tau_\sigma]}\,\Big|\,\mathcal{F}_\sigma\Big\}=$$

$$=M\Big[\sum_{k=\sigma}^{\bar\tau_\sigma}\alpha(k;\sigma,\tau_\sigma)\,\tau_k\,\Big|\,\mathcal{F}_\sigma\Big]\le$$

$$\le M\Big[\sum_{k=\sigma}^{\tau_\sigma}\alpha(k;\sigma,\tau_\sigma)\,\tau_k\,\Big|\,\mathcal{F}_\sigma\Big]=H.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Последнее равенство выполняется в силу выбора весовой функции $\alpha(k;\sigma,\tau_\sigma)$. Аналогично показывается, что второе слагаемое в (2.19) и $M[T_N|\mathcal{F}_\sigma]$ равны нулю. Таким образом, установлены соотношения (2.18), из которых с помощью предельного перехода при $N\to\infty$ получаются утверждения леммы 2.1. Лемма 2.1 доказана.

1. Воспользуемся леммой 2.1 для доказательства утверждения 1°. В качестве $\mathcal{F}_n$ возьмем σ-алгебру, порожденную случайными векторами $x(0),\xi(1),\dots,\xi(n)$, и проверим, что для последовательностей $\{\tau(n,x),\ n\geq 0\}$ и $\{\eta(n),\ n\geq 1\}$, определяемых формулами (2.4), выполнены условия леммы 2.1. Условие согласованности очевидно. Далее имеем

$$M[\eta_{\sigma+k+1}|\mathcal{F}_{\sigma+k}]=$$
$$=[A_2(\sigma+k,x)-A_1(\sigma+k,x)]^T(B^T)^+(\sigma+k,x)M[\xi(\sigma+k+1)|\mathcal{F}_{\sigma+k}];\tag{2.20}$$
$$M[\eta^2_{\sigma+k+1}|\mathcal{F}_{\sigma+k}]=$$
$$=[A_2(\sigma+k,x)-A_1(\sigma+k,x)]^T(B^T)^+(\sigma+k,x)M[\xi(\sigma+k+1)\times$$
$$\times\xi^T(\sigma+k+1)|\mathcal{F}_{\sigma+k}].$$

Для последовательности независимых одинаково распределенных векторов $\{\xi(n),\ n\geq 1\}$ выполняется строго марковское свойство [42]. Поэтому

$$M[\xi(\sigma+k+1)|\mathcal{F}_{\sigma+k}]=M[\xi(1)|\mathcal{F}_0]=M\xi(1)=0,\quad \mathcal{F}_0=\sigma\{x(0)\};$$
$$M[\xi(\sigma+k+1)\xi^T(\sigma+k+1)|\mathcal{F}_{\sigma+k}]=\tag{2.21}$$
$$=M[\xi(1)\xi^T(1)|\mathcal{F}_0]=M[\xi(1)\xi^T(1)]=E.$$

Из (2.20), (2.21) следуют соотношения (2.16) и справедливость утверждений леммы 2.1 для последовательностей (2.4). Последова-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

тельность моментов $\{\tau_i, i \geq 0\}$ по определению является марковской относительно введенной системы σ -алгебр. Учитывая это, из соотношений (2.17) при $\sigma = \sigma_i$ для величины $\varepsilon_i(H)$, определяемой равенством (2.9), получаем

$$M[\varepsilon_i(H) | \mathcal{F}_{\sigma_i}] = 0, \quad M[\varepsilon_i^2(H) | \mathcal{F}_{\sigma_i}] \leq \frac{4}{H}. \qquad (2.22)$$

Отсюда и из (2.12) следует первое из неравенств в утверждении I°. Для доказательства второго неравенства (2.13) требуются дополнительные построения. Обозначим ν номер цикла, захватившего момент разладки, т.е.

$$\nu = \inf\{j \geq 1 : \tau_j \geq \theta\}.$$

Случайная величина ν является марковским моментом относительно системы σ -алгебр $\{\mathcal{F}_{\tau_k}, k \geq 0\}$. Для проверки условия марковости требуется показать, что для каждого j $(j \geq 0)$ имеет место включение

$$[\nu = j] \cap [\tau_j = \ell] \in \mathcal{F}_\ell, \quad \ell \geq 0.$$

Это включение следует из равенства

$$[\nu = j] \cap [\tau_j = \ell] = [\tau_1 < \theta, \ldots, \tau_{j-1} < \theta, \tau_j \geq \theta] \cap [\tau_j = \ell]$$

и марковости моментов τ_j относительно системы $\{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$. Оценим вероятность $P_1^i(H, \delta)$. Очевидно, что

$$P_1^i(H, \delta) = P\{\varepsilon_i(H) \leq \delta - 1 | \tau_{i-1} \geq \theta\} \leq P\{|\varepsilon_i(H)| > 1 - \delta | \tau_{i-1} \geq \theta\}.$$

Так как

$$\{\tau_{i-1} \geq \theta\} = \{\nu \leq i - 1\} \in \mathcal{F}_{\tau_{i-1}} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma_i},$$

то, используя определение условной вероятности, неравенство Чебышева и (2.22), получаем

$$P\{|\varepsilon_i(H)| > 1 - \delta, \tau_{i-1} \geq \theta\} =$$

$$= \int_{\{\tau_{i-1} \geq \theta\}} P\{|\varepsilon_i(H)| > 1 - \delta | \mathcal{F}_{\sigma_i}\} dP \leq \frac{4}{H(1-\delta)^2} P\{\tau_{i-1} \geq \theta\}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Отсюда и из (2.12) следует второе неравенство (2.13). Утверждение 1^0 доказано.

2. Для доказательства утверждения 2^0 достаточно убедиться, что во множестве пар (H,δ), удовлетворяющих неравенствам:

$$\frac{4}{H(\delta+1)^2} \le \alpha, \qquad \frac{4}{H(\delta-1)^2} \le \beta,$$

пара (H^*,δ^*) имеет минимальное значение H.

3. Оценим сначала N_1. Обозначим n_1 число циклов запаздывания в обнаружении разладки. Воспользуемся формулой

$$N_1 = Mn_1 = \sum_{k\ge 0} P\{n_1 > k\}.$$

Докажем вспомогательное неравенство

$$P\{n_1 > k\} \le \frac{4}{(\delta^*-1)^2 H^*} P\{n_1 > k-1\}. \tag{2.23}$$

По определению имеем

$$\begin{aligned} P\{n_1>k\} &= P\{\varepsilon_{\nu+1} < \delta^*-1, \dots, \varepsilon_{\nu+k} < \delta^*-1\} = \\ &= \sum_{j\ge 1} P\{\varepsilon_{\nu+1} < \delta^*-1, \dots, \varepsilon_{\nu+k} < \delta^*-1, \nu=j\} = \\ &= \sum_{j\ge 1} P\{\varepsilon_{j+1} < \delta^*-1, \dots, \varepsilon_{j+k} < \delta^*-1, \nu=j\}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Далее находим

$$\begin{aligned} &P\{\varepsilon_{j+1} < \delta^*-1, \dots, \varepsilon_{j+k} < \delta^*-1, \nu=j\} = \\ &= \int\limits_{\{\varepsilon_{j+1} < \delta^*-1, \dots, \varepsilon_{j+k} < \delta^*-1, \nu=j\}} P\{\varepsilon_{j+k} < \delta^*-1 \mid \mathcal{F}_{\varepsilon_{j+k}}\}\, dP \le \\ &\le \frac{4}{(\delta^*-1)^2 H^*} P\{\varepsilon_{j+1} < \delta^*-1, \dots, \varepsilon_{j+k-1} < \delta^*-1, \nu=j\}. \end{aligned}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Отсюда и из (2.24) следует неравенство (2.23). Применяя неравенство (2.23) повторно, получаем

$$P\{n_1 > k\} \leq \left[\frac{4}{(\delta^* - 1)^2 H^*}\right]^k .$$

После суммирования приходим к требуемой оценке

$$N_1 \leq \frac{1}{1 - \frac{4}{(\delta^* - 1)^2 H^*}} = \frac{1}{1 - \beta} .$$

При выводе нижней оценки (2.15) для среднего количества циклов между ложными тревогами предполагается, что разладке предшествует длительный процесс наблюдений. Пусть μ – номер последнего цикла, в котором произошла ложная тревога, а n_0 – количество циклов, через которое ложная тревога повторится. Тогда

$$N_0 = M_\mu n_0 = \sum_{k \geq 0} P_\mu\{n_0 > k\}.$$

По определению n_0, используя (2.22), получаем

$$P_\mu\{n_0 > k\} = P_\mu\{\varepsilon_{\mu+1} < \delta^* + 1, \ldots, \varepsilon_{\mu+k} < \delta^* + 1\} =$$

$$= \int\limits_{\{\varepsilon_{\mu+1} < \delta^* + 1, \ldots, \varepsilon_{\mu+k-1} < \delta^* + 1\}} P_\mu\{\varepsilon_{\mu+k} < \delta^* + 1 \mid \mathcal{F}_{\sigma_{\mu+k}}\} dP \geq$$

$$\geq \left[1 - \frac{4}{H^*(\delta^* + 1)^2}\right] P_\mu\{n_0 > k - 1\}.$$

Отсюда

$$P_\mu\{n_0 > k\} \geq \left[1 - \frac{4}{H^*(\delta^* + 1)^2}\right]^k$$

и, следовательно,

$$N_0 \geq \frac{1}{\frac{4}{H^*(\delta^* + 1)^2}} = \frac{1}{\alpha} .$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Теорема 2.I доказана.

Замечание 2.I. Выше предполагалось, что заданы допустимые вероятности ложной тревоги и ложного спокойствия и при этих условиях производилась оптимизация параметров процедуры. Можно рассмотреть другой вариант задачи оптимизации. Введем функции:

$$Q(t_1, t_2) = \sum_{s=t_1}^{t_2} z(s,x) \; ; \quad Q'(t_1, t_2) = \sum_{s=t_1}^{t_2}{}' z(s,x) ,$$

где $t_1 \leq t_2$, штрих у знака второй суммы означает, что величина $z(s,x)$ берется с весом $\alpha_i(\tau_i)$, если $s = \tau_i$, $i = 1,2,\ldots$. Первая из этих сумм определяет суммарное различие между конкурирующими моделями (2.I), (2.2), накапливаемое на интервале наблюдений $[t_1, t_2]$; вторая совпадает с первой с точностью до отдельных слагаемых, взятых с весами. Пусть t' и t'' - моменты соседних ложных тревог, $t' < t''$, а t_3 - время запаздывания в обнаружении момента разладки θ. Тогда, используя теорему 2.I и определение моментов τ_i, получаем неравенства:

$$MQ(t', t'') \geq N_0 H^* \geq \frac{H^*}{\alpha} = T_0(\alpha, \beta);$$

$$MQ'(\theta, \theta + t_3) \leq N_1 H^* \leq \frac{H^*}{1-\beta} = T_1(\alpha, \beta) .$$

Зафиксируем величину $T_0(\alpha,\beta)$, нижнюю оценку среднего суммарного различия моделей, накапливаемого между ложными тревогами, и найдем параметры α и β из условия минимума $T_1(\alpha,\beta)$, верхней границы для среднего суммарного различия моделей, накапливаемого после разладки. Разрешив уравнение

$$T_0 = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\beta}\right)^2$$

относительно β и подставляя β в T_1, получим

$$T_1(\alpha, \beta) = \frac{T_0 \alpha}{1 - \dfrac{\alpha}{(\alpha\sqrt{T_0} - 1)^2}} . \qquad (2.25)$$

Оптимальное значение α определяется из уравнения

$$(\alpha\sqrt{T_0} - 1)^3 = 2\alpha^2\sqrt{T_0} .$$

Параметрическое решение этого уравнения имеет вид

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\alpha = \frac{u}{\sqrt{T_0}}, \quad \sqrt{T_0} = \frac{2u^2}{(u-1)^3}. \tag{2.26}$$

Используя найденное α и соответствующее ему β в (2.14), получим параметры процедуры, являющейся решением поставленной задачи. Отметим, что в частном случае, когда $\tau(s,x) = \tau_0$ до момента разладки θ и $\tau(s,x) = \tau_1$ для $s \geq \theta$, величина $MQ(t',t'')/\tau_0$ определяет среднее время между ложными тревогами, а величина $MQ'(\theta,\theta+t_3)/\tau_1$ – среднее время запаздывания в обнаружении разладки.

2.4. Обнаружение разладки в случае неодинаковых дисперсионных матриц

Если в уравнениях (2.1), (2.2) матрицы $B_i(t,x)$ различны, в построение процедуры обнаружения разладки требуется внести некоторые изменения. Прежде всего за основу берется обобщенный метод наименьших квадратов. При этом в критерий (2.3) и во все последующие формулы вместо $(BB^T)^+$ подставляется специальная весовая матрица V. Для сохранения свойств решающей процедуры, указанных в теореме 2.1, достаточно выбрать матрицу V так, чтобы выполнялись неравенства (2.16). В данном случае согласно (2.4) имеем

$$\eta_{t+1} = \begin{cases} \psi^T(t,x)V(t,x)B_1(t,x)\xi(t+1), & \text{если } t < \theta; \\ \psi^T(t,x)V(t,x)B_2(t,x)\xi(t+1), & \text{если } t \geq \theta, \end{cases}$$

$$\psi(t,x) = A_2(t,x) - A_1(t,x); \quad \tau(t,x) = \psi^T(t,x)V(t,x)\psi(t,x).$$

Рассмотрим класс весовых матриц $V(t,x)$, удовлетворяющих одновременно неравенствам:

$$\psi^T V B_i B_i^T V^T \psi \leq \psi^T V \psi, \quad i = 1,2,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

а также условию (2.6). Для каждой такой матрицы выполняется требование (2.16), а значит, остается в силе и утверждение теоремы 2.1. В указанном классе весовых матриц оптимальной является матрица V, максимизирующая $\tau(t,x)$, поскольку она минимизирует длину текущего цикла. Обозначив $z = V^T\psi$, приходим к задаче максимизации линейной формы

$$z^T\psi \to max$$

на пересечении двух эллипсоидов, определяемых неравенствами:

$$z^T B_i B_i^T z \leq z^T\psi, \quad i = 1,2 . \tag{2.27}$$

Вектор z, являющийся решением этой задачи, может непосредственно использоваться в процедуре, поскольку во всех формулах матрица V участвует только в сочетании $V^T\psi = z$. В общем случае нахождение оптимального z довольно трудоемко.

Ограничимся рассмотрением частного случая, когда матрицы B_1 и B_2 пропорциональны: $B_2 = \rho B_1$, $\rho \neq 0$. При этом условия (2.27) заменяются неравенством

$$z^T BB^T z \leq z^T\psi, \quad BB^T = B_1 B_1^T max(1, \rho^2),$$

и с помощью теоремы Куна-Таккера [5] получаем оптимальную весовую матрицу

$$V = (B_1 B_1^T)^+ min\left(1, \frac{1}{\beta^2}\right).$$

При замене (2.13) и (2.14) на соотношения:

$$P_0^i(H,\delta) \leq \frac{4}{H(\delta+1)^2} min\left(1, \frac{1}{\rho^2}\right);$$

$$P_1^i(H,\delta) \leq \frac{4}{H(\delta-1)^2} min(1, \rho^2); \tag{2.28}$$

$$\delta^* = \frac{\sqrt{\beta} - |\rho|\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta} + |\rho|\sqrt{\alpha}}, \quad H^* = min(H_1, H_2);$$

$$H_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{|\rho|}{\sqrt{\beta}}\right)^2; \quad H_2 = \left(\frac{1}{|\rho|\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

утверждение теоремы 2.1 остается справедливым.

Замечание 2.2. При построении процедуры обнаружения разладки и исследовании ее свойств предполагалось, что момент разладки θ является детерминированным. Все полученные результаты, однако, сохраняются и для случайного момента θ, если θ удовлетворяет требованиям, указанным в постановке задачи. Для этого требуется добавить случайную величину θ в условия при рассмотрении всех вероятностей и математических ожиданий.

Проиллюстрируем полученные результаты на конкретном примере.

2.5. Обнаружение разладки процесса авторегрессии

Пусть наблюдаемый скалярный процесс $x(t)$ является процессом авторегрессии первого порядка и описывается уравнением

$$x(t+1)=\lambda_1 x(t)+a_1\xi(t+1) \tag{2.29}$$

до момента разладки θ и уравнением

$$x(t+1)=\lambda_2 x(t)+a_2\xi(t+1), \tag{2.30}$$

начиная с момента θ. В этом случае процедура обнаружения разладки определяется формулами (2.5), (2.10), причем

$$r(t,x)=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2 x^2(t)}{a^2}, \qquad a^2=\max(a_1^2,a_2^2);$$

$$y_i(H)=\frac{2(\lambda_2-\lambda_1)}{a^2 H}\sum_{t=\sigma_i}^{\tau_i}\alpha_i(t)x(t)\left[x(t+1)-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}x(t)\right].$$

Оптимальные значения параметров H^* и δ^*, отвечающие вероятностям ложной тревоги α и ложного спокойствия β, даются равенствами (2.28) при $\rho=a_2/a_1$. Используя результаты § 5, можно оценить среднюю продолжительность цикла до и после разладки. Если процессы (2.29), (2.30) устойчивы $(|\lambda_i|<1,\ i=1,2)$, то соответственно получаем

$$\varkappa_0=M_0(\tau_i-\tau_{i-1})\approx\frac{H^* a^2(1-\lambda_1^2)}{a_1^2(\lambda_1-\lambda_2)^2};\quad \varkappa_1=M_1(\tau_i-\tau_{i-1})\approx\frac{H^* a^2(1-\lambda_2^2)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2 a_2^2}.$$

Отсюда и из (2.15) следуют приближенные формулы для среднего времени между ложными тревогами T и среднего времени запаздывания T_1:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$T_0 \geq \frac{H^* a^2(1-\lambda_1^2)}{\alpha a_1^2(\lambda_1-\lambda_2)^2}\ ; \quad T_1 \leq \frac{H^* a^2(1-\lambda_2^2)}{(1-\beta)(\lambda_1-\lambda_2)^2 a_2^2}\ . \qquad (2.31)$$

Пусть, например, $\lambda_1=0$ (т.е. до разладки наблюдается "чистый" шум), $\lambda_2=0{,}7$; $a_1=1$, $a_2=1{,}5$ и $\alpha=0{,}1$; $\beta=0{,}3$. Тогда по формулам (2.28) получаем $H^*=15{,}48$; $\delta^*=0{,}134$. При этом согласно (2.31) ложные тревоги появляются в среднем не чаще, чем одна на 700 наблюдений, а среднее время запаздывания не превышает 23 наблюдений.

Замечание 2.3. При больших H с помощью теоремы 1.6.2 можно уточнить значения вероятностей α и β. Согласно этой теореме шумы $\varepsilon_i(H)$ приближенно нормальны с параметрами $(0;\ 4\cdot a_1^2/a^2H)$ до момента разладки и с параметрами $(0;\ 4a_2^2/a^2\cdot H)$, начиная с момента разладки. В частности, при тех же параметрах процедуры $\delta^*=0{,}134$, $H^*=15{,}48$, получаем

$$\alpha = 1-\Phi\left(\frac{(1+\delta^*)\sqrt{H^*}}{2}\right) = 1-\Phi(2{,}231) = 0{,}013\ ;$$

$$\beta = \Phi\left((\delta^*-1)\sqrt{H^*}/\sqrt{4/2{,}25}\right) = \Phi(-2{,}555) = 0{,}0054\ .$$ Отсюда и из (2.31) следует, что ложные тревоги появляются в среднем не чаще, чем одна на 7000 наблюдений, а среднее время запаздывания не превышает 16 наблюдений.

2.6. Экспериментальное исследование алгоритма

Как показало численное моделирование, предлагаемый алгоритм обнаружения разладки может эффективно использоваться для обнаружения как одиночной разладки, так и серии разладок указанного типа. Проиллюстрируем это на примере, взятом из работы [111]. В [111] был описан алгоритм определения моментов изменения свойств гауссовского процесса авторегрессии второго порядка

$$x(t+1) = \lambda_1 x(t) + \lambda_2 x(t-1) + \xi(t+1)$$

с параметрами $\lambda_2=-0{,}7$; $M\xi(t)=0$, $M\xi^2(t)=1$.

В моменты $t_i = i\cdot 50$, $i=0,1,\ldots,17$ производилась смена значений параметра λ_1 в порядке, указанном в табл. 4. Оценки моментов разладок t_i, найденные в [111], приведены в табл. 5. Здесь же даются оценки моментов разладок, полученные с помощью предлагаемого алгоритма: $\underline{t}_i$ и $\overline{t}_i$ обозначают начало и конец интервала, на котором принято решение о разладке; t_i^* –

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Таблица 4

Значения параметра авторегрессии в зависимости от номера интервала

i	0	I	2	3	4	5	6	7	8
λ_1	-0,I	0,9	-0,9	0,9	-0,I	0,9	-0,9	0,9	-0,I
i	9	I0	II	I2	I3	I4	I5	I6	I7
λ_1	0,9	-0,9	0,9	-0,I	0,9	-0,9	-0,I	0,9	-0,9

Таблица 5

Моменты разладок процесса авторегрессии и их оценки

t_i	$\hat{t}_i$	t_i^*	$\underline{t}_i$	$\bar{t}_i$	t_i	$\hat{t}_i$	t_i^*	$\underline{t}_i$	$\bar{t}_i$
50	50	56	49	66	500	505	500	499	50I
I00	9I	I00	98	I02	550	55I	556	554	559
I50	I50	I5I	I50	I53	600	600	608	602	6I4
200	I99	202	I95	2I0	650	650	656	648	664
250	25I	255	249	262	700	700	705	702	708
300	300	304	299	309	750	740	74I	726	757
350	350	353	350	356	800	800	797	785	8I0
400	404	404	395	4I3	850	850	853	850	857
450	453	453	447	459					

середина этого интервала. В процедуре (2.5), (2.I0) были выбраны параметры: $H^* = 25$ и $\delta^* = 0{,}26$, которые гарантируют вероятность ложной тревоги $\alpha = 0{,}1$ и вероятность ложного спокойствия $\beta = 0{,}3$. Как видно из табл. 5, оба алгоритма дают хорошую точность оценивания моментов разладки. Следует, однако, заметить, что в [111] оценивание разладок начиналось по накоплении I000 наблюдений процесса, причем использовалась информация о том, что на интервале наблюдений произошло I7 разладок. В предлагаемом алгоритме оценки разладок производятся по текущим наблюдениям процесса. При этом не требуется хранить в памяти всю реализацию процесса и иметь априорную информацию о числе разладок на интервале наблюдений. Кроме того, предлагаемый алгоритм является более быстродействующим. Так, для рассматриваемого примера время вычисления в [111] составило примерно I,6 минуты на ЦВМ

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ЕЭСМ-6. При реализации предлагаемого алгоритма потребовалась одна минута счета на ЦВМ ЕС-1020, которая примерно в 50 раз уступает ЕЭСМ-6 по быстродействию.

§ 3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДОК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ РЕКУРРЕНТНОГО ТИПА ПРИ МНОГОАЛЬТЕРНАТИВНОЙ КОНЕЧНОЙ МОДЕЛИ

В предыдущем параграфе был разработан метод обнаружения разладок в динамических системах, описываемых стохастическими уравнениями. Предполагалось, что модель объекта как до, так и после разладки известна. Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда модель объекта после разладки неизвестна, но указано конечное множество моделей, одна из которых описывает процесс наблюдений, начиная с момента разладки.

3.1. Постановка задачи

Пусть наблюдаемый векторный случайный процесс $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ описывается системой стохастических разностных уравнений

$$x(t+1) = A(t, x; \lambda(t)) + B(t, x)\,\xi(t+1), \quad t = 0, 1, \dots . \qquad (3.1)$$

Здесь $\lambda(t)$ – функция разладки; $\lambda(t) = 0$ до момента разладки θ, в момент разладки функция принимает одно из значений $1, \dots, s$, которое в дальнейшем не изменяется. Момент разладки θ и значение $\lambda(\theta)$ могут быть детерминированными или случайными. В последнем случае предполагается, что пара $(\theta, \lambda(\theta))$ случайных величин имеет неизвестное распределение и не зависит от процесса $\{\xi(t)\}$ и $x(0)$. Функции $A(t, x; \lambda(t))$ и $B(t, x)$ в момент t могут зависеть от $x(0), \dots, x(t)$. Шумовой процесс $\{\xi(t)\}$ является последовательностью независимых одинаково распределенных n-мерных случайных векторов с $M\xi(t) = 0$ и $M\xi(t)\xi^T(t) = E$. Распределение $\xi(t)$ неизвестно. Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям процесса $x(t)$ оценить момент разладки θ и определить модель процесса после разладки, т.е. значение $\lambda(\theta)$.

3.2. Построение решающей процедуры

Предположим, что пара $(\theta, \lambda(\theta))$ является детерминированной

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и матрица BB^T не вырождена. Исходя из имеющейся априорной информации относительно момента разладки θ, естественно ограничиться рассмотрением процедур обнаружения разладки циклического типа. В общем случае такая процедура задается двумя последовательностями $\{\sigma_i, i \geq 1\}$ и $\{\varphi_i, i \geq 1\}$, где $0=\sigma_0<\sigma_1<\ldots$ – возрастающая последовательность моментов времени ($\sigma_i = 0,1,\ldots$), с помощью которой наблюдаемый процесс $\{x_t, t \geq 0\}$ разбивается на циклы $x_i=(x_{\sigma_{i-1}},\ldots,x_{\sigma_i})$, $i \geq 1$; φ_i – решающая функция, определяющая по наблюдениям i-го цикла, x_i принимаемое решение из множества решений $\Delta = \{d_0,\ldots,d_s\}$; если $\varphi_i=d_0$, то в i-м цикле выносится решение об отсутствии разладки; если $\varphi_i = d_\ell$, $\ell \geq 1$, то в i-м цикле принимается решение о разладке, причем указывается что конечной моделью является процесс (3.I) при $\lambda=\ell$. Будем предполагать, что при вынесении решения о наличии разладки производится проверка правильности этого решения. Если разладка не подтверждается, наблюдения продолжаются. При построении решающей процедуры обнаружения разладки используются различные методы. В детерминированном случае, когда функции A и B в (3.I) не зависят от наблюдений, задача обнаружения разладки, как правило, сводится к повторному решению задачи проверки гипотез. Такой подход может быть использован и в общем случае, однако исследование свойств процедуры при этом значительно усложняется. Подобная ситуация возникает даже при гауссовских шумах $\xi(t)$, когда проверка гипотез осуществляется с помощью критерия максимального правдоподобия. Остановимся на этом подробнее, поскольку процедура обнаружения разладки, основанная на критерии максимального правдоподобия, является прототипом предлагаемой ниже процедуры. Обозначим $f_j(x(\sigma_{i-1}+1),\ldots,x(\sigma_i))$ условную плотность наблюдений в i-м цикле при условии, что значения всех предыдущих наблюдений фиксированы и наблюдаемый процесс $x(t)$ в i-м цикле описывается уравнением (3.I) с $\lambda(t)=j$. В случае гауссовских шумов $\xi(t)$ эта плотность записывается в виде

$$f_j(x(\sigma_{i-1}+1),\ldots,x(\sigma_i))=\prod_{t=\sigma_{i-1}+1}^{\sigma_i}\left[(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det B(t-1,x)B^T(t-1,x)}\right]^{-1}\times \tag{3.2}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=\sigma_{i-1}+1}^{\sigma_i}\left[x(t)-A(t-1,x;j)\right]^T(BB^T)^{-1}(t-1,x)\left[x(t)-A(t-1,x;j)\right]\right\}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Процедура обнаружения разладки реализуется следующим образом. Выбираем некоторую последовательность моментов σ_i, например, следующих через равные промежутки времени. По завершении i-го цикла наблюдений выносится решение $\varphi_i = d_\ell$, если

$$f_\ell(x(\sigma_{i-1}+1),\dots,x(\sigma_i)) = \max_{0\le j\le s} f_j(x(\sigma_{i-1}+1),\dots,x(\sigma_i)). \qquad (3.3)$$

Условимся при достижении в (3.3) максимума одновременно для нескольких плотностей принимать решение d_ℓ, соответствующее плотности с наибольшим номером. При таком условии критерий (3.3) допускает следующую эквивалентную форму: $\varphi_i = d_\ell$ тогда и только тогда, когда система величин L_{kj}, определяемых формулой

$$L_{kj} = \ln\frac{f_j(x(\sigma_{i-1}+1),\dots,x(\sigma_i))}{f_k(x(\sigma_{i-1}+1),\dots,x(\sigma_i))} =$$

$$= \sum_{t=\sigma_{i-1}+1}^{\sigma_i}\left[A(t-1,x;j)-A(t-1,x;k)\right]^T\left[B(t-1,x)B^T(t-1,x)\right]^{-1}x(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{t=\sigma_{i-1}+1}^{\sigma_i}\left[A^T(t-1,x;k)(BB^T)^{-1}(t-1,x)A(t-1,x;k)-\right.$$

$$\left.-A^T(t-1,x;j)(BB^T)^{-1}(t-1,x)A(t-1,x;j)\right],$$

удовлетворяет неравенствам:

$$L_{k\ell}\ge 0;\quad 0\le k<\ell\ ;\quad L_{\ell j}<0,\quad \ell<j\le s. \qquad (3.4)$$

Наконец, взяв систему статистик $\{\mu_{kj}(\sigma_{i-1},\sigma_i),\ 0\le k<j\le s\}$, задаваемых равенством

$$\mu_{kj}(\sigma_{i-1},\sigma_i) = \frac{1}{\sum_{t=\sigma_{i-1}+1}^{\sigma_i}\tau_{kj}(t-1,x)}\sum_{t=\sigma_{i-1}+1}^{\sigma_i}\left[A(t-1,x;j)-A(t-1,x;k)\right]^T(BB^T)^{-1}(t-1,x)\times$$
$$\times\left[x(t)-A(t-1,x;k)\right], \qquad (3.5)$$

$$\tau_{kj}(t-1,x)=\left[A(t-1,x;j)-A(t-1,x;k)\right]^T\left[B(t-1,x)B^T(t-1,x)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[A(t-1,x;j)-A(t-1,x;k)\right],$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и воспользовавшись тем, что неравенство $L_{kj} \geqslant 0$ равносильно неравенству $\mu_{kj} \geqslant 1/2$, критерию (3.3) можно придать другой вид: $\Phi_i = d_\ell$ тогда и только тогда, когда система статистик $\{ \mu_{kj}(\sigma_{i-1}, \sigma_i) \}$ удовлетворяет неравенствам:

$$\mu_{k\ell} \geqslant 1/2 \ , \ 0 \leq k < \ell \ ; \ \mu_{\ell j} < 1/2 \ , \ j < \ell \leq s . \tag{3.6}$$

Системы неравенств (3.4), (3.6) выделяют в пространстве наблюдений, относящихся к i -му циклу наблюдений, область принятия ℓ -го решения $\mathcal{D}_\ell^{(i)}$. Важной статистической характеристикой критерия (3.3) является вероятность правильного решения в i -м цикле. Эта вероятность при условии, что процесс $x(t)$ в i -м цикле описывается уравнением (3.I) с $\lambda(t) = \ell$ и при фиксированных значениях прошлых наблюдений, определяется интегралом

$$P_\ell[\Phi_i = d_\ell] = \int\limits_{\mathcal{D}_\ell^{(i)}} f_\ell(x(\sigma_{i-1}+1), \ldots, x(\sigma_i))\, d \prod_{k=\sigma_{i-1}+1}^{\sigma_i} x_k \ . \tag{3.7}$$

Если функции A и B в (3.I) детерминированные, то плотность (3.2) гауссовская, ограничения (3.4), (3.6) являются линейными относительно наблюдений $x(t)$ и вероятности (3.7) легко находятся. В более общем случае, когда функции A и B зависят от процесса $x(t)$, область $\mathcal{D}_\ell^{(i)}$ становится сложной, плотность (3.2) - негауссовской, а поэтому не только вычисление, но и оценка этих вероятностей затруднительна. Таким образом, хотя решающая процедура обнаружения момента разладки, построенная на основе критерия максимального правдоподобия, проста в реализации, однако для рассматриваемого процесса $x(t)$ исследование ее свойств провести не удается даже в предположении, что шумы $\xi(t)$ имеют гауссовское распределение. Основная причина указанных трудностей состоит, по-видимому, в том, что при формировании циклов (выборе моментов σ_i) не учитывалось, что динамические модели (3.I), отвечающие различным значениям процесса $\lambda(t)$, в отдельные моменты времени могут быть весьма близки и, следовательно, соответствующие наблюдения оказываются малоинформативными. Более гибкую решающую процедуру обнаружения разладки можно построить на основе непараметрического критерия классификации, рассмотренного в § I. Построение процедуры включает два момента:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

1) специальный выбор последовательности моментов σ_i ;
2) модификацию статистик (3.5).

Пусть $H > 0$. Определим последовательность моментов следующим образом:

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_i = \sigma_i(H) = \max_{0 \le k < j \le s} \tau_{kj}^{(i)}, \quad i \ge 1,$$

где

$$\tau_{kj}^{(i)} = \tau_{kj}^{(i)}(H) = \inf\left\{ m \ge \sigma'_{i-1} : \sum_{t=\sigma'_{i-1}}^{m} z_{kj}(t,x) \ge H \right\}, \quad \sigma'_{i-1} = \begin{cases} 0, \text{ если } i=1; \\ \sigma_{i-1}+1, \text{ если } i \ge 2, \end{cases}$$

$z_{kj}(t,x)$ задается формулой (3.5). Решение в i -м цикле наблюдений будем принимать на основе статистик

$$\mu_{kj}^{(i)} = \mu_{kj}^{(i)}(\sigma'_{i-1}, \tau_{kj}^{(i)}) = \frac{1}{H} \sum_{t=\sigma'_{i-1}}^{\tau_{kj}^{(i)}-1} \Big[A(t,x;j) -$$

$$- A(t,x;k)\Big]^T (BB^T)^{-1}(t,x) \big[x(t+1) - A(t,x;k) \big] +$$

$$+ \alpha_{kj}^{(i)} \big[A(\tau_{kj}^{(i)}, x; j) - A(\tau_{kj}^{(i)}, x; k) \big] (BB^T)^{-1}(\tau_{kj}^{(i)}, x) \big[x(\tau_{kj}^{(i)}+1) - \tag{3.8}$$

$$- A(\tau_{kj}^{(i)}, x; k) \big],$$

$$\alpha_{kj}^{(i)} = \Big[H - \sum_{t=\sigma'_{i-1}}^{\tau_{kj}^{(i)}-1} z_{kj}(t,x) \Big] \Big/ z_{kj}(\tau_{kj}^{(i)}, x).$$

Полагаем $\Phi_i = d_\ell$, если система статистик $\{ \mu_{kj}^{(i)} \}$ удовлетворяет неравенствам:

$$\mu_{k\ell}^{(i)} \ge \delta \text{ при } 1 \le k < \ell ; \quad \mu_{\ell j}^{(i)} < \delta \text{ при } \ell < j \le s, \; 0 < \delta < 1. \tag{3.9}$$

Если условие (3.9) не выполняется ни при каком ℓ , $0 \le \ell \le s$, принимаем решение $\Phi = d_0$. Решающая процедура обнаружения разладки построена с точностью до параметров H, δ .

3.3. Исследование свойств решающей процедуры

При выборе параметров процедуры H и δ будем исходить из то-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

го, что заданы допустимые вероятности β_ℓ, $\ell=0,\dots,s$, принятия в каждом цикле ошибочного решения из множества $\Delta \setminus d_\ell$ при условии, что наблюдения в этом цикле описываются моделью (3.I) с $\lambda(\tau)=\ell$. Обозначим через $\pi^{(i)}(H,\delta)$ вероятность принятия решения об отсутствии разладки в i-м цикле при условии, что она не наступила; а через $\pi_\ell^{(i)}(H,\delta)$, $1\le\ell\le s$, обозначим вероятность принятия в i-м цикле решения $\varphi_i=d_\ell$ при условии, что к началу i-го цикла разладка произошла, причем наблюдения после разладки описываются уравнениями (3.I) с $\lambda(t)=\ell$. В предположении, что моменту появления разладки θ предшествует длительный процесс наблюдений, можем записать

$$\pi^{(i)}(H,\delta)=\lim_{\theta\to\infty} P\{\mu_{0j}^{(i)}<\delta,\ 1\le j\le s \mid \sigma_i<\theta\}=$$

$$=P\{\varepsilon_{0j}^{(i)}<\delta,\ 1\le j\le s\}; \qquad (3.10)$$

$$\pi^{(i)}(H,\delta)=P\{\varepsilon_{k\ell}^{(i)}\ge\delta-1,\ 0\le k<\ell;\ \varepsilon_{\ell j}^{(i)}<\delta,\ \ell<j\le s \mid \sigma_{i-1}'\ge\theta,\ \lambda(\theta)=\ell\}.$$

Рассмотрим множество решающих процедур с параметрами H, δ, удовлетворяющими неравенствам:

$$\pi^{(i)}(H,\delta)\ge\beta_\ell,\quad \ell=\overline{0,s}.$$

В этом множестве оптимальной является процедура с минимальным значением H. Такая процедура, обеспечивая заданные вероятности правильных решений, имеет минимальную длину цикла, а следовательно, и минимальное запаздывание в обнаружении момента разладки. Так как по условию задачи распределения процессов до и после разладки неизвестны, то вероятности $\pi_\ell^{(i)}(H,\delta)$ не могут быть найдены. Поэтому задачу оптимизации будем решать, используя оценки этих вероятностей. Кроме того, для простоты предположим, что $\beta_1=\dots=\beta_s$.

<u>ТЕОРЕМА 3.I</u>. Пусть для процесса (3.I) с вероятностью единица расходятся ряды: $\sum_{t=0}^{\infty} z_{kj}(t,x)=\infty$, $0\le k<j\le s$.
Тогда:
I°. Для любой пары (H,δ), $0<H$, $0<\delta<1$, справедливы неравенства:

$$\pi_\ell^{(i)}(H,\delta)\ge 1-\frac{s}{\delta^2 H};\quad \pi^{(i)}(H,\delta)\ge 1-\frac{\ell}{(1-\delta)^2 H}-\frac{(s-\ell)}{\delta^2 H}, \qquad (3.11)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

2°. Оптимальная пара (H^*, δ^*) определяется равенствами:

$$H^* = \begin{cases} s\left(\frac{1}{\sqrt{\bar\beta_0}} + \frac{1}{\sqrt{\bar\beta_1}}\right)^2, & \text{если } \beta_0 \geq \beta_1; \\ \frac{4s}{\bar\beta_1}, & \text{если } \beta_1 > \beta_0; \quad \bar\beta_i = 1 - \beta_i; \end{cases}$$

$$\delta^* = \begin{cases} \frac{\sqrt{\bar\beta_1}}{\sqrt{\bar\beta_0} + \sqrt{\bar\beta_1}}, & \text{если } \beta_0 \geq \beta_1; \\ 1/2, & \text{если } \beta_1 > \beta_0. \end{cases}$$

3°. Для пары (H^*, δ^*) среднее число циклов между ложными тревогами N_0 и N_ℓ – среднее число циклов запаздывания в обнаружении разладки при условии, что после разладки $\lambda(t) = \ell$, удовлетворяют неравенствам:

$$N_0 \geq \frac{1}{1-\beta_0}; \quad N_\ell \leq \frac{1}{\beta_1}, \quad 1 \leq \ell \leq s. \tag{3.12}$$

<u>Доказательство</u> I. Пусть наблюдения в i-м цикле описываются уравнением (3.I) при $\lambda(t) = \ell$. Тогда, подставляя (3.I) в (3.8), находим

$$\mu_{k\ell}^{(i)} = 1 + \varepsilon_{k\ell}^{(i)}, \; 0 \leq k < \ell; \; \mu_{\ell j}^{(i)} = \varepsilon_{\ell j}^{(i)}, \; \ell < j \leq s. \tag{3.13}$$

Здесь

$$\varepsilon_{kj}^{(i)} = \frac{1}{H} \sum_{t=\sigma'_{i-1}}^{\tau_{kj}^{(i)}-1} \eta_{kj}(t+1) + \frac{\alpha_{kj}^{(i)}}{H} \eta_{kj}(\tau_{kj}^{(i)}+1);$$

$$\eta(t+1) = \left[A(t,x;j) - A(t,x;k)\right]^T (BB^T)^{-1}(t,x) B(t,x) \xi(t+1).$$

Далее воспользуемся леммой 2.I. В силу строго марковского свойства последовательности векторов $\{\xi(t), t \geq 1\}$ выполняются соотношения:

$$M\left[\eta_{kj}(\sigma'_{i-1}+k+1) \mid \mathcal{F}_{\sigma'_{i-1}+k}\right] = 0; \; M\left[\eta_{kj}^2(\sigma'_{i-1}+k+1) \mid \mathcal{F}_{\sigma'_{i-1}+k}\right] \leq r_{kj}(\sigma'_{i-1}+k, x),$$

а поэтому с помощью леммы 2.I получаем

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$M(\varepsilon_{kj}^{(i)}|\mathcal{F}_{\sigma'_{i-1}})=0; \quad M\left(\left[\varepsilon_{kj}^{(i)}\right]^2|\mathcal{F}_{\sigma'_{i-1}}\right)\leq\frac{1}{H}. \tag{3.13}$$

Отсюда и из (3.9), (3.13) следует первое неравенство в утверждении I°. Докажем второе неравенство (3.11). Используя определение (3.10), получим

$$\pi_\ell^{(i)}(H,\delta)\geq 1-\sum_{k=0}^{\ell-1}P\{|\varepsilon_{k\ell}^{(i)}|>1-\delta\,|\,\sigma'_{i-1}\geq\theta,\ \lambda(\theta)=\ell\}-$$

$$-\sum_{j=\ell+1}^{s}P\{|\varepsilon_{\ell j}^{(i)}|\geq\delta\,|\,\sigma'_{i-1}\geq\theta,\ \lambda(\theta)=\ell\}. \tag{3.15}$$

Так как $\{\sigma'_{i-1}\geq\theta\}\cap\{\lambda(\theta)=\ell\}\in\mathcal{F}_{\sigma'_{i-1}}$, то по определению условной вероятности с учетом (3.14) имеем

$$P\{|\varepsilon_{k\ell}^{(i)}|>1-\delta,\ \sigma'_{i-1}\geq\theta,\ \lambda(\theta)=\ell\}=\int\limits_{\{\sigma'_{i-1}\geq\theta,\lambda(\theta)=\ell\}}P\{|\varepsilon^{(i)}|>1-\delta\,|\,\mathcal{F}_{\sigma'_{i-1}}\}dP\leq$$

$$\leq\frac{1}{H(1-\delta)^2}P\{\sigma'_{i-1}\geq\theta,\ \lambda(\theta)=\ell\}.$$

Следовательно, в (3.15) каждое слагаемое первой суммы не превосходит $1/H(1-\delta)^2$. Аналогично устанавливаем, что каждое слагаемое второй суммы не превышает $1/H\delta^2$. Утверждение I° доказано.

2. Далее, рассмотрим множество пар (H,δ), удовлетворяющих неравенствам:

$$\frac{s}{\delta^2H}\leq\bar\beta_\sigma;\quad \frac{\ell}{(1-\delta)^2H}+\frac{s-\ell}{\delta^2H}\leq\bar\beta_\ell,\ 1\leq\ell\leq s;\ \beta_\ell=1-\bar\beta_\ell.$$

Оптимальная пара (H^*,δ^*) определяется путем решения минимаксной задачи

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$H^* = H^*(s, \beta_0, \ldots, \beta_s) = \min_{0<\delta<1} g(\delta) ;$$

$$g(\delta) = \max\left(\frac{s}{\delta^2 \bar{\beta}_0}, f_1(\delta)\right) ;$$

$$\delta^* = \delta^*(s, \beta_0, \ldots, \beta_s) = \arg\min_{0<\delta<1} g(\delta) ; \quad f_1(\delta) = \max_{1\le \ell\le s} f(\ell, \delta),$$

$$f(\ell, \delta) = \frac{s}{\delta^2 \bar{\beta}_\ell} + \frac{\ell}{\bar{\beta}_\ell}\left[\frac{1}{(1-\delta)^2} - \frac{1}{\delta^2}\right] .$$

ешение этой задачи при условии $\beta_1 = \cdots = \beta_s$ приводит к ра-
нствам 2^0.

3. Оценим N_ℓ при $1 \le \ell \le s$. Обозначим через n_ℓ число
иклов запаздывания в обнаружении разладки и принятия верного
ешения при условии, что после разладки $\lambda(t) = \ell$. Величина
определяется формулой

$$N_\ell = M n_\ell = \sum_{k\ge 0} P\{n_\ell > k\} . \tag{3.16}$$

Покажем, что

$$P\{n_\ell > k\} \le \bar{\beta}_\ell^{\,k} . \tag{3.17}$$

Пусть ν - номер цикла, захватившего момент разладки, т.е.

$$\nu = \inf\{j \ge 1 : \sigma_j \ge \theta\} .$$

Как нетрудно проверить, случайная величина ν является марков-
ским моментом относительно системы σ - алгебр $\{\mathcal{F}_{\sigma_k}, k \ge 0\}$.
По определению n_ℓ имеем

$$P\{n_\ell > k\} = P\{\Phi_{\nu+1} \ne d_\ell, \ldots, \Phi_{\nu+k} \ne d_\ell\} = \tag{3.18}$$

$$= \sum_{j\ge 1} P\{\Phi_{\nu+1} \ne d_\ell, \ldots, \Phi_{\nu+k} \ne d_\ell, \nu = j\} = \sum_{j\ge 1} a_{\ell j} ,$$

где

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$a_{\ell j} = P\{\Phi_{j+1} \neq d_\ell, \ldots, \Phi_{j+k} \neq d_\ell, \nu = j\}.$$

Так как $P[\Phi_j = d_\ell \mid \mathcal{F}'_{\sigma_{j-1}}] \geq \beta_\ell$ и событие $[\Phi_{j+1} \neq d_\ell, \ldots, \Phi_{j+k-1} \neq d_\ell, \nu = j]$ измеримо относительно σ - алгебры $\mathcal{F}'_{\sigma_{j+}}$, то для $a_{\ell j}$ получаем оценку сверху

$$a_{\ell j} = \int_{\{\Phi_{j+1} \neq d_\ell, \ldots, \Phi_{j+k-1} \neq d_\ell, \nu = j\}} P\{\Phi_{j+k} \neq d_\ell \mid \mathcal{F}'_{\sigma_{j+k-1}}\} dP \leq \bar{\beta}_\ell P\{\Phi_{j+1} \neq d_\ell, \ldots, \Phi_{j+k-1} \neq d_\ell, \nu = j\}$$

Отсюда и из (3.18) следует, что

$$P\{n_\ell > k\} \leq \bar{\beta}_\ell P\{n_\ell > k-1\}.$$

Повторно используя это неравенство, получаем (3.17). Подставляя (3.17) в (3.16) и учитывая, что $\beta_1 = \ldots = \beta_s$, приходим к неравенству (3.12) для N_ℓ при $1 \leq \ell \leq s$. При выводе нижней границы для N_0 предполагаем, что разладке предшествует длительный процесс наблюдений. Обозначим через μ номер последнего цикла, в котором произошла ложная тревога, а через n_0 - число циклов до следующей ложной тревоги. По определению n_0 имеем

$$P\{n_0 > k\} = P\{\Phi_{\mu+1} = d_0, \ldots, \Phi_{\mu+k} = d_0\}.$$

Принимая во внимание, что $P[\Phi_{\mu+k} = d_0 \mid \mathcal{F}'_{\sigma_{\mu+k-1}}] \geq \beta_0$, можно получить неравенство

$$P\{n_0 > k\} \geq \beta_0 P\{n_0 > k-1\},$$

из которого следует оценка $P\{n_0 > k\} \geq \beta_0^k$, а вместе с ней и неравенство (3.12) для N_0. Теорема 3.1 доказана.

<u>Замечание 3.1</u>. Последнее утверждение теоремы допускает другую интерпретацию. Введем функции:

$$Q_{kj}(t_1, t_2) = \sum_{s=t_1}^{t_2} \tau_{kj}(s, x); \quad Q'_{kj}(t_1, t_2) = \sum_{s=t_1}^{t_2}{}' \tau_{kj}(s, x),$$

где τ_{kj} задается формулой (3.5), а штрих у знака второй суммы

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

означает, что слагаемое $\tau_{\kappa j}(s,x)$ берется с весом $\alpha_{\kappa j}^{(i)}$, если $s = \tau_{\kappa j}^{(i)}$, $i = 1,2,\ldots$. Первая из этих функций определяет суммарное различие, накапливаемое на интервале наблюдений $[t_1, t_2]$ между двумя моделями процесса (3.I), у которых $\lambda(\theta) = \kappa$ и $\lambda(\theta) = j$ соответственно. Вторая функция совпадает с первой с точностью до слагаемых, взятых с весами. Пусть t' и t'' - моменты соседних ложных тревог, а t_3 - время запаздывания в обнаружении момента разладки и принятия верного решения. Тогда из утверждения 3° следует, что

$$\min_{\substack{0\le\kappa,j\le s;\\ \kappa\ne j}} MQ_{\kappa j}(t',t'') \ge \frac{H^*}{\alpha}\ ;\quad \max_{0\le\kappa,j\le s} MQ'_{\kappa j}(\theta,\theta+t_3) \le \frac{H^*}{\beta_1}\ .$$

Первое из этих неравенств указывает нижнюю границу для минимального среднего интегрального различия между конкурирующими моделями, которое накапливается между соседними ложными тревогами. Второе задает верхнюю границу для максимального среднего интегрального различия моделей, которое накапливается с момента разладки до её обнаружения и принятия верхнего решения относительно модели процесса после разладки.

§ 4. ОБНАРУЖЕНИЕ МОМЕНТОВ СКАЧКООБРАЗНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

4.I. Постановка задачи

Пусть наблюдаемый многомерный случайный процесс $x(t) = \{x_1(t),\ldots,x_n(t)\}^T$ до момента разладки θ описывается системой стохастических разностных уравнений

$$x(t+1) = A_0(t,x) + A_1(t,x)\lambda^0 + B(t,x)\xi_{t+1}\ ,\quad t = 0,1,\ldots,\theta-1, \qquad (4.I)$$

а начиная с момента θ - системой уравнений

$$x(t+1) = A_0(t,x) + A_1(t,x)\lambda + B(t,x)\xi_{t+1}\ ,\quad t = \theta,\theta+1,\ldots \qquad (4.2)$$

Здесь $\{\xi_t\}$ - последовательность н.о.р. случайных векторов с $M\xi_t = 0$, $M\xi_t\xi_t^T = E$, E - единичная матрица. Матричные функции $A_i(t,x)$ и $B(t,x)$ могут зависеть от реализации процесса x до момента t включительно. Момент разладки θ не зависит от $x(0)$ и последовательности шумов $\{\xi_t\}$, причем распре-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

деление θ неизвестно; λ^o и λ – m- мерные постоянные векторы параметров ($m \leq n$). Значение λ неизвестно, однако предполагается, что оно удовлетворяет соотношению $|Q^T(\lambda-\lambda^o)| \geq \varepsilon$ при априорно заданных $\varepsilon > 0$ и векторе Q. Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям процесса x определить момент разладки θ. Такая задача возникает, например, при обнаружении момента разладки авторегрессионной последовательности, когда в момент разладки один из параметров претерпевает скачок неизвестной величины, не меньшей ε.

4.2. Построение решающей процедуры и исследование её свойств

Чтобы построить процедуру обнаружения момента разладки, необходимо из тех или иных соображений выбрать статистики, характер поведения которых изменяется после разладки процесса. В качестве статистики, реагирующей на разладку процесса, используем последовательную оценку линейной комбинации $Q^T\lambda$ по наблюдениям процесса x. Предположим, что матричная функция $A_1^TA_1$ не вырождена. Зададим функционал

$$\mathcal{J}(m)=\sum_{k=0}^{m} c(k,x)Q^T\left\{A_1^+(k,x)\left[x(k+1)-A_0(k,x)\right]-\lambda^o\right\}, \qquad (4.3)$$

где $A_1^+=(A_1^TA_1)^{-1}A_1^T$, $c(k,x)$ – неупреждающая положительная скалярная функция от процесса x. Рассмотрим приращения $\Delta\mathcal{J}(m)=\mathcal{J}(m)-\mathcal{J}(m-1)$. Подставляя (4.1), (4.2) в (4.3), получим

$$\Delta\mathcal{J}(m)=\begin{cases}\eta_{m+1}, & \text{если } m<\theta;\\ c(m,x)Q^T(\lambda-\lambda^o)+\eta_{m+1}, & \text{если } m\geq\theta,\end{cases} \qquad (4.4)$$

где

$$\eta_{m+1}=c(m,x)Q^TA_1^+(m,x)B(m,x)\xi_{m+1}.$$

Из (4.4) видно, что среднее значение приращений функционала $\Delta\mathcal{J}(m)$ изменяется после разладки. Это свойство будем использовать при построении решающей процедуры. Чтобы контролировать влияние шумов η_m на величину приращений, введем последовательность моментов остановки $\{\tau_i, i\geq 0\}$, которую определим соотношением

$$\tau_0=0;\ \tau_i=\tau_i(H)=\inf\left\{t\geq\sigma_i:\sum_{\tau=\sigma_i}^{t}c(k,x)\geq H\right\},\ i\geq 1; \qquad (4.5)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$c(k,x) = 1 / Q^T A_1^+(k,x) BB^T(k,x) (A_1^+)^T(k,x) Q$,

$\sigma_i = 0$, если $i = 1$; $\sigma_i = \tau_{i-1} + 1$, если $i \geq 2$; H - положительное число. По функционалу (4.3) строим статистики

$$y_i(H) = \frac{1}{\varepsilon \cdot H} \sum_{k=\sigma_i}^{\tau_i}{}' c(k,x) Q^T A_1^+(k,x) \left[x(k+1) - A_0(k,x) \right] - \frac{Q^T \lambda^0}{\varepsilon}, \qquad (4.6)$$

штрих у знака суммы означает, что последнее слагаемое в сумме берется с весом

$$\alpha_i = \left[H - \sum_{k=\sigma_i}^{\tau_i - 1} c(k,x) \right] / c(\tau_i, x).$$

Статистика $y_i(H)$ совпадает с приращением функционала (4.3) на интервале $(\tau_{i-1}, \tau_i]$ (i-м цикле наблюдений) с точностью до постоянного множителя и последнего слагаемого, взятого с весом α_i, $0 < \alpha_i \leq 1$. Подставляя (4.1), (4.2) в (4.6), получаем

$$y_i = \begin{cases} \zeta_i(H), & \text{если } \tau_i < \theta, \\ \rho + \zeta_i(H), & \text{если } \tau_{i-1} \geq \theta; \ \zeta_i(H) = \frac{1}{\varepsilon H} \sum_{k=\sigma_i}^{\tau_i}{}' \eta_{k+1}; \ |\rho| \geq 1. \end{cases} \qquad (4.7)$$

Как следует из леммы 2.1, случайные величины ζ_i, $i \geq 1$, обладают следующим свойством:

$$M_\lambda \left(\zeta_i^2(H) \,|\, \mathcal{F}_{\sigma_i} \right) \leq \frac{1}{H \varepsilon^2}. \qquad (4.8)$$

Завершая построение решающей процедуры обнаружения разладки, зададим порог δ ($0 < \delta < 1$) и будем в i-м цикле наблюдений принимать решение о разладке, если выполнится неравенство $|y_i(H)| > \delta$.

При исследовании свойств решающей процедуры будем, как обычно, предполагать, что разладке процесса предшествует длительный этап наблюдений. При этом для вероятностей ложной тревоги и ложного спокойствия в i-м цикле наблюдений согласно (4.7) имеют место соотношения:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$P_0^i(H,\delta) = P\{|\zeta_i| > \delta\};$$

$$P_1^i(H) = P\{|\rho+\zeta_i| < \delta \,|\, \tau_{i-1} \geq \theta\} \leq P\{|\zeta_i| > 1-\delta \,|\, \tau_{i-1} \geq \theta\}.$$

Свойства построенной процедуры сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 4.I. Пусть с вероятностью единица расходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c(k,x) = +\infty$. Тогда справедливы следующие неравенства:

I°. $P_0^i(H,\delta) \leq \alpha =$

$$= \frac{1}{H\varepsilon^2\delta^2}, \quad P_1^i(H,\delta) \leq \beta = \frac{1}{H\varepsilon^2(1-\delta)^2}; \tag{4.9}$$

2°. $N_0 \geq \frac{1}{\alpha}, \quad N_1 \leq \frac{1}{1-\beta}$

(N_0 и N_1 – среднее число циклов между ложными тревогами и среднее число циклов запаздывания в обнаружении разладки).

Доказательство. Первое из неравенств (4.9) следует из (4.8). Второе неравенство (4.9) выполняется, поскольку

$$P\{|\zeta_i| > 1-\delta, \tau_{i-1} \geq \theta\} = \int_{\{\tau_{i-1} \geq \theta\}} P\{|\zeta_i| > 1-\delta \,|\, \mathcal{F}_{\sigma_i}\}\, dP \leq \frac{4}{H(1-\delta)^2\varepsilon^2} P\{\tau_{i-1} \geq \theta\}.$$

В утверждении 2° докажем только неравенство для N_1 (неравенство для N_0 доказывается аналогично). Обозначим n число циклов запаздывания в обнаружении разладки, а ν – номер цикла, в котором произошла разладка. Установим сначала вспомогательное неравенство

$$P\{n > i\} \leq \beta P\{n > i-1\}. \tag{4.10}$$

Имеем

$$P\{n > i\} = P\{|\rho+\zeta_{\nu+1}| < \delta, \ldots, |\rho+\zeta_{\nu+1}| < \delta\} =$$

$$= \sum_{j \geq 1} P\{|\rho+\zeta_{j+1}| < \delta, \ldots, |\rho+\zeta_{i+j}| < \delta, \nu = j\}. \tag{4.11}$$

Оценим каждое слагаемое в последней сумме

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$P\{|\rho+\zeta_{i+1}|<\delta,\dots,|\rho+\zeta_{i+j}|<\delta,\ \nu=j\}\le$$

$$\le P\{|\rho+\zeta_{j+1}|<\delta,\dots,|\zeta_{i+j}|>1-\delta,\ \nu=j\}=$$

$$=\int_{\mathcal{D}} P\{|\zeta_{i+j}|>1-\delta\,|\,\mathcal{F}_{\sigma_{i+j}}\}\,dP\le$$

$$\le\beta\,P\{|\rho+\zeta_{j+1}|<\delta,\dots,|\rho+\zeta_{i+j-1}|<\delta,\ \nu=j\},$$

$$\mathcal{D}=\{|\rho+\zeta_{j+1}|<\delta,\dots,|\rho+\zeta_{i+j-1}|<\delta,\ \nu=j$$

Отсюда и из (4.II) следует (4.I0). Повторным применением (4.I0) устанавливаем неравенство $P\{n>i\}\le\beta^{i}$, которое влечет оценку для N_1. Теорема 4.I доказана.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Глава 3

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

Разработке методов оценивания параметров сноса диффузионных процессов посвящено большое число работ. Важный вклад в решение этой проблемы внесли М.Арато, А.Н.Колмогоров и Я.Г.Синай [6], У.Гренандер [46], И.А.Ибрагимов и Р.З.Хасьминский [70], Р.Ш.Липцер и А.Н.Ширяев [114], В.Ф.Писаренко [134], Р.Л.Стратонович [150], Э.М.Хазен [165] и другие. В теоретических исследованиях и приложениях наиболее часто применяются МНК, ММП, МСА, метод условных марковских процессов, метод теории чувствительности [147]. Каждый из них имеет свои достоинства и недостатки и должен использоваться с учетом условий конкретной задачи. Так, МНК, ММП и МСА имеют весьма широкую область применяемости, но нередко приводят к оценкам, свойства которых удается исследовать лишь при асимптоматических предположениях (например, для случайной функции сноса). В таких ситуациях может оказаться полезным последовательный метод, предложенный в [114, 128, 129]. Ниже этот метод получает дальнейшее развитие.

§ 1. НЕСМЕЩЕННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Постановка задачи

Пусть на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ выделена неубывающая непрерывная справа система σ - подалгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ и задан n - мерный случайный процесс Ито [114] $X = \{x(t), \mathcal{F}_t\}$, допускающий стохастический дифференциал

$$dx(t) = A(t)\lambda dt + B(t)\,dW(t), \quad t \geq 0. \qquad (1.1)$$

Здесь $(W(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ - m - мерный винеровский процесс,

$$MW(t) = 0, \quad M[W(t) - W(s)]\cdot[W(t) - W(s)]^T = E|t-s|,$$

матричные функции $A(t) = \| a_{ij}(t) \|$ и $B(t) = \| b_{ij}(t) \|$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

(размеров $n \times p$ и $n \times m$ соответственно) согласованы с системой $\{ \mathcal{F}_t , t \geq 0 \}$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$P\left\{ \int_0^T |a_{ij}(t)| dt < \infty \right\} = 1, \; i,j = \overline{1,n} ; \; M \int_0^T \|B(t)\|^2 dt < \infty,$$

$$P\left\{ \int_0^T \| A^T(t) (B(t)B^T(t))^+ A(t) \| dt < \infty \right\} = 1 \qquad (I.2)$$

для любого конечного $T \geq 0$. [Первые два условия обеспечивают существование стохастического дифференциала (I.I).] Вектор параметров $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^T$ неизвестен и должен быть оценен по реализациям процессов $x(t)$, $A(t)$ и $B(t)$. Случайный вектор λ может быть как детерминированным, так и случайным. В последнем случае предполагается, что он не зависит от системы $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ и имеет неизвестное распределение.

Нас будет интересовать решение задачи оценивания вектора λ в неасимптотической постановке. Цель состоит в том, чтобы для каждой координаты λ_i построить план оценивания, который по заданной точности оценки (допустимому среднеквадратическому уклонению) указывал бы момент прекращений наблюдений, в который эта точность достигается.

В данном параграфе будет рассмотрен случай, когда λ является вектором, размерность которого не превышает размерности процесса x.

I.2. Построение и исследование последовательных оценок параметров

Последовательные планы оценивания неизвестного вектора λ будем строить на основе оценок обобщенного метода наименьших квадратов, которые определяются из условия минимума функционала

$$-\int_0^T [V(t)A(t)\lambda, dx_t] + \frac{1}{2} \int_0^T [A(t)\lambda, V(t)A(t)\lambda] dt \qquad (I.3)$$

($[a,b]$ - скалярное произведение векторов a и b) и имеют вид

$$\hat{\lambda}(T) \equiv (\hat{\lambda}_1(T), \ldots, \hat{\lambda}_p(T))^T = \left[\int_0^T A^T(t)V(t)A(t)dt \right]^{-1} \left[\int_0^T A^T(t)V(t)dx(t) \right]. \qquad (I.4)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Сначала рассмотрим случай, когда используется общее правило остановки наблюдений для всех координат вектора λ.

ТЕОРЕМА I.I. Пусть матричные функции $A(t)$ и $B(t)$ в уравнениях (I.I) таковы, что найдется симметричная неотрицательно определенная весовая матрица $V(t)$ в (I.3), для которой выполнены условия:

I) $A^T(t)V(t)A(t) = c(t)E$ ($c(t)$ – $\mathcal{F}_t$ – измеримая скалярная функция);

2) $V(t) \geqslant V(t)(BB^T)(t)V(t)$;

3) $P_\lambda\{\int_0^\infty c(t)dt = +\infty\} = 1, \ \lambda \in R^p$.

Тогда последовательный план оценивания $(\tau(H), \lambda^*(H))$, определяемый формулами:

$$\tau = \tau(H) = \inf\{T \geqslant 0 : \int_0^T c(s)ds \geqslant H\}, \ \lambda^*(H) = \frac{1}{H}\int_0^{\tau(H)} A^T(t)V(t)dx(t), \tag{I.5}$$

для любого $0 < H < \infty$ обладает свойствами:

а) $M_\lambda \lambda^*(H) = \lambda$; б) $M_\lambda[\lambda^*(H) - \lambda][\lambda^*(H) - \lambda]^T \leqslant \frac{E}{H}, \ \lambda \in R^p$;

в) момент остановки $\tau(H)$ конечен с вероятностью единица.

Доказательство теоремы I.I подобно доказательству теоремы I.4.I.

Как показано в лемме I.4.2, условиям I,2 теоремы I.I удовлетворяет следующая весовая матрица:

$$V(t) = \begin{cases} c(t)A(t)(A^TA)^{-2}(t)A^T, & \text{если матрица } A^TA \text{ не вырождена;} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $c(t) = 1/\nu^*(t)$, $\nu^*(t)$ – максимальное собственное значение матрицы $A^+(t)(BB^T)(t)(A^+(t))^T$, $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$.

Замечание I.I. Если весовая матрица $V(t)$ удовлетворяет точному равенству $V = VBB^TV$, то последовательная оценка $\lambda^*(H)$ является гауссовским вектором с параметрами $(\lambda, E/H)$. Это следует из равенства

$$\lambda^*(H) = \lambda + \frac{1}{H}\int_0^{\tau(H)} A^T(t)V(t)B(t)d\bar{w}(t)$$

и свойств стохастических интегралов [43].

Последовательные планы оценивания параметров λ_i с индиви-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

дуальными моментами остановки строятся по аналогии со случаем дискретного времени, рассмотренным в § 4 главы I, и определяются по формулам:

$$\lambda_i^* = \lambda_i^*(H) = \frac{1}{H}\int_0^{\tau_i} c_i(t) < \mathcal{D}(t)\,dx_t >_i ;$$

$$c_i(t) = \begin{cases} 1/< (A_1^T(BB^T)^+A_1)^{-1} >_{ii}, & \text{если матрица } A_1^T(BB^T)^+A_1 \text{ не вырождена;} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\tau_i = \tau_i(H) = \inf\left\{T \geq 0 : \int_0^T c_i(t)\,dt \geq H\right\};$$

$$\mathcal{D}(t) = \left(A_1^T(BB^T)^{-1}A_1\right)^{-1}A_1^T(BB^T)^{-1}.$$

Свойства последовательных планов (τ_i, λ_i^*) сформулируем в виде теоремы.

<u>ТЕОРЕМА I.2</u>. Пусть с вероятностью единица расходятся интегралы

$$\int_0^\infty c_i(t)\,dt = +\infty, \quad i = \overline{1,p}.$$

Тогда для любого $H > 0$ последовательные планы $(\tau_i(H), \lambda_i^*(H))$, $i = \overline{1,p}$, обладают свойствами:

1) $M_\lambda[\lambda_i^*(H)] = \lambda_i$; 2) $M_\lambda[\lambda_i^*(H) - \lambda_i]^2 = 1/H$;

3) $\lambda_i^*(H)$ – гауссовская величина с параметрами $(\lambda_i, 1/H)$;

4) $\tau_i(H) < \infty$ $(P_\lambda$ – п.н.$)$.

Доказательство теоремы I.2 опускается.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 2. ДВУХЭТАПНЫЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В основу построения последовательных планов возьмем оценки МНК, определяемые по формулам (I.4) с весовой матрицей $V=(BB^T)^+$. Так же, как в случае дискретного времени, последовательные оценки МНК строятся в два этапа. На первом этапе в специально подобранные моменты времени τ_n вычисляются оценки (I.4). На втором формируется взвешенная сумма полученных оценок и в зависимости от требуемой точности выбирается момент прекращения наблюдений.

Пусть $\{C_n\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел, такая, что $\sum_n 1/C_n < \infty$. Зададим моменты τ_n следующим образом:

$$\tau_n = \tau(C_n) = \inf\left[T \geqslant 0 : \int_0^T \|A(t)\|^2_{B(t)}\, dt \geqslant C_n/\rho\right], \qquad (2.I)$$

где

$$\|A(t)\|^2_{B(t)} = \operatorname{tr} A^T(t)\left(B(t)B^T(t)\right)^+ A(t), \quad \rho = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{C_n}.$$

Положим

$$\hat{\lambda}_n \equiv \hat{\lambda}(\tau_n) = G^{-1}(\tau_n) \int_0^{\tau_n} A^T(t)\left(B(t)B^T(t)\right)^+ dx_t;$$
$$G(\tau_n) = \int_0^{\tau_n} A^T(t)\left(B(t)B^T(t)\right)^+ A(t)\, dt. \qquad (2.2)$$

Определим последовательную оценку $\lambda^*(H)$ как взвешенную сумму оценок $\hat{\lambda}_n$:

$$\lambda^*(H) = \sum_{n=1}^{\sigma} \alpha_n \hat{\lambda}_n, \qquad (2.3)$$

причем верхний предел σ и весовые множители α_n зададим соотношениями:

$$\sigma = \sigma(H) = \inf\left[l > 0 : \sum_{k=1}^{l} b_k^2 \geqslant H\right], \quad \alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{H} b_n^2, & n < \sigma; \\ \frac{\beta_H b_\sigma^2}{H}, & n = \sigma, \end{cases} \qquad (2.4)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где $b_k = 1/\mu_k C_k$, если $G(\tau_k)$ не вырождена, и в противном случае; $\mu_k = \mu(\tau_k) = \max_{i,j} | < [G(\tau_n)]^{-1} >_{ij} |$, множитель $\beta_H = \beta(\sigma)$ выбирается из условия нормировки: $\sum_{n=1}^{\sigma} \alpha_n = 1$, $0 < \beta_H \leq 1$. Из определения момента σ следует, что общее время наблюдений задается величиной $N(H) \equiv \tau_\sigma$.

Основные свойства построенных последовательных планов содержит следующая

<u>ТЕОРЕМА 2.I</u>. Пусть с вероятностью единица расходится ряд

$$\sum_{n \geq 1} b_n^2 = \infty . \tag{2.5}$$

Тогда последовательные планы $(N(H), \lambda^*(H))$ для любого $H > 0$ обладают свойствами:

I°. $\sup_{\lambda \in R^p} M_\lambda [\lambda^*(H) - \lambda][\lambda^*(H) - \lambda]^T \leq E/H$

(E – единичная матрица размера p, неравенство понимается в смысле квадратичных форм);

2°. $N(H) < \infty$ $(P_\lambda - п.н.)$.

Условие (2.5) необходимо и достаточно для справедливости этих свойств.

Доказательство теоремы 2.I дано в приложении.

<u>Предложение 2.I</u>. Для справедливости теоремы 2.I достаточно, чтобы существовал предел по вероятности

$$P - \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A^T(t) (B(t) B^T(t))^+ dt = F, \tag{2.6}$$

причем F – постоянная положительно определенная матрица.

Доказательство предложения 2.I вынесено в приложение. В заключение данного параграфа рассмотрим примеры.

I. Пусть однородный многомерный диффузионный процесс описывается уравнением

$$dx(t) = A(x(t))\lambda\, dt + B(x(t))\, dW(t), \quad t \geq 0 . \tag{2.7}$$

Предположим, что: а) процесс $x(t)$ – возвратный при каждом λ и обладает эргодическим распределением $\Phi_\lambda(\cdot)$ в R^n; б) матрица

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$F = \int_{R^n} A^T(x)(BB^T)^{-1}(x)A(x)\,d\Phi_\lambda(x)$$

является положительно определенной; в) функции $\langle A^T(BB^T)^{-1}A \rangle_{ij}$, $i,j=\overline{1,p}$, ограничены. При данных условиях, с вероятностью единица существует предел [167]:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T A^T(x(t))(B(x(t))B^T(x(t)))^{-1}A(x(t))\,dt = F,$$

а следовательно, выполняется условие (2.6). Поэтому последовательные планы $(\tau(H),\ \lambda^*(H))$ оценивания векторного параметра λ по наблюдениям процесса (2.7) обладают свойствами, указанными в теореме 2.I.

2. Пусть $\{x(t),\ t\geq 0\}$ – n – мерный гауссовский марковский процесс, удовлетворяющий уравнению

$$dx(t) = \Lambda x(t)dt + B\,dW(t),\quad t\geq 0, \tag{2.8}$$

где $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ – матрица неизвестных параметров; B – постоянная невырожденная матрица. Предполагаем, что характеристические корни матрицы Λ лежат в левой полуплоскости. Тогда процесс $x(t)$ является устойчивым и существует предел почти наверное [7]:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x^T(t)\,dt = F, \tag{2.9}$$

причем F – положительно определенная постоянная матрица, которая находится из уравнения $\Lambda\cdot F + F\Lambda^T + BB^T = 0$.
Представим процесс (2.8) в требуемом виде

$$dx(t) = A(x(t))\lambda\,dt + B\,dW(t),$$

где $\lambda = (\lambda_{11},\dots,\lambda_{1n},\lambda_{21},\dots,\lambda_{2n},\dots,\lambda_{nn})^T$, $A(x(t)) = \|x^T(t)\delta_{ij}\|$ – блочная матрица. Используя (2.9), легко проверить, что выполнено условие (2.6). Таким образом, все параметры устойчивого гауссовского марковского процесса (2.8) могут быть оценены с любой требуемой точностью за конечное время.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

3. Пусть наблюдаемый случайный процесс $x(t)$ описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{d^p x}{dt^p} + \lambda_1 \frac{d^{p-1} x}{dt^{p-1}} + \ldots + \lambda_p x = \xi(t),$$

где $\xi(t)$ – белый гауссовский шум единичного уровня; $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ – неизвестные параметры. Предположим, что процесс $x(t)$ устойчив, т.е. все корни характеристического полинома лежат в левой полуплоскости. Покажем, что с помощью построенных последовательных планов неизвестные параметры можно оценить с любой требуемой точностью за конечное время.

Обозначим $y = (y_0, \ldots, y_{p-1})^T$, $y_i = x^{(i)}$. Диффузионный марковский процесс $\{y(t), t \geq 0\}$ удовлетворяет системе уравнений

$$dy_0 = y_1 dt, \ldots, dy_{p-2} = y_{p-1} dt,$$

$$dy_{p-1} = [-\lambda_1 y_{p-1} - \ldots - \lambda_p y_0] dt + dw(t),$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс. Эта система уравнений в векторной форме имеет вид

$$dy(t) = \Lambda y(t) dt + B dW(t),$$

где

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\lambda_p & -\lambda_{p-1} & \ldots & -\lambda_1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 \ldots 0 \\ \cdot \ldots \cdot \\ 0 \ldots 1 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку для процесса $y(t)$ выполнено свойство (2.9), проверка условия (2.6) производится точно так же, как и в предыдущем примере.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим задачу оценивания параметра λ по наблюдениям случайных процессов $x=\{x_t\}$ и $z=\{z_t\}$, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и связанных стохастическим дифференциальным уравнением (в смысле Ито)

$$dx_t = a(t,z;\lambda)dt + b(t,z)\,dW_t\,,\ t\geq 0,$$
$$\lambda\in[\alpha,\beta]\,,\quad -\infty\leq\alpha<\beta\leq\infty\,. \tag{3.I}$$

Здесь $W=\{W_t\}$ – винеровский процесс [относительно некоторого неубывающего семейства σ – подалгебр $(\mathcal{F}_t)$]. Процесс z [согласованный с семейством $(\mathcal{F}_t)$] может быть многомерным, включающим x в качестве компоненты. Функции $a(t,z;\lambda)$ и $b(t,z)$ являются измеримыми неупреждающими функционалами относительно процесса z, удовлетворяющими требуемым условиям интегрируемости [43].

Построение последовательной процедуры оценивания параметра производится так же, как в случае дискретного времени, рассмотренном в § 9 главы I.

а) Случай монотонной зависимости от параметра

Пусть функция $a(t,z;\lambda)$ монотонна по λ и $\alpha=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_{m+1}=\beta$ – некоторое разбиение интервала (α,β). С каждым интервалом $(\lambda_i,\lambda_{i+1})$ свяжем неубывающий во времени функционал от процесса z:

$$\Phi_i(t)=\int_0^t\left[b^+(s,z)\right]^2\left[a(s,z;\lambda_i)-a(s,z;\lambda_{i+1})\right]^2ds\,,$$

момент остановки:

$$\tau_i(H)=\inf\{t\geq 0:\ \Phi_i(t)\geq H\}$$

и статистику:

$$\varphi_i(H)=\frac{1}{H}\int_0^{\tau_i}\left[b^+(s,z)\right]^2\left[a(s,z;\lambda_i)-a(s,z;\lambda_{i+1})\right]\left[dx_s-a(s,z;\lambda_{i+1})ds\right],$$
$$b^+=\frac{1}{b}\,,\ \text{если}\ b\neq 0\,,\ \text{и}\ b^+=0\,,\ \text{если}\ b=0. \tag{3.2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Подставляя (3.I) в (3.2), получим

$$\varphi_i(H) = y_i(H) + \zeta_i(H),$$

где

$$y_i(H) = \frac{1}{H}\int_0^{\tau_i(H)} \left(b^+(s,z)\right)^2 \left[a(s,z;\lambda_i) - a(s,z;\lambda_{i+1})\right]\left[a(s,z;\lambda) - a(s,z;\lambda_{i+1})\right] ds;$$

$$\zeta_i(H) = \frac{1}{H}\int_0^{\tau_i(H)} \left[a(s,z;\lambda_i) - a(s,z;\lambda_{i+1})\right] b^+(s,z)\, dW_s .$$

Пусть $\lambda \in (\lambda_\ell, \lambda_{\ell+1})$. Тогда легко проверить, что [при любом характере монотонности функции $a(t,z;\lambda)$] величины $y_i(H)$ отрицательны при $i < \ell$, больше единицы при $i > \ell$, а $y_\ell(H) \in [0,1]$. Скачок, который претерпевают случайные величины y_i при переходе через интервал, содержащий истинное значение параметра λ, используем при построении интервальной последовательной оценки. Возьмем некоторое число $0 < \delta < 1/2$ и введем случайную величину

$$\nu = \nu(H,\delta) = \max\{i \geq 0 : \varphi_0(H) \leq \delta, \ldots, \varphi_i(H) \leq \delta\};$$

$$\nu(H,\delta) = \max\{\varnothing\} = -1.$$

С помощью ν определим доверительный интервал $S(\nu(H,\delta))$ по формуле (9.6) главы I.

<u>ТЕОРЕМА 3.I</u>. Пусть с вероятностью единица расходятся интегралы

$$\int_0^\infty \left(b^+(s,x)\right)^2 \left(a(s,z;\lambda_i) - a(s,z;\lambda_{i+1})\right)^2 ds = +\infty, \quad 0 \leq i \leq m.$$

Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ интервал $S(\nu(H,\delta))$ при $H = \left[\Phi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2(m+1)}\right)\right]^2 / \delta^2$ является ($1-\varepsilon$) - доверительным интервалом для параметра λ ; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$.

Доказательство теоремы 3.I вынесено в приложение.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Рассмотрим теперь задачу последовательного оценивания нелинейного параметра диффузионного процесса в более общей ситуации.

б) Случай взаимно однозначных кусочно-непрерывных функций от параметра

Когда функции $a(t,z;\lambda)$ параметра λ, $\lambda\in(\alpha,\beta)$, являются взаимно однозначными кусочно-непрерывными с фиксированным множеством точек разрыва, построение доверительного интервала для λ осуществляется с помощью сортировки наблюдений, которая приводится так же, как и в случае дискретного времени, рассмотренном в разделе 9.3 главы I. При этом доверительный интервал S_K определяется по тем же формулам, в которые подставляются статистики

$$\varphi_i(H;j_0,\dots,j_m)=H^{-1}\int_0^{\tau_i}(b^+(t,z))^2\psi_i(t;j_0,\dots,j_m)(a_i^+(t,z)dt-dx_t);$$

$$\tau_i=\tau_i(H;j_0,\dots,j_m)=\inf\left\{t\geq 0:\int_0^t\psi_i^2(s;j_0,\dots,j_m)(b^+(s,z))^2ds\geq H\right\},$$

где $a_i^+(t,z)$ и $\psi_i(t;j_0,\dots,j_m)$ находятся по формулам (9.10).

<u>ТЕОРЕМА 3.2</u>. Пусть с вероятностью единица расходятся интегралы:

$$\int_0^\infty\left[b^+(t,z)\right]^2\psi_i^2(t;j_0,\dots,j_m)\,dt=+\infty\ ,\quad i=\overline{0,m}\ .$$

Тогда для любого $0<\varepsilon<1$ интервал S_ν при $H=\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2(m+1)}\right)\right]^2/\delta^2$ является $(1-\varepsilon)$ – доверительным интервалом для λ.

Доказательство теоремы 3.2 проводится так же, как и доказательство теоремы 3.

В заключение отметим, что замечания I.9.I–I.9.3 остаются в силе и в случае диффузионных процессов. Развитые в § I–3 методы последовательного оценивания параметров диффузионных процессов могут использоваться в различных задачах, связанных с теорией управления и идентификации. Одной из таких задач является задача обнаружения разладок случайных процессов диффузионного ти-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

па, рассматриваемая в следующем параграфе.

§ 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДОК В СИСТЕМЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В ряде задач автоматического управления и идентификации стохастических динамических систем приходится иметь дело с объектами, свойства которых могут скачкообразно изменяться в отдельные заранее неизвестные моменты времени (моменты разладок) и требуется скорейшим образом обнаружить эти изменения. Во многих случаях для описания поведения динамических объектов могут быть использованы многомерные процессы, задаваемые системой дифференциальных уравнений со случайной правой частью. При этом в моменты разладок вид уравнений изменяется. Такая задача, по-видимому, впервые рассматривалась в работах [181,182], где предполагалось, что наблюдаемый процесс в каждом объекте (канале) является винеровским с линейным сносом, причем в момент разладки происходит изменение параметра сноса. В [182] была разработана оптимальная последовательная процедура обнаружения разладок, которая существенно превосходит процедуру Неймана-Пирсона [184]. Интересные результаты в задаче поиска в многоканальной системе получены также в работах [61, 62, 149, 165]. В данном параграфе рассматривается задача обнаружения разладок в системе динамических объектов, описываемых многомерными диффузионными процессами.

4.I. Постановка задачи

Рассмотрим систему из N динамических объектов. Динамика объекта с номером i задается многомерным случайным процессом $x_i(t) = \{x_{i1}(t), \ldots, x_{in}(t)\}^T$, описываемым системой стохастических дифференциальных уравнений (в форме Ито)

$$dx_i(t) = A_0^{(i)}(t, x_i(t))dt + B_i(t, x_i(t))dW_i(t), \quad 0 \le t \le \theta, \tag{4.I}$$

до момента разладки θ и системой уравнений

$$dx_i(t) = A_1^{(i)}(t, x_i(t))dt + B_i(t, x_i(t))dW_i(t), \quad t > \theta, \tag{4.2}$$

начиная с момента θ. Здесь $W_i(t) = (W_{i1}(t), \ldots, W_{im}(t))^T$ – многомерный стандартный винеровский процесс; $A_0^{(i)}(t, x_i(t))$,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$A_1^{(i)}(t, x_i(t))$ и $B_i(t, x_i(t))$ – матричные функции размеров $n \times 1$ и $n \times m$ соответственно, момент θ – неизвестная постоянная величина. Предполагаем, что выполнены условия [43], обеспечивающие существование, единственность и непрерывность решения совместной системы уравнений (4.I), (4.2). Процессы $x_1(t), \ldots, x_N(t)$ независимы в совокупности. При условии, что разладка происходит в одном из объектов и в каждый момент времени наблюдателю доступен лишь один шаг из них, требуется обнаружить момент разладки θ и указать номер объекта, в котором она произошла. Будем оценивать момент разладки по методу максимального правдоподобия. Начнем рассмотрение со случая одного объекта ($N=1$).

4.2. Обнаружение разладки в одном объекте

В этом случае поведение объекта описывается уравнениями (4.I), (4.2), в которых опускается индекс i. Предположим временно, что у нас имеется реализация процесса $x(\cdot)$ на достаточно длинном интервале $[0,T]$, содержащем момент разладки. Чтобы воспользоваться методом максимального правдоподобия, рассмотрим составной процесс

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & 0 \le t < \theta; \\ u_2(t), & \theta \le t \le T, \end{cases}$$

где процесс $u_1(t)$ описывается уравнением

$$du_1(t) = B(t, u_1(t))dW(t)$$

с начальным условием $u_1(0) = x(0)$, а $u_2(t)$ – тем же уравнением с начальным условием $u_2(\theta) = x(\theta)$. Обозначим $\mu_{T,x}$ и $\mu_{T,u}$ меры, отвечающие процессам $\{x(t),\ 0 \le t \le T\}$ и $\{u(t),\ 0 \le t \le T\}$. Предположим, что выполнены условия, обеспечивающие абсолютную непрерывность меры $\mu_{T,x}$ относительно меры $\mu_{T,u}$ [113]. Если разладка произошла в момент t, то для логарифмической функции правдоподобия справедлива формула [113] :

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\mathcal{J}_T(t,x) = \ln \frac{d\mu_{T,x}(x)}{d\mu_{T,u}} = +\int_0^t A_0^T(s,x)(BB^T)^+(s,x)\left[dx(s) - \frac{A_0(s,x)}{2}ds\right] +$$

$$+ \int_t^T A_1^T(s,x)(BB^T)^+(s,x)\left[dx(s) - \frac{A_1(s,x)}{2}ds\right],$$

Оценка максимального правдоподобия для θ находится из условия максимума по t этого функционала. Проанализируем поведение функционала $\mathcal{J}_T(t,x)$. Представим его в виде

$$\mathcal{J}_T(t,x) = \mathcal{J}^0(t,x) + c(T,x), \tag{4.3}$$

где

$$\mathcal{J}^0(t,x) = \int_0^t (A_0(s,x) - A_1(s,x))^T (BB^T)^+(s,x)\left[dx(s) - \frac{A_0(s,x)+A_1(s,x)}{2}ds\right];$$

$$c(T,x) = \int_0^T A_1^T(s,x)(BB^T)^+(s,x)\left[dx(s) - \frac{A_1(s,x)}{2}ds\right].$$

Используя уравнения (4.1), (4.2), получим

$$\mathcal{J}^0(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\theta} z(s,x)ds - \frac{1}{2}\int_{t\wedge\theta}^t z(s,x)ds + \xi_t; \tag{4.4}$$

$$z(s,x) = \left[A_0(s,x) - A_1(s,x)\right]^T (BB^T)^+(s,x)\left[A_0(s,x) - A_1(s,x)\right]; \tag{4.5}$$

$$\xi_t = \int_0^t \left[A_0(s,x) - A_1(s,x)\right]^T (BB^T)^+(s,x)\, B(s,x)\, dW(s).$$

Из формулы (4.4) следует, что приращение функционала $\mathcal{J}^0(t,x)$ на интервале (t_1, t_2), $t_1 < t_2$, в среднем неотрицательно, если этот интервал лежит слева от θ, и в среднем неположительно, если интервал (t_1, t_2) расположен справа от θ. Учитывая этот факт и принимая во внимание, что функционалы $\mathcal{J}^0(t,x)$ и $\mathcal{J}_T(t,x)$ имеют в силу (4.3) одинаковые приращения, приходим к следующему принципиальному выводу: для оценивания момента разладки по методу максимального правдоподобия достаточно выделить

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

некоторую возрастающую последовательность моментов $\{\tau_i, i \geq 0\}$ и следить за приращениями функционала $J^0(t,x)$ на интервалах (τ_{i-1}, τ_i), $i \geq 1$. Таким образом, разладка может быть обнаружена по текущим наблюдениям процесса $x(t)$ и первоначальное предположение о том, что у нас имеется реализация процесса, включающая момент разладки, оказывается ненужным. Построение решающей процедуры начинается с выбора последовательности отчетов $\{\tau_i\}$. Ясно, что моменты τ_i должны выбираться с учетом различия конкурирующих моделей в отдельные моменты времени. В качестве меры близости моделей в момент t естественно использовать величину $\tau(t,x)$, определяемую равенством (4.5).

Пусть H – положительное число. Определим последовательность $\{\tau_i\}$ по формуле

$$\tau_i = \tau_i(H) = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \tau(s,x)ds \geq iH\}.$$

Отсчеты τ_i следуют, вообще говоря, неравномерно, но обеспечивают равенство интегральных различий моделей процесса на интервалах (τ_{i-1}, τ_i), $i \geq 1$. Свяжем с каждым интервалом (τ_{i-1}, τ_i) свою статистику

$$y_i(H) = \frac{2}{H}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [A_1(s,x) - A_0(s,x)]^T (BB^T)^+(s,x)\left[dx(s) - \frac{A_0(s,x) + A_1(s,x)}{2}ds\right],$$

совпадающую с точностью до множителя $(-2/H)$ с приращением функции правдоподобия $J^0(\tau_i, x) - J^0(\tau_{i-1}; x)$. Используя уравнения (4.1), (4.2), получим

$$y_i(H) = \begin{cases} -1 + \varepsilon_i(H), & \text{если } \tau_i < \theta; \\ +1 + \varepsilon_i(H), & \text{если } \tau_{i-1} \geq \theta; \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\varepsilon_i(H) = \frac{2}{H}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [A_1(s,x) - A_0(s,x)]^T (BB^T)^+(s,x) B(s,x) dW(s).$$

В случае $\tau_{i-1} < \theta < \tau_i$ статистика $y_i(H)$ представляет собой сумму $\varepsilon_i(H)$ и некоторой величины, не превосходящей по модулю единицы. Благодаря сделанному выбору моментов $\{\tau_i\}$ случайные величины $\{\varepsilon_i(H), i \geq 1\}$ являются гауссовскими с параметрами $(0, 4/H)$. Это следует из равенства

$$\varepsilon_i(H) = \frac{2}{H}[z(iH) - z((i-1)H)] \tag{4.7}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

с учетом того, что случайный процесс $\{z(H),\ H \geq 0\}$ определяемый соотношениями:

$$z(H) = \int_0^{\sigma(H)} \left[A_1(s,x) - A_0(s,x) \right]^T (BB^T)^+(s,x) B(s,x)\, dW(s),$$

$$\sigma(H) = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \tau(s,x)\, ds \geq H \right\},$$

является винеровским [43]. Редукция данных, которую мы произвели, ограничившись рассмотрением функции правдоподобия в отдельные отсчеты времени τ_i, приводит, конечно, к потере информации. Однако, ясно, что эти потери можно сокращать путем уменьшения порога H, определяющего квантование времени. Для завершения построения решающей процедуры обнаружения разладки остается выбрать способ обработки последовательности $\{y_i(H)\}$. С этой целью обратимся к предельному случаю, когда $H \to 0$. Вводя обозначения:

$$G(h) = -J^0(\sigma(2h)), \quad h_k = \frac{kH}{2}, \quad \Delta h_k = \frac{H}{2}$$

и, используя (4.6), (4.7), получим

$$\Delta G(h_k) = G(h_k) - G(h_{k-1}) = \frac{H}{2}\, y_k(H) =$$

$$= \begin{cases} -\Delta h_k + \left[z(2h_k) - z(2h_{k-1}) \right], & \text{если } 2h_k < H_\theta; \\ \Delta h_k + \left[z(2h_k) - z(2h_{k-1}) \right], & \text{если } 2h_{k-1} \geq H_\theta, \end{cases}$$

$$H_\theta = \int_0^\theta \tau(s,x)\, ds.$$

Учитывая, что случайный процесс $z'(h) = z(2h)/\sqrt{2}$ является винеровским, и устремляя H к нулю, приходим к стохастическому дифференциальному уравнению

$$dG(h) = \operatorname{sign}(h - H_\theta)\, dh + \sqrt{2}\, dz'(h), \quad h \geq 0.$$

Модель такого типа изучалась в [181, 182], где была построена оптимальная (в смысле минимума среднего времени запаздывания в обнаружении разладки при фиксированном среднем времени между ложными тревогами) решающая процедура, позволяющая оценить мо-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

мент разладки H_θ по непрерывным наблюдениям процесса $G(h)$. Как показано в [182], почти оптимальной является процедура вырожденного последовательного анализа, согласно которой процесс $G(h)$ наблюдается до момента выхода из полосы ($0, B$) (значение B определяется по заданному среднему времени между ложными тревогами). При движении процесса $G(h)$ в отрицательную область происходит его отражение в нуль. При достижении уровня B производится проверка наличия разладки. Если она подтверждает разладку, наблюдения прекращаются, в противном случае процесс $G(h)$ отражается в нуль и наблюдения продолжаются. В нашем случае процесс $G(h)$ не может наблюдаться непрерывно. Однако описанная процедура подсказывает следующий способ обработки последовательности статистик $\{ y_i(H),\ i \geq 1 \}$. Задаем два порога $E_0 \leq 0$ и $E_1 > 0$ и последовательно наблюдаем суммы $y_1,\ y_1 + y_2, \ldots$ до первого момента выхода суммы из полосы (E_0, E_1). При достижении уровня E_0 сумма обнуляется и процесс суммирования текущих значений y_i начинается сначала. При достижении уровня E_1 производится проверка. Если она не подтверждает разладку, происходит отражение суммы в нуль и процесс суммирования возобновляется. Ясно, что такая процедура при надлежащем выборе порогов E_0, E_1 и малых значениях H будет близка по своим свойствам к оптимальной процедуре $\{ y_i \}$. Далее произведем квантование последовательности $\{ y_i \}$. Незначительные потери, связанные с квантованием статистик y_i, компенсируются возможностью непосредственной реализации процедуры на цифровых ЭВМ. Зададим два числа δ_1 и δ_2 $(\delta_1 < \delta_2)$ и положим

$$y_i' = \begin{cases} -1, \text{ если } & y_i < \delta_1; \\ 0, \text{ если } & \delta_1 \leq y_i < \delta_2; \\ +1, \text{ если } & y_i \geq \delta_2. \end{cases}$$

Процедура, использующая последовательность $\{ y_i' \}$, проста в реализации и обладает, как показано ниже, хорошими статистическими свойствами. Процесс принятия решений на основе статистик y_i' является случайным блужданием на множестве целых чисел $\{ E_0, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, E_1 \}$ и его удобно представить в виде графа, изображенного на рис.3. В начальный момент процесс находится в нуле. Пока процесс не достигает крайних состояний (E_0 и E_1), в моменты τ происходят переходы либо на единицу влево ($y_i' = -1$),

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

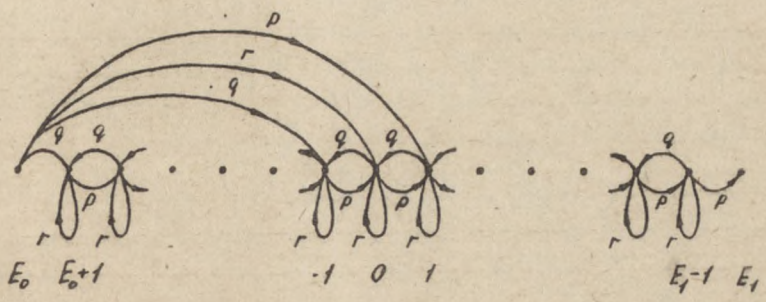

Рис.3. Граф изменения состояний решающего устройства

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

либо на единицу вправо ($y_i' = +1$) или же процесс остается в том же состоянии ($y_i' = 0$). При попадании процесса в E_0 выносится решение об отсутствии разладки и процесс мгновенно возвращается в состояние 0. При попадании процесса в состояние E_1 производится проверка. Вероятности перехода p , q и r ($p+q+r=1$) зависят от того, произошла разладка или нет. Предполагая, как это принято [182] , что разладке предшествует длительный процесс наблюдений, для начальных значений переходных вероятностей получаем формулы:

$$p_0 = \lim P\left[y_i'(H)=1 \,|\, \tau_i<\theta \right] = P\left[\varepsilon_i(H) \geqslant \delta_2+1\right] =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\delta_2+1}{2}\sqrt{H}\right);$$

$$q_0 = \lim_{\theta\to\infty} P\left[y_i'(H)=-1 \,|\, \tau_i<\theta \right] = P\left[\varepsilon_i(H) < \delta_1+1\right] =$$

$$= \Phi\left(\frac{\delta_1+1}{2}\sqrt{H}\right); \qquad (4.8)$$

$$r_0 = 1-p_0-q_0;$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$ – функция Лапласа.

После разладки переходные вероятности задаются формулами:

$$p_1 = P\{ y_i'(H)=+1 \,|\, \tau_{i-1} \geqslant \theta\} = P\{\varepsilon_i(H) > \delta_2-1 \,|\, \tau_{i-1} \geqslant \theta\} =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\delta_2-1}{2}\sqrt{H}\right);$$

$$q_1 = P\{ y_i'(H)=-1 \,|\, \tau_{i-1} \geqslant \theta\} = \Phi\left(\frac{\delta_1-1}{2}\sqrt{H}\right), \quad r_1 = 1-p_1-q_1 . \qquad (4.9)$$

В то время как равенства (4.8) следуют непосредственно из гаус-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

совости величин $\varepsilon_i(H)$, последние формулы нуждаются в обосновании. Пусть ν – номер первого отсчета после разладки, т.е.

$$\nu = \inf\{j \geq 1 : \tau_j \geq \theta\}.$$

Случайная величина ν является марковским моментом относительно системы σ – алгебр $\{\mathcal{F}_{\tau_k}, k \geq 0\}$, $\mathcal{F}_{\tau_k}$ – σ – алгебра событий, наблюдаемых до момента τ_k. Для проверки марковости: $[\nu = k] \in \mathcal{F}_{\tau_k}$, $k \geq 0$, требуется показать включение

$$[\nu = k] \cap [\tau_k \leq t] \in \mathcal{F}_t, \quad t \geq 0,$$

где $\mathcal{F}_t = \sigma\{x(0); W(s), s \leq t\}$. Это включение следует из равенства

$$[\nu = k] \cap [\tau_k \leq t] = \begin{cases} 0, \text{ если } t < \theta; \\ [\tau_1 < \theta] \cap \ldots \cap [\tau_{k-1} < \theta] \cap [\tau_k \geq \theta] \cap [\tau_k \leq t], \text{если } t \geq \theta, \end{cases}$$

и марковости момента τ_k относительно системы $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.
По определению условной вероятности имеем

$$P\{\varepsilon_i(H) > \delta_2 - 1, \tau_{i-1}(H) \geq \theta\} = P\{\varepsilon_i(H) > \delta_2 - 1, \nu = i-1\} =$$

$$= \int\limits_{\{\nu \leq i-1\}} P\{\varepsilon_i(H) > \delta_2 - 1 \mid \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\} dP.$$

Учитывая, что случайная величина $\varepsilon_i(H)$ является условно гауссовской: $P\{\varepsilon_i(H) \leq a \mid \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\} = \Phi(\sqrt{H}\, a/2)$, отсюда получаем выражение для ρ_1. Второе равенство (4.9) доказывается аналогично.

Далее, при решении задачи параметрической оптимизации, будем полагать $\delta_2 = -\delta_1 = \delta$ и $E_0 = -1$. Первое из этих условий обеспечивает равные возможности для каждой из конкурирующих моделей (4.I), (4.2) влиять на переходные вероятности блужданий, связанных с решающей процедурой, т.е. приводит к равенствам:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$p_0 = q_1 \equiv p$, $q_0 = p_1 \equiv q$. Второе взято по аналогии с вырожденным последовательным анализом [182]. Основными характеристиками построенной процедуры являются: вероятность ложной тревоги α, вероятность ложного спокойствия β, среднее число отсчетов τ_i между ложными тревогами T_0 и среднее число отсчетов, требуемых для обнаружения разладки после её появления T_1.

ТЕОРЕМА 4.I. Пусть с вероятностью единица расходится интеграл

$$\int_0^\infty z(s,x)\,ds = +\infty .$$

Тогда для любого $H > 0$ справедливы формулы:

$$T_0 = \frac{a}{p-q} + \frac{1}{(q-p)\alpha}, \quad \alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma^a-1}, \quad \gamma = \frac{q}{p}, \quad a = F_1+1;$$

$$T_1 = Q\left[1 - \frac{\rho_1+1}{T_0}\right] + \rho_2, \quad \rho_1 = \frac{p\cdot q}{(q-p)^2(q+p)}, \quad \rho_2 = -\rho_1 + \frac{a(a-1)}{2T_0(q-p)^2}; \tag{4.10}$$

$$Q = \frac{a}{q-p} - \frac{1}{(q-p)(1-\beta)}, \quad \beta = \frac{\gamma^{-a}-\gamma^{-1}}{\gamma^{-a}+1},$$

где p и q определяются равенствами (4.8). Доказательство теоремы 4.I вынесено в приложение.

Замечание 4.I. Формулы (4.I0) можно использовать для решения следующей задачи параметрической оптимизации. Зафиксируем среднеквадратическое интегральное уклонение моделей (4.I), (4.2):

$$M\int_{t'}^{t''} z(s,x)\,ds = R_0 = const, \tag{4.11}$$

накапливаемое между двумя соседними моментами ложных тревог t' и t'', и определим параметры E_1 и δ из условия минимума величины

$$M\int_{\theta}^{\theta+t_3} z(s,x)\,ds = R_1, \tag{4.12}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Таблица 6

Оптимальные значения параметров процедуры обнаружения разладки

R_0	H	0,1	0,5	1,0	2,0
200	E_1	12	6	4	3
	δ	3,895	1,432	1,378	0,968
	R_1	8,570	8,637	8,533	8,490
1000	E_1	16	7	5	4
	δ	3,910	2,057	1,535	0,858
	R_1	12,411	12,475	12,501	12,513
10000	E_1	22	10	7	5
	δ	3,852	1,778	1,371	1,026
	R_1	18,065	18,125	18,211	18,324
20000	E_1	24	11	8	5
	δ	3,760	1,685	1,155	1,228
	R_1	19,782	19,878	20,010	20,340

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

определяющей среднеквадратическое интегральное уклонение, накапливаемое с момента разладки θ до момента тревоги $\theta + t_з$, $t_з$ – время задержки. Эта задача с учетом того, что приращения интегрального различия согласно процедуре происходят квантами величины H, эквивалентна следующей: при условии $R_0 = T_0 \cdot H$ минимизировать величину $R_1 = T_1 \cdot H$. Численное решение этой задачи при различных значениях параметра квантования времени H приводится в табл. 6. Выбор параметра H не включается в задачу оптимизации, поскольку при малых H в реализации процедуры появляются сложности, связанные с тем, что погрешности вычисления стохастических интегралов становятся сравнимыми с величинами самих интегралов.

Табл. 6 по заданным величинам R_0 и H определяет параметры оптимальной процедуры E_1 и δ, а также соответствующее им минимальное значение среднего интегрального запаздывания R_1. Как видно из табл. 6, качество процедуры с увеличением H снижается довольно медленно. Например, если R_0 = 10000, то при увеличении H от 0,1 до 2,0 среднее интегральное запаздывание возрастает с 18,065 до 18,324. Некритичность качества решающей процедуры по отношению к H представляет интерес в связи с тем, что при больших H реализация процедуры значительно упрощается.

Замечание 4.2. При $z(s,x) = const$ критерий (4.11), (4.12) приводит к критерию работ [182, 183]. Если процессы (4.1), (4.2) скалярные, причем $A_0 = -1$, $A_1 = 1$, $B = \sqrt{2}$ ($z(s,x) = 2$), то $R_0/2$ задает среднее время между ложными тревогами, а $R_1/2$ – среднее время запаздывания в обнаружении разладки. Сравнение в этом случае численных результатов [183] с табл. 6 показывает, что квантования времени и статистик y_i, использованные в предлагаемой процедуре, дают увеличение времени задержки примерно на 20%. Так, например, при $R_0/2$ = 10000 оптимальная процедура работы [183] обеспечивает запаздывание 7,715, в то время как по табл. 6 получаем $R_1/2$ = 9,298.

В асимптотическом случае, используя теорему 4.1, приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $E_1 \to \infty$. Тогда

$$T_1 = \varkappa_1(H,\delta)\ln T_0 + \varkappa_2 + o\left(\frac{\ln T_0}{T_0}\right), \qquad (4.13)$$

где $\varkappa_1(H,\delta) = \left[(q-p)\ln\frac{q}{p}\right]^{-1}$, $\varkappa_2 = \varkappa_1 \ln\left[\frac{(q-p)^2}{p}\right] - \frac{q(q+2p)}{(q-p)^2(q+p)}$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Формулу (4.13) легко получить из (4.10), учитывая, что T_0 растет экспоненциально, а T - линейно по E_1.

4.3. Обнаружение разладки в системе объектов

Будем предполагать, что объекты просматриваются с помощью одного устройства в циклическом порядке, начиная с первого. Учитывая, что процессы, описываемые уравнениями (4.1), (4.2), независимы в совокупности, для обнаружения разладки в каждом объекте естественно использовать соответствующую функцию правдоподобия. Возможность наблюдать каждый из объектов лишь на отдельных временных интервалах накладывает свою специфику на построение решающей процедуры. Введем вспомогательные обозначения. Пусть $\nu(t)$ - номер объекта, наблюдаемого в момент t. Зададим некоторое $H>0$ и определим последовательность моментов $\{\tau_i, i\geq 0\}$ по формулам:

$$\tau_i=\tau(iH),\ H>0,\ \tau(h)=\inf\{t\geq 0:\int_0^t \|g(s)\|^2 ds\geq h\};$$

$$g(t)=\left(\chi_{[\nu(t)=1]} f_1(t),\ldots,\chi_{[\nu(t)=N]} f_N(t)\right);$$

$$f_\ell(t)=\left[A_1^{(\ell)}(t,x_\ell)-A_0^{(\ell)}(t,x_\ell)\right]^T (B_\ell^T)^+(t,x_\ell),$$

χ_A - индикатор множества A. Будем предполагать, что изменение номера просматриваемого объекта может производиться только в моменты τ_i. С каждым интервалом (τ_{i-1},τ_i) свяжем статистику

$$y_{\nu,i}(H)=\frac{2}{H}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_{\nu_i}(t)B_{\nu_i}^+(t,x_{\nu_i})\left[dx_{\nu_i}(t)-\frac{A_0^{(\nu_i)}(t,x_{\nu_i})+A_1^{(\nu_i)}(t,x_{\nu_i})}{2}dt\right], \quad (4.14)$$

где ν_i - номер объекта, наблюдаемого на интервале (τ_{i-1},τ_i). Эта статистика совпадает с точностью до постоянного множителя с

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

приращением на интервале (τ_{i-1}, τ_i) логарифмической функции правдоподобия, соответствующей объему с номером ν_i. Предположим, что разладка появляется в ℓ-м объекте. Тогда, обозначив Λ_ℓ совокупность номеров $\{i\}$ временных интервалов (τ_{i-1}, τ_i), в которые устройство подключено к ℓ-му объекту, и используя (4.1), (4.2), получим

$$y_{\nu,i}(H) = \begin{cases} -1+\varepsilon_i(H), \text{ если } & i \in \Lambda_\ell; \\ -1+\varepsilon_i(H), \text{ если } & i \in \Lambda_\ell \quad \text{и} \quad \tau_i < \theta; \\ +1+\varepsilon_i(H), \text{ если } & i \in \Lambda_\ell \quad \text{и} \quad \tau_{i-1} \geq \theta, \end{cases}$$

где

$$\varepsilon_i(H) = \frac{2}{H}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_{\nu_i}(t) B^+_{\nu_i}(t, x_{\nu_i}) B_{\nu_i}(t, x_{\nu_i})\, dW_{\nu_i}(t) = \frac{2}{H}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_{\nu_i}(t)\, dW_{\nu_i}(t).$$

Благодаря выбору моментов τ_i система $\{\varepsilon_i(H), i \geq 1\}$ является последовательностью независимых гауссовских случайных величин с параметрами $(0, 4/H)$. Это следует из того факта, что случайный процесс $\{z(h), h \geq 0\}$, определяемый равенством

$$z(h) = \int_0^{\tau(h)} g(t)\, dW(t), \qquad W(t) = (W_1(t), \ldots, W_N(t))^T,$$

является винеровским [43]. В решающей процедуре, как и в случае одного объекта, будем использовать квантованные значения:

$$y'_{\nu,i}(H) = \begin{cases} -1, \text{ если } & y_{\nu,i}(H) < -\delta; \\ 0, \text{ если } & -\delta \leq y_{\nu,i}(H) \leq \delta; \\ +1, \text{ если } & y_{\nu,i}(H) > \delta. \end{cases}$$

Обнаружение разладки осуществляется с помощью устройства, которое может находиться в одном из состояний $\{-1, 0, \ldots, E\}$, E – целое. В начальный момент устройство подключается к первому объекту, находясь в состоянии 0. Эволюция состояний определяется статистиками (4.14) при $\nu_i = 1$. Наблюдения первого объекта продолжаются до тех пор, пока последовательность сумм $y'_{\nu,1}, y'_{\nu,1} + y'_{\nu,2}, \ldots$, определяющих номера текущих состояний устройства в моменты $\tau_1(H), \ldots$ $\tau_2(H), \ldots$, не достигает одного из порогов -1 или E. При достижении состояния -1 устройство переходит в состояние 0 и подключается ко второму объекту. При достижении состояния E производится проверка наличия разладки. Если разладки нет, устройство

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ереходит в состояние 0 и подключается ко второму объекту. С это-о момента и до момента прекращения наблюдения второго объекта ункционирование устройства осуществляется по описанному алго-итму с использованием статистик (4.14) при $\nu_i = 2$ и т.д. Наб-юдения объектов в циклическом порядке продолжаются до обнаруже-ия разладки. Процедура обнаружения разладки в системе объектов остроена. Основной вероятностной характеристикой процедуры яв-яется величина $T_1(j,z)$, определяющая среднее число отсчетов, еобходимых для обнаружения разладки, если в момент разладки стройство находится в состоянии z и от объекта с разладкой его тделяют j объектов.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть с вероятностью единица расходятся интегралы

$$\int_0^\infty \| f_\ell(t) \|^2 dt = +\infty, \quad \ell = \overline{1,N}.$$

огда справедливы формулы:

$$T_1(0,z) = \frac{z-E}{p-q} + \left[(N-1)\mathcal{D}(1) + \frac{1}{p-q}\right]\left(\frac{\gamma^{-E} - \gamma^{-E}}{\gamma - 1}\right);$$

$$T_1(j,z) = \mathcal{D}(z+1) + (j-1)\mathcal{D}(1) + T_1(0,0), \quad j = \overline{1,N-1}, \qquad (4.15)$$

где

$$\mathcal{D}(z) = \frac{z}{q-p} - \frac{E+1}{q-p} \cdot \frac{(\gamma^z - 1)}{(\gamma^{E+1} - 1)}, \qquad \gamma = \frac{q}{p}$$

вероятности ложной тревоги α, ложного спокойствия β и среднее число отсчетов между ложными тревогами T_0 определяются равен-ствами (4.10).

Доказательство теоремы 4.3 вынесено в приложение.

Следствие 4.1. Если все объекты одинаковы, то среднее число отсчетов запаздывания в обнаружении разладки в стационарном реж-ме определяется равенством

$$T_1^* = Q - \frac{(N-1)\mathcal{D}(1)}{N}\left[(q-p)(\rho_1+1)\left(\frac{Q}{T_0}+1\right) - N\frac{\gamma^{-a}}{1-\gamma^{-1}}\right] + \qquad (4.16)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$+\frac{N-1}{N}\left[\frac{q}{(q-p)^2}-1+\frac{2a}{(q-p)(\gamma^a-1)}-\frac{a(a-1)}{(q-p)^2T_0}\right]-\frac{\rho_1}{N}-$$

$$-\frac{Q}{NT_0}(\rho_1-1)+\frac{\mathcal{D}(1)(N-1)}{N}\left[\frac{N-2}{2}-\frac{N-1}{\gamma-1}\right],\quad a=E+1.$$

Доказательство следствия 4.I дано в приложении.

Исходя из формулы (4.I6), нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть уравнения (4.I), (4.2) для всех объектов одинаковы. Тогда при $E\to\infty$ число отсчетов запаздывания и среднее число отсчетов между ложными тревогами T_0 связаны соотношением

$$T_1^*=\varkappa_1\ln T_0+\varkappa_2(N)+\frac{(N-1)}{2}\cdot\frac{(q+p)}{(q-p)^2}+O\left(\frac{N\ln^2T_0}{T_0}\right),\qquad(4.I7)$$

где

$$\varkappa_1=\left[(q-p)\ln\frac{q}{p}\right]^{-1},\quad \varkappa_2(N)=\varkappa_1\ln\left[\frac{(q-p)^2}{p}\right]-\frac{(N-2)}{N}\cdot\frac{q\cdot p}{(q-p)^2(q+p)}-\frac{q}{(q-p)^2}.$$

Замечание 4.2. Теоремы 4.2, 4.4 позволяют легко получить формулы, связывающие величины $R_1=T_1\cdot H$ и $R_0=T_0\cdot H$, которые определяют соответственно среднее интегральное различие моделей, накапливаемое с момента разладки до момента её обнаружения, и среднее интегральное различие, накапливаемое между ложными тревогами. Подобные результаты в задаче обнаружения разладки в многоканальной системе при условиях отмеченных в замечании 4.I, были впервые получены в [183]. В [183] было установлено, что последовательная процедура по качеству значительно превосходит классическую процедуру Неймана-Пирсона. Как видно из (4.I7), этот вывод справедлив и для построенной последовательной процедуры.

В табл. 7 при $R_0/2=$ I0000 приведена зависимость $R_1/2$ от числа объектов N, полученная по формуле (4.I5). Сравнение численных результатов [183] с табл. 7 показывает, что для модели работы [183] предлагаемая процедура проигрывает процедуре

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Таблица 7

Зависимость характеристик запаздывания в обнаружении разладки от числа объектов (при $R_0/2$ = I0000)

N	2	3	5	I0
$R_1/2$	II,095	I2,525	I5,I58	2I,469
N	20	25	50	I00
$R_1/2$	33,926	40,I37	7I,I58	I33,I66

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

вырожденного последовательного анализа 20%. Заметим, однако, что построенная процедура проще в реализации, поскольку она предполагает конечность времени анализа каждого объекта (не меньше $11/2$), в то время как в [183] допускается сколько угодно малое время наблюдения объекта.

Замечание 4.3. В постановке задачи предполагалось, что функции сноса в уравнениях (4.1), (4.2) зависят в момент t только от значения процесса $x_i(t)$. Однако все свойства построенных процедур, как нетрудно проверить, сохраняются и в том случае, когда функции $A_0^{(i)}$ и $A_1^{(i)}$ являются неупреждающими измеримыми функционалами от процесса $\{x_i(t)\}$, удовлетворяющими требуемым условиям интегрируемости.

§ 5. УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ НАЛИЧИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

5.1. Постановка задачи

Пусть наблюдаемый процесс $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}'$ описывается системой стохастических дифференциальных уравнений

$$dx(t) = [Ax + Gu]\,dt + \Sigma\, dw(t), \tag{5.1}$$

где $w(t)$ – n – мерный стандартный винеровский процесс; $u = \{u_1, \dots, u_m\}'$ – вектор управлений; матрицы $G = \|g_{ij}\|$ и Σ (могут зависеть от времени) известны, имеют размерности $n \times m$ и $n \times n$ соответственно, причем матрица $B = \|b_{ij}\| = \Sigma\Sigma'$ положительно определена; штрих обозначает транспонирование. Элементы матрицы $A = \|a_{ij}\|_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$ неизвестны. Пусть матрица A не меняет своего значения на протяжении всего процесса и известно совместное априорное распределение её элементов, т.е. вектора

$$\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}\} \equiv \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}\}.$$

Обозначим $p_0(\lambda)$ априорную плотность λ. Будем предполагать, что априорная плотность $p_0(\lambda)$ гауссовская с параметрами λ_0, Λ_0

$$p_0(\lambda) = (2\pi)^{-n^2/2} (\det \Lambda_0)^{-1/2} \exp\{-\tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)'\Lambda_0^{-1}(\lambda-\lambda_0)$$

При этих предположениях будем искать управление u_t, $t \in [0, T]$ являющееся функционалом от наблюдений процесса x до момента t

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и минимизирующее выражение

$$M\left\{\int_0^T [x'Qx + u'\theta u]\,d\tau\right., \tag{5.2}$$

где $\theta = \|\theta_{ij}\|$ и $Q = \|q_{ij}\|$ - симметричные соответственно положительно и неотрицательно определенные матрицы (могут зависеть от времени), имеющие размерности $m \times m$ и $n \times n$.

Заметим, что при известной матрице A поставленная задача превращается в стохастический вариант известной задачи линейно-квадратического регулятора, которая решается методом динамического программирования. Напомним, что оптимальное управление $u^*(t) = \varphi(t, x(t))$ в этом случае имеет вид [217]:

$$u^*(t) = K(t)x_t, \tag{5.3}$$

где $K(t) = -\theta^{-1}G'S(t)$, $S(t)$ - матричная функция, удовлетворяющая уравнению Риккати

$$-\dot{S}(t) = Q + SA + A'S - SG\theta^{-1}G'S \tag{5.4}$$

с конечным условием $S(T) = 0$ (нулевая матрица). Точка сверху обозначает производную по времени.

Если параметры a_{ij}, $1 \le i, j \le n$, управляемого процесса неизвестны, то вид оптимального управления будет отличаться от (5.3), (5.4) и должен, естественно, зависеть от имеющейся информации о неизвестных параметрах.

Задача с неизвестной матрицей G изучалась в [223], в предположении, что G - вектор-столбец, а u - скалярная функция.

Вся информация о параметре λ, содержащаяся в полученной реализации процесса $\{x_s, s \le t\}$, заключена в апостериорном распределении λ. Апостериорную плотность λ обозначим $P_t(\cdot)$:

$$P_t(a_1, \ldots, a_{n^2})\,da_1 \ldots da_{n^2} = P\left[a_i \le \lambda_i \le a_i + da_i,\ i = \overline{1, n^2} \,\middle|\, x_0^t\right].$$

5.2. Вывод уравнения Беллмана

Так как многомерный параметр входит в уравнение (5.I) линейно, и по предположению его априорное распределение гауссово, то гауссовским будет и его апостериорное распределение $P_t(\cdot)$, $t \ge 0$. Уравнения для вектора апостериорных математических ожиданий

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$\lambda_t = M[\lambda | x_0^t]$ и матрицы ковариаций $\Lambda_t = \|\Lambda_{ij}\| = M[(\lambda - \hat{\lambda}_t)(\lambda - \hat{\lambda}_t)' | x_0^t]$ имеют вид (в форме Ито)

$$d\hat{\lambda} = \Lambda R' B^{-1}(dx - \hat{A}x\,dt - Gu\,dt);$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\Lambda R' B^{-1} R \Lambda, \tag{5.5}$$

где $\hat{A} = \|a_{ij}\|$, $R = \|r_{i,kj}\|$, $r_{i,kj} = x_j \delta_{ik}$, δ_{ik} – символ Кронекера. Эти уравнения следуют из общих уравнений фильтрации теории условных марковских процессов [114,150,165].

Как показал А.Н.Ширяев [187], достаточной статистикой для выбора оптимального управления u_t^* служит апостериорное распределение координат управляемого процесса в момент t. В рассматриваемой задаче в управляемом процессе (x , λ) составляющая $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ доступна непосредственному наблюдению, а условное распределение $p_t(t)$ зависит только от $\hat{\lambda}_t$ и Λ_t. Поэтому x_t, $\hat{\lambda}_t$, Λ_t представляют набор достаточных статистик для выбора оптимального управления u_t^*, т.е. $u_t^* - \varphi(t, x_t, \hat{\lambda}_t, \Lambda_t)$.

Оптимальное управление u_t^* будем искать методом динамического программирования. Введем в рассмотрение функционал

$$V(t, x, \hat{\lambda}, \Lambda) = \min M\left[\int_t^T (x'Qx + u'\theta u)\,d\tau \,\Big|\, x_0^t\right],$$

где $M[(\cdot)|x_0^t]$ обозначает условное математическое ожидание выражения ($\cdot$) при известной реализации процесса x до момента t: $x_0^t = \{x_s,\ 0 \le s \le t\}$.

Уравнение для функции $V(t, x, \hat{\lambda}, \Lambda)$ найдем, используя формализм динамического программирования. Имеем

$$V(t, x, \hat{\lambda}, \Lambda) = \min M\left[\int_t^{t+\Delta t} (x'Qx + u'\theta u)\,dt + V(t+\Delta t, x+\Delta x, \lambda+\Delta\lambda, \Lambda+\Delta\Lambda \,|\, x_0^t\right]. \tag{5.6}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Разложим $V(t+\Delta t, x+\Delta x, \hat{\lambda}+\Delta\hat{\lambda}, \Lambda+\Delta\Lambda)$ в ряд, ограничиваясь членами, которые дадут вклад в уравнение (5.6) при переходе к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$V(t+\Delta t, x+\Delta x, \hat{\lambda}+\Delta\hat{\lambda}, \Lambda+\Delta\Lambda) = V(t, x, \hat{\lambda}, \Lambda) + \tag{5.7}$$

$$+\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial V}{\partial x}'\Delta x + \frac{\partial V}{\partial \hat{\lambda}}'\Delta\hat{\lambda} + tr\frac{\partial V}{\partial \Lambda}\Delta\Lambda + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x}\Delta x \Delta x' +$$

$$+tr\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \hat{\lambda}}\Delta\hat{\lambda}\Delta x' + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \hat{\lambda}\partial\hat{\lambda}}\Delta\hat{\lambda}\Delta\hat{\lambda}' + o(\Delta t).$$

Здесь использованы обозначения

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)', \quad \frac{\partial V}{\partial \hat{\lambda}} = \left(\frac{\partial V}{\partial \hat{\lambda}_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial \hat{\lambda}_{n^2}}\right)';$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Lambda} = \left\| \frac{\partial V}{\partial \Lambda_{ij}} \right\|_{i=\overline{1,n^2}}^{j=\overline{1,n^2}}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x} = \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \hat{\lambda}} = \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial \hat{\lambda}_j} \right\|_{i=\overline{1,n^2}}^{j=\overline{1,n^2}}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \hat{\lambda}\partial\hat{\lambda}} = \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial \hat{\lambda}_i \partial \hat{\lambda}_j} \right\|_{i=\overline{1,n^2}}^{j=\overline{1,n^2}},$$

trA – след матрицы A.

Подставив (5.7) в (5.6) и используя соотношения

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{M[\Delta x \mid x_0^t]}{\Delta t} = \hat{A}x + GU, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M[\Delta x \Delta x' \mid x_0^t]}{\Delta t} = B;$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{M[\Delta\lambda\Delta\lambda' \mid x_0^t]}{\Delta t} = \Lambda R' B^{-1} R \Lambda;$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{M[\Delta\lambda\Delta\lambda' \mid x_0^t]}{\Delta t} = \Lambda R', \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M[\Delta\lambda \mid x_0^t]}{\Delta t} = 0,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

после перехода к пределу при $\Delta t \to 0$ получим

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_{u}\Big[x'Qx + u'\theta u + \frac{\partial V}{\partial x}'(\hat{A}x + Gu) + \\ + tr\frac{\partial V}{\partial \Lambda}\frac{d\Lambda}{dt} + \frac{1}{2}tr\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x}B + tr\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \hat{\lambda}}\Lambda R' + \\ + \frac{1}{2}tr\frac{\partial^2 V}{\partial \hat{\lambda}\partial \hat{\lambda}}\Lambda R' B^{-1} R \Lambda\Big]. \tag{5.8}$$

Приравняв к нулю производную по u правой части этого уравнения, найдем

$$u = -\frac{1}{2}\theta^{-1}G'\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{5.9}$$

Подстановка (5.9) в (5.8) приводит к уравнению в частных производных для функции $V(t, x, \hat{\lambda}, \Lambda)$:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = x'Qx - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)'G\theta^{-1}G'\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)'\hat{A}x + \\ + \frac{1}{2}tr\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x}B - tr\frac{\partial V}{\partial \Lambda}\Lambda R' B^{-1} R \Lambda + \\ + tr\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \hat{\lambda}}\Lambda R' + \frac{1}{2}tr\frac{\partial^2 V}{\partial \hat{\lambda}\partial \hat{\lambda}}\Lambda R' B^{-1} R \Lambda. \tag{5.10}$$

Решение уравнения должно удовлетворять конечному условию

$$V(T, x, \hat{\lambda}, \Lambda) = 0 \tag{5.11}$$

для всех $x, \hat{\lambda}, \Lambda$.

Уравнение (5.10) существенно нелинейно. Рассмотрим уравнение (5.10) сначала для случая, когда управляемый процесс x одномерный.

5.3. Управление одномерным процессом x

Для скалярного процесса x уравнения (5.1), (5.5), (5.6) уп-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

рощаются и принимают соответственно вид

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + gu + \sigma\xi; \quad d\hat{\lambda} = \frac{\Lambda x}{\sigma^2}\left(dx - \hat{\lambda} x dt - gu dt\right); \tag{5.12}$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{x^2\Lambda^2}{\sigma^2};$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = qx^2 - \frac{g^2}{4\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \hat{\lambda} x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \tag{5.13}$$

$$-\frac{x^2\Lambda^2}{\sigma^2}\frac{\partial V}{\partial \hat{\lambda}} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \hat{\lambda}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \hat{\lambda}^2}\frac{\Lambda^2 x^2}{\sigma^2},$$

(Здесь вместо Q, G, Σ, θ использованы соответственно q, g, σ, θ.).

Из уравнения (5.12) следует, что

$$\Lambda_t = \Lambda_0 \Big/ \left(1 + \frac{\Lambda_0}{\sigma^2}\int_0^t x_s^2 ds\right) \tag{5.14}$$

и с ростом t Λ_t быстро убывает.

Будем искать решение уравнения (5.13) в виде ряда по степеням Λ:

$$V(t, x, \hat{\lambda}, \Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t, x, \hat{\lambda})\frac{\Lambda^k}{k!}. \tag{5.15}$$

Подставив этот ряд в уравнение (5.13) и приравняв члены, стоящие при одинаковых степенях Λ^k $(k = 0, 1, \ldots)$ в левой и правой частях уравнения, получим системы уравнений:

$$-\frac{\partial V_0}{\partial t} = qx^2 + \hat{\lambda} x \frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{g^2}{4\theta}\left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2}; \tag{5.16}$$

$$-\frac{\partial V_1}{\partial t} = \hat{\lambda} x \frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{g^2}{4\theta}\frac{\partial V_0}{\partial x}\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \tag{5.17}$$

$$+ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial \hat{\lambda}} x$$

и для $k \geqslant 2$:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$-\frac{\partial V_k}{\partial t} = \hat{\lambda} x \frac{\partial V_k}{\partial x} - \frac{g^2}{4\theta} \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \frac{\partial V_s}{\partial x} \frac{\partial V_{k-s}}{\partial x} + \tag{5.18}$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{k(k-1)}{\sigma^2} x^2 \frac{\partial^2 V_{k-2}}{\partial x^2} -$$

$$- \frac{k(k-1)}{\sigma^2} x^2 V_{k-1} + k x \frac{\partial^2 V_{k-1}}{\partial x \, \partial \hat{\lambda}} .$$

Решение первого уравнения системы (5.16) ищем в виде

$$V_0(t, x, \hat{\lambda}) = z_{00}(t, \hat{\lambda}) + z_{01}(t, \hat{\lambda}) x^2 . \tag{5.19}$$

Подстановка (5.19) в уравнение (5.16) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для определения $z_{00}(t, \hat{\lambda}_t)$ и $z_{01}(t, \hat{\lambda}_t)$

$$-\frac{d z_{00}(\tau, \hat{\lambda}_t)}{d\tau} = \sigma^2 z_{01}(\tau, \hat{\lambda}_t); \tag{5.20}$$

$$-\frac{d z_{01}(\tau, \hat{\lambda}_t)}{d\tau} = q + 2\hat{\lambda}_t z_{01}(\tau, \hat{\lambda}_t) - \frac{g^2}{\theta} z_{01}^2(\tau, \hat{\lambda}_t), \ (t \le \tau \le T$$

причем согласно условию (5.11) $z_{00}(T, \hat{\lambda}_t) = 0, z_{01}(T, \hat{\lambda}_t) = 0$ при всех $\hat{\lambda}_t$.

Если функцию $V_0(t, x, \hat{\lambda})$ использовать в качестве нулевого приближения функции $V(t, x, \hat{\lambda}, \Lambda)$, то, подставив её в уравнение (5.9), получим нулевое приближение для оптимального управления u_t^* :

$$u_t^0 = -\frac{g}{\theta} z_{01}(t, \hat{\lambda}_t) x_t \tag{5.21}$$

Из сравнения формул (5.20), (5.21) с формулами (5.3), (5.4) видно, что нулевое приближение u_t^0 совпадает по форме с оптимальным управлением, соответствующим задаче с известным параметром

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

λ. Разница состоит только в том, что в (5.20) входит вместо параметра λ его оценка $\hat{\lambda}_t$, оптимальная в среднеквадратичном. Кроме того, при неизвестном параметре требуется повторное решение второго уравнения системы (5.20) по мере поступления уточненных оценок $\hat{\lambda}_t$.

Легко находится и решение второго уравнения системы (5.I6). Будем искать его в том же виде:

$$V_1(t,x,\hat{\lambda}) = z_{10}(t,\hat{\lambda}) + z_{11}(t,\hat{\lambda})x^2. \qquad (5.2I')$$

Подставив (5.I9) и (5.2I) в уравнение (5.I7), найдем обыкновенные дифференциальные уравнения, определяющие $z_{10}(t,\hat{\lambda}_t)$ и $z_{11}(t,\hat{\lambda}_t)$:

$$-\frac{dz_{10}}{d\tau}(\ ,\hat{\lambda}_t) = \sigma^2 z_{11}(\tau,\hat{\lambda}_t);$$

$$\frac{dz_{11}}{d\tau} = 2\left[\frac{g^2}{\theta} z_{01}(\tau,\hat{\lambda}_t) - \hat{\lambda}_t\right] z_{11} - 2\frac{\partial z_{01}}{\partial \hat{\lambda}_t}(\tau,\hat{\lambda}_t) \qquad (5.22)$$

$$(0 \le \tau \le T),$$

причем для всех $\hat{\lambda}_t$ $z_{10}(T,\hat{\lambda}_t) = z_{11}(T,\hat{\lambda}_t) = 0$. Уравнение для $-\frac{\partial z_{01}}{\partial \hat{\lambda}_t}(\tau,\hat{\lambda}_t)$ найдем, продифференцировав второе уравнение системы (5.20) по $\hat{\lambda}_t$:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial z_{01}(\tau,\hat{\lambda}_t)}{\partial \hat{\lambda}_t} = 2\left[\frac{g^2}{\theta} z_{01} - \hat{\lambda}_t\right]\frac{\partial z_{01}(\tau,\hat{\lambda}_t)}{\partial \hat{\lambda}_t} - \qquad (5.23)$$

$$-2 z_{01}(\tau,\hat{\lambda}_t),$$

причем для всех $\hat{\lambda}_t$ $\frac{\partial z_{01}}{\partial \hat{\lambda}_t}(T,\hat{\lambda}_t) = 0$. Первое приближение для оптимального управления u_t^1 получим, подставив вместо функции $V(t, x, \lambda, \Lambda)$ в уравнение (5.9) её первое приближение $V_0(t,x,\hat{\lambda}) + V_1(t,x,\hat{\lambda})\Lambda$:

$$u_t^1 = -\frac{g}{\theta}\left[z_{01}(t,\hat{\lambda}_t) + \Lambda_t z_{11}(t,\hat{\lambda}_t)\right] x_t. \qquad (5.24)$$

Управление u_t^1 в отличие от u_t^0 зависит не только от оцен-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ки неизвестного параметра $\hat{\lambda}_t$, но и от его апостериорной дисперсии Λ_t. При этом управление u_t^1 остается линейным по x_t.

Пользуясь индукцией, можно показать, что решения уравнений (5.18) имеют вид

$$v_k(t,x,\hat{\lambda}) = \sum_{j=0}^{k} z_{kj}(t,\hat{\lambda}) x^{2j} \qquad (k \geq 2) \tag{5.25}$$

и их нахождение сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений для $z_{kj}(t,\hat{\lambda}_t)$. Эти уравнения приведены в приложении (П.2.11).

Теперь можно найти выражение для оптимального управления u_t^*. Подставляя ряд (5.15) в формулу (5.9) и учитывая при этом (5.19) и (5.25), получаем

$$u_t^* = -\frac{g}{\theta}\Big[z_{01}(t,\hat{\lambda}_t)x_t + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{k} j z_{kj}(t,\hat{\lambda}_t) \tag{5.26}$$

$$x_t^{2j-1}\Big)\frac{\Lambda_t^k}{k!}\Big].$$

С ростом t Λ_t согласно (5.14) стремится к нулю и ряд в последнем выражении будет сходиться (это можно показать, по крайней мере, в случае, когда истинное значение параметра λ отрицательно и процесс x_t устойчив). Оптимальное управление u_t^*, как показывает формула (5.26), нереализуемо, так как для его осуществления требуется решение бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Можно, однако, предположить, что удовлетворительным приближением к оптимальному управлению u_t^* является управление, отвечающее учитыванию в (5.25) лишь первых членов ряда. Ясно, например, что при малой апостериорной дисперсии Λ_t нулевое приближение u_t^0, определяемое формулами (5.20), (5.21), будет хорошим приближением к оптимальному управлению. При небольшой априорной дисперсии Λ_0 быстро будет сходиться к оптимальному управлению с ростом времени его первое приближение u_t^*, определяемое формулами (5.22), (5.23), (5.24).

5.4. Адаптивное управление многомерным процессом

Как и в одномерном случае, оптимальное управление u_t^* для

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

многомерного процесса x_t может быть получено в виде степенного ряда по апостериорным ковариациям $\Lambda_{ik,ps} = M[(a_{ik}-\hat{a}_{ik})(a_{ps}-\hat{a}_{ps})|x_0^t]$

Два первых приближения $u^0(t)$ и $u^1(t)$ к оптимальному управлению u_t^* найдены в приложении в п.5. Нулевое приближение имеет вид (в векторной форме)

$$u^0(t) = -\theta^{-1} G Y(t, \hat{\lambda}_t) x_t, \tag{5.27}$$

где матричная функция $Y(\tau, \hat{\lambda}_t) = \| y_{ij}(\tau, \hat{\lambda}_t) \|_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$-\frac{dY}{d\tau}(\tau, \hat{\lambda}_t) = \theta + Y\hat{A} + \hat{A}'Y + YG\theta^{-1}G'Y \quad (t \le \tau \le T), \tag{5.28}$$

причем $Y(T, \hat{\lambda}_t) = 0$ для всех $\hat{\lambda}_t$. Из сравнения формул (5.27), (5.28) с формулами (5.3), (5.4) видно, что и для многомерного процесса x нулевое приближение u_t^0 отличается от оптимального управления, соответствующего задаче с известной матрицей A, только тем, что в (5.27), (5.28) входит вместо матрицы $A = \| a_{ij} \|$ её оценка $\hat{A}(t) = \| \hat{a}_{ij}(t) \|$, оптимальная в среднеквадратичном. Кроме того, требуется повторное решение уравнения (5.28) в процессе поступления уточненных оценок $\hat{\lambda}_t = \{\hat{a}_{11}(t), \dots, \hat{a}_{nn}(t)\}$, получаемых при помощи уравнений фильтрации (5.5).

Первое приближение к оптимальному управлению u_t^1 записывается в виде

$$u^1(t) = -\theta^{-1} G' [Y(t, \hat{\lambda}_t) + \Pi(t, \hat{\lambda}_t, \Lambda_t)] x_t, \tag{5.29}$$

где матричная функция $\Pi(t, \hat{\lambda}_t, \Lambda_t) = \| \Pi_{ij}(t, \hat{\lambda}_t, \Lambda_t) \|, (i, j = \overline{1,n})$, находится из уравнения

$$\frac{d\Pi(\tau, \hat{\lambda}_t, \Lambda_t)}{d\tau} = [G\theta^{-1}G'Y - \hat{A}]'\Pi + \Pi[G\theta^{-1}G'Y - \hat{A}] - \Delta(\tau, \hat{\lambda}_t, \Lambda_t) \quad (t \le \tau \le T), \tag{5.30}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

причем $\Delta(\tau,\hat{\lambda}_t,\Lambda_t)=\|\Delta_{ij}(\tau,\hat{\lambda}_t,\Lambda_t)\|_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$ - матрица, элементы которой определяются по формуле

$$\Delta_{ij}(\tau,\hat{\lambda}_t,\Lambda_t)=\sum_{\alpha,\rho,\varkappa=1}^{n}\Lambda_{\alpha\rho,\varkappa j}\frac{\partial y_{\varkappa i}}{\partial\hat{a}_{\alpha\rho}}+\sum_{\alpha,\rho,\varkappa=1}^{n}\Lambda_{\alpha\rho,\varkappa i}\frac{\partial y_{\varkappa j}}{\partial\hat{a}_{\alpha\rho}}(\tau,\hat{\lambda}_t),$$

а $\frac{\partial y_{\varkappa i}}{\partial\hat{a}_{\alpha\rho}}(\tau,\hat{\lambda}_t)$ $(i,\varkappa=\overline{1,n})$ удовлетворяет уравнению (П.2.20) Заметим, что управление u_t^1, учитывающее, наряду с оценкой $\hat{\lambda}_t$, апостериорные ковариации неизвестного параметра λ, по-прежнему зависит от x_t линейно. Интуитивно ясно, что для устойчивого процесса x приближения $u^0(t)$ и $u^1(t)$ должны сходиться с ростом времени к оптимальному управлению u_t^*.

Вопрос о скорости сходимости требует дополнительного изучения. Можно, однако, ожидать, что при малых априорных дисперсиях составляющих многомерного параметра $\lambda=\{a_{11},\dots,a_{nn}\}$ удовлетворительным приближением к оптимальному управлению будет $u^0(t)$, а при небольших априорных дисперсиях быстро будет сходиться к оптимальному управлению его первое приближение $u^1(t)$.

§ 6. БАЙЕСОВСКИЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ЧАСТИ КОМПОНЕНТ

6.I. Постановка задачи

Пусть n - мерный марковский процесс $z(t)=\{x(t),y(t)\}$, зависящий от неизвестного постоянного параметра $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_p)^T$, описывается системой стохастических дифференциальных уравнений (в смысле Ито):

$$dx(t)=\left[A_{11}(t,x;\lambda)+A_{12}(t,x;\lambda)y(t)\right]dt+B_1(t,x)dw(t); \quad (6.1)$$

$$dy(t)=\left[A_{21}(t,x;\lambda)+A_{22}(t,x;\lambda)y(t)\right]dt+B_2(t,x)dw(t), \quad (6.2)$$

где $x(t)=\{x_1(t),\dots,x_r(t)\}^T$ - совокупность наблюдаемых компонент процесса $z(t)$; $y(t)=\{y_1(t),\dots,y_s(t)\}^T$ - совокупность недоступных наблюдению компонент процесса $z(t)$, $r+s=n$; $w(t)$ - n - мерный стандартный винеровский процесс. На матрич-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ные функции $A_{ij}(t,x;\lambda)$ и $B_i(t,x)$ предполагаем наложенными условия [43], обеспечивающие существование, единственность и непрерывность (с точностью до эквивалентности) решения системы уравнений (6.I), (6.2):

а) все элементы этих матричных функций непрерывны по совокупности аргументов;

б) существует такое K, $0<K<\infty$, что каждый из элементов перечисленных матриц равномерно по $t\geq 0$ ограничен по модулю величиной $K\sqrt{1+\|x\|^2}$ и удовлетворяет условию Липшица по x (с константой K).

Матричная функция $C_{11}(t,x)=B_1(t,x)B_1^T(t,x)$ положительно определена при всех t и x. Относительно начальных условий на процесс $z(t)$ предположим, что $x(0)$ – переменная величина в смысле обычного анализа, $x(0)\in R^z$, а $y(0)$ – многомерная нормальная случайная величина, не зависящая от процесса $\{w(t), t\geq 0\}$.

Будем рассматривать задачу оценивания неизвестного параметра $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)^T$ по одной реализации процесса $x(t)$. Предположим, что параметр λ является многомерной случайной величиной, не зависящей от $z(0)$, с заданным априорным распределением $\pi_0(\lambda)$. В дальнейшем, для определенности, λ предполагается непрерывной случайной величиной и $\pi_0(\lambda)$ будет обозначать плотность; изменения, которые требуются в случае дискретного времени, будут очевидны.

Обозначим $\pi_t(\lambda)$ апостериорное распределение λ при известной реализации процесса x на интервале $[0,t]$:

$$\pi_t(\lambda)=p\{\lambda/x^t\},\quad x^t=\{x(\tau),\ 0\leq\tau\leq t\}.$$

Оценку неизвестного параметра λ будем искать из условия максимума апостериорной вероятности $\pi_t(\lambda)$:

$$\hat{\lambda}(t)=\arg\max_{\lambda}\ln\pi_t(\lambda). \tag{6.3}$$

В данном параграфе будет получена система уравнений для одновременного нахождения вектора оптимальных оценок $\hat{\lambda}(t)$ и фильтрации ненаблюдаемых компонент $y(t)$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

6.2. Случай дискретного времени. Рекуррентные соотношения для апостериорного распределения неизвестных параметров

Рассмотрим сначала задачу при дискретном времени. Обозначим через x^m и y^m соответственно совокупности значений процессов $x(t)$ и $y(t)$ в моменты времени $t_k = k\Delta t$, $\Delta t = t/m$; $k = \overline{0,m}$, т.е.

$$x^m = \{x(t_0), \ldots, x(t_m)\}, \quad y^m = \{y(t_0), \ldots, y(t_m)\}.$$

Пусть $\pi_m(\lambda)$ – апостериорное распределение параметра λ при условии, что известны значения $x(t_0), \ldots, x(t_m)$: $\pi_m(\lambda) = P\{\lambda | x^m\}$. Апостериорное распределение $\pi_t(\lambda)$ получается из $\pi_m(\lambda)$ в пределе при $m \to \infty$:

$$\pi_t(\lambda) = \lim_{m\to\infty} \pi_m(\lambda). \tag{6.4}$$

Найдем рекуррентное соотношение для $\pi_m(\lambda)$. По формуле Байеса имеем

$$\pi_m(\lambda) = \frac{\pi_0(\lambda)\, P\{x^m/\lambda\}}{P\{x^m\}}. \tag{6.5}$$

Рассматривая (6.5) для двух моментов времени $t = t_m$ и t_{m+1}, получим

$$\pi_{m+1}(\lambda) = \pi_m(\lambda)\, \frac{P\{x^{m+1}/\lambda\}}{P\{x^m/\lambda\}} \cdot \frac{P\{x^m\}}{P\{x^{m+1}\}}. \tag{6.6}$$

Условное распределение $P\{x^m/\lambda\}$ найдется интегрированием совместного распределения x^m и y^m по y^m:

$$P\{x^m/\lambda\} = \int P(x^m, y^m/\lambda)\, dy^m. \tag{6.7}$$

Здесь $dy^m = \prod_{k=0}^{m} dy(t_k)$ и интегрирование по всем переменным приводится в бесконечных пределах. Так как при фиксированном λ последовательные значения ($x(t_m)$, $y(t_m)$) образуют цепь Маркова, то имеет место формула

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$P(x^m, y^m|\lambda) = P(z(t_0)|\lambda)\prod_{k=1}^{m} P(z(t_k)|\, z(t_{k-1}), \lambda)\,, \qquad (6.8)$$

где $P(z(t_k)|z(t_{k-1}),\lambda)$ – переходная плотность вероятности марковской цепи, а $P(z(t_0)|\lambda)$ – начальное распределение $z(t_0)$. Теперь отношение $P\{x^{m+1}|\lambda\} / P\{x^m|\lambda\}$, участвующее в (6.5), с учетом соотношений (6.7), (6.8) можно записать в виде

$$\frac{P\{x^{m+1}|\lambda\}}{P\{x^m|\lambda\}} = \int P\{y^m/x^m,\lambda\} P\{z(t_{m+1})|z(t_m),\lambda\}\, dy(t_0)\ldots dy(t_{m+1}),$$

где $P\{y^m/x^m,\lambda\}$ – совместное апостериорное распределение ненаблюдаемых компонент процесса $z(t)$ в моменты времени $t_0,\ldots,t_m$ при известном λ и заданных наблюдениях процесса $x(t)$ в те же моменты времени. После интегрирования по $y(t_0),\ldots,y(t_{m-1}), y(t_{m+1})$ получим

$$\frac{P\{x^{m+1}|\lambda\}}{P\{x^m|\lambda\}} = \int P\{y(t_m)|x^m,\lambda\} P\{x(t_{m+1})|x(t_m), y(t_m),\lambda\}\, dy(t_m). \qquad (6.9)$$

Здесь $P\{y(t_m)|x^m,\lambda\}$ представляет уже апостериорное распределение ненаблюдаемых компонент только в последней момент времени $t = t_m$. Для получения требуемого рекуррентного соотношения для $\pi_m(\lambda)$ остается подставить (6.9) в (6.6) и исключить множитель, не зависящий от λ, из условия нормировки: $\int \pi_{m+1}(\lambda)d\lambda = 1$. Находим

$$\pi_{m+1}(\lambda) = \frac{\pi_m(\lambda)\int P\{y(t_m)|x^m,\lambda\} P\{x(t_{m+1})|z(t_m),\lambda\}\, dy(t_m)}{\iint \pi_m(\lambda) P\{y(t_m)|x^m,\lambda\} P\{x(t_{m+1})|z(t_m),\lambda\}\, dy(t_m)\, d\lambda} \qquad (6.10)$$

Рекуррентное соотношение для апостериорной плотности $P\{y(t_m)|x^m,\lambda\}$ непосредственно следует из теории условных марковских процессов [150] :

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$P\{y(t_{m+1})|x^m,\lambda\}=\frac{\int P\{y(t_m)|x^m,\lambda\}P\{z(t_{m+1})|z(t_m),\lambda\}\,dy(t_m)}{\iint P\{y(t_m)|x^m,\lambda\}P\{z(t_{m+1})|z(t_m),\lambda\}\,dy(t_m)\,dy(t_{m+1})}. \tag{6.11}$$

Формулы (6.10), (6.11) дают решение рассматриваемой задачи для дискретного времени и в принципе позволяют одновременно оценивать λ и осуществлять фильтрацию ненаблюдаемых компонент $y(t)$.

Замечание 6.1. При выводе рекуррентных соотношений (6.10), (6.11) используется только марковость процесса $\{z(t_k), k\geq 0\}$ при фиксированном значении параметра λ. Поэтому соотношения (6.10), (6.11) – помимо того, что они будут использоваться в дальнейшем, – представляют самостоятельный интерес для оценивания неизвестных параметров марковской цепи по наблюдениям части компонент.

6.3. Система уравнений совместной оптимальной фильтрации ненаблюдаемых компонент и оценки неизвестных параметров

При переходе к непрерывному времени рекуррентное соотношение (6.10) для $\pi_m(\lambda)$ преобразуется в следующее стохастическое дифференциальное уравнение для $\pi_t(\lambda)$:

$$d\pi_t(\lambda)=\pi_t(\lambda)\{[A_{11}(t,x;\lambda)+A_{12}(t,x;\lambda)\hat{y}(t,\lambda)-\overline{A_{11}(t,x;\lambda)}-$$
$$-\overline{A_{12}(t,x;\lambda)\hat{y}(t,\lambda)}]^T C_{11}^{-1}(t,x)[dx-\bar{A}_{11}(t,x;\lambda)dt-A_{12}(t,x;\lambda)\hat{y}(t,\lambda)dt]\}. \tag{6.12}$$

Здесь $\hat{y}(t,\lambda)=M[y(t)|x^t,\lambda]$ – оптимальная (в среднеквадратическом смысле) фильтрация $y(t)$ при известном значении параметра λ, а черта сверху обозначает апостериорное усреднение по λ, т.е.

$$\overline{A_{11}(t,x;\lambda)}=M[A_{11}(t,x;\lambda)|x^t];$$
$$A_{12}(t,x;\lambda)\hat{y}(t,\lambda)=M[A_{12}(t,x;\lambda)\hat{y}(t,\lambda)|x^t].$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

[Уравнение (6.12) получено в приложении.]

Обозначим $\mathcal{D}(t,\lambda)$ матрицу апостериорных ковариаций процесса $y(t)$ при известном значении параметра λ:

$$\mathcal{D}(t,\lambda)=M\{[y(t)-\hat{y}(t,\lambda)][y(t)-\hat{y}(t,\lambda)]^T \mid x^t,\lambda\}.$$

Согласно известной теореме [114], уравнения для апостериорных моментов $\hat{y}(t,\lambda)$ и $\mathcal{D}(t,\lambda)$ имеют вид

$$d\hat{y}=[A_{21}(t,x;\lambda)+A_{22}(t,x;\lambda)\hat{y}]dt+(C_{12}+A_{12}\mathcal{D})^T C_{11}^{-1}\times$$

$$\times\left[dx-(A_{11}(t,x;\lambda)-A_{12}(t,x;\lambda)\hat{y})dt\right]; \tag{6.13}$$

$$\frac{d\mathcal{D}}{dt}=C_{22}-C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}+(A_{22}-C_{21}C_{11}^{-1}C_{12})\mathcal{D}+ \tag{6.14}$$

$$+\mathcal{D}(A_{22}-C_{22}C_{11}^{-1}C_{12})^T-\mathcal{D}A_{12}^T B_{11}^{-1}A_{12}\mathcal{D},$$

где $C_{ij}=B_i B_j^T$.

Используя (6.12), получим в явном виде уравнение (6.3) для нахождения оптимальной оценки $\hat{\lambda}$. Найдем при помощи формулы замены переменной в интеграле Ито [114] стохастический дифференциал процесса $\ln\pi_t(\lambda)$:

$$d\ln\pi_t(\lambda)=[A_{11}(t,x;\lambda)+A_{12}\hat{y}-\bar{A}_{11}-\overline{A_{12}\hat{y}}]^T C_{11}^{-1}\times$$

$$\times\left[dx-\tfrac{1}{2}(A_{11}+A_{12}\hat{y})dt-\tfrac{1}{2}(\bar{A}_{11}+\overline{A_{12}\hat{y}})dt\right].$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\hat{\lambda}$, эквивалентное урав-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

нению (6.3):

$$\ln \pi_0(\lambda) + \int_0^t \left[A_{11}(s,x;\lambda) + A_{12}(s,x;\lambda)\hat{y}(s,\lambda)\right]^T C_{11}^{-1}(s,x) \times \tag{6.15}$$

$$\times \left[dx - \frac{1}{2}\left(A_{11}(s,x;\lambda) + A_{12}(s,x;\lambda)\hat{y}(s,\lambda)\right)ds\right] = \max_{\lambda} .$$

(Члены, не зависящие от λ, опущены.)

Таким образом, задача оценивания неизвестного параметра λ процесса $z(t)$, описываемого уравнениями (6.1), (6.2), по наблюдениям только компонент $x_1(t), \ldots, x_r(t)$ сведена к нахождению максимума в (6.15) с условиями, задаваемыми уравнениями фильтрации (6.13), (6.14). При поиске максимума в (6.15) требуется, вообще говоря, многократное решение уравнений фильтрации. Сложность решения этой задачи зависит от множества возможных значений параметра λ. Наиболее просто задача решается в случае, когда параметр может принимать лишь конечное число значений. При этом исходная задача сводится к задаче проверки статистических гипотез. Отметим, что такая задача изучалась Э.К.Шпилевским [138].

Замечание 6.2. В противовес использованному подходу к рассматриваемой задаче оценивания при неполном наблюдении можно было бы с самого начала попытаться непосредственно применить для оценки общие уравнения теории условных марковских процессов, объединив в группу ненаблюдаемых компонент процесса $z(t)$ оцениваемый параметр λ и недоступные наблюдению компоненты $y(t)$. Однако на этом общем пути нахождение оптимальной оценки параметра λ (в среднеквадратическом смысле) наталкивается, как правило, на трудности, вызванные тем, что система уравнений для апостериорных моментов оказывается незамкнутой. В этой ситуации часто прибегают к искусственному замыканию системы уравнений для апостериорных моментов, полагая все моменты, начиная с некоторого номера, равными нулю. Но такое решение далеко не всегда является удовлетворительным, так как обычно не удается оценить ошибки, связанные с таким произволом. В практических задачах такой путь

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

нередко приводит к качественно неверным результатам.

6.4. Байесовские оценки неизвестных параметров корреляционных функций гауссовских процессов с дробно-рациональными спектральными плотностями

Пусть $\zeta(t)$ - стационарный гауссовский процесс с дробно-рациональной спектральной плотностью $f(\omega)$:

$$f(\omega)=\left|\frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)}\right|^2,$$

где числитель и знаменатель - полиномы с вещественными коэффициентами:

$$P(z)=\sum_{k=0}^{M} a_k z^k\ ;\quad Q(z)=\sum_{j=0}^{N} b_j z^j,$$

причем $M<N$, все корни $P(z)$ и $Q(z)$ имеют отрицательные мнимые части и $b_N=1$, что не ограничивает общности. Предположим, что наблюдается процесс $\eta(t)=\zeta(t)+\sigma\xi(t)$, где $\xi(t)$ - гауссовский белый шум единичной мощности. По наблюдению процесса $\eta(t)$ на интервале $[0,t]$ требуется построить байесовские оценки параметров a_k и b_j , считая совместное априорное распределение параметров известным.

Из теории спектральных представлений стационарных в широком смысле процессов известно [145], что процесс $\eta(t)$ может быть получен как решение системы уравнений

$$\eta(t)=P\left(\frac{d}{dt}\right)\tilde{\zeta}(t)+\sigma\xi(t),\quad Q\left(\frac{d}{dt}\right)\tilde{\zeta}(t)=\tilde{\xi}(t), \tag{6.16}$$

где $\tilde{\xi}(t)$ - гауссовский белый шум единичного уровня. Уравнения (6.16) могут быть представлены следующей эквивалентной системой уравнений:

$$\frac{dx}{dt}=a_0 y_0+\ \dots\ +a_M y_M+\sigma\xi(t),$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\frac{dy_0}{dt} = y_1,$$

. . . . . .

$$\frac{dy_{N-2}}{dt} = y_{N-1},$$

$$\frac{dy_{N-1}}{dt} = -b_0 y_0 - \ldots - b_{N-1} y_{N-1} + \tilde{\xi}(t),$$

где

$$\eta(t) = \frac{dx}{dt}, \quad y_k(t) \overset{\text{с.к.в}}{=} \frac{d^k}{dt^k}\zeta(t) \qquad (k = \overline{0, N-1}).$$

Процесс $\{x(t), y_0(t), \ldots, y_{N-1}(t)\}$, описываемый системой стохастических дифференциальных уравнений (6.17), представляет собой марковский процесс, причем наблюдению доступна только одна компонента $x(t)$. Следовательно, непосредственно применимы результаты рассмотренной задачи: оптимальные оценки находятся из (6.13) – (6.15). Для данной задачи соответствующие матрицы будут такими:

$$A_{11} = \|0\|, \quad A_{12} = \|a_0, \ldots, a_M, 0, \ldots, 0\|, \quad A_{21} = \|0\|, \quad C_{11} = \sigma^2,$$

$$C_{12} = \|0\|, \quad C_{21} = \|0\|,$$

$$A_{22} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & & \ldots & 0 & 1 \\ -b_0 & -b_1 & & & -b_{N-1} \end{Vmatrix}, \quad C_{22} = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Параметры r и s, определяющие размеры матриц, равны соответственно 1 и N.

6.5. Примеры

I. Пусть наблюдаемый процесс $x(t)$ описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{d^m x}{dt^m} + \sum_{k=0}^{m-1} \theta_k \frac{d^k x}{dt^k} = \eta(t) + \sigma\xi(t), \qquad (6.17)$$

где $\theta_0, \ldots, \theta_{m-1}$ – неизвестные постоянные; $\xi(t)$ – гауссовский белый шум единичного уровня; $\eta(t)$ – гауссовский шум с дробно-рациональной спектральной плотностью (6.15′), причем параметры a_k и b_j неизвестны. Требуется по реализации процесса $x(t)$ на интервале $[0, t]$ построить байесовские оценки $\hat{\theta}_k$ и параметров шума a_k и b_j. В отсутствие шума $\eta(t)$ задача построения байесовских оценок $\hat{\theta}_k$ решена в [164].

Эта задача легко сводится к задаче, рассматриваемой в данном параграфе. Остановимся подробнее на следующем частном случае: $m=1$ и $\eta(t)$ – гауссовский марковский процесс, т.е. $f(\omega) = \Delta^2/2\pi(\alpha^2+\omega^2)$. Для $x(t)$ и $\eta(t)$ имеем уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = -\theta x + \eta(t) + \sigma\xi(t);$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\alpha\eta + \Delta\tilde{\xi}(t), \qquad (6.18)$$

где $\tilde{\xi}(t)$ – гауссовский белый шум единичного уровня. Параметры θ, α и Δ неизвестны. Обозначив $y(t) = \eta(t)/\Delta$, запишем (6.18) в требуемом виде

$$\frac{dx}{dt} = -\theta x + \eta(t) + \sigma\xi(t), \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha y + \tilde{\xi}(t). \qquad (6.19)$$

Система уравнений (6.13)-(6.15) для нахождения неизвестных параметров α, Δ и θ примет вид

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\ln \pi_0(\alpha,\Delta,\theta)+\int_0^t\left\{-\frac{\theta}{\sigma^2}x\frac{dx}{dt}-\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{\sigma^2}x^2+\frac{\Delta}{\sigma^2}\hat{y}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{2}\theta-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\sigma^2}\mathcal{D}-\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\sigma^2}\hat{y}^2+\frac{\Delta\theta}{\sigma^2}x\hat{y}\right\}dt=\max_{\alpha,\Delta,\theta};$$

$$\frac{d\hat{y}}{dt}=-\alpha\hat{y}+\frac{\Delta}{\sigma^2}\mathcal{D}\left(\frac{dx}{dt}+\theta x-\Delta\hat{y}\right),\quad \frac{d\mathcal{D}}{dt}=1-2\alpha\mathcal{D}-\frac{\Delta^2}{\sigma^2}\mathcal{D}^2.$$

Заметим, что если в (6.19) θ и α положительны, то наблюдаемый процесс $x(t)$ будет стационарным с корреляционной функцией

$$K_{xx}(\tau)=\left[\frac{\sigma^2}{2\theta}+\frac{\Delta^2}{2\theta(\alpha^2-\theta^2)}\right]e^{-\theta|\tau|}+\frac{\Delta^2}{2\alpha(\theta^2-\alpha^2)}e^{-\alpha|\tau|}$$

при $\theta\neq\alpha$

или

$$K_{xx}(\tau)=\left[\frac{\sigma^2}{2\theta}+\frac{\Delta^2}{4\theta^3}+\frac{\Delta^2}{4\theta^2}|\tau|\right]e^{-\theta|\tau|}\quad \text{при } \theta=\alpha.$$

2. Рассмотрим теперь пример оценивания параметра λ, нелинейно входящего в уравнения (6.1), (6.2).

Пусть двумерный процесс $(x(t), y(t))$ описывается системой стохастических дифференциальных уравнений

$$dx=\left[a_{11}(t,x;\lambda)+a_{12}(t,x)y\right]dt+\sigma_{11}(t,x)\,dw_1(t)+$$
$$+\sigma_{12}(t,x)\,dw_2(t);$$
$$dy=\left[a_{21}(t,x;\lambda)+a_{22}(t,x)y\right]dt+\sigma_{21}(t,x)\,dw_1(t)+ \tag{6.20}$$
$$+\sigma_{22}(t,x)\,dw_2(t),$$

причем

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$a_{11}(t,x;\lambda)=a_0(t,x)+a_1(t,x)\lambda+\ldots+a_p(t,x)\lambda^p; \tag{6.21}$$

$$a_{21}(t,x;\lambda)=b_0(t,x)+b_1(t,x)\lambda+\ldots+b_p(t,x)\lambda^p.$$

Предположим, что априорное распределение $\pi_0(\lambda)$ неизвестного параметра λ гауссовское с параметрами m_0, Λ_0. Для получения оценки λ по реализации процесса $x(t)$ на интервале $[0,t]$ могут быть использованы уравнения (6.13)-(6.15). Легко проверить, что решение уравнения (6.13) в данном случае имеет вид

$$\hat{y}(t)=\hat{y}(0)e^{\int_0^t\Gamma(u)du}+\int_0^t e^{\int_0^t\Gamma(u)du}\left(c_{12}+a_{12}\mathcal{D}\right)c_{11}^{-1}dx+$$

$$+\int_0^t e^{\int_s^t\Gamma(u)du}\left[a_{21}(s,x;\lambda)-\frac{(c_{12}+a_{12}\mathcal{D})}{c_{11}}a_{11}(s,x;\lambda)\right]ds, \tag{6.22}$$

где

$$\Gamma(t)=a_{22}(t,x)-\frac{c_{12}(t,x)+a_{12}(t,x)\mathcal{D}}{c_{11}(t,x)}a_{12}(t,x);$$

$$c_{11}(t,x)=\sigma_{11}^2(t,x)+\sigma_{12}^2(t,x),\quad c_{12}=\sigma_{11}\sigma_{12}+\sigma_{12}\sigma_{22}.$$

Если ввести обозначения

$$\rho_0(t)=e^{\int_0^t\Gamma(u)du}\hat{y}(0)+\int_0^t e^{\int_s^t\Gamma(u)du}\left(c_{12}+a_{12}\mathcal{D}\right)c_{11}^{-1}dx+$$

$$+\int_0^t e^{\int_s^t\Gamma(u)du}\left[b_0(s,x)-\frac{c_{12}+a_{12}\mathcal{D}}{c_{11}}a_0(s,x)\right]ds,\quad i=\overline{1,p};$$

$$\rho_i(t)=\int_0^t e^{\int_s^t\Gamma(u)du}\left[b_i(s,x)-\frac{c_{12}+a_{12}\mathcal{D}}{c_{11}}a_i(s,x)\right]ds,\quad i=\overline{1,p},$$

то формулу (6.22) с учетом (6.21) можно записать следующим образом

$$\hat{y}(t)=\rho_0(t)+\rho_1(t)\lambda+\ldots+\rho_p(t)\lambda^p. \tag{6.23}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Поэтому уравнение (6.15) для нахождения оптимальной оценки $\hat{\lambda}$ принимает вид

$$\lambda\mu_1(t)+\lambda^2\mu_2(t)+\ldots+\lambda^{2p}\mu_{2p}=\max_{\lambda}, \qquad (6.24)$$

где использованы обозначения:

$$\mu_1(t)=\frac{m_0}{\Lambda_0}+\int_0^t(a_1+a_{12}\rho_1)C_{11}^{-1}dx+\int_0^t(a_0+a_{12}\rho_0)C_{11}^{-1}(a_1+a_{12}\rho_1)ds;$$

$$\mu_2(t)=-\frac{1}{2\Lambda_0}+\int_0^t(a_2+a_{12}\rho_2)C_{11}^{-1}dx-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=0}\int_0^t(a_i+a_{12}\rho_i)C_{11}^{-1}(a_{2-i}+a_{12}\rho_{2-i})ds;$$

$$\mu_k(t)=\int_0^t(a_k+a_{12}\rho_k)C_{11}^{-1}dx-\frac{1}{12}\sum_{i=0}^{k}\int_0^t(a_i+a_{12}\rho_i)C_{11}^{-1}(a_{k-i}+a_{12}\rho_{k-i})ds,$$

$$3<k\le m;$$

$$\mu_k=-\frac{1}{2}\sum_{i=k-m}^{m}\int_0^t(a_i+a_{12}\rho_i)C_{11}^{-1}(a_{k-i}+a_{12}\rho_{k-i})ds,\ m<k\le 2m.$$

Оценка по максимуму апостериорной плотности легко находится из уравнения (6.24), несмотря на то, что оцениваемый параметр λ входит в уравнения (6.20) нелинейно. Если найденную оценку $\hat{\lambda}(t)$ подставить в уравнение (6.23), то получим формулу адаптивной фильтрации

$$\tilde{y}(t)=\rho_0(t)+\rho_1(t)\hat{\lambda}(t)+\ldots+\rho_m(t)\hat{\lambda}^p(t).$$

Отметим, что в данном случае адаптивная фильтрация не является оптимальной в средне-квадратическом смысле.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Глава 4

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Многие результаты, полученные выше по последовательному оцениванию параметров случайных процессов, могут быть перенесены на случайные поля. В данной главе рассматривается задача оценивания параметров случайных полей с дискретным и непрерывным аргументом, описываемых стохастическими разностными и стохастическими дифференциальными уравнениями.

§ I. ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОЛЕЙ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТА

Постановка задачи. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ выделена неубывающая последовательность σ-подалгебр $\{\mathcal{G}_\ell, \ell \geq 1\}$ и задано многомерное случайное поле $x_t = (x_1(t), \ldots, x_m(t))^T$, $t \in T$, описываемое уравнением

$$x_t = A(t)\lambda + \xi_t \quad , \quad t \in T. \tag{I.I}$$

Здесь T - счетное множество индексов. Если, например, T - множество двумерных векторов с целочисленными координатами, то уравнение (I.I) задает плоское поле. Постоянный векторный параметр $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^T$, $\lambda \in \Lambda \subset R^p$, неизвестен и должен быть оценен по наблюдениям полей $\{x_t\}$ и $\{A(t)\}$. Будем предполагать, что во множестве T указана некоторая возрастающая последовательность конечных множеств $\{S_j, j \geq 1\}$, и наблюдатель на j-м шаге получает реализации полей $\{x_t\}$ и $\{A(t)\}$ на множестве $S_j' = S_j \setminus S_{j-1}$, $S_0 = \emptyset$. Введем для каждого индекса t из множества $S = \bigcup_{j \geq 1} S_j$ величину

$$n(t) = \inf\{ j \geq 1 : \ t \in S_j \},$$

которая указывает номер первого из множеств S_j, содержащего t. На поля $A(t)$ и ξ_t наложим следующие требования:

I) все элементы матрицы $A(t) = \| a_{ij}(t) \|$ измеримы относительно σ-алгебры $\mathcal{G}_{n(t)}$, $t \in S$;

2) все компоненты вектора $\xi_t = (\xi_1(t), \ldots, \xi_m(t))^T$ измеримы относительно σ-алгебры $\mathcal{G}_{n(t)+1}$,

3) $M_\lambda \xi_t^T \xi_t < \infty$, $t \in S$, $\lambda \in \Lambda$ [$M_\lambda(\cdot)$ обозначает усред-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

нение по распределению поля P_λ, отвечающему фиксированному значению параметра λ];

4) $M_\lambda(\xi_t | \mathcal{G}_{n(t)}) = 0$; $M_\lambda(\xi_t \xi_{t'}^T | \mathcal{G}_{n(t) \vee n(t')}) = 0$, если $t = t'$ ($a \vee b$ обозначает максимальное из чисел a и b);

5) известна положительно определенная симметричная матричная функция $\{B(t), t \in S\}$, согласованная с системой σ-алгебр $\{\mathcal{G}_{n(t)}, t \in S\}$, для которой выполняется (в смысле квадратичных форм) неравенство

$$M_\lambda(\xi_t \xi_t^T | \mathcal{G}_{n(t)}) \leq B(t).$$

Задача оценивания параметра λ при сделанных допущениях является довольно общей. Уравнением вида (I.I) определяется и модель детерминированной регрессии, в которой сигнальная часть – это линейная комбинация детерминированных функций. Исследование таких моделей проводится весьма интенсивно и для них в последние годы получено много интересных результатов (некоторые работы в этом направлении отражены в библиографии [55, 119 и др.]). Ниже будет рассматриваться менее изученный случай общей регрессии, когда сигнальная часть является линейной комбинацией случайных функций.

Пример. Рассмотрим скалярное авторегрессионное поле на плоскости, определяемое уравнением

$$x_{ij} = \sum_{(k,l) \in \Delta} \lambda_{kl} x_{i-k, j-l} + \xi_{ij} \qquad (i, j = 0, 1, \ldots),$$

причем $\{\xi_{ij}\}$ – система независимых случайных величин с $M\xi_{ij} = 0$ и $M\xi_{ij}^2 = \sigma^2$; $\Delta = \{(k,l) : k, l = \overline{0,d}\} \setminus (0,0)$. Пусть на n-м шаге наблюдатель получает реализацию поля $\{x_{ij}\}$ на множестве

$$S_n' = \{(i,j) : i + j = n\}.$$

Полагая $\mathcal{G}_l = \sigma\{x_{0,0}; \xi_{ij}, (i,j) \in S_{l-1}\}$, легко убедиться, что в данном случае выполнены все необходимые требования, а поэтому задача оценивания параметров $\{\lambda_{kl}\}$ авторегрессионного поля является частным случаем поставленной задачи.

Несмещенное оценивание параметра λ. Построим сначала последовательную оценку вектора λ, предполагая, что размерность λ не превышает размерности вектора x_t. За основу возьмём обобщенную

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

оценку метода наименьших квадратов, которая находится из условия минимума по λ выражения

$$\sum_{t\in S_N} (x_t - A(t)\lambda)^T V(t)(x_t - A(t)\lambda)$$

и имеет вид

$$\hat{\lambda}(N) = \Big[\sum_{t\in S_N} A^T(t)V(t)A(t)\Big]^{-1} \sum_{t\in S_N} A^T(t)V(t)x_t . \qquad (I.2)$$

Определим весовую матрицу $V(t)$ формулой

$$V(t) = B^{-1}(t)V_0(t)B^{-1}(t), \quad V_0(t) = c(t)A(t)\big(A^T(t)B^{-1}(t)A(t)\big)^{-2}A^T(t),$$

где $c(t)$ – некоторая $\mathcal{G}_{n(t)}$ – измеримая функция.
Учитывая, что при таком выборе весовой матрицы выполняются равенства:

$$A^T(t)V(t)A(t) = c(t)E,$$

$$A^T(t)V(t) = c(t)\mathcal{D}(t); \quad \mathcal{D}(t) = \big[A^T(t)B^{-1}(t)A(t)\big]^{-1}A^T(t)B^{-1}(t),$$

запишем (I.2) покоординатно

$$\hat{\lambda}_i(N) = \frac{1}{\sum_{t\in S_N} c(t)} \sum_{t\in S_N} c(t) < \mathcal{D}(t)x_t >_i , \qquad (I.3)$$

$<a>_i$ обозначает i-ю координату вектора $a = (a_1, \dots, a_p)^T$.

<u>Определение</u>. Последовательным планом оценивания параметра λ_i будем называть пару $(\tau_i(H), \tilde{\lambda}_i(H))$, в которой $\tau_i(H)$ указывает длительность наблюдений и задается соотношением

$$\tau_i(H) = \inf\{N \geq 1 : \sum_{t\in S_N} c_i(t) \geq H\},$$

$$c_i(t) = 1 \Big/ <\big(A^T(t)B^{-1}(t)A(t)\big)^{-1}>_{ii} ,$$

а $\tilde{\lambda}_i(H)$ – оценка, вычисляемая в момент $\tau_i(H)$ по формуле

$$\tilde{\lambda}_i(H) = \frac{1}{H} \sum_{t\in S_{\tau_i(H)}} \beta_{\tau_i}(t)\, c_i(t) < \mathcal{D}(t)x_t >_i , \qquad (I.4)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где $\beta_{\tau_i}(t)=1$, если $n(t)<\tau_i$; $\beta_{\tau_i}(t)=0$, если $n(t)>\tau_i$, и $\beta_{\tau_i}(t)=\alpha_{\tau_i}$, если $n(t)=\tau_i$; α_{τ_i} находится из уравнения

$$\sum_{t\in S_{\tau_i-1}} c_i(t) + \alpha_{\tau_i} \sum_{t\in S'_{\tau_i}} c_i(t) = H. \tag{I.5}$$

<u>ТЕОРЕМА I.I</u>. Пусть с вероятностью единица

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{t\in S_N} c_i(t) = +\infty .$$

Тогда для каждого $H>0$ последовательный план $(\tau_i(H), \tilde{\lambda}_i(H))$ обладает свойствами:

I) $M_\lambda \tilde{\lambda}_i(H) = \lambda_i$, $\lambda\in\Lambda$; 2) $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda(\tilde{\lambda}_i(H)-\lambda_i)^2 \le \frac{1}{H}$.

<u>Доказательство</u>. Подставляя (I.I) в (I.4) и учитывая (I.5), получим

$$R_{\tau_i} = \tilde{\lambda}_i(H)-\lambda_i = \frac{1}{H}\sum_{t\in S_{\tau_i}} \beta_{\tau_i}(t)c_i(t)\langle \mathcal{D}(t)\xi_t\rangle_i =$$

$$= \frac{1}{H}\sum_{j=1}^{\tau_i}\sum_{t\in S'_j} \beta_{\tau_i}(t)c_i(t)\langle \mathcal{D}(t)\xi_t\rangle_i .$$

Рассмотрим вспомогательную последовательность $\{F_N, N\ge 1\}$, определяемую равенством

$$F_N = \frac{1}{H}\sum_{j=1}^{\tau_i\wedge N}\sum_{t\in S'_j} \beta_{\tau_i}(t)c_i(t)\langle \mathcal{D}(t)\xi_t\rangle_i = \frac{1}{H}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t\in S'_j} u_j(t);$$

$$u_j(t) = \chi_{(j\le\tau_i)}\, \beta_{\tau_i}(t)c_i(t)\langle \mathcal{D}(t)\xi_t\rangle_i ,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$a \wedge b$ обозначает минимальную из величин a и b, а χ_A – индикатор события A. Ясно, что $\lim\limits_{N\to\infty} F_N = R_{\tau_i}$. Оценим $M_\lambda F_N^2$. Имеем

$$M_\lambda F_N^2 = \frac{1}{H^2} M_\lambda \Big\{ \sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{t=S_j'} \sum_{s\in S_\ell'} u_j(t)\, u_\ell(s) \Big\}. \qquad (I.6)$$

Покажем, что при $t \in S_j'$ и $s \in S_\ell'$ выполняются неравенства

$$0 \le M_\lambda\, u_i(t) u_\ell(s) \le M_\lambda \left[\chi_{(j\le\tau_i)} \beta_{\tau_i}^2(t) c_i(t) \right] \delta_{j\ell}\, \delta_{ts}, \qquad (I.7)$$

δ_{ij} – символ Кронекера. Пусть $j = \ell$. Тогда, учитывая измеримость случайных элементов $\chi_{(j\le\tau_i)}$, $\beta_{\tau_i}(t)$, $c_i(t)$, $\mathcal{D}(t)$ и $\mathcal{D}(s)$ относительно σ-алгебры $\mathcal{C}_j$, получаем

$$M_\lambda\, u_j(t) u_j(s) = M_\lambda \left[\chi_{(j\le\tau)}\, \beta_{\tau_i}^2(t)\, c_i^2(t) \langle \mathcal{D}(t) M_\lambda (\xi_t \xi_s^T / \mathcal{C}_j) \mathcal{D}^T(s) \rangle_{ii} \right],$$

где $\langle A \rangle_{ii}$ обозначает i-й диагональный элемент квадратной матрицы A. Отсюда в силу условий на шумы следует, что

$$M_\lambda u_j^2(t) \le M_\lambda \left[\chi_{(j\le\tau_i)}\, \beta_{\tau_i}^2(t) c_i^2(t) \langle \mathcal{D}(t) B(t) \mathcal{D}^T(t) \rangle_{ii} \right] =$$

$$= M_\lambda \left[\chi_{(j\le\tau_i)}\, \beta_{\tau_i}^2(t) c_i^2(t) \langle [A^T(t) B^{-1}(t) A(t)]^{-1} \rangle_{ii} \right] = M_\lambda \left[\chi_{(j\le\tau_i)}\, \beta_{\tau_i}^2(t) c_i(t) \right],$$

$$M_\lambda \left[u_j(t) u_j(s) \right] = 0 \quad \text{при} \quad t \ne s.$$

Легко проверить также, что

$$M_\lambda\, u_j(t) u_\ell(s) = 0 \qquad \text{при} \quad j \ne \ell.$$

Таким образом, неравенства (I.7) имеют место. Так как $\beta_{\tau_i}^2(t) \le \beta_{\tau_i}(t)$, то из (I.5), (I.6) и (I.7) получаем

$$M_\lambda F_N^2 \le \frac{1}{H^2} M_\lambda \Big[\sum_{j=1}^{N} \chi_{(j\le\tau_i)}\, \beta_{\tau_i}(t) c_i(t) \Big] = \frac{1}{H^2} M_\lambda \sum_{j=1}^{\tau_i \wedge N} \beta_{\tau_i}(t) c_i(t) \le \frac{1}{H^2} M \sum_{j=1}^{\tau_i} \beta_{\tau_i}(t) c_i(t) = \frac{1}{H}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Из теоремы Фату вытекает равномерная ограниченность среднеквадратического уклонения

$$M_\lambda(\tilde{\lambda}_i(H)-\lambda_i)^2 = M_\lambda R_{\tau_i}^2 = M_\lambda \lim_{N\to\infty} F_N^2 \le \lim_{N\to\infty} M_\lambda F_N^2 \le \frac{1}{H}.$$

Несмещенность оценки $\tilde{\lambda}_i(H)$ получаем из равенств

$$M_\lambda F_N = 0; \quad M_\lambda R_{\tau_i} = \lim_{N\to\infty} M_\lambda F_N = 0.$$

Знак математического ожидания и предела во втором равенстве можно поменять местами благодаря равномерной интегрируемости последовательности $\{F_N, N \geqslant 1\}$, следующей из равномерной ограниченности последовательности $\{M_\lambda F_N^2, N \geqslant 1\}$. Теорема I.I доказана. Перейдем теперь к общему случаю, когда размерность вектора $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^T$ может превышать размерность наблюдаемого поля x_t.

<u>Двухэтапная последовательная процедура</u>. Будем следовать подходу, предложенному в [91].

Рассмотрим оценку МНК (I.2) при $V(t)=B^{-1}(t)$. Она определяется с помощью следующих статистик: вектора $\Phi(N)=(\Phi_1(N), \ldots, \Phi_p(N))^T$ с координатами:

$$\Phi_i(N) = \sum_{t\in S_N} A_i^T(t) B^{-1}(t) x_t \tag{I.8}$$

и матрицы $G(N) = \|G_{ij}(N)\|$ с элементами:

$$G_{ij}(N) = \sum_{t\in S_N} A_i^T(t) B^{-1}(t) A_j(t),$$

$A_i(t)$ обозначает i-й столбец матрицы $A(t)$. Подставляя (I.I) в (I.8), приходим к системе уравнений, связывающих эти статистики

$$\Phi_i(N) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j G_{ij}(N) + \varepsilon_i(N), \quad \varepsilon_i(N) = \sum_{t\in S_N} A_i^T(t) B^{-1} \xi_t. \tag{1.9}$$

Уравнения (I.9) показывают, что для эффективного оценивания параметров λ_j необходимо ограничить влияние помех $\varepsilon_i(N)$. Этой цели служит первый этап процедуры. Произведем случайную замену времени и модифицируем статистики. Пусть $\{c_n, n \geqslant 1\}$ – возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $\sum c_n^{-1} < \infty$. Для каждого $i = \overline{1,p}$ введем последовательность моментов остановки $\{\sigma_i(n), n \geqslant 1\}$ по формуле

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sigma_i(N) = \inf\left\{N \geq 1 : \sum_{t \in S_N} A_i^T(t) B^{-1}(t) A_i(t) \geq c_n\right\}.$$

Положим

$$\varphi(n) = (\varphi_1(n), \ldots, \varphi_p(n))^T, \ \zeta(n) = (\zeta_1(n), \ldots, \zeta_p(n))^T, \ g(n) = \|g_{ij}(n)\|,$$

$$\varphi_i(n) = \frac{1}{c_n}\left[\Phi_i(\sigma_i(n)-1) + \alpha_i(\sigma_i(n)) \sum_{t \in S'_{\sigma_i(n)}} A_i^T(t) B^{-1}(t) x_t\right];$$

$$g_{ij}(n) = \frac{1}{c_n}\left[G_{ij}(\sigma_i(n)-1) + \alpha_i(\sigma_i(n)) \sum_{t \in S'_{\sigma_i(n)}} A_i^T(t) B^{-1}(t) A_j(t)\right];$$

$$\zeta_i(n) = \frac{1}{c_n}\left[\varepsilon_i(\sigma_i(n)-1) + \alpha_i(\sigma_i(n)) \sum_{t \in S'_{\sigma_i(n)}} A_i^T B^{-1}(t) \xi_t\right],$$

где весовой множитель $\alpha_i(\sigma_i(n))$ находится из условия

$$\sum_{t \in S_{\sigma_i(n)-1}} A_i^T(t) B^{-1}(t) A_i(t) + \alpha_i(\sigma_i(n)) \sum_{t \in S'_{\sigma_i(n)}} A_i^T(t) B^{-1}(t) A_i(t) = c_n.$$

Статистики $\varphi(n)$ и $g(n)$ связаны системой уравнений

$$\varphi(n) = g(n)\lambda + \zeta(n), \quad n \geq 1. \tag{I.10}$$

Преимущество этой системы уравнений по сравнению с (I.9) в том, что вторые моменты случайных величин $\zeta_i(n)$ – в отличие от $\varepsilon_i(N)$ – допускают равномерную оценку сверху.

<u>ЛЕММА I.I</u>. Пусть для всех $i = \overline{1,p}$ с вероятностью единица

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{t \in S_N} A_i^T(t) B^{-1}(t) A_i(t) = +\infty \quad (P_\lambda - \text{п.н.})$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда: I) $M_\lambda \xi_i(n) = 0, \ \lambda \in \Lambda, \ n \geq 1; \ i = \overline{1,p};$

2) $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \xi_i^2(n) \leq \frac{1}{c_n}$.

Доказательство леммы I.I аналогично доказательству теоремы I.I и опускается. Выводом уравнений (I.I0) завершается первый этап построения последовательной процедуры. Необходимость второго этапа возникает в случае, когда число неизвестных параметров превышает размерность поля. Второй этап процедуры повторяет рассуждения § I.7 и начинается преобразованием системы (I.I0). Умножим обе части (I.I0) слева на матрицу $[g(n)]^{-1}$ и полученную систему уравнений запишем покоординатно:

$$\sum_{\ell=1}^{p} \Delta_{\ell i}(n)\varphi_\ell(n) = \Delta(n)\lambda_i + \sum_{\ell=1}^{p} \Delta_{\ell i}\, \xi_\ell(n), \ i = \overline{1,p}. \qquad (I.II)$$

Здесь $\Delta_{\ell i}(n)$ - алгебраическое дополнение элемента $g_{i\ell}(n)$ матрицы $g(n)$, а $\Delta(n) = \det g(n)$. Обозначив

$$y_i(n) = \frac{1}{\bar{\Delta}_i(n)} \sum_{\ell=1}^{p} \Delta_{\ell i}(n)\varphi_\ell(n), \quad \eta_i(n) = \frac{1}{\bar{\Delta}_i(n)} \sum_{\ell=1}^{p} \Delta_{\ell i}(n)\xi_\ell(n),$$

$$\bar{\Delta}_i(n) = \max_{1 \leq k \leq p} |\Delta_{ki}(n)|, \quad f_i(n) = \frac{\Delta(n)}{\bar{\Delta}_i(n)},$$

представим систему уравнений (I.II) в виде

$$y_i(n) = \lambda_i f_i(n) + \eta_i(n), \quad n \geq 1, \ i = \overline{1,p}.$$

Для оценивания λ_i по наблюдениям $y_i(n)$ и $f_i(n)$ вводим последовательный план $(\tau_i(H), \tilde{\lambda}_i(H))$, определяемый формулами:

$$\tau_i(H) = \inf\left\{n \geq 1 : \sum_{\ell=1}^{n} f_i^2(\ell) \geq H\right\};$$

$$\tilde{\lambda}_i(H) = \frac{\sum\limits_{\ell=1}^{\tau_i} f_i(\ell) y_i(\ell)}{\sum\limits_{\ell=1}^{\tau_i} f_i^2(\ell)}.$$

Свойства построенного последовательного плана содержит следующая

<u>ТЕОРЕМА I.2</u>. Пусть выполнены условия леммы и с вероятностью единица расходится ряд

$$\sum_{n \geq 1} f_i^2(n) = +\infty.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда для любого $H>0$

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\left[\tilde{\lambda}_i(H)-\lambda_i\right]^2 \le \frac{\rho}{H}, \quad \rho=p^2\sum_{n\ge1}\frac{1}{c_n}.$$

Доказательство теоремы I.2 опускается, так как оно подобно доказательству теоремы I.7.I .

§ 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СНОСА СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

В данном параграфе рассматривается задача оценивания параметров плоских случайных полей с непрерывным аргументом, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями.

Пусть наблюдается двумерное диффузионное поле $X(s,t)$, $0\le s,t<\infty$, удовлетворяющее стохастическому дифференциальному уравнению гиперболического типа

$$X(s,t)=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\int_0^s\int_0^t a_k(u,v;x)\,du\,dv+\int_0^s\int_0^t b(u,v;x)\,w(du,dv). \quad (2.I)$$

Здесь $w(s,t)$ - винеровское поле на плоскости, $Mw(s,t)=0$, $Mw(s_1,t_1)w(s_2,t_2)=\min(s_1,s_2)\min(t_1,t_2)$; $a_k(s,t;x)$, $b(s,t,x)$ - известные измеримые функционалы от X, которые в точке (s,t) могут зависеть от реализации поля X на множестве и удовлетворяют условиям:

$$\int_0^s\int_0^t |a_k(u,v;x)|\,du\,dv<\infty;\quad \int_0^s\int_0^t b^2(u,v;x)\,du\,dv<\infty,\ 0\le s,t<\infty$$

Параметры $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ неизвестны и должны быть оценены по одной реализации поля X.

При построении последовательных оценок будем предполагать, что выполнены условия, обеспечивающие абсолютную непрерывность меры μ_x, отвечающей полю $X(s,t)$ на прямоугольнике $[0,S]\times[0,T]$ относительно меры μ_y поля $y(s,t)$ на $[0,S]\times[0,T]$, определяемого равенством

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$y(s,t)=\int_0^s\int_0^t b(u,v;x)\,w(du,dv).$$

Идея построения последовательных оценок состоит в том, чтобы выделить некоторую возрастающую последовательность областей поля и по заданной точности оценок (в среднеквадратическом смысле) определить номер области, на которой следует прекратить наблюдения. Для простоты будем рассматривать последовательность прямоугольных областей $\mathcal{D}_n = S\times T_n$, где S - фиксировано, а $\{T_n\}$ - возрастающая последовательность чисел. Так же, как и при оценивании параметров диффузионных процессов, последовательная процедура строится в два этапа. Сначала найдем оценки максимального правдоподобия. Логарифмическая функция правдоподобия меры μ_x относительно меры μ_y согласно [77] определяется формулой

$$L_T(x;\lambda_1,\dots,\lambda_p)=-$$

$$-\int_0^S\int_0^T\left[b^+(s,t;x)\right]^2\sum_{k=1}^p\lambda_k a_k(s,t;x)\,X(ds,dt)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^S\int_0^T\left[b^+(s,t;x)\right]^2\left[\sum_{k=1}^p\lambda_k a_k(s,t;x)\right]^2 ds\,dt,\quad a^+=\begin{cases}1/a, & a\neq 0,\\ 0, & a=0.\end{cases}$$

Из системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_j}L_T(x;\lambda_1,\dots,\lambda_p)=0,\quad j=\overline{1,p},$$

получаем для вектора оценок МП следующее выражение:

$$\hat\lambda(T)=G^{-1}(T)\,\Phi(T),$$

$$\Phi(T)=(\Phi_1(T),\dots,\Phi_p(T))^T,\quad G(T)=\|G_{jk}(T)\|;$$

$$\Phi_j(T)=\int_0^S\int_0^T\left[b^+(s,t;x)\right]^2 a_j(s,t;x)\,X(ds,dt); \tag{2.2}$$

$$G_{jk}(T)=\int_0^S\int_0^T\left[b^+(s,t;x)\right]^2 a_j(s,t;x)\,a_k(s,t;x)\,ds\,dt.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Подставляя (2.I) в (2.2), получим систему уравнений, связывающих статистики $\Phi_j(T)$ и $G_{jk}(T)$:

$$\Phi_j(T) = \sum_{k=1}^{p} G_{jk}(T)\lambda_k + \xi_j(T), \quad j=\overline{1,p}; \tag{2.3}$$

$$\xi_j(T) = \int_0^s\int_0^T b^+(s,t;x)\,a_j(s,t;x)\,w(ds,dt).$$

Первый этап процедуры состоит в случайной замене времени. Пусть $\{c_n, n\geq 1\}$ – возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $\sum_n c_n^{-1} < \infty$. Для каждого $j=\overline{1,p}$ введем последовательность моментов остановки $\{\sigma_j(n), n\geq 1\}$ по формуле

$$\sigma_j(n) = \inf\left\{T\geq 0:\ \int_0^s\int_0^T [b^+(s,t;x)]^2 a_j^2(s,t;x)\,ds\,dt \geq c_n\right\}.$$

Обозначим

$$\varphi_j(n) = \frac{1}{c_n}\,\Phi_j(\sigma_j(n)), \quad g_{jk}(n) = \frac{1}{c_n}\,G_{jk}(\sigma_j(n));$$

$$\zeta_j(n) = \frac{1}{c_n}\,\xi_j(\sigma_j(n));$$

$$\varphi(n) = (\varphi_1(n),\ldots,\varphi_p(n))^T,\ \zeta(n) = (\zeta_1(n),\ldots,\zeta_p(n))^T,\ g(n) = \|g_{ik}(n)\|.$$

Как следует из (2.2), статистики $\varphi(n)$ и $g(n)$ связаны системой уравнений

$$\varphi(n) = g(n)\lambda + \zeta(n), \quad n\geq 1. \tag{2.4}$$

По известному свойству стохастических интегралов шумы $\zeta_j(n)$ имеют гауссовское распределение с параметрами $(0,\ 1/c_n)$. Выводом системы уравнений (2.4) завершается первый этап построения последовательных оценок. Преимущество этой системы уравнений по сравнению с (2.2) в том, что вторые моменты случайных величин $\zeta_i(n)$ – в отличие от $\xi_i(T)$ – допускают равномерную по λ оценку сверху:

$$\sup_{\lambda\in R^p} M_\lambda\,\zeta_i^2(n) \leq \frac{1}{c_n}.$$

Второй этап начинается с преобразования системы (2.4). Умножим обе части (2.4) слева на матрицу $[g(n)]^{-1}$ и полученную

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

систему уравнений запишем покоординатно:

$$\sum_{\ell=1}^{p} \Delta_{\ell i}(n)\varphi_\ell(n) = \Delta(n)\lambda_i + \sum_{\ell=1}^{p} \Delta_{\ell i}\,\xi_\ell(n), \quad i=\overline{1,p}. \qquad (2.5)$$

Здесь $\Delta_{\ell i}(n)$ – алгебраическое дополнение элемента $g_{i\ell}(n)$ в матрице $g(n)$, а $\Delta(n)=\det g(n)$. Обозначив

$$\overline{\Delta}_i(n) = \max_{1\le k\le p} |\Delta_{ki}(n)|, \quad f_i(n)=\Delta(n)/\overline{\Delta}_i(n);$$

$$y_i(n) = \frac{1}{\overline{\Delta}_i(n)} \sum_{\ell=1}^{p} \Delta_{\ell i}(n)\varphi_\ell(n), \quad \eta_i(n) = \frac{1}{\overline{\Delta}_i(n)} \sum_{\ell=1}^{p} \Delta_{\ell i}(n)\xi_\ell(n),$$

представим систему уравнений (2.5) в виде

$$y_i(n) = \lambda_i f_i(n) + \eta_i(n), \quad n\ge 1, \quad i=\overline{1,p}.$$

Для оценивания λ_i по наблюдениям $y_i(n)$ и $f_i(n)$ вводим последовательный план $(\tau_i(H), \widetilde{\lambda}_i(H))$, определяемый формулами:

$$\tau_i(H) = \inf\{n\ge 1: \sum_{\ell=1}^{n} f_i^2(\ell)\ge H\};$$

$$\widetilde{\lambda}_i(H) = \sum_{\ell=1}^{\tau_i} f_\ell(\ell) y_i(\ell) \Big/ \sum_{\ell=1}^{\tau_i} f_i^2(\ell).$$

Свойства построенного последовательного плана содержит следующая

<u>ТЕОРЕМА 2.I</u>. Пусть с вероятностью единица расходится ряд

$$\sum_{n\ge 1} f_i^2(n) = +\infty.$$

Тогда для любого $H>0$

$$\sup_{\lambda\in R^p} M_\lambda\left[\widetilde{\lambda}_i(H)-\lambda_i\right]^2 \le \rho/H, \quad \rho = P^2 \sum_{n\ge 1} 1/c_n.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Доказательство теоремы 2.I подобно доказательству теоремы 3.2.I.

Замечание 2.I. Необходимость второго этапа построения процедуры возникает только при оценивании векторного параметра λ. Если параметр скалярный, то процедура оценивания заканчивается на первом этапе. При этом все величины в уравнении (7.4) являются скалярами, причем $g(n) \equiv 1$. Поэтому последовательная оценка, совпадающая с $\varphi(n)$, является несмещенной, гауссовской и имеет дисперсию $1/c_n$. Для сравнения отметим, что даже в этом простом случае исследование свойств оценки М П наталкивается на большие трудности. Для оценок МП известны, например, формулы для смещения и среднеквадратического уклонения, но они имеют сложный вид [77].

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ

I. Доказательство теоремы 3.4.I

Формулы (3.4.I0) для вероятностей α и β с точностью до обозначений приведены в [160]. Нахождение T_0 и T_1 связано с решением следующей задачи. Рассматриваются блуждания на множестве целых чисел $\{0, \dots, a\}$, $a = E_1 + 1$, с мгновенным отражением из нуля в состояние I. Вероятности переходов задаются равенствами:

$$P_{k,k-1} = q\ ;\ P_{k,k} = r;\ P_{k,k+1} = p;\quad 0 < k < a;$$

$$P_{0,1} = r\ ;\ P_{0,0} = q\ ;\ P_{0,2} = p;\ P_{a,a} = 1,\ p + r + q = 1\ ,$$

остальные P_{kl} равны нулю. Требуется определить $T(j)$ – среднее время достижения состояния a при начальном состоянии j.

Решая уравнение для $T(j)$

$$T(j) = qT(j-1) + rT(j) + pT(j+1) + 1$$

с граничными условиями $T(0) = T(1)$, $T(a) = 0$, получаем

$$T(j) = \frac{j-a}{q-p} + \frac{1}{q-p}\,\frac{\gamma^a - \gamma^j}{\gamma - 1}\ ,\quad \gamma = q/p\ . \tag{П.I.I}$$

Полагая в (П.I.I) $j = 1$, находим T_0. Меняя в (П.I.I) p и q местами, получим $T(j)$ – среднее время запаздывания в обнаружении разладки при условии, что в момент появления разладки устройство находится в состоянии j. Чтобы вычислить среднее запаздывание

$$T_1 = \sum_{j=0}^{a-1} T(j)\pi_j\ , \tag{П.I.2}$$

составляем систему уравнений для стационарных вероятностей состояний устройства $\{\pi_j\}$. Имеем

$$q(\pi_0 + \pi_1 + \pi_a) = \pi_0,\ r(\pi_0 + \pi_1 + \pi_a) + q\pi_2 = \pi_1;$$

$$p(\pi_0 + \pi_1 + \pi_a) + r\pi_2 + q\pi_3 = \pi_2\ , \tag{П.I.3}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$p\pi_{j-1} + r\pi_j + q\pi_{j+1} = \pi_j, \quad 3 \le j \le a-2;$$
$$p\pi_{a-2} + r\pi_{a-1} = \pi_{a-1}, \quad p\pi_{a-1} = \pi_a.$$

Положим

$$c_{j-1} = \pi_{j-1} - \pi_j, \quad 3 \le j \le a-2;$$
$$c_{a-1} = \pi_{a-1}.$$

Тогда уравнения (П.1.3) запишутся в виде

$$p c_{j-1} = q c_j, \quad 3 \le j \le a-1.$$

Отсюда следует, что

$$c_j = \gamma^{a-j-1} c_{a-1}, \quad 2 \le j \le a-1;$$
$$\pi_j = \sum_{i=j}^{a-1} c_i = c_{a-1} \sum_{i=j}^{a-1} \gamma^{a-i-1} = c_{a-1} \frac{(\gamma^{a-j}-1)}{(\gamma-1)}. \qquad \text{(П.I.4)}$$

Подставляя (П.I.4) в третье уравнение в (П.I.3), получим

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_a = c_{a-1} \frac{(\gamma^{a-1}-1)}{\gamma-1}.$$

Учитывая, что

$$\pi_0 = \frac{q}{\gamma-1}\left[\gamma^{a-1}-1\right] c_{a-1};$$
$$\pi_1 = c_{a-1} \frac{(\gamma^{a-1}-1)}{\gamma-1}(1-q) - p c_{a-1}, \qquad \text{(П.I.5)}$$

и условия нормировки $\sum_{i=0}^{a} \pi_i = 1$, находим

$$c_{a-1} = 1/pT_0,$$

где T_0 определяется по формуле (3.4.10).
Поскольку

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$T(j) = \frac{a-j}{q-p} - \frac{\gamma^{-a}-\gamma^{-j}}{\gamma^{-1}-1} \cdot \frac{1}{q-p},$$

то, используя (П.I.4), (П.I.5), получаем

$$T_1 = \frac{1}{pT_0}\sum_{j=1}^{a-1}\left(\frac{a-j}{q-p} - \frac{(\gamma^{-a}-\gamma^{-j})}{\gamma^{-1}-1}\frac{1}{q-p}\right)\left(\frac{\gamma^{a-j}-1}{\gamma-1}\right) -$$

$$-\left(\frac{a}{q-p} - \frac{1}{q-p}\cdot\frac{\gamma^{-a}-1}{\gamma^{-1}-1}\right)\frac{p}{pT_0} = \qquad \text{(П.I.}$$

$$= \sum_{i=1}^{a-1}\left[i + \frac{\gamma^{-a}}{\gamma^{-1}-1}(\gamma^{i}-1)\right](\gamma^{i}-1)\frac{c}{T_0} -$$

$$-\left[\frac{a}{q-p} - \frac{\gamma^{-a}-1}{(\gamma^{-1}-1)(q-p)}\right]\frac{1}{T_0},$$

где

$$c = 1/(q-p)^2.$$

Далее с помощью равенства

$$\sum_{i=1}^{a-1} i\gamma^{i} = \frac{\gamma[\gamma^{a}(a-1) - a\gamma^{a-1}+1]}{(\gamma-1)^2}.$$

приведем первое слагаемое в (П.I.6) к виду

$$\frac{c}{T_0}\frac{a\gamma^{a}}{\gamma-1} - \frac{\gamma}{(\gamma-1)^2}(\gamma^{a}-1)\frac{c}{T_0} - \frac{a(a-1)}{2}\frac{c}{T_0} +$$

$$+c(q-p)\frac{\gamma^{-a}}{\gamma^{-1}-1} + \frac{c}{T_0}\frac{\gamma^{-a}}{\gamma^{-1}-1}\frac{(\gamma^{a}-\gamma)(\gamma^{a}-1)}{\gamma^{2}-1}$$

Отсюда и из (П.I.6) с учетом того, что

$$(\gamma^{a}-1)/(\gamma-1) = (q-p)T_0 + a,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

получаем искомое выражение

$$T_1=\left[(q-p)^2 T_0 Q+\frac{a(a-1)}{2}-\frac{T_0 q}{\gamma+1}-\frac{Qq}{\gamma+1}\right]\frac{c}{T_0}-\frac{Q}{T_0}=$$

$$=Q\left[1-\frac{\rho_1+1}{T_0}\right]+\frac{a(a-1)}{2T_0(q-p)^2}-\rho_1 .$$

Теорема 3.4.I доказана.

2. Доказательство теоремы 3.4.3.

Условия теоремы 3.4.3 обеспечивают конечность почти наверное всех τ_i. Поскольку при отсутствии разладки распределение статистик (3.4.II) не зависит от номера наблюдаемого объекта, формулы для α и T_0 остаются такими же, как и в случае одного объекта (3.4.IO). Сохраняется формула и для β благодаря тому, что эта характеристика относится только к объекту, в котором произошла разладка. Нахождение $T_1(j,z)$ связано с решением следующей задачи. Рассматриваются блуждания частицы на системе множеств $\{L_i,\ i=\overline{1,N}\}$, $L_i=\{0,\dots,a\}$. Попадая в L_1, частица совершает блуждания в соответствии с вероятностями перехода

$$p_{k,k-1}=p,\ p_{k,k}=r,\ p_{k,k+1}=q,\quad 0<k<a.$$

При попадании частицы в точку $\{a\}$ множества L_1 блуждания прекращаются. При достижении точки $\{0\}$ частица мгновенно переходит в состояние $\{1\}$ множества L_2. Вероятности переходов во множествах $L_2,\dots,L_N$ определяются равенствами:

$$p_{k,k-1}=q;\ p_{k,k}=r;\ p_{k,k+1}=p,$$

если $0<k<a$. При попадании в $\{0\}$ или $\{a\}$ частица из множества L_i мгновенно переходит в состояние $\{1\}$ множества L_{i+1} (из L_N в L_1). Обозначим через $T(i,y)$ среднюю продолжительность блужданий, если частица в начальный момент находится во множестве L_i в точке y. Величины $T(i,y)$ определяются из системы уравнений

$$T(1,y)=pT(1,y-1)+rT(1,y)+qT(1,y+1)+1; \qquad (\text{П.I.7})$$

$$T(i,y)=D(y)+(N-i)D(1)+T(1,1),\ 2\le i\le N; \qquad (\text{П.I.8})$$

$$D(y)=\frac{y}{q-p}-\frac{q}{q-p}\,\frac{\gamma^y-1}{\gamma^a-1},\ \gamma=q/p,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

с граничными условиями:

$$T(1,a)=0\ ;\quad T(1,0)=T(2,1). \qquad (\text{П.I.9})$$

Общее решение уравнения (П.I.7) имеет вид

$$T(1,y)=\frac{y}{p-q}+A+B\gamma^{-y}. \qquad (\text{П.I.10})$$

Неизвестные постоянные A и B находятся из условий (П.I.9):

$$A=\frac{a}{q-p}-B\gamma^{-a};\quad B=\left[(N-1)\mathcal{D}(1)+\frac{1}{p-q}\right]\frac{1}{1-\gamma^{-1}}.$$

Используя (П.I.7), (П.I.8) и (П.I.10) при $a=E+1$, $y=z+1$, $i=N-j+1$, приходим к формулам (3.4.15). Теорема 3.4.3 доказана.

3. Доказательство следствия 3.4.1.

Если уравнения (3.4.1), (3.4.2) для всех объектов одинаковы, то в стационарном режиме среднее число отсчетов запаздывания в обнаружении разладки находится по формуле

$$T_1^*=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{a}T_1(k,j-1)\,\pi_{j,N},$$

где $\pi_{j,N}$ – стационарные вероятности состояний решающего устройства, а $T_1(k,j)$ определяются равенствами (П.I.8) – (П.I.10). Учитывая, что $\pi_{j,N}=\pi_j/N$, получаем

$$T_1^*=\frac{N-1}{N}\sum_{j=0}^{a}\mathcal{D}(j)\pi_j+\frac{N-1}{N}\mathcal{D}(1)\sum_{j=0}^{a}\left(\frac{\gamma^{-j}-\gamma^{-a}}{1-\gamma^{-1}}\right)\pi_j+$$

$$+\frac{N-1}{N}T_1(1,1)+\frac{(N-1)(N-2)}{2N}\mathcal{D}(1)-\frac{T_1}{N},$$

где T_1 определяется соотношением (3.4.10).

Чтобы получить (3.4.16), достаточно воспользоваться следующими формулами:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sum_{j=0}^{a} D(j)\bar{T}_j = \frac{q}{(q-p)^2} - 1 + \frac{2a}{(q-p)(\gamma^a-1)} - \frac{a(a-1)}{(q-p)^2 T_0};$$

$$\sum_{j=0}^{a} \frac{\gamma^{-j}-\gamma^{-a}}{1-\gamma^{-1}}\bar{T}_j = -(q-p)T_1 + a - \frac{q}{q-p} + q - p.$$

Следствие 3.4.I доказано.

4. Уравнения для нахождения $z_{kj}(t,\hat{\lambda}_t)$ $(j=\overline{0,k},\ k\geq 2)$ получаются после подстановки (3.5.25) в (3.5.I8) и приравнивания членов при одинаковых степенях $x^{2\tau}$, $\tau=\overline{0,k}$, стоящих в левой и правой частях уравнения:

$$-\frac{dz_{k0}}{d\tau} = \sigma^2 z_{k1} \qquad (k\geq 2);$$

$$\frac{dz_{kj}}{d\tau} = 2j\left[\frac{g^2}{\theta}z_{01} - \hat{\lambda}_t\right]z_{kj} - (j+1)(2j+1)\sigma^2 z_{k,j+1} +$$

$$+\frac{g^2}{\theta}\sum_{s=1}^{k-1} C_k^s \sum_{\nu=\max(1,j+s-k+1)}^{\min(s,j)} (j+1-\nu)\nu z_{s\nu} z_{k-s,j+1-\nu} -$$

$$-\frac{k(k-1)}{2\sigma^2}\frac{\partial^2 z_{k-2,j+1}}{\partial\hat{\lambda}_t^2} + \frac{k(k-1)}{\sigma^2} z_{k-1,j-1} -$$

$$-2kj\frac{\partial z_{k-1,j}}{\partial\hat{\lambda}_t}, \qquad (1\leq j\leq k-1,\ k\geq 2);$$

$$\frac{dz_{kk}}{d\tau} = 2k\left[\frac{g^2}{\theta}z_{01} - \hat{\lambda}_t\right]z_{kk} + \frac{k(k-1)}{\sigma^2}z_{k-1,k-1} \quad (k>2); \qquad (\text{П.I.II})$$

$$\frac{dz_{22}}{d\tau} = 4\left[\frac{g^2}{\theta}z_{01} - \hat{\lambda}_t\right]z_{22} + \frac{2z_{11}}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial^2 z_{01}}{\partial\hat{\lambda}_t^2}.$$

5. Найдем два первых приближения к оптимальному управлению U_t^0 и U_t^1. Запишем уравнение (3.5.I0) в координатных обозначениях, учитывая при этом, что $\tau_{i,kj} = x_j\delta_{ik}$:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \sum_{i,j} q_{ij}x_i x_j - \frac{1}{4}\sum_{i,j,k,s}\frac{\partial V}{\partial x_i} g_{ij}\theta_{jk}^{-1} g_{sk}\frac{\partial V}{\partial x_s} + \sum_{k,s}\frac{\partial V}{\partial x_k}\hat{a}_{ks}x_s \qquad (\text{П.1.12})$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$- \sum \frac{\partial V}{\partial \Lambda_{ij,\kappa\ell}} \Lambda_{\kappa\ell,\nu s} x_s b^{-1}_{\nu\varkappa} x_\alpha \Lambda_{\varkappa\alpha,ij} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} b_{ij} +$$

$$+ \sum_{i,j,\kappa,s} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial \hat{a}_{j\kappa}} \Lambda_{j\kappa,is} x_s + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 V}{\partial \hat{a}_{ij} \partial \hat{a}_{\kappa s}} \Lambda_{\kappa s,\nu\ell} x_\ell b^{-1}_{\nu\varkappa} x_\alpha \Lambda_{\lambda\alpha,ij}$$

($\theta^{-1}_{j\kappa}$ и $b^{-1}_{\nu\varkappa}$ – элементы обратных матриц θ^{-1} и B^{-1}).

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда по степеням $\Lambda_{ij,\kappa\ell}$ $(i,j,\kappa,\ell = \overline{1,n})$:

$$V(t,x,\hat{\lambda},\Lambda) = W^0(t,x,\hat{\lambda}) + \sum_{\alpha,\rho,\varkappa,\omega} W^1_{\alpha\rho,\varkappa\omega}(t,x,\hat{\lambda}) \Lambda_{\alpha\rho,\varkappa\omega} +$$

$$+ \sum W^2_{ij\kappa\ell,\tau\nu\varkappa\rho}(t,x,\hat{\lambda}) \Lambda_{ij,\kappa\ell} \Lambda_{\tau\nu,\varkappa\rho} \ldots . \qquad (\text{П.I.I3})$$

Подставив (П.I.I3) в уравнение (П.I.I2) и приравняв выражения, стоящие при одинаковых степенях $\Lambda_{ij,\kappa s}$ в левой и правой частях уравнения, можно получить уравнения для определения коэффициенто в разложении (П.I.I3).

Для получения двух первых приближений к оптимальному управлению, запишем уравнения для $W^0(t,x,\hat{\lambda})$ и $W^1_{\alpha\rho,\varkappa\omega}(t,x,\hat{\lambda})$:

$$- \frac{\partial W^0}{\partial t} = \sum_{i,j} q_{ij} x_i x_j - \frac{1}{4} \sum_{i,j,\kappa,s} \frac{\partial W^0}{\partial x_i} g_{ij} \theta^{-1}_{j\kappa} g_{s\kappa} \frac{\partial W^0}{\partial x_s} + \qquad (\text{П.I.I4})$$

$$+ \sum_{\kappa,s} \frac{\partial W^0}{\partial x_\kappa} \hat{a}_{\kappa s} x_s + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 W^0}{\partial x_i \partial x_j} b_{ij} \; ; \qquad (\text{П.I.I5})$$

$$- \frac{\partial W^1_{\alpha\rho,\varkappa\omega}}{\partial t} = - \frac{1}{2} \sum_{i,\kappa,\ell,s} \frac{\partial W^0}{\partial x_i} g_{i\ell} \theta^{-1}_{\ell\kappa} g_{s\kappa} \frac{\partial W^1_{\alpha\rho,\varkappa\omega}}{\partial x_s} +$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$+\sum_{k,s}\frac{\partial W^{1}_{\alpha\rho,\varkappa\omega}}{\partial x_k}\hat{a}_{ks}x_s+$$

$$+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2 W^{1}_{\alpha\rho,\varkappa\omega}}{\partial x_i\partial x_j}b_{ij}+\frac{\partial^2 W^{0}}{\partial x_\varkappa\partial\hat{a}_{\alpha\rho}}x_\omega\quad(\alpha,\rho,\varkappa,\omega=\overline{1,n}).$$

Решение уравнения (П.I.I4) ищем в виде

$$W^{0}(t,x,\hat{\lambda})=\tilde{y}(t,\hat{\lambda})+\sum_{i,j=1}^{n}y_{ij}(t,\hat{\lambda})x_ix_j. \qquad (\text{П.I.I6})$$

Подстановка этой функции в уравнение приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $\tilde{y}(t,\hat{\lambda}_t)$ и матричной функции $Y(t,\hat{\lambda})=\|y_{ij}(t,\hat{\lambda})\|$:

$$-\frac{d\tilde{y}(\tau,\hat{\lambda}_t)}{d\tau}=\sum_{i,j}y_{ij}(\tau,\hat{\lambda}_t)b_{ij};$$

$$-\frac{dy_{ij}(\tau,\hat{\lambda}_t)}{d\tau}=q_{ij}-\sum_{e,k,s,\alpha}y_{ie}g_{ek}\theta^{-1}_{ks}g_{\alpha s}y_{\alpha j}+ \qquad (\text{П.I.I7})$$

$$+\sum_k y_{ik}\hat{a}_{kj}+\sum_k\hat{a}_{ki}y_{kj}\qquad(i\leq\tau\leq T)$$

Если теперь подставить (П.I.I6) в (3.5.9), а затем записать полученное выражение в систему уравнений (П.I.I7) в векторной форме, то придем к формулам (3.5.27), (3.5.28), определяющим нулевое приближение U^{0}_{t}

Решение уравнений системы будем искать в том же виде:

$$W^{1}_{\alpha\rho,\varkappa\omega}=\hat{Z}^{\alpha\rho,\varkappa\omega}(t,\hat{\lambda})+\sum_{i,j=1}^{n}Z^{\alpha\rho,\varkappa\omega}_{ij}(t,\hat{\lambda})x_ix_j. \qquad (\text{П.I.I8})$$

Подставив эту функцию в уравнение (П.I.I5), получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения скалярной $\hat{Z}^{\alpha\rho,\varkappa\omega}(\tau,\hat{\lambda}_t)$ и матричной функций:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\mathcal{Z}^{\alpha\rho,\varkappa\omega}(\tau,\hat{\lambda}_t)=\left\|\mathcal{Z}_{ij}^{\alpha\rho,\varkappa\omega}(\tau,\hat{\lambda}_t)\right\|_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}:$$

$$-\frac{d}{d\tau}\tilde{\mathcal{Z}}^{\alpha\rho,\varkappa\omega}(\tau,\hat{\lambda}_t)=\sum_{i,j}\mathcal{Z}_{ij}^{\alpha\rho,\varkappa\omega}(\tau,\hat{\lambda}_t)\,b_{ij};$$

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{Z}_{ij}^{\alpha\rho,\varkappa\omega}(\tau,\hat{\lambda}_t)=\sum_{e,\mu,k,s}y_{ie}\,g_{e\mu}\,\theta_{\mu k}^{-1}\,g_{sk}\,\mathcal{Z}_{sj}^{\alpha\rho,\varkappa\omega}+$$

$$+\sum_{e,\mu,k,s}y_{ie}\,g_{e\mu}\,\theta_{\mu k}^{-1}\,g_{sk}\,\mathcal{Z}_{si}-\sum_{k}\mathcal{Z}_{ki}^{\alpha\rho,\varkappa\omega}\hat{a}_{kj}- \tag{П.I.19}$$

$$-\sum_{k}\mathcal{Z}_{kj}^{\alpha\rho,\varkappa\omega}\hat{a}_{ki}-\frac{\partial y_{\varkappa i}}{\partial\hat{a}_{\alpha\rho}}\delta_{j\omega}-\frac{\partial y_{\varkappa j}}{\partial\hat{a}_{\alpha\rho}}\delta_{i\omega}.$$

Первое приближение к оптимальному управлению u_t' получим, подставляя вместо функции $V(t,x,\hat{\lambda},\Lambda)$ в уравнение (3.5.9) её первое приближение

$$W^0(t,x,\hat{\lambda})+\sum_{\alpha,\rho,\varkappa,\omega}W^1_{\alpha\rho,\varkappa\omega}(t,x,\hat{\lambda})\Lambda_{\alpha\rho,\varkappa\omega}.$$

Если при этом учесть формулы (П.I.16), (П.I.18) и ввести матрицу $\Pi(\tau,\hat{\lambda}_t,\Lambda_t)=\left\|\Pi_{ij}(\tau,\hat{\lambda}_t,\Lambda_t)\right\|_{i=1,n}^{j=\overline{1,n}}$ с элементами:

$$\Pi_{ij}(\tau,\hat{\lambda}_t,\Lambda_t)=\sum_{\alpha,\rho,\varkappa,\omega=1}^{n}\mathcal{Z}_{ij}^{\alpha\rho,\varkappa\omega}(\tau,\hat{\lambda}_t)\,\Lambda_{\alpha\rho,\varkappa\omega}(t),$$

то придем к формуле (3.5.29).

Уравнение (3.5.30) для функции $\Pi(\tau,\hat{\lambda}_t,\Lambda_t)$ получим, если умножим левые и правые части уравнения (П.I.19) на $\Lambda_{\alpha\rho,\varkappa\omega}(t)$, просуммируем по всем α, ρ, $\varkappa$, ω и запишем ответ в векторной форме. Уравнения для $\frac{\partial y_{ij}}{\partial\hat{a}_{\alpha\tau}}(\tau,\hat{\lambda}_t)$ находим, используя (П.I.17):

$$-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial y_{ij}}{\partial\hat{a}_{\alpha\tau}}=\sum_{k}\frac{\partial y_{ik}}{\partial\hat{a}_{\alpha\tau}}\hat{a}_{kj}+\sum_{k}\hat{a}_{ki}\frac{\partial y_{kj}}{\partial\hat{a}_{\alpha\tau}}+y_{i\alpha}\delta_{\tau j}+$$

$$+y_{\alpha j}\delta_{i\tau}-\sum_{e,k,s,\mu}\frac{\partial y_{ie}}{\partial\hat{a}_{\alpha\tau}}g_{ek}\,\theta_{ks}^{-1}\,g_{\mu s}\,y_{\mu j}- \tag{П.I.20}$$

$$-\sum_{e,k,s,\mu}y_{ie}\,g_{ek}\,\theta_{ks}^{-1}\,g_{\mu s}\frac{\partial y_{\mu j}}{\partial\hat{a}_{\alpha\tau}},$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

причем $\frac{\partial y_{ij}}{\partial \hat{a}_{\alpha\tau}}(T, \hat{\lambda}_t) = 0$ для всех $\hat{\lambda}_t$.

6. Вывод уравнений (3.6.12)

При выводе уравнений (3.6.12) будем предполагать, что функции $A_{ij}(t, x; \lambda)$ и $B_i(t, x)$ зависят от значения процесса x только в момент t. Получим уравнения (3.6.12), следуя [166]. Прежде всего найдем плотность вероятности $p\{x(t_{m+1}) | z(t_m), \lambda\}$. Из (6.1) следует, что

$$M\{x(t_{m+1}) | z(t_m), \lambda\} = x(t_m) + [A_{11}(t_m, x; \lambda) + A_{12}(t_m, x; \lambda) y(t_m)]\Delta t + O(\Delta t); \qquad (П.1.21)$$

$$\mathcal{D}\{x(t_{m+1}) | z(t_m), \lambda\} = c_{11}(t_m, x)\Delta t + O(\Delta t).$$

Учитывая, что приращения процесса $x(t)$ имеют гауссовское распределение, находим плотность вероятности

$$p\{x(t_{m+1}) | z(t_m), \lambda\} = c \exp\{-q\Delta t\},$$

где

$$c = (2\pi\Delta t)^{-r/2} (\det c_{11})^{-1/2};$$

$$q = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta x_m}{\Delta t} - A_{11} - A_{12} y(t_m)\right]^T c_{11}^{-1}\left[\frac{\Delta x_m}{\Delta t} - A_{11} - A_{12} y(t_m)\right];$$

$$\Delta x_m = x(t_{m+1}) - x(t_m).$$

В формуле (П.1.12) удобно включить в множитель все величины, не зависящие от $y(t_m)$ и λ. Тогда получим

$$p\{x(t_{m+1}) | z(t_m), \lambda\} = c_1 \exp\{-q_1 \Delta t\}, \qquad (П.1.22)$$

где

$$q_1 = \frac{1}{2}[A_{11} + A_{12} y(t_m)]^T c_{11}^{-1}[A_{11} + A_{12} y(t_m)] - [A_{11} + A_{12} y(t_m)]^T c_{11}^{-1} \frac{\Delta x_m}{\Delta t}$$

При малых Δt формула (П.1.22) с учетом того, что

$$\Delta x_m \Delta x_m^T = c_{11}(t_m)\Delta t + O(\Delta t),$$

преобразуется следующим образом:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$P\{x(t_{m+1})|Z(t_m),\lambda\} = C_1\{1-q_1\Delta t+\frac{(q_1\Delta t)^2}{2}+O(\Delta t)\} =$$

$$= C_1\{1+[A_{11}(t_m,x;\lambda)+ \qquad (\text{П.I.23})$$

$$+A_{12}(t_m,x;\lambda)y(t_m)]^T C_{11}^{-1}\Delta x_m + O(\Delta t)\}.$$

Подставив (П.I.23) в (3.6.I0), воспользуемся элементарной формулой

$$\frac{1}{1-\alpha^T\Delta x_m - O(\Delta t)} = 1-\alpha^T\Delta x_m + (\alpha^T\Delta x_m)^2 + O(\Delta t).$$

Тогда после некоторых простых преобразований, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, $(m\to\infty)$, получим уравнение (3.6.I2).

7. Доказательство теоремы 3.2.I.

Достаточность. Конечность длительности последовательной процедуры $N(H)$ следует из условия (3.2.5) и определений (3.2.I) и (3.2.4) моментов остановки τ_n и σ. Представим оценку (3.2.2) в виде

$$\hat{\lambda}_n = \lambda + G^{-1}(\tau_n)\xi(\tau_n), \quad \xi(\tau_n) = \int_0^{\tau_n} A^T(t)(B(t)B^T(t))^+ B(t)\,dW(t).$$

Используя свойства стохастических интегралов и учитывая, что $A^+AA^+ = A^+$, получим $M\,tr\,\xi(\tau_n)\xi^T(\tau_n) =$

$$= tr\,M\int_0^{\tau_n} A^T(t)(B(t)B^T(t))^+ B(t)\,dW(t)\int_0^{\tau_n} dW^T(t)B^T(t)(B(t)B^T(t))^+ A(t) = \qquad (\text{П.I.24})$$

$$= M\int_0^{\tau_n}\|A(t)\|_{B(t)}\,dt = C_n/\rho.$$

Последнее равенство выполняется по определению τ_n. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что $Z^T[\lambda^*(H)-\lambda][\lambda^*(H)-\lambda]^T Z =$

$$= \Big(\sum_{n=1}^{\sigma}\alpha_n Z^T G^{-1}(\tau_n)\xi(\tau_n)\Big)^2 \le \sum_{n=1}^{\sigma}\alpha_n \sum_{n=1}^{\sigma}\alpha_n (Z^T G^{-1}(\tau_n)\xi(\tau_n)). \qquad (\text{П.I.25})$$

Далее имеем

$$\alpha_n (Z^T G^{-1}(\tau_n)\xi(\tau_n))^2 \le \frac{b_n^2}{H}(Z^T G^{-1}(\tau_n)\xi(\tau_n))^2 =$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$= \frac{1}{H} Z^T \frac{G^{-1}(\tau_n)}{\mu_n} \cdot \frac{\xi(\tau_n)\xi^T(\tau_n)}{c_n^2} \cdot \frac{G^{-1}(\tau_n) Z}{\mu_n} \le \frac{1}{H} \cdot Z^T Z \cdot \frac{tr\, \xi(\tau_n)\xi^T(\tau_n)}{c_n^2}. \quad (\text{П.I.26})$$

Последнее неравенство выполняется в силу (3.2.4). Взяв математическое ожидание от обеих частей неравенства (П.I.25) и принимая во внимание (П.I.24), (П.I.26) и условие нормировки $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$, получим

$$Z^T M(\lambda^*(H)-\lambda)(\lambda^*(H)-\lambda)^T Z \le \frac{Z^T Z}{H} \sum_{n=1} \frac{c_n}{c_n^2 \rho} = \frac{Z^T Z}{H},$$

что и доказывает утверждение I^0 теоремы 3.2.I.

<u>Необходимость</u>. Доопределим оценку (3.2.3) на множестве $\{N(H)=\infty\}$. Положим $\tilde{\lambda}(H) = \lambda^*(H)$, если $N(H) < \infty$, и $\tilde{\lambda}(H) = \lambda_0$, если $N(H) = +\infty$, где $\lambda_0 \in R^p$. Пусть ряд (3.2.5) сходится с положительной вероятностью. Тогда найдется число T_0, $0 < T_0 < \infty$, такое, что

$$P\{\sum_{n\ge1} b_n^2 \le T_0\} = d > 0. \quad (\text{П.I.27})$$

Действительно, если $P\{\sum_{n\ge1} b_n^2 \le T\} = 0$ для всех $T>0$, то $P\{\sum_{n\ge1} b_n^2 < \infty\} = 0$, что противоречит сделанному предположению. Из (П.I.27) следует, что при $H > T_0$ выполняется неравенство

$$M_\lambda (Z^T(\lambda^*(H)-\lambda))^2 \ge M_\lambda \chi_{[N(H)=\infty]} [Z^T(\lambda_0-\lambda)]^2 = [Z^T(\lambda_0-\lambda)]^2 d. \quad (\text{П.I.28})$$

Если $\lambda_0 \ne 0$, то для некоторого вектора Z правая часть (П.I.28) положительна и, следовательно,

$$\varliminf_{H\to\infty} M_\lambda (Z^T(\lambda^*(H)-\lambda))^2 > 0.$$

Это неравенство противоречит утверждению I^0. Теорема 3.2.I доказана.

8. Доказательство предложения 3.2.I.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Сначала докажем, что при условии (3.2.6) выполняется следующее предельное соотношение:

$$P-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau_n}\int_0^{\tau_n} A^T(t)(B(t)B^T(t))^+A(t)\,dt = F. \qquad (\text{П.I.29})$$

Из (3.2.6) следует, что

$$\int_0^{\infty} \|A(t)\|^2_{B(t)}\,dt = \infty \qquad (P\text{-п.н.}).$$

По определению (3.2.I) момента τ_n имеем

$$\tau_n = \inf\{T>0:\ T\varphi(T)\geq t_n\};$$

$$\varphi(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\|A(t)\|^2_{B(t)}\,dt}{tr F}, \quad t_n = t(c_n) = \frac{c_n}{\rho\, tr F}.$$

Покажем, что

$$P-\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{t_n} = 1. \qquad (\text{П.I.30})$$

Для этого воспользуемся предельным соотношением $P\text{-}\lim \varphi(T)=1$ и равенствами:

$$P\{\tau_n>(1+\delta)t_n\} = P\{t_1(n)\,\varphi(t_1(n))<t_n\},\ t_1(n)=(1+\delta)t_n;$$

$$P\{\tau_n<(1-\delta)t_n\} = P\{t_2(n)\,\varphi(t_2(n))>t_n\},\ t_2(n)=(1-\delta)t_n.$$

Далее, обозначив $F(t) = A^T(t)(B(t)B^T(t))^+A(t)$, представим левую часть (П.I.29) в виде

$$\frac{1}{\tau_n}\int_0^{\tau_n} F(t)\,dt = \frac{t_n}{\tau_n}\left[\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} F(t)\,dt\right] + \frac{t_n}{\tau_n}d_n,\ d_n = \frac{1}{t_n}\left(\int_0^{\tau_n} F(t)\,dt - \int_0^{t_n} F(t)\,dt\right).$$

В силу (3.2.6) и (П.I.30) первое слагаемое в правой части этого равенства сходится по вероятности к F. Для завершения доказательства (П.I.29) остается показать, что

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$P-\lim_{n\to\infty} d_n = 0. \qquad (\text{П.I.31})$$

Имеем

$$|\langle d_n\rangle_{ij}| \le \frac{1}{t_n}\int_{t_n\wedge\tau_n}^{t_n\vee\tau_n} |\langle F(t)\rangle_{ij}|dt; \quad F(t)=f(t)f^T(t); \qquad (\text{П.I.32})$$

$$f(t)=A^T(t)(B(t)B^T(t))^+B(t).$$

Поскольку

$$|\langle F(t)\rangle_{ij}| = |\sum_{\ell=1}^{m}\langle f(t)\rangle_{i\ell}\langle f(t)\rangle_{j\ell}| \le \sum_{\ell=1}^{m}(\sum_{i=1}^{p}\langle f(t)\rangle_{i\ell})^2 \le$$

$$\le p\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{i=1}^{p}(\langle f(t)\rangle_{i\ell})^2 = p\,tr\,F(t) = p\|A(t)\|_{B(t)},$$

то из (П.I.32) следует, что

$$|\langle d_n\rangle_{ij}| \le p\frac{1}{t_n}\int_{t_n\wedge\tau_n}^{t_n\vee\tau_n}\|A(t)\|^2_{B(t)}dt = p\left|tr\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}A^T(t)(B(t)B^T(t))^+A(t)dt - F\right)\right|.$$

Отсюда получаем (П.I.31). Соотношение (П.I.29) доказано. Используя (3.2.4) и (П.I.29), приходим к равенству

$$P-\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{\mu\, tr F} > 0, \quad \mu = \max_{i,j}|\langle F^{-1}\rangle_{ij}|,$$

из которого следует (3.2.5). Предложение 3.2.I доказано.

9. Доказательство теоремы 3.3.I.

Для того чтобы доверительный интервал $S(\nu)$, определяемый по формулам (I.9.5), (I.9.6) с помощью статистик (3.3.2), накрывал неизвестные значения параметра λ, достаточно одновременного осуществления событий $\{|\xi_0(H)|\le\delta\}, \dots, \{|\xi_m(H)|\le\delta\}$, поскольку тогда можно определить, на каком из доверительных множеств произошел скачок величин $y_i(H)$. По неравенству Буля имеем

$$P\{|\xi_0(H)|\le\delta,\dots,|\xi_m(H)|\le\delta\} \ge 1-\sum_{i=0}^{m}P\{|\xi_i(H)|>\delta\}.$$

Так как величины ξ_i являются гауссовскими с параметрами $(0, 1/H)$, то $P\{|\xi_i(H)|>\delta\} = 2\Phi(\delta\sqrt{H})$. Выбрав $\varepsilon>0$ из условия

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sum_{i=0}^{m} P\{|\xi_i(H)|>\delta\} = 2(m+1)\Phi(\delta\sqrt{H}) = \varepsilon,$$

находим поро. H, обеспечивающий уровень доверия $1-\varepsilon$. Теорема 3.3.I доказана.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ЛИТЕРАТУРА

1. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. -М.: Наука, 1977, - 224 с.
2. Альтшулер С.В. Методы оценки параметров процессом авторегрессии - скалярного среднего (обзор). - Автоматика и телемеханика, 1982, № 8, с. 5-18.
3. Анализ авторегрессий: Сборник статей. -М.: Статистика, 1978, - 232 с.
4. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. -М.: Мир, 1976, - 756 с.
5. Аоки М. Введение в методы оптимизации. -М.: Наука, 1977,-343 с.
6. Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Н.Г. Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского процесса. -ДАН, 1962,т. 146, № 4, с. 747-750.
7. Арато М. Об оценках параметров процессов, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям. - Studia Sci. Math. Hungar. , 1970, № 5, с. 11-15.
8. Арато М. Вычисление доверительных границ для параметра "затухания" комплексного стационарного гауссовского процесса. - Теория вероятн. и её применен., 1968, т.13, вып.1,с.326-333.
9. Балтрунас И.И., Капустинскас А.И. Оценки наименьших квадратов параметров процесса авторегрессии с шумом в наблюдениях. - В кн.: Тр. АН Лит. ССР, 1975, сер. В, № 6 (91), с. 133-139.
10. Балтрунас И.И., Капустинскас А.И. Оценивание методом Юла-Уокера параметров процесса авторегрессии с шумом в наблюдениях. - В кн.: Тр. АН Лит. ССР, 1975, сер. Б, № 5 (90), с. 135-142.
11. Белоглазов И., Тарасенко В.П. Корреляционно-экстремальные системы. -М.: Советское радио, 1974, - 392 с.
12. Беляев Ю.К., Чепурин Е.В. Основы математической статистики. Ч. II и III.- -М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. - 148 с.
13. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. - М.: Мир, 1974, вып.1, - 406с.
14. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. -М.: Мир, 1974, вып.2, - 197с.
15. Большаков И.А. Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума. -М.: Советское радио, 1969, - 464 с.
16. Ворисов В.З., Конев В.В. Последовательное оценивание параметров дискретных процессов. -Автоматика и телемеханика, 1977, № 10,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

с. 58-64.

17. Борисов В.З., Конев В.В. Последовательное оценивание параметров случайных процессов. - В кн.: Математическая статистика и её приложения. Томск; Изд-во Томск. ун-та, 1979, вып.5, с. 3-11.
18. Борисов В.З., Конев В.В. О среднем времени наблюдения при последовательном оценивании параметров рекуррентных процессов. - Автоматика и телемеханика, 1981, № 10, с. 90-97.
19. Боровков А.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1976. - 352 с.
20. Боровков А.А. Математическая статистика: Учебник. - М.: Наука, 1984. - 472 с.
21. Бородкин Л.И., Моттль В.В. Алгоритм обнаружения моментов изменения параметров уравнения случайного процесса. - Автоматика и телемеханика, 1976, № 6, с .23-32.
22. Вальд А. Последовательный анализ.-М.: Физматгиз, 1960, - 328 с.
23. Вальд А. Статистические решения функции. - В кн.: Позиционные игры. М.: Наука, 1967, с. 301-522.
24. Васильев В.А., Конев В.В. Последовательное оценивание параметров динамических систем при неполном наблюдении. -Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1982, № 6, с. 145-154.
25. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов.-М.: Наука, 1976. - 319 с.
26. Верулава Ю.Ш. Сходимость алгоритма стохастической аппроксимации для оценки параметра авторегрессии. - Автоматика и телемеханика, 1981, № 7, с. 115-119.
27. Виленкин С.Я., Дубенко Т.И. Об оценках математического ожидания случайного поля. - Автоматика и телемеханика, 1970, № 11, с. 69-73.
28. Воробейчиков С.Э. О последовательной идентификации параметров случайных процессов рекуррентного типа. -В кн.: Математическая статистика и её приложения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, вып.9, с.42-47.
29. Воробейчиков С.Э., Конев В.В. О последовательной идентификации стохастических систем. - Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1980, № 4, с. 176-182.
30. Воробейчиков С.Э., Конев В.В. О построении последовательных оценок параметров процессов рекуррентного типа. - В кн.: Математическая статистика и её приложения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1980, вып. 6, с. 72-81.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

31. Воробейчиков С.Э., Конев В.В. К обнаружению моментов разладки случайных процессов. - В кн.: Математическая статистика и её приложения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982, вып.8, с.20-34.
32. Воробейчиков С.Э., Конев В.В. Последовательный метод обнаружения разладок случайных процессов рекуррентного типа.-Автоматика и телемеханика, 1984, № 5, с.27-38.
33. Воробейчиков С.Э., Конев В.В. Обнаружение моментов скачкообразных изменений параметров случайных процессов. -В кн.: Математическая статистика и её приложения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, вып.9, с. 34-41.
34. Воробейчиков С.Э., Конев В.В. Обнаружение разладок случайных процессов рекуррентного типа. -В кн.: Статистические проблемы управления, вып.65. Обнаружение изменений свойств случайных процессов. Вильнюс, 1984, с. 58-66.
35. Ворчик Б.Г., Фетисов В.Н., Штейнберг М.Е. Идентификация стохастической замкнутой системы. -Автоматика и телемеханика, 1973, № 7, с. 41-52.
36. Вострикова Л.Ю. Обнаружение разладки винеровского процесса. - Теория вероят. и её применен., 1981, т.26, вып.2, с. 362-368.
37. Вострикова Л.Ю. Обнаружение изменений среднего значения в случайном процессе. - Теория вероят. и её применен., 1981, т.26, вып.4, с. 867-869.
38. Вострикова Л.Ю. Обнаружение "разладки" в многомерных случайных процессах. - ДАН , 1981, т. 259, № 2, с. 270-274.
39. Гальчук Л.И., Розовский Б.Л. Задача о "разладке" для пуассоновского процесса. - Теория вероят. и её применен., 1971, т.16, вып.3, с. 729-734.
40. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967. - 575 с.
41. Гаткин Н.Г., Далецкий Ю.Л. Оптимальное выделение сигнала на фоне производственного шума. - Теория вероятн. и её применен., 1971, т.16, вып.4, с. 749-753.
42. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т.I, -М.: Наука, 1971, - 664 с.
43. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. - Киев: Наукова думка, 1968. - 354 с.
44. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - 5-е изд. - М.: Наука, 1969, - 400 с.
45. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

сумм независимых случайных величин. -Л.-М.: Гостехиздат, 1949, - 254 с.

46. Гренандер У. Случайные процессы и стохастические выводы. -М.: Изд. иностр. лит., 1961, - 167 с.
47. Дарховский Б.С. Непараметрический метод для апостериорного обнаружения момента "разладки" последовательности независимых случайных величин. - Теория вероят. и её применен., 1976, т.21, вып.1, с. 180-184.
48. Дарховский Б.С., Бродский Б.Е. Апостериорное обнаружение момента "разладки" случайной последовательности. -Теория вероят. и её применен., 1980, т.25, № 3, с. 635-639.
49. Дашевский М.Л. Уравнения семиинвариантов нелинейной динамической системы. - Автоматика и телемеханика, 1968, № 10, с.63-71.
50. Дашевский М.Л., Липцер Р.Ш. Моделирование стохастических дифференциальных уравнений, связанных с задачей о "разладке" на аналоговой машине. - Автоматика и телемеханика, 1966, № 4, с. 142-150.
51. Джапаридзе К.О. Оценка параметров и проверка гипотез в спектральном анализе стационарных временных рядов. - Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1981, - 263 с.
52. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения, т.1. - М.: Мир, 1971, - 307 с.
53. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. т.2. - М.: Мир, 1971. - 228 с.
54. Дороговцев А.Я. Теория оценок параметров случайных процессов. - Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1982, - 192 с.
55. Дороговцев А.Я. Асимптотические свойства оценок метода наименьших квадратов в нелинейной модели авторегрессии. - Теория случайных процессов. Расп. межвед. сб., 1974, вып.2, с.47-54.
56. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. -М.: Изд. иностр. лит., 1956, - 605 с.
57. Дубенко Т.И. Оптимальное расположение датчиков при оценке значений однородного случайного поля при наличии аддитивных помех. - Автоматика и телемеханика, 1970, № 7, с. 34-39.
58. Зайдман Р.А., Линник Ю.В., Романовский И.В. Планы последовательного оценивания и марковские моменты остановки. - ДАН, 1969, т.185, № 6, с. 1222-1225.
59. Зайдман Р.А., Линник Ю.В., Судаков В.Н. О последовательном

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

оценивании и марковских моментах остановки для процессов с независимыми приращениями. – Сов.-япон. симпозиум по теории вероятностей. Кн. I, Новосибирск, 1969, с. 122-143.

60. Закс Ш. Теория статистических выводов. – М.: Мир, 1975, – 776 с.

61. Зигангиров К.Ш. Задача в системе с конечным числом позиций. – Радиотехника и электроника, 1963, т.8, вып.I, с.16-23.

62. Зигангиров К.Ш. Об оптимальности поиска в системе с конечным числом позиций. – Радиотехника и электроника, 1964, т.9, № 10, с. 1746-1751.

63. Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования.– Изд. 2-е, перераб. и доп. – Л.: Машиностроение, 1974. – 335 с.

64. Ермаков М.С. О свойствах некоторых случайных процессов, возникающих в теории статистического оценивания. – Записки научных семинаров ЛОМИ, т.98, с. 48-60.

65. Ершов А.А. Стабильные методы оценки параметров (обзор). – Автоматика и телемеханика, 1978, № 8, с. 66-100.

66. Ершов А.А. Стабильное оценивание параметров некоторых линейных динамических систем. – Рук. деп. ВИНИТИ, № 2120-78.

67. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. О последовательном инвариантном оценивании параметра сдвига. – ДАН , 1972, т.204, № I, с. 18-20.

68. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. О последовательном оценивании. – Теория вероят. и её применен., 1974, т.19, вып.2, с. 245-256.

69. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. О последовательном оценивании параметра сдвига для выборок с разрывной плотностью. –Теория вероят. и её применен., 1974, т.19, № 4, с. 700-713.

70. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. –М.: Наука, 1979. – 528 с.

71. Ибрамхалимов И.Ш., Скороход А.В. Определение среднего для винеровского процесса, наблюдаемого на бесконечном интервале. – Теория вероят. и ее применен., 1973, т.18, № 4, с. 804-808.

72. Иванов А.В. Статистические свойства оценок параметров в нелинейных моделях регрессии: Автореф.дис....канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1973.– 16 с.

73. Кашьяп Р.Л., Рао А.Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. –М.: Наука, 1983. –384 с.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

74. Клигене С.-Н.И. Оценка момента изменения параметров распределения случайных последовательностей. - Теория вероят. и её примен., 1973, т.18, вып.3, с 677-678.
75. Клигене С.-Н.И. Точное распределение оценки максимального правдоподобия параметров авторегрессии. - В кн.: Статистические проблемы управления, Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики, 1978, № 31, с. 9-30.
76. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания.-М.: Наука, 1966, - 243 с.
77. Кнопов П.С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем. - Киев: Наукова думка, 1981, - 152 с.
78. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. -М.: Наука, 1974. - 119 с.
79. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.-5-е изд. - М.: Наука, 1980, - 543 с.
80. Конев В.В. Адаптивное управление линейной стохастической системой с неизвестными параметрами. - Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1972, № 1, с. 201-209.
81. Конев В.В. Последовательный метод оценивания параметров случайных полей. - В кн.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. - Пермь: Перм.ун-т, 1984, с. 59-70.
82. Конев В.В. Границы для среднего числа наблюдений в задачах последовательного оценивания параметров случайных процессов рекуррентного типа. - Автоматика и телемеханика, 1983, № 8 с. 64-73.
83. Конев В.В. О последовательном оценивании параметров сноса случайных полей диффузионного типа. - В кн.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции "Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов", ч.1. Нальчик, 1982. - М.: Типография МЭИ, с. 87-89.
84. Конев В.В. Границы для среднего времени достижения постоянного порога неупреждающим функционалом от случайного процесса рекуррентного типа. - Успехи математических наук, 1984, № 1, с. 139-140.
85. Конев В.В. Обнаружение моментов разладки случайных процессов рекуррентного типа при многоальтернативной конечной модели. - В кн.: Математическая статистика и её приложения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, вып.9, с. 109-116.
86. Конев В.В., Конева Е.С. О достаточных условиях сходимости пос-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ледовательных оценок параметров нелинейных рекуррентных процессов. - В кн.: Математическая статистика и её приложения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1981, вып.7, с. 82-92.

87. Конев В.В., Конева Е.С. Последовательный непараметрический критерий классификации процессов рекуррентного типа. - В кн.: Математическая статистика и её приложения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982, вып.8, с. 81-95.

88. Конев В.В., Конева Е.С. Последовательный метод нелинейного оценивания параметров случайных процессов. - Автоматика и телемеханика, 1982, № 12, с. 39-47.

89. Конев В.В., Конева Е.С. О характеристиках последовательной процедуры оценивания параметра сдвига. - В кн.: Математическая статистика и её приложения, 1981, вып.8, с. 86-104.

90. Конев В.В., Конева Е.С. Об оптимальности последовательной процедуры оценивания параметров рекуррентных процессов. - Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1984, № 3, с. 118-123.

91. Конев В.В., Пергаменщиков С.М. Последовательные планы идентификации динамических систем. - Автоматика и телемеханика, 1981, № 7, с. 84-92.

92. Конев В.В., Пергаменщиков С.М. Последовательное оценивание параметров процессов с непрерывным временем. -В кн.: Математическая статистика и её приложения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1981, вып.7, с. 93-101.

93. Конев В.В., Пергаменщиков С.М. О последовательном методе оценивания параметров случайных процессов. - В кн.: УШ Всесоюз. конференция по теории кодирования и передачи информации. Тезисы докладов. ч.IУ, Москва-Куйбышев, 1981, с. 68-72.

94. Конев В.В., Пергаменщиков С.М. Об асимптотической нормальности последовательной оценки параметров авторегрессии . - В кн.: Математическая статистика и её приложения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 117-129.

95. Конев В.В., Хазен Э.М. Построение байесовских оценок параметров линейных марковских процессов. - Автоматика и телемеханика, 1970, № 10, с. 35-46.

96. Конев В.В., Хазен Э.М. Построение байесовских оценок параметров линейных марковских процессов при наблюдении части компонент. - Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1971, № 6, с. 197-205.

97. Коняев К.В. Спектральный анализ случайных океанологических

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

полей.-Л.: Гидрометеоиздат, 1981, - 207 с.

98. Крамер Г. Математические методы статистики. - М.: Наука, 1975, - 648 с.

99. Кулинич Г.Л. Об оценке параметра сноса стохастического диффузионного уравнения. - Теория вероят. и её применен., 1975, т. 20, вып.2, с. 393-397.

100. Кутоянц Ю.А. Оценивание параметров случайных процессов. Ереван: Изд-во АН Армянской ССР, 1980. - 252 с.

101. Левин Б.Р. Теория случайных процессов и её применение в радиотехнике.-Изд. 2-е, доп. и переработ. - М.: Сов. радио, 1960. - 663 с.

102. Левит Б.Я., Хасьминский Р.З. Последовательное оценивание параметра цепи Маркова. - Теория вероят. и её применен., 1973, т.18, вып.3, с. 571-582.

103. Леман Э. Проверка статистических гипотез. - М.: Наука, 1979, - 408 с.

104. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений.-М.: Физматгиз, 1958. - 335 с.

105. Линник Ю.В. Избранные труды. Математическая статистика. - Л.: Наука, 1982, - 284 с.

106. Линник Ю.В. О некоторых общих вопросах теории последовательного оценивания. - Теория вероят. и её применен., 1972, т.17, № 3, с. 596-597.

107. Линник Ю.В., Романовский И.В. К теории последовательного оценивания. - ДАН , 1970, т.194, № 2, с. 270-272.

108. Линьков Ю.Н. Оценки нелинейных параметров в сносе диффузионного процесса. - В кн.: Теория случайных процессов. Киев: Наукова думка, 1978, вып.6, с. 68-78.

109. Линьков Ю.Н. Об оценках параметров процессов диффузионного типа. - В кн.: Теория случайных процессов. Киев: Наукова думка, 1981, вып.9, с. 71-78.

110. Липейка А. Классификация авторегрессионных последовательностей со скачкообразно меняющимися параметрами. - В кн.: Статистические проблемы управления, Вильнюс; Ин-т математики и кибернетики, 1978, № 30, с. 9-28.

111. Липейка А. Определение моментов изменения свойств авторегрессионной последовательности. - В кн.: Статистические проблемы управления, Вильнюс; Ин-т математики и кибернетики, 1977, № 24, с. 27-71.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

112. Липейка А. Определение моментов изменения свойств авторегрессионных последовательностей с неизвестными параметрами. -В кн.: Статистические проблемы управления, Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики, 1982, вып.54, с. 9-28.
113. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам диффузионного типа, относительно винеровской, - Изв. АН СССР, сер. матем.,1972, т.36, № 4, с. 847-889.
114. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. - М.: Наука, 1974. - 696 с.
115. Лоэв М. Теория вероятностей.-М.: Изд. иностр. лит., 1962. - 719 с.
116. Лумельский В.Я. Один алгоритм обнаружения момента времени изменения свойств случайного процесса. - Автоматика и телемеханика, 1972, № 10, с. 67-73.
117. Лумельский Я.П. Несмещенные оценки для планов типа последовательного анализа. - Уч. зап./Перм. ун-т , 1966, № 131, с. 140-150.
118. Лумельский Я.П. Статистические оценки результатов контроля качества. - М.: Изд-во стандартов, 1972, - 200 с.
119. Медведев Г.А. Адаптивное оценивание по реализациям случайных процессов и полей. - Автоматика и телемеханика, 1978, № 10, с. 87-94.
120. Медведев Г.А., Тарасенко В.П. Вероятностные методы исследования экстремальных систем.-М.: Наука, 1967. - 456 с.
121. Мелешко В.И. Применение рекуррентных оптимальных оценок с псевдообращением в задачах идентификации. - Автоматика и телемеханика, 1978, № 9, с. 79-89.
122. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание.-М.: Наука, 1972. - 304 с.
123. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей.-М.: Мир, 1969, - 309 с.
124. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. - 336 с.
125. Немировский А.С. Оптимизация рекуррентных алгоритмов оценки параметров линейных объектов. - Автоматика и телемеханика, 1981, № 6, с. 90-99.
126. Никифоров И.В. Модификация и исследование процедуры кумулятивных сумм. - Автоматика и телемеханика, 1980, № 9,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

с. 61-71.

127. Никифоров И.В. Применение последовательного анализа к процессам авторегрессии. - Автоматика и телемеханика, 1975, № 8, с. 174-177.

128. Новиков А.А. Последовательное оценивание параметров диффузионных процессов. - Теория вероят. и её примен., 1971, т.16, вып.2, с. 394-396.

129. Новиков А.А. Последовательное оценивание п раметров процессов диффузионного типа. - Матем. заметки, 1972, т.12, № 5, с. 627-638.

130. Новиков А.А. О времени выхода сумм ограниченных случайных величин из криволинейной полосы. - Теория вероят. и её примен., 1981, т.26, № 2, с. 287-300.

131. Параев Ю.И. Введение в стохастическую динамику процессов управления и фильтрации. -М.: Сов.радио, 1976. - 184 с.

132. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Ульянов С.В., Хазен Э.М. Информационно-семантические проблемы в процессах управления и организации.-М.: Наука, 1977, - 451 с.

133. Писаренко В.Ф. Об оценках параметров гауссовского стационарного процесса со спектральной плотностью $|P(i\lambda)|^{-2}$. - В кн.: Лит. мат. сб., 1963, т.2, № 2, с. 159-167.

134. Писаренко В.Ф. О вычислении отношения правдоподобия для гауссовских процессов с рациональным спектром. - Теория вероятн. и её примен., 1965, т.10, вып.2, с. 323-328.

135. Позняк А.С. О скорости сходимости стохастической аппроксимации при идентификации параметров динамических объектов. - Автоматика и телемеханика, 1979, № 8, с. 186-190.

136. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Оптимальные методы оценивания коэффициентов авторегрессии при неполной информации. - Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1983, № 1, с. 118-126.

137. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. -М.: Наука, 1973, - 494 с.

138. Пугачев В.С. Рекуррентное оценивание переменных и параметров в стохастических системах, описываемых разностными уравнениями. -ДАН , 1978, т.241, № 5, с. 39-42.

139. Пугачев В.С. Рекуррентное оценивание переменных и параметров в стохастических системах, описываемых уравнениями авторегрессии. - ДАН , 1978, т.241, № 6, с. 21-24.

140. Пугачев В.С. Оценивание переменных и параметров в дискрет-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ных нелинейных системах. -Автоматика и телемеханика, 1979, № 4, с. 39-50.

141. Пугачев В.С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления.-Изд. 3-е, испр. - М.: Физматгиз, 1962. - 883 с.

142. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика.-М.: Наука, 1979. - 496с.

143. Пугачев В.С., Казаков И.Е., Евланов Л.Г. Основы статистической теории автоматических систем. - М.: Машиностроение, 1974. - 400 с.

144. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения.- М.: Наука, 1968, - 547 с.

145. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы.-М.: Физматгиз, 1963, - 284 с.

146. Розанов Ю.А. Марковские случайные поля. - М.: Наука, 1981. - 256 с.

147. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.Н. Чувствительность систем управления.-М.: Наука, 1981. - 464 с.

148. Сенкус А. Об оценке момента изменения параметров авторегрессионной последовательности. - В кн.: Статистические проблемы управления, Вильнюс; Ин-т математики и кибернетики, 1973, вып.7, с. 54-64.

149. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. - М.: Сов. радио, 1978. - 320 с.

150. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы.-М.: Изд-во МГУ, 1966. - 313 с.

151. Стратонович Р.Л. Об оптимальном обнаружении разладки производственного процесса. - Вестник/Московский ун-т , Серия I, Математика, механика, 1962, вып.2, с.63-71.

152. Тарасенко Ф.П. Непараметрическая статистика.-Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1976. - 294 с.

153. Тараскин А.Ф. Об асимптотической нормальности векторных стохастических интегралов и оценках параметров переноса многомерного диффузионного процесса. - Теория вероят. и матем. статистика, 1970, вып.2, с. 205-220.

154. Телькснис Л.А. О применении оптимального байесова алгоритма обучения при определении момента изменения свойств случайных сигналов. - Автоматика и телемеханика, 1969, № 6, с. 52-58.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

155. Тельксис Л.А. Определение наиболее вероятных изменений свойств многомерных динамических систем с неизвестными параметрами. - В кн.: Статистические проблемы управления, Вильнюс; Ин-т математики и кибернетики, 1977, № 24, с. 9-26.

156. Темпельман А.А. Сходимость и состоятельность регрессивных оценок: Автореф.дис.... д-ра физ.-мат. наук. - Вильнюс, 1975. - 26 с.

157. Тихов М.С. Об оптимальных планах последовательного оценивания при неквадратичных потерях. -Теория вероят. и её применен., 1978, т.18, вып.1, с. 137-143.

158. Тихов М.С. О задаче оптимального обнаружения изменений вероятностных характеристик. - В кн.: Статистические методы, Пермь; Изд-во Перм. ун-та, 1980, с. 189-204.

159. Товстуха Т.И. Исследование дискретных квазиоптимальных алгоритмов идентификации. - Автоматика и телемеханика, 1974, № 4, с. 71-80.

160. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. - М.: Мир, 1964, т.1, - 498 с.

161. Фомин В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.; Наука, 1984. - 285 с.

162. Фомин В.Н. Математическая теория обучения опознающих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. - 236 с.

163. Фомин В.Н., Фрадков С.А., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. - 481 с.

164. Хазен Э.М. Байесовские оценки в задачах фильтрации сигналов. - Радиотехника и электроника, 1968, № 5, с. 842-850.

165. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления.-М.: Советское радио, 1969, - 256 с.

166. Хазен Э.М. О стохастических дифференциальных уравнениях для апостериорного распределения вероятностей в задачах адаптивной фильтрации и обнаружения сигналов. - Автоматика и телемеханика, 1971, № 11, с. 86-93.

167. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.-М.: Наука, 1969, - 367 с.

168. Холево А.С. О последовательных оценках параметров. - Теория вероят. и её применен., 1967, т.12, вып.1, с. 172-179.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

169. Холево А.С. Об оценках коэффициентов регрессии. - Теория вероят. и её применен., 1969, т.14, № 1, с. 78-101.
170. Холево А.С. Об асимптотической нормальности оценок коэффициентов регрессии. - Теория вероят. и её применен., 1971, т.16, № 4, с. 724-728.
171. Холево А.С. Оценки параметров сноса диффузионного процесса методом стохастической аппроксимации. - В кн.: Труды ВЦ АН СССР. Исследования по теории самонастраивающихся систем. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1967, с. 179-200.
172. Хэннан Э. Многомерные временные ряды.-М.: Мир, 1974, -576 с.
173. Цыпкин Я.З. Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах. - Автоматика и телемеханика, 1966, № 1, с. 23-61.
174. Цыпкин Я.З. Синтез оптимальной настраиваемой модели в задачах идентификации. - Автоматика и телемеханика, 1981, № 12, с. 62-77.
175. Цыпкин Я.З. Оптимальные алгоритмы оценивания параметров в задачах идентификации (обзор). - Автоматика и телемеханика, 1982, № 12, с. 9-23.
176. Ченцов Н.Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. - М.: Наука, 1972, - 520 с.
177. Чернецкий В.И. Анализ точности нелинейных систем управления. М.: Машиностроение, 1968. - 247 с.
178. Шалыт А.И. Некоторые результаты о последовательном оценивании параметра сдвига. - ДАН , 1969, т. 189, № 1, с. 57-58.
179. Шалыт А.И. Об оптимальном последовательном оценивании параметров сдвига в классе инвариантных процедур. - ДАН , 1970, т. 193, № 4, с. 767-769.
180. Шалтяните В. Вычисление момента изменения авторегрессионной последовательности, измеряемой с помехами. - В кн.: Статистические проблемы управления, Вильнюс; Ин-т математики и кибернетики, 1978, вып. 31, с. 31-42.
181. Ширяев А.Н. Задача скорейшего обнаруживая нарушения стационарного режима. - ДАН , 1961, т. 138, № 5, с. 1039-1042.
182. Ширяев А.Н. Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения. - Теория вероят. и её применен., 1963, т. 8, вып.1, с. 26-51.
183. Ширяев А.Н. К обнаружению разладок производственного процес-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

са. I. Теория вероят. и её прим., 1963, т.8, в.3, с.264-281.
184. Ширяев А.Н. К обнаружению разладок производственного процесса I. - Теория вероят. и её прим., 1963, т.8, в.4, с. 431-443.
185. Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ. - М.: Наука, 1976, - 272 с.
186. Ширяев А.Н. Вероятность. - М.: Наука, 1980, - 576 с.
187. Ширяев А.Н. К теории решающих функций и управлению процессом наблюдений по неполным данным. - Trans. III Prague Confer. Inform. Theory, Stat. Decis. Funct. Random Proc., Prague, 1964, p.657-681.
188. Шпилевский Э.К. Опознавание динамических систем в обстановке помех. - Автоматика и телемеханика, 1974, № 12, с. 60-70.
189. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. - М.: Мир, 1975. - 683 с.
190. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. - М.: Наука, 1976. - 416 с.
191. Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления . - М.: Наука, 1981. - 464 с.
192. Юсупов Р.М. Элементы теории идентификации технических объектов. - М.О., 1975. - 202 с.
193. Яглом А.М. Введение в теорию стационарных функций. - Успехи матем.наук, 1952, т.7, вып. 5 (51), с. 3-168.

194. Akaike H. Power spectrum estimation through autoregressive model fitting. - Ann. Inst. Statist. Math., 1969, v. 21, N 3, p. 407-419.
195. Anscombe F.I. Large sample theory of sequential estimation. - Biometrika, 1949, v. 36, N 3/4, p. 455-458.
196. Anscombe F.I. Sequential estimation. - J. Roy. Stat. Soc. Ser. B, 1953, v. 15, N 1, p. 1-29.
197. Anscombe F.I. Large sample theory of sequential estimation. - Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, v. 48; N 4, p. 600-607.
198. Bhattacharya P.K., Mallik A. Asymptotic normality of the stopping times of some sequential procedures. - Ann. Statist., 1973, v. 1, N 6, p. 1203-1211.
199. Bagshaw M., Johnson R.A. Sequential procedures for detecting parameter changes in a time-series model. - J. Amer. Stat. Ass., 1977, v. 72, p. 593-597.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

200. Bagshaw M., Johnson R.A. The effect of serial correlation on the performance of CUSUM test. II. - Technometrics, 1975, v. 17, N 1, p. 73-80.
201. Bickel P.I., Yahav I.A. Asymptotically optimal Bayes and minimax procedures in sequential estimation. - Ann. Math. Statist., 1968, v. 39, N 2, p. 442-456.
202. Birnbaum A. Sequential tests and estimates for comparing Poisson populations. - Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, N 4, p. 645.
203. Birnbaum A., Healy W.C. Estimates with prescribed variance based on two-stage sampling. - Ann. Math. statist., 1960, v. 31, N 3, p. 662-676.
204. Blum I.R., Rosenblatt I. On multistage estimation. - Ann. Math. Statist., 1963, v. 34, N 4, p. 1452-1458.
205. Blyth C.R. On minimax statistical decision procedures and their admissibility. - Ann. Math. Statist., 1951, v. 22, p. 22-42.
206. Dajanic M.Z., Sage A.P. Nonlinear sequential algorithms for estimation under uncertainty. - Inform. Sci., 1970, v. 2, N 4, p. 379-393.
207. Dashevsky M.L. A Semiinvariant method of closing the equations for moments in statistical analysis of nonlinear systems. - Problems of Control and Information Theory, 1975, v. 4, p. 317-326.
208. Dashevsky M.L. Algorithmization of the semiinvariant method of studying nonlinear dynamic systems. - Problems of Control and Information Theory, 1978, v. 7, N 5, p. 305-316.
209. Denham W.F., Pines S. Sequential estimation when measurement function nonlinearity is comparable to measurement error. - A.I.A.A.J., 1966, v. 4, N 6, p. 1.
210. Dmitriev Y.G., Tarasenko F.P. On the use of a priori information in estimated linear functionals of distribution. - Problems of Control and Information Theory, 1978, v. 7 (6), p. 459-469.
211. Dowdee I.W., Soong T.R. On random least-square analysis - J. Math. Anal. and Appl., 1974, v. 46, N 2.
212. Doob I.L. The elementary Gaussian processes. - Ann. Math. Statistics, 1944, v. 15, N 3, p. 229-283.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

213. Dvoretzky A., Kiefer I., Wolforvitz I. Sequential decision problems for processes with continuous time parameter. Problems of estimation. - Ann. Math. Statist., 1953, v. 24, N 3, p. 403-415.
214. Farrell R.H. Sequentially determined bounded length confidence intervals. Doct. diss. Univ. Illinois, 1959, 75 p. - - Diss. Abstr., 1960, v. 20, N 8, p. 3318.
215. Farrel R.H. Bounded length confidence intervals for the zero of a regression functions. - Ann. Math. Statistics, 1962, v. 33, N 1, p. 237-247.
216. Fleming W.H. Optimal continuous parameter stochastic control. - SIAM Rev., 1969, v. 11, N 4, p. 470-509.
217. Florentin I.I. Optimal control of continuous time, Markov, stochastic systems. - J. of Electronics and Control, v.10, p. 473-481.
218. Gersch W. Estimation of the autoregressive parameters of a mixed autoregressive moving-average time-series. - IEEE Trans. Automat. Control., 1970, v. 15, N 5, p. 583-588.
219. Ghyrye S.G. A method of estimating the parameters of an autoregressive time-series. - Biometrica, 1950, v. 37, N 1/2, p. 173-178.
220. Gilliland D.C. Sequential compound estimation. - Ann. Math. Statist., 1968, v. 39, N 6, p. 1890-1904.
221. Gleser L.I. On the asymptotic theory of fixed-size sequential confidence bounds for linear regression parameters. - - Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, N 2, p. 463-467.
222. Gobb G.W. The problem of the Nile: Conditional solution to the change point problem. - Biometrika, 1978, v. 57, p. 243-251.
223. Gorman, Zaborsky. Stochastic optimal control of continuous time systems with unknown gain. - In: 19th Automat. Control Conf., Ann. Arbor. Mich., 1968. Preprints techn. papers; New York, 1968, p. 54-63.
224. Govindarajuleu Z. Fixed-width confidence intervals for P (x < y). - Reliab. and Biomet. Statist. Anal. Life length. Philadelphia, Pa, 1974, p. 747-757.
Graupe D. On convergence of least-squares identifiers of autoregressive models having stable and unstable roots. - - IEEE Trans. Automat. Control, 1980, v. AC-25, p.999-1002.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

225. Groot M.H. de. Unbiased sequential estimation for binomial populations. - Ann. Math. Statist., 1959, v. 30, N 1, p. 80-101.
226. Hannan E.I. Recursive estimation based on ARMA models. - - The Annals of Statistics, 1980, v. 8, N 4, p. 762-777.
227. Hannon E.I., Kanter M. Autoregressive processes with finite variance. - J. Appl. Probab., 1977, v. 14, N 2.
228. Hinkley D.V. Inference about the change-point in a sequence of random variables. - Biometrika, 1970, v. 57, p. 1-17.
229. Hinkley D.V. Inference about the change-point from cumulative sum tests. - Biometrika, 1971, v. 58, p. 509-523.
230. Holevo A.S. On the general problem of mean estimation. - - J. Multivariate analysis, 1973, v. 3.
231. Hurwitoz L. Least square bias in time series, in T.Koopmans (ed.) Statistical Inference in Dynamic Economic Models. - J. Wiley, New York, 1950, p. 365-383.
232. Hutchinson C.E., Monopoli R.V. An extension of a sequential least squares estimation technique. - IEEE Trans. Automat. Control., 1966, v. 11, N 3, p. 621.
233. Jennrich R.I. Asymptotic properties of non-linear squares estimators. - Ann. Math. Statist., 1969, vol. 40, N 2.
234. Johnson N.L. Sequentially determined confidence intervals. - Biometrica, 1957, v. 44, N 1/2; p. 279-281.
235. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory. - Trans. ASME, Ser. D, 1961, v. 83, N 1.
236. Kander Z., Zacks S. Test procedures for possible changes in parameters of statistical distributions occuring at unknown time points. - Ann. Math. Stat., 1966, p. 1196-1210.
237. Kendall M.G. The estimation of parameters in linear autoregressive time-series. - Econometrica, 1949, v. 17 (suppl.), p. 44-57.
238. Khan R.A. Maximum likelihood estimation in sequential experiments. - Sankhya. Ser. A, 1969, v. 31, N 1, p. 49-56.
239. Khan R.A. Sequential estimation of the mean vector of multivariate normal distribution. - Sankhya. Ser. A, 1968, v. 30, N 3, p. 331-334.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

240. Khazen E.M. Risk increase informational estimates under observed data reduction in sequential analysis. - Problems of control and Information Theory, 1974, v. 3, N 1, p. 35-45.
241. Kiefer I. Sequential minimax estimation for the rectangular distribution with unknown range. - Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, N 4, p. 586-593.
242. Knight W. A method of sequential estimation applicable to the hypergeometric, binomial, poisson and exponential distributions. - Ann. Math. Statist., 196., v. 36, N 5, p. 1494-1503.
243. Leimbacher W.R. On some classes of sequential procedures for obtaining confidence intervals of given length. - - Publ. Statist. Univ. Calif., 1953, v. 2, N 1, p. 1-21.
244. Ljung L. Analysis of recursive stochastic algorithms. - - IEEE Trans. Automat. Control, 1977, v. AC-22, N 4, p. 551-575.
245. Maarek G., Segond A. L'estimation séquentielle dans les modèles linéaires. - Rev. statist. appl., 1969, v. 17, N 2, p. 21-45.
246. McGilchrist G.A., Woodyer K.D. Note on a distribution-free CUSUM technique. - Technometrics, 1975, v. 17, N 3, p. 321-326.
247. Mexia I.T. Studies on the extreme double exponential distribution. Sequential estimation and testing for the location parameter of Gumbel distribution. - Rev. Fac. ci. Univ., Liboa. Ser. A, 1967-1968, v. 12, N 1, p. 5-14.
248. Musiela M. Sequential Estimation of Parameters of a Stochastic Differential Equation. - Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statistics, 1977, v. 8, N 4, p. 483-498.
249. Newbold P.M., Ho Yu-Chi. Detection of changes in the characteristics of a Gauss-Markow process. - IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 1968, v. AES-4, N 5, p. 707-718.
250. Nàdaz A.An extension of a theorem of Chow and Robbins on sequential confidence intervals for the mean. - Ann. Math., Statist., 1969, v. 40, N 2, p. 667-671.
251. Oroutt G., Winokur H. First order autoregression: Inference estimation and prediction. - Econometrica,1969, v.37, p. 1-14.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

252. Paulson E. Sequential estimation and closed sequential decision procedures. - Ann. Math. Statist., 1964, v. 35, N 3, p. 1048-1058.
253. Paulson E. Sequential interval estimation for the means of normal populations. - Ann. Math. Statist., 1969, v. 40, N 2, p. 509-516.
254. Petersen D.P. Recursion formulas for sequential estimation.- - IEEE Trans. Inform. Theory, 1965, v. 11, N 4, p. 589-590
255. Pfeiffer C. On the sequential estimation technique. - IEEE Trans. Automat. Control, 1966, v. 11, N 1, p. 132-133.
256. Poznyak A.S. Estimating the parameters of autoregression processes by the method of least squares. - Int. J. Systems Sci., 1980, v. 11, N 5, p. 577-588.
257. Ray W.D. Sequential confidence intervals for the mean of a normal population with unknown variance. - J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 1957, v. 19, N 1, p. 133-143.
258. Robbins H. Sequential estimation of the mean of a normal population. - In: Probability and Statistics. Stockholm - - New-York, 1959, p. 235-245.
259. Rosenblatt J.I. Sufficient conditions for fixed length confidence intervals in two-stages. - Notices Amer. Math. Soc., 1962, v. 9, N 4, p. 296.
260. Sackrowitz H. Estimation for monotore parameter sequences: the discrete case. - Ann. Math. Statist., 1970, v. 41, N 2, p. 609-620.
261. Sargan J.D. Three-stage least squares and full maximum likelihood estimates. - Econometrica, 1964, v. 32, N 1/2, p. 77-81.
262. Savage L.J. A uniquences theorem for unbiased sequential binomial estimation. - Ann. Math. Statist., 1947, v. 18, N 2, p. 295-297.
263. Schwartz L. Linear sequential estimation with unestimated parameters. - Inform. Sci., 1969, v. 1, N 4, p. 323-334.
264. Schwartz L. Sequential estimation with unestimated parameters - the forced case. - Inform. Sci., 1970, bv. 2, N 1, p. 77-81.
265. Sen A., Srivastava M.D. Some one-sided tests for change in level. - Technometrics, 1975, v. 17, p. 61-64.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

266. Smith A.F.M. Change-point problems: approaches and appi-- cations. - Trab. estadist. y invest., oper., 1980, 31, num extra, 83-98.
267. Solomon D.L. A note on sequential estimation. - J. Roy Statist. Soc. Ser. B, 1969, v. 31, N 3, p. 510-513.
268. Starr N. On the asymptotic efficiency of a sequential procedure for estimating the mean. - Ann. Math. Statis., 1966, v. 37, N 5, p. 1173-1185.
269. Starr N. The performance of a sequential procedure for the fixed-width interval estimation of the mean. - Ann. Math. Statist., 1966, v. 37, N 1, p. 36-50.
270. Starr N., Woodrofe M.B. Remarks on sequential point estimation. - Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1969, v. 63, N 2, p. 285-288.
271. Stein C., Wald A. Sequential confidence intervals for thne mean of a normal distribution with known variance. - Ann. Math. Statist., 1947, v. 18, p. 427-433.
272. Walfovitz J. The efficiency of sequential estimates aid Wald's equation fox sequential processes. - Ann. Math Statist., 1947, v. 18, N 2.
273. Wasan M.T. Sequential optimum procedures for unbiased estimation of a binomial parameters. - Technometrics, 1964, v. 6, p. 259-272.
274. Malinvaud E. The consistency of nonlinear regressions. -- - Ann. Math. Statist., 1970, vol. 41, N 3.
275. Lai T.L., Siegmund D. Fixed accuracy estimation of an autoregressive parameter. - The Annals of Statistics, 1983, vol. 11, N 2, p. 478-485.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Виктор Васильевич Конев

Последовательные оценки параметров стохастических динамических систем.

ИБ 1307

Редактор Е.В.Лукина

Подписано в печать 30.01.1985 КЗ 06027

Формат 60 x 84 1/16. Бумага типографская № 3.

Печать офсетная. Печ.л. 16,0. Усл.печ.л.14,88. Уч.-изд.л.11,4.

Тираж 500 экз. Заказ 214 Цена 1р70к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4.

Ротапринт ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Томский государственный университет
Научная библиотека 00232371

1 р. 70 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТОМСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА