

ISSN0234—7342

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

ТОМСКИЙ ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

Выпуск 7



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1988

Абелевы группы и модули: Сборник статей/Под ред. Л. А. Скор-
ова Томск: Изд-во Том ун-та, 1988.— 164 с.— 1 р. 40 к. 500 экз.
1702020000.

Публикуются работы, относящиеся к актуальным проблемам теории абелевых групп и модулей. Представлены такие направления, как абелевы группы без кручения и их кольца эндоморфизмов (группы автоморфизмов), чистая теория колец и модулей.

Для научных работников, аспирантов, студентов, интересующихся проблемами современной алгебры.

Редакционная коллегия: Л. А. Скорняков (ответственный редактор), А. П. Мишина, А. В. Михалев, Ю. М. Рябухин, И. Х. Беккер (зам. ответственного редактора), С. Ф. Кожухов, П. А. Крылов

Рецензент — С. К. Росошек

А $\frac{1702020000}{177(012)-88}$ 54—87

КОГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ АБЕЛЕВЫХ FN -ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

И. Х. Беккер, В. А. Никифоров

Данная работа является продолжением [1]. Здесь, в § 1, получены полные ответы на вопросы: когда первые группы когомологий $H^1(\Phi, G)$ равны нулю, где Φ — конечная группа автоморфизмов; $\Phi \leq \text{Aut } G$; G — не 2-делимая абелева FN -группа без кручения (т. е. G — группа без ненулевых нильпотентных эндоморфизмов) или Φ — периодическая группа автоморфизмов без бесконечных 2-групп, а G — не 2-делимая FN -группа без кручения, обладающая квазиразложением с сильно неразложимыми и сервантными квазислагаемыми? (Теоремы 1.4, 1.6 и их следствия).

Вычисление групп $H^1(\Phi, G)$ над группами G из указанных выше классов групп в случае периодических Φ с бесконечными 2-группами сводится к случаю бесконечной 2-группы Φ' , изоморфной $Z(2^\infty)$, или бесконечной обобщенной группе кватернионов Q_{2^∞} . Поэтому в § 2 рассматриваются абелевы группы G без кручения с группами $\Phi' \leq \text{Aut } G$, изоморфными $Z(2^\infty)$ или Q_{2^∞} . Показано, что существуют такие не 2-делимые абелевы группы G без кручения, для которых $H^1(\Phi', G) = 0$ (предложение 2.1). Есть также группы G , для которых $H^1(\Phi', G) \neq 0$ (предложение 2.2). В классе абелевых FN -групп без кручения есть также не 2-делимые группы G , с $H^1(\Phi', G) = 0$ (теорема 2.3) и группы G' , для которых $H^1(\Phi', G') \neq 0$ (теорема 2.4). Теоремы из § 1 доказаны первым автором, а из § 2 — вторым.

В [1] рассмотрены свойства абелевых FN -групп без кручения, принадлежащих достаточно широким классам групп. А именно классу абелевых FN -групп G с периодическими группами автоморфизмов $\Phi \neq \langle -\varepsilon \rangle$, $\Phi \leq \text{Aut } G$ (ε — тождественный автоморфизм группы G); классу абелевых FN -групп, обладающих квазиразложениями вида $G \cong G_\alpha(**)$,
 $\varepsilon \in I$

где каждая G_α сильно неразложима и сервантна в G (I — произвольное множество индексов). Обозначим соответственно эти классы FN -групп через F_1 и F_2 . Заметим, что класс F_2 содержит все квазиразложимые FN -группы без кручения конечного ранга (в частности, все группы G без кручения конечного ранга с периодическими группами $\text{Aut } G$), все FN -группы без кручения из класса m , выделенного в [2], все прямые суммы групп G без кручения с конечными $\text{Aut } G$, принадлежащих жестким системам групп [3, с. 148], и другие группы.

Пользуемся далее стандартными обозначениями и терминологией из [3]. Напомним некоторые из них: $E(G)$ — кольцо эндоморфизмов абелевой группы G ; $Z(n)$ — циклическая группа порядка n ; $Z(2^\infty)$ — квазициклическая группа; DC_{12} — дициклическая группа порядка 12; BT_{24} — бинарная группа тетраэдра порядка 24; Q_{2^n} — группа кватернионов при $n \geq 3$; обобщенная группа кватернионов при $n > 3$; Q_{2^∞} — бесконечная обобщенная группа кватернионов; $Z^1(\Phi, G)$, $B^1(\Phi, G)$ — соответственно группа всех скрещенных гомоморфизмов, группа всех главных скрещенных гомоморфизмов группы Φ в группу G ; $H^1(\Phi, G) = Z(\Phi, G) \cup B^1(\Phi, G)$. Пусть $\varphi \in \Phi \leq \text{Aut } G$, A — φ -допустимая (Φ -допустимая) подгруппа группы G . Тогда $\varphi_A = \varphi|_A$ — ограничение φ на A ($\Phi_A = \{\varphi|_A \mid \varphi \in \Phi\}$). Под словом «группа» далее понимаем всякий раз «абелеву группу», кроме ее групп автоморфизмов.

Для доказательства теорем § 1 потребуются свойства групп (FN -групп) без кручения, установленные в [1, 2]. Приведем некоторые из них. Группу G назовем Φ -регулярно полной, если всякий нетождественный автоморфизм из Φ является регулярным. $\text{Aut } G$ -регулярно полную группу G назовем регулярно полной [4].

Лемма 1 [1, лемма 2.1, следствие 2.2]. Пусть G — не Φ -регулярно полная FN -группа без кручения и $\langle \varepsilon \rangle \neq \Phi$ — группа конечная. Тогда Φ индуцирует некоторое квазиразложение группы G :

$$G \approx \sum_{i=1}^s G_i \quad (*)$$

(соответственно включение $mG \subseteq \sum_{i=1}^s G_i$, $m \in N$), где каждое квазислагаемое G_i сервантно и вполне характеристично в G . При этом всякая G_i является Φ_i -регулярно полной группой, $\Phi_i = \Phi|_{G_i}$.

Предложение 1.3. Если G — не 2-делимая абелева группа без кручения, $\Phi_n \leq \text{Aut } G$ ($n \geq 3$) и $-\varepsilon$ единственный ее автоморфизм порядка 2, то $H^1(\Phi, G) \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим элементы $\omega_n, \omega_{n-1}, (\varepsilon + \varphi)\omega_{n-2}$ при $n \geq 4$ и ω_3, ω_2 при $n = 3$ в кольце $E(G)$. По лемме 1.2 $(\varepsilon + \varphi)\omega_{n-2}$ при $n \geq 4$ и ω_2 при $n = 3$ не делятся на 2 в $E(G)$. Следовательно, при $n > 4$ возможны такие три случая:

1) ω_n не делится на 2 в $E(G)$; 2) ω_n делится на 2, а ω_{n-1} не делится на 2 в $E(G)$; 3) ω_n и ω_{n-1} делятся на 2 в $E(G)$.

Очевидно, что случай, когда ω_n не делится на 2, а ω_{n-1} делится на 2 в кольце $E(G)$, невозможен, так как $\omega_n = (\varepsilon + \varphi)\omega_{n-1}$.

Положим $f_1(-\varepsilon) = \omega_n g$ в случае 1), $f_2(-\varepsilon) = \omega_{n-1} g$ — в случае 2) и $f_3(-\varepsilon) = (\varepsilon + \varphi)\omega_{n-2} g$ — в случае 3), где g — ненулевой элемент группы G .

Убедимся, что каждое $f_i (i = \overline{1, 3})$ задает скрещенный гомоморфизм группы Φ_n в группу G . Для этого достаточно показать, согласно лемме 1.1, разрешимость уравнений $2x = (\varepsilon - \varphi)f_i(-\varepsilon)$, (3) $2y = (\varepsilon - \psi)f_i(-\varepsilon)$ (4) в группе G .

Случай 1. Имеем $2x = (\varepsilon - \varphi)f_1(-\varepsilon) = (\varepsilon - \varphi)\omega_n g$. Но $(\varepsilon - \varphi)\omega_n = 2(\varepsilon + \psi)$. Следовательно, $x_0 = (\varepsilon + \psi)g$ — решение уравнения (3). Далее эндоморфизм $(\varepsilon - \psi)\omega_n = (\varepsilon + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^{2^{n-2}-1})(\varepsilon + \psi) + (-\varepsilon + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^{2^{n-2}-1})(\psi - \varepsilon) = 2(\varepsilon + \varphi\psi + \varphi^2\psi + \dots + \varphi^{2^{n-2}-1}\psi)$. Поэтому в группе G разрешимо также уравнение вида (4). Следовательно, отображение $f_1: \Phi_1 \rightarrow G$ вида $f_1(-\varepsilon) = \omega_n g$, $f_1\varphi = (\varepsilon + \psi)g$, $f_1\psi = (\varepsilon + \varphi\psi + \varphi^2\psi + \dots + \varphi^{2^{n-2}-1}\psi)g$ есть скрещенный гомоморфизм.

Случай 2. Правую часть уравнения (3) можно представить в виде $(\varepsilon - \varphi)f_2(-\varepsilon) = (\varepsilon - \varphi)\omega_{n-1} g = (\varepsilon + \varphi)\omega_{n-1} g - 2\varphi\omega_{n-1} g = \omega_n g - 2\varphi\omega_{n-1} g = 2(\tau_n - \varphi\omega_{n-1})g$, где $2\tau_n = \omega_n$. Преобразуя правую часть уравнения (4), получаем $(\varepsilon - \psi)f_2(-\varepsilon) = (\varepsilon - \psi)(\varepsilon + \varphi^2 + \varphi^4 + \dots + \varphi^{2^{n-2}-2})(\varepsilon + \psi)g = (\varepsilon + \varphi^2 + \varphi^4 + \dots + \varphi^{2^{n-2}-2})(\varepsilon + \psi)g + (-\varepsilon + \varphi^2 + \varphi^4 + \dots + \varphi^{2^{n-2}-2})(\psi - \varepsilon)g = 2(\varepsilon + \varphi^2\psi + \varphi^4\psi + \dots + \varphi^{2^{n-2}-2}\psi)g$. Следовательно, отображение $f_2: \Phi \rightarrow G$, задаваемое по правилу $f_2(-\varepsilon) = \omega_{n-1} g$, $f_2\varphi = (\tau_n - \varphi\omega_{n-1})g$, $f_2\psi = (\varepsilon + \varphi^2\psi + \varphi^4\psi + \dots + \varphi^{2^{n-2}-2}\psi)g$, есть скрещенный гомоморфизм.

Случай 3. В этом случае правую часть уравнения (3) можно записать так: $(\varepsilon - \varphi)f_3(-\varepsilon) = (\varepsilon - \varphi^2)\omega_{n-2} g - (\varepsilon + \varphi^2)\omega_{n-2} g - 2\varphi^2\omega_{n-2} g = \omega_{n-1} g - 2\varphi^2\omega_{n-2} g - 2(\tau_{n-1} - \varphi^2\omega_{n-2})g$, где $2\tau_{n-1} = \omega_{n-1}$.

Доказательство. а. Пусть $n = 3$ и уравнение (1) разрешимо в $E(G)$. Тогда эндоморфизм $(\varepsilon + \varphi - 2\psi)(\varepsilon + \varphi) = 2\varepsilon$ делится на 4 в кольце $E(G)$, т.е. G — 2-делимая группа. Следовательно, уравнение (1) при $n = 3$ неразрешимо в $E(G)$.

в. Пусть $n = 4$. Допустим, что уравнение $2x - (\varepsilon + \varphi)\omega_2$ разрешимо в $E(G)$. Тогда эндоморфизм $(\varepsilon + \varphi)\omega_2\psi + \psi(\varepsilon + \varphi)\omega_2\varphi\psi$ также делится на 2 в кольце $E(G)$. Имеем $(\varepsilon + \varphi)\omega_2\psi + \psi(\varepsilon + \varphi)\omega_2\varphi\psi - \varepsilon - \varphi - \varphi^2 + \varphi^3$. Следовательно, $(-\varepsilon - \varphi + \varphi^2 + \varphi^3)(-\varepsilon + \varphi - \varphi^2)$ делится на 2 в $E(G)$. Но тогда получаем, что $(\varepsilon - \varphi^2)(\varepsilon - \varphi^2 + 2\varphi^2) = 2\varepsilon$ делится на 4 в $E(G)$ и $2G = G$. Следовательно, уравнение (2) при $n = 4$ неразрешимо в кольце $E(G)$.

с. Пусть $n = 5$ и уравнение $2x - (\varepsilon + \varphi)\omega_{n-2}$ разрешимо в кольце $E(G)$. Тогда эндоморфизм $\eta - \varphi^2(\varepsilon + \varphi)\omega_{n-2}\psi + \varphi^2\psi(\varepsilon + \varphi)\omega_{n-2}\varphi\psi$ делится на 2 в $E(G)$. Подставив в η выражение для ω_{n-2} , получаем $\eta - (\varepsilon + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^{2^{n-2}-1}) + 2(\varepsilon + \varphi^4 + \varphi^8 + \dots + \varphi^{2^{n-2}-4})\varphi^2(\varepsilon + \varphi)(\psi - \varepsilon) = 2(\varepsilon + \varphi)(\varepsilon + \varphi^2\psi)$. Следовательно, $\varepsilon + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^{2^{n-2}-1} = \prod_{k=0}^{n-3} (\varepsilon + \varphi^{2^k})$ делится на 2 в $E(G)$.

Поэтому $\left[\prod_{k=0}^{n-3} (\varepsilon + \varphi^{2^k}) \right] \left[(\varepsilon + \varphi - 2\varphi) \prod_{k=1}^{n-3} (\varepsilon + \varphi^{2^k}) \right] = 2 \prod_{k=1}^{n-3} (\varepsilon + \varphi^{2^k})$ делится на 4, а $\prod_{k=1}^{n-3} (\varepsilon + \varphi^{2^k})$ делится на 2 в кольце $E(G)$.

Рассмотрев теперь произведение $\left[\prod_{k=1}^{n-3} (\varepsilon + \varphi^{2^k}) \right] \left[(\varepsilon + \varphi^2 - 2\varphi^2) \prod_{k=2}^{n-3} (\varepsilon + \varphi^{2^k}) \right] = 2 \prod_{k=2}^{n-3} (\varepsilon + \varphi^{2^k})$, приходим к выводу, что $\prod_{k=2}^{n-3} (\varepsilon + \varphi^{2^k})$ делится на 2 в $E(G)$. Рассуждая далее аналогично, получаем, что каждый из эндоморфизмов $\prod_{k=3}^{n-3} (\varepsilon + \varphi^{2^k})$, $\prod_{k=4}^{n-3} (\varepsilon + \varphi^{2^k})$, ... делится на 2 в кольце $E(G)$. Следовательно, $(\varepsilon + \varphi^{2^{n-3}})$ также делится на 2 в $E(G)$. Но тогда $(\varepsilon + \varphi^{2^{n-3}})(\varepsilon + \varphi^{2^{n-3}} - 2\varphi^{2^{n-3}}) = 2\varepsilon$ делится на 4, что невозможно. Таким образом, доказано, что уравнение (2) при $n \geq 5$ также неразрешимо в кольце $E(G)$. Лемма доказана.

Заметим, что согласно лемме 1 у всякой сильно неразложимой FN -группы G — ε является ее единственным автоморфизмом порядка 2.

С помощью леммы 1.2 докажем теперь такое свойство не 2-делимой группы без кручения.

Предложение 1.3. Если G — не 2-делимая абелева группа без кручения, $\Phi_n \leq \text{Aut } G$ ($n \geq 3$) и $-\varepsilon$ единственный ее автоморфизм порядка 2, то $H^1(\Phi, G) \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим элементы $\omega_n, \omega_{n-1}, (\varepsilon + \varphi)\omega_{n-2}$ при $n \geq 4$ и ω_3, ω_2 при $n = 3$ в кольце $E(G)$. По лемме 1.2 $(\varepsilon + \varphi)\omega_{n-2}$ при $n \geq 4$ и ω_2 при $n = 3$ не делятся на 2 в $E(G)$. Следовательно, при $n \geq 4$ возможны такие три случая:

1) ω_n не делится на 2 в $E(G)$; 2) ω_n делится на 2, а ω_{n-1} не делится на 2 в $E(G)$; 3) ω_n и ω_{n-1} делятся на 2 в $E(G)$.

Очевидно, что случай, когда ω_n не делится на 2, а ω_{n-1} делится на 2 в кольце $E(G)$, невозможен, так как $\omega_n = (\varepsilon + \varphi)\omega_{n-1}$.

Положим $f_1(-\varepsilon) = \omega_n g$ в случае 1), $f_2(-\varepsilon) = \omega_{n-1} g$ — в случае 2) и $f_3(-\varepsilon) = (\varepsilon + \varphi)\omega_{n-2} g$ — в случае 3), где g — ненулевой элемент группы G .

Убедимся, что каждое $f_i (i = \overline{1, 3})$ задает скрещенный гомоморфизм группы Φ_n в группу G . Для этого достаточно показать, согласно лемме 1.1, разрешимость уравнений 2) $x = (\varepsilon - \varphi)f_i(-\varepsilon)$, 3) $2y = (\varepsilon - \psi)f_i(-\varepsilon)$ (4) в группе G .

Случай 1. Имеем 2) $x = (\varepsilon - \varphi)f_1(-\varepsilon) = (\varepsilon - \varphi)\omega_n g$. Но $(\varepsilon - \varphi)\omega_n = 2(\varepsilon + \psi)$. Следовательно, $x_0 = (\varepsilon + \psi)g$ — решение уравнения (3). Далее эндоморфизм $(\varepsilon - \psi)\omega_n = (\varepsilon + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^{2^{n-2}-1})(\varepsilon + \psi) + (-\varepsilon + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^{2^{n-2}-1})(\psi - \varepsilon) = 2(\varepsilon + \varphi\psi + \varphi^2\psi + \dots + \varphi^{2^{n-2}-1}\psi)$. Поэтому в группе G разрешимо также уравнение вида (4). Следовательно, отображение $f_1: \Phi_1 \rightarrow G$ вида $f_1(-\varepsilon) = \omega_n g$, $f_1\varphi = (\varepsilon + \psi)g$, $f_1\psi = (\varepsilon + \varphi\psi + \varphi^2\psi + \dots + \varphi^{2^{n-2}-1}\psi)g$ есть скрещенный гомоморфизм.

Случай 2. Правую часть уравнения (3) можно представить в виде $(\varepsilon - \varphi)f_2(-\varepsilon) = (\varepsilon - \varphi)\omega_{n-1} g = (\varepsilon + \varphi)\omega_{n-1} g - 2\varphi\omega_{n-1} g = \omega_n g - 2\varphi\omega_{n-1} g = 2(\tau_n - \varphi\omega_{n-1})g$, где $2\tau_n = \omega_n$. Преобразуя правую часть уравнения (4), получаем $(\varepsilon - \psi)f_2(-\varepsilon) = (\varepsilon - \psi)(\varepsilon + \varphi^2 + \varphi^4 + \dots + \varphi^{2^{n-2}-2})(\varepsilon + \psi)g = (\varepsilon + \varphi^2 + \varphi^4 + \dots + \varphi^{2^{n-2}-2})(\varepsilon + \psi)g + (-\varepsilon + \varphi^2 + \varphi^4 + \dots + \varphi^{2^{n-2}-2})(\psi - \varepsilon)g = 2(\varepsilon + \varphi^2\psi + \varphi^4\psi + \dots + \varphi^{2^{n-2}-2}\psi)g$. Следовательно, отображение $f_2: \Phi \rightarrow G$, задаваемое по правилу $f_2(-\varepsilon) = \omega_{n-1} g$, $f_2\varphi = (\tau_n - \varphi\omega_{n-1})g$, $f_2\psi = (\varepsilon + \varphi^2\psi + \varphi^4\psi + \dots + \varphi^{2^{n-2}-2}\psi)g$, есть скрещенный гомоморфизм.

Случай 3. В этом случае правую часть уравнения (3) можно записать так: $(\varepsilon - \varphi)f_3(-\varepsilon) = (\varepsilon - \varphi^2)\omega_{n-2} g = (\varepsilon + \varphi^2)\omega_{n-2} g - 2\varphi^2\omega_{n-2} g = \omega_{n-1} g - 2\varphi^2\omega_{n-2} g = 2(\tau_{n-1} - \varphi^2\omega_{n-2})g$, где $2\tau_{n-1} = \omega_{n-1}$.

Переходя к уравнению (4) и вычисляя его правую часть, получаем

$$(\varepsilon - \psi)f_3(-\varepsilon) = (\varepsilon - \psi)(\varepsilon + \varphi)\omega_{n-2}g - 2[\varphi^{-1}(\tau_{n-1} - \omega_{n-2}) + (\varepsilon + \varphi^{-1})(\varepsilon + \varphi^4\psi + \varphi^8\psi + \dots + \varphi^{2^{n-2}-4}\psi)]g.$$

Следовательно, в случае 3 уравнения (3), (4) также разрешимы в группе G . Поэтому отображение $f_3: \Phi_n \rightarrow G$ вида $f_3(\varepsilon) = (\varepsilon - \varphi)\omega_{n-2}g$, $f_3\varphi(\tau_{n-1} - \varphi^2\omega_{n-2})g$, $f_3\psi = \eta_3g$, где g — любой ненулевой элемент группы G , а $\eta_3 = \varphi^{-1}(\tau_{n-1} - \omega_{n-2}) + (\varepsilon - \varphi^{-1})(\varepsilon + \varphi^4\psi + \varphi^8\psi + \dots + \varphi^{2^{n-2}-4}\psi)$ есть также скрещенный гомоморфизм.

Пусть теперь $n=3$. Полагаем $f_1(-\varepsilon) = \omega_3g$, если ω_3 не делится на 2 в кольце $E(G)$ и $f_2(-\varepsilon) = \omega_2g$ в противном случае (g — ненулевой элемент группы G). Покажем, что f_1, f_2 задают скрещенные гомоморфизмы группы Φ_3 в группу G . Действительно, рассмотрим в группе G уравнения:

$$2x = (\varepsilon - \varphi)f_j(-\varepsilon); \quad (3')$$

$$2y = (\varepsilon - \psi)f_j(-\varepsilon) \quad (j=1,2). \quad (4')$$

В первом случае уравнения (3'), (4') имеют соответственно решения $(\varepsilon + \psi)g$, $(\varepsilon + \varphi\psi)g$. Следовательно, по лемме 1.1 отображение $f_1: \Phi_3 \rightarrow G$ вида $f_1(-\varepsilon) = \omega_3g$, $f_1\varphi = (\varepsilon + \psi)g$, $f_1\psi = (\varepsilon + \varphi\psi)g$ есть скрещенный гомоморфизм. Во втором случае уравнения (3'), (4') также разрешимы в группе G и отображение $f_2: \Phi_3 \rightarrow G$, задаваемое по правилу $f_2(-\varepsilon) = \omega_2g$, $f_2\varphi = (\tau_3 - \varphi\omega_2)g$, $f_2\psi = g$, где $2\tau_3 = \omega_3$, есть скрещенный гомоморфизм.

Заметим теперь, что построенные скрещенные гомоморфизмы $f_i (i=1,3)$ при $n > 4$ и $f_j (j=1,2)$ при $n=3$ не всегда являются главными. Действительно, поскольку в случае $i=1$ $\omega_n \notin 2E(G)^+$, то в группе G существуют такие элементы g_0 , что $f_1(-\varepsilon) = \omega_n g_0 \notin 2G$ и $f_1 \notin B^1(\Phi, G)$. Аналогично рассуждаем в случае $i=2$. По лемме 1.2 $(\varepsilon + \varphi)\omega_{n-2} \notin 2E(G)^+$, поэтому не всякий скрещенный гомоморфизм вида f_3 является главным. Так как $\omega_3 \notin 2E(G)^+$ в случае $j=1$, то группа G имеет такие элементы g' , для которых $f_1(-\varepsilon) = \omega_3 g' \notin 2G$ и $f_1 \notin B^1(\Phi, G)$. Не всякий скрещенный гомоморфизм вида f_2 также является главным, так как $\omega_2 \notin 2E(G)^+$ (лемма 1.2). Предложение доказано.

Рассмотрим далее не 2-делимые FN-группы без кручения. Если такая группа квазиразложима, то она имеет хотя бы одно не 2-делимое квазислагаемое.

Замечание 1.1. Если Φ — регулярный автоморфизм порядка 2 группы G без кручения, то $\Phi = -\varepsilon$. Следовательно, если G Φ -регулярно полная группа и Φ является 2-группой, то $-\varepsilon$ — единственный элемент порядка 2 группы Φ . Хорошо известно, что конечная 2-группа с единственным элементом порядка 2 есть либо циклическая группа, либо группа кватернионов, или обобщенная группа кватернионов. В бесконечном случае такая 2-группа есть либо квазициклическая группа $Z(2^\infty)$, либо бесконечная обобщенная группа кватернионов Q_{2^∞} .

Теорема 1.4. Пусть G — не 2-делимая FN -группа без кручения, Φ — ее конечная группа автоморфизмов, $\langle \varepsilon \rangle \neq \Phi < \text{Aut } G$, $-\varepsilon \in \Phi$ и $G \approx \sum_{i=1}^s G_i$ — квазиразложение, индуцированное группой Φ .

Группа $H^1(\Phi, G) = 0$ тогда и только тогда, когда для всякого не 2-делимого квазислагаемого G_i группа $\Phi_i = \Phi|G_i$ не изоморфна $Z(2l)$ ($l \geq 1$) или Q_{2^n} ($n \geq 3$).

Доказательство. а. Необходимость. Пусть $H(\Phi, G) = 0$ и Φ_k изоморфна $Z(2l)$ или Q_{2^n} для не 2-делимого квазислагаемого G_k . Подгруппа G_k вполне характеристична в G и Φ_k — регулярно полна. Если $\Phi_k \sim Z(2l)$, то по лемме 2.4 из [1] $H(\Phi_k, G_k) \neq 0$, а в случае $\Phi_k \sim Q_{2^n}$ группа $H^1(\Phi_k, G_k) \neq 0$ по предложению 1.3. Рассмотрим отображение $f: \Phi \rightarrow G$, где $f = f' \eta_k$; $f' \in Z^1(\Phi_k, G_k)$, а η_k — эпиморфизм группы Φ на Φ_k . Очевидно, f есть скрещенный гомоморфизм. Так как $H^1(\Phi_k, G_k) \neq 0$, то существуют такие $f'_1 \in Z^1(\Phi_k, G_k)$, что $f'_1 \notin B^1(\Phi_k, G_k)$ и $f'_1(-\varepsilon_k) \notin 2G_k$ (ε_k — тождественный автоморфизм группы G_k). Отсюда следует, что и для $f_1 = f'_1 \eta_k$, $f_1 \in Z^1(\Phi, G)$, элемент $f_1(-\varepsilon) = f'_1(-\varepsilon_k) \notin 2G$, т.е. $f_1 \notin B^1(\Phi, G)$ и $H(\Phi, G) \neq 0$. Противоречие. Следовательно, для всякого не 2-делимого квазислагаемого G_i группа Φ_i ($i = \overline{1, s}$) не изоморфна $Z(2l)$ или Q_{2^n} ($l \geq 1, n \geq 3$).

б. Достаточность. Всякая группа G_i является Φ_i -регулярно полной группой (лемма 1). Тогда согласно замечанию 1.1 каждая Φ_i , соответствующая не 2-делимой группе G_i , содержит автоморфизмы нечетного порядка. Поэтому группа Φ также содержит автоморфизмы нечетного порядка. Если хотя бы один из них регулярен, то $H^1(\Phi, G) = 0$ (лемма 2). Пусть все автоморфизмы нечетных порядков группы G из Φ не регулярны, $G \approx \sum_{i=1}^s G_i$ — квазиразложение,

индуцированное группой Φ , и $mG \stackrel{s}{\underset{i=1}{+}} G_i$. Если G_i —2-делимая группа, то $H^1(\Phi_i, G_i) = 0$. В случае не 2-делимой G_i группа Φ_i содержит элементы нечетного порядка и снова $H^1(\Phi_i, G_i) = 0$. Тогда по лемме 1.5 из [1] $H^1\left(\prod_{i=1}^s \Phi_i, \stackrel{s}{\underset{i=1}{+}} G_i\right) = 0$. Если теперь m —число нечетное, то получаем, что и $H^1(\Phi, G) = 0$ (лемма 3).

Пусть m —число четное. С помощью нерегулярных автоморфизмов ψ нечетных порядков группы G из Φ построим теперь такое квазиразложение $G \approx \stackrel{t}{\underset{k=1}{+}} G_k$ (5) группы G , что

$m_1 G \stackrel{t}{\underset{k=1}{+}} G_k$, где m_1 —число нечетное, каждая G_k вполне характеристична и сервантна в G , а каждый автоморфизм $\psi_k = \psi|_{G_k}$ либо регулярен, либо тождествен на G_k . Заметим, что для любой не 2-делимой группы G_k группа $\Phi_k = \Phi|_{G_k}$ не является 2-группой. Допустим, что G_j —такое квазислагаемое из (5), что $2G_j \neq G_j$ и $|\Phi_j| = 2^{\alpha_j}$ ($\alpha_j > 1$). Тогда для любого автоморфизма $\psi \in \Phi$ нечетного порядка $\psi|_{G_j} \neq \epsilon_j$. В то же время для $0 \neq g' \in G_j$ имеем $m_1 g' = \sum_{i=1}^s g_i$, где $g_i \in G_i$ и $0 \neq g_i \in G_i \neq 2G_i$ хотя бы для одного i .

В противном случае получаем $2G_i = G_i$. Так как по условию каждая Φ_i , для которой $2G_i \neq G_i$, имеет регулярные элементы нечетного порядка, то G имеет такие автоморфизмы ψ' нечетного порядка, что $\psi'(mg') \neq mg'$. Отсюда следует $\psi'g' \neq g'$ и $\psi'|_{G_j} \neq \epsilon_j$. Противоречие. Следовательно, построенное квазиразложение (5) группы G таково, что для $2G_k \neq G_k$ группа Φ_k не является 2-группой.

Рассмотрим теперь группы $G = \stackrel{t}{\underset{k=1}{+}} G_k$ и $\hat{\Phi} = \prod_{k=1}^t \Phi_k$. Так как каждая группа $H^1(\Phi_k, G_k) = 0$, то $H^1(\hat{\Phi}, G) \approx \bigoplus_{k=1}^t H^1(\Phi_k, G_k) = 0$. Применяя к квазиразложению (5) лемму 3, получаем $H^1(\Phi, G) = 0$. Теорема доказана.

Отметим следствие этой теоремы для группы G без кручения из класса F_2 с периодическими группами $\text{Aut } G$. Всякая такая группа является FN -группой [3, с. 315]. В [1] доказано, что в этом случае всякая подгруппа $\Phi \neq \langle \epsilon \rangle$ группы $\text{Aut } G$ есть подпрямое произведение групп,

изоморфных $Z(n)(n=2, 3, 4, 6)$, Q_8 , DC_{12} , или BT_{24} (теорема 3.4).

Следствие 1.5. Пусть $F_2 \ni G$ — не 2-делимая группа без кручения с периодической группой $\text{Aut } G$, $\langle \varepsilon \rangle \neq \Phi$ — конечная подгруппа группы $\text{Aut } G$, $\varepsilon \in \Phi$, $\text{Aut } G$ и $G \approx \bigoplus_{i=1}^n G_i$ — квазиразложение, индуцированное Φ .

Группа $H^1(\Phi, G) = 0$ тогда и только тогда, когда каждая Φ_i изоморфна $Z(6)$, DC_{12} или BT_{24} .

Аналогично тому, как теорема 1.4, доказывается

Теорема 1.6. Пусть $F_2 \ni G$ — не 2-делимая FN -группа без кручения, Φ — периодическая группа ее автоморфизмов, $|\Phi| > \omega_0$, $\varepsilon \in \Phi$, $\Phi < \text{Aut } G$ и Φ не содержит бесконечных 2-групп. Пусть G имеет квазиразложение $G \approx \bigoplus_{p \in L} G_p$ вида (**),

удовлетворяющее одному из условий. 1) L — множество конечное; 2) если L — бесконечное множество, то Φ содержит конечное число элементов нечетного порядка.

Группа $H^1(\Phi, G) = 0$ тогда и только тогда, когда для каждого не 2-делимого квазислагаемого G_p группа Φ_p $\Phi_i G_p$ содержит элементы нечетного порядка.

При доказательстве этой теоремы следует учесть также, что всякое квазислагаемое G_p группы G из (**) вполне характеристично в G и является также FN -группой из класса F_2 . Всякая FN -группа из F_2 имеет единственное квазиразложение вида (**) [1, 2].

Следствие 1.7. Пусть G — не 2-делимая FN -группа без кручения конечного ранга, Φ — ее периодическая группа автоморфизмов, $\Phi < \text{Aut } G$, $\varepsilon \in \Phi$ и $G \approx \bigoplus_{k=1}^m G_k$ — квазиразложение вида (**).

В таком случае $H^1(\Phi, G) = 0$ тогда и только тогда, когда каждая группа Φ_k $\Phi | G_k$ содержит автоморфизм группы G_k нечетного порядка.

Следствие 1.8. Пусть $F_2 \ni G$ — не 2-делимая FN -группа без кручения с периодической $\text{Aut } G$. $\Phi < \text{Aut } G$, $\varepsilon \in \Phi$ и $G \approx \bigoplus_{p \in \pi} G_p$ — квазиразложение вида (**) группы G , удовлетворяющее одному из условий 1), 2) теоремы 1.4.

Для такой группы G $H^1(\Phi, G) = 0$ тогда и только тогда, когда для всякого не 2-делимого квазислагаемого G_p группа Φ_p изоморфна Z_6 , DC_{12} или BT_{24} .

* Через ω_0 обозначается счетное кардинальное число

§ 2. $H^1(\Phi, G)$ над группами G без кручения с бесконечными 2-группами автоморфизмов

Известно, что бесконечные 2-группы с единственным элементом порядка 2—это в точности следующие группы:

$Z(2^\infty) \quad \varphi_n | \varphi_n^2 = 1 = \varphi_n, n \in \mathbb{N} > -$ — квазициклическая группа;

$Q_{2^\infty} \quad \varphi_n, \psi | \varphi_{n+1}^2 = \varphi_n, \varphi_1^2 = \psi^2, \varphi_n \psi = \psi \varphi_n^{-1}, n \in \mathbb{N} > -$

бесконечная обобщенная группа кватернионов.

Пусть $\mathbb{N}$ —множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ —кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ —соответственно поля рациональных, действительных и комплексных чисел, $\mathbb{H} = \langle a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a \in \mathbb{R}, s = 0, 1, 2, 3 \rangle$ — алгебра кватернионов.

Обозначим через

$S_1 = \{1, \xi_k^{2^l} \mid k \in \mathbb{N}, l = \overline{1, 2^k - 1}, \xi_{k+1}^2 = \xi_k, \xi_1^2 = -1, \xi_k \in \mathbb{C}, S_2 = -S_1 \cap S_1 j, \text{ где } S_1 j = \{\alpha j \mid \alpha \in S_1\}\}.$

Заметим, что множество S_2 линейно независимо над $\mathbb{Z}$. Действительно, известно [5, с. 432], что множество S_1 линейно независимо над $\mathbb{Z}$. Если допустить линейную зависимость S_2 , то $\mathbb{C} \cap S_1 j \neq 0$. Далее, пусть H —аддитивная подгруппа группы $\mathbb{H}$, порожденная множеством S_2 , K —подкольцо тела $\mathbb{H}$, порожденное множеством S_2 . Заметим, что $K \otimes \mathbb{Q}$ является телом. Действительно, пусть $0 \neq r \in K$, т. е. $r = h_1(\xi_k) + h_2(\xi_k)j$ для некоторых $h_1(x), h_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Тогда $r\bar{r} = h_1(\xi_k)h_1(\xi_k) + h_2(\xi_k)h_2(\xi_k)$, где r кватернион, сопряженный с r . Запишем $r\bar{r}$ в виде $r\bar{r} = (a_0 + a_1 \xi_{k-1} + \dots + a_{2^k-1} \xi_{k-1}^{2^k-1}) + (b_0 + b_1 \xi_{k-1} + \dots + b_{2^k-1} \xi_{k-1}^{2^k-1})\xi_k$. В силу линейной независимости S_1 над $\mathbb{Z}$

$$r_1 = (a_0 + a_1 \xi_{k-1} + \dots + a_{2^k-1} \xi_{k-1}^{2^k-1}) - (b_0 + b_1 \xi_{k-1} + \dots + b_{2^k-1} \xi_{k-1}^{2^k-1})\xi_k \neq 0, \text{ где } a_s, b_s \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, имеем

$$r_1 r \bar{r} = (c_0 + c_1 \xi_{k-2} + \dots + c_{2^k-2} \xi_{k-2}^{2^k-2}) + (d_0 + d_1 \xi_{k-2} + \dots + d_{2^k-2} \xi_{k-2}^{2^k-2})\xi_{k-1} \neq 0, \text{ где } d_s, c_s \in \mathbb{Z}. \text{ В качестве } r_2 \text{ возьмем}$$

$$(c_0 + c_1 \xi_{k-2} + \dots + c_{2^k-2} \xi_{k-2}^{2^k-2}) - (d_0 + d_1 \xi_{k-2} + \dots + d_{2^k-2} \xi_{k-2}^{2^k-2})\xi_{k-1} \text{ и т. д. Получаем } 0 \neq r_k r_{k-1} \dots r_1 r \bar{r} \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, τ обратим в $K \otimes Q$. Эндоморфизм группы $G \subset H^+$, действующий как умножение на $\tau \in K$, будем обозначать через f , множество эндоморфизмов группы $G \subset H^+$, действующих как умножения на $s \in S \subset K$, — через S , тождественный автоморфизм — через ϵ .

Предложение 2.1. Существует группа G_1 без кручения такая, что $-\epsilon \in \Phi_1 < \Phi_2 \subset \text{Aut } G_1$, где $\Phi_1 \cong Z(2^\infty)$; $\Phi_2 \cong Q_2^\infty$ и $H^1(\Phi_1, G_1) = H^1(\Phi_2, G_1) = 0$.

Доказательство. Возьмем в качестве G_1 группу H . Заметим, что $\alpha G_1 = G_1$ для любого $\alpha \in S_2$. Следовательно, $S = \Phi_1 < S_2 = \Phi_2 < \text{Aut } G_1$ и $\Phi_1 \cong Z(2^\infty)$, $\Phi_2 \cong Q_2^\infty$.

Пусть $f \in Z^1(\Phi_1, G_1)$. Имеем $f(-\epsilon) = (a_0 + a_1 \xi_k + \dots + a_{2^k-1} \xi_k^{2^k-1}) + (b_0 + b_1 \xi_k + \dots + b_{2^k-1} \xi_k^{2^k-1})j$, где $a_0, a_1, \dots, a_{2^k-1}, b_0, b_1, \dots, b_{2^k-1} \in Z$, $\xi_k \in S_1$. Следовательно, $2f(\xi_k - 1) = (\epsilon - \xi_{k+1})f(-\epsilon) = (a_0 - a_{\xi_{k+1}} + \dots + a_{2^k-1} \xi_k^{2^k-1} - a_{2^k-1} \xi_k^{2^k-1}) + (b_0 - b_{\xi_{k+1}} + \dots + b_{2^k-1} \xi_k^{2^k-1} - b_{2^k-1} \xi_k^{2^k-1})j = 2(c_0 + c_1 \xi_k + \dots + c_{2^k-1} \xi_k^{2^k-1}) + 2(d_0 + d_1 \xi_k + \dots + d_{2^k-1} \xi_k^{2^k-1})j$, где $c_0, c_1, \dots, c_{2^k-1}, d_0, d_1, \dots, d_{2^k-1} \in Z$. В силу линейной независимости S_2 над Z получаем $f(-\epsilon) \in 2G_1$. Таким образом, $H^1(\Phi_1, G_1) = 0$ и $H^1(\Phi_2, G_1) = 0$.

Предложение 2.2. Существует группа G_2 без кручения такая, что $-\epsilon \in \Phi_1$, $\Phi_2 < \text{Aut } G_2$, где $\Phi_1 \cong Z(2^\infty)$, $\Phi_2 \cong Q_2^\infty$ и $H^1(\Phi_1, G_2) \neq 0$, $H^1(\Phi_2, G_2) \neq 0$.

Доказательство. Заметим, что множество $S_3 = \left\{ \frac{1+\alpha}{2} \mid \alpha \in S_2 \right\}$ линейно независимо над Z . Пусть G_2 — аддитивная подгруппа группы H , порожденная множеством S_3 . Очевидно, что $\alpha G_2 = G_2$, $\alpha \in S_2$. Следовательно, $S_1 = \Phi_1$, $S_2 = \Phi_2 < \text{Aut } G_2$ и $\Phi_1 \cong Z(2^\infty)$, $\Phi_2 \cong Q_2^\infty$. Рассмотрим действие

эндоморфизмов $(\epsilon - \xi_k^{2^l-1})$, $(\epsilon - j)$ и $(\epsilon - \xi_k^{2^l-1}j)$ на $1 \in G_2$. Имеем

$$(\epsilon - \xi_k^{2^l-1})1 - 2\left(1 - \frac{1 + \xi_k^{2^l-1}}{2}\right),$$

$$(\epsilon - j)1 - 2\left(1 - \frac{1+j}{2}\right),$$

$$(\varepsilon - \xi_k^{2^{l-1}} j) 1 = 2 \left(1 - \frac{1 + \xi_k^{2^{l-1}} j}{2} \right).$$

Следовательно, для любого $\varphi \in \Phi_2$ имеем $(\varepsilon - \varphi) 1 \in 2G_2$. Построим скрещенный гомоморфизм $f \in Z^1(\Phi_2, G_2)$ следующим образом: $f\varphi = \frac{(\varepsilon - \varphi) 1}{2}$, $\varphi \in \Phi_2$. Тогда f не является главным скрещенным гомоморфизмом, так как $f(-\varepsilon) - 1 \notin 2G_2$. Следовательно, $H^1(\Phi_2, G_2) \neq 0$ и $H^1(\Phi_1, G_2) \neq 0$.

Заметим, что группы G_1, G_2 из предложений 2.1, 2.2 соответственно являются свободными группами счетного ранга.

Теорема 2.3. Существует абелева FN -группа G_3 без кручения такая, что $-\varepsilon \in \Phi_1 < \Phi_2 < \text{Aut } G_3$, $\Phi_1 \cong Z(2^\infty)$, $\Phi_2 \cong \cong Q_{2^\infty}$ и $H^1(\Phi_1, G_3) = 0$, $H^1(\Phi_2, G_3) = 0$.

Доказательство. Пусть $\pi_m (m > 1)$ — бесконечное множество простых чисел вида $1 + 2^m l (2u + 1)$, где $u \in N$. Множество простых чисел вида $8u + 5$, $u \in N$ разобьем на счетное число бесконечных непересекающихся множеств π_1, ρ_1, ρ_k , где $k \in N, l = \overline{1, 2^{k-1}}$. Для каждого простого числа $p_{mn} \in \pi_m, q_{1n} \in \rho_1, q_{kln} \in \rho_k$ выберем натуральные числа a_{mn}, b_{1n}, b_{kln} такие, что

$$a_{mn}^{2^m} \equiv -1 \pmod{p_{mn}},$$

$$b_{1n}^2 \equiv -1 \pmod{q_{1n}},$$

$$b_{kln}^2 \equiv -1 \pmod{q_{kln}}.$$

Такие натуральные числа существуют. Действительно, пусть t — первообразный корень по модулю p_{mn} , тогда в качестве a_{mn} можем взять $t^{(p_{mn}-1)/2^{m+1}}$. Построим группу G_3 следующим образом:

$$G_3 = \langle G_1, \frac{\alpha(1 + a_{mn}\xi_m)}{p_{mn}}, \frac{\alpha(1 + b_{1n}j)}{q_{1n}}, \frac{\alpha(1 + b_{kln}\xi_k^{2^{l-1}}j)}{q_{kln}} \mid m, n, k \in N, l = \overline{1, 2^{k-1}}, p_{mn} \in \pi_m, q_{1n} \in \rho_1, q_{kln} \in \rho_k, \alpha \in S_2 \rangle.$$

Заметим, что $\alpha G_3 = G_3$, $\alpha \in S_2$. Следовательно, $S_1 = \Phi_1 < S_2 = \Phi_2 < \text{Aut } G_3$ и $\Phi_1 \cong Z(2^\infty)$, $\Phi_2 \cong Q_{2^\infty}$. Отметим, что группы $G_1,$

$$G_{mn} = \langle G_1, \frac{\alpha(1+a_{mn}\xi_m)}{p_{mn}} \mid \alpha \in S_2 \rangle,$$

$$G_{q_{1n}} < G_1, \frac{\alpha(1+b_{1n}j)}{q_{1n}} \mid \alpha \in S_2 \quad ,$$

$$G_{q_{kln}} < G_1, \frac{\alpha(1+b_{kln}\xi_k^{2l-1}j)}{q_{kln}} \mid \alpha \in S_2 \rangle$$

p -сервантны для $p \notin \bigcup_{m \in N} \pi_m \cup \bigcup_{k \in N \setminus \{1\}} \frac{p_{kl}}{2^{k-1}} \cup p_1 = \Pi$,

$$p = p_{mn} \in \pi_m, \quad p = q_{1n} \in p_1, \quad p = q_{kln} \in p_{kl}$$

соответственно. Далее множества

$$S_{mn} = \{ \alpha(1+a_{mn}\xi_m) \mid \alpha \in S_2 \},$$

$$K_{1n} = \{ \alpha(1+b_{1n}j) \mid \alpha \in S_2 \},$$

$$T_{kln} = \{ \alpha(1+b_{kln}\xi_k^{2l-1}j) \mid \alpha \in S_2 \}$$

линейно независимы над Z . Действительно, в противном случае кольцо K имело бы делители нуля. Элемент $a \in S_2$, $0 \neq a \in Z$, $a \in S_2$ представляется в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами элементов из S_{mn} , K_{1n} , T_{kln} только в том случае, когда a делится на $(a_{mn}^2 + 1) \cdot (b_{1n}^2 + 1) \cdot (b_{kln}^2 + 1)$ соответственно. Покажем это в случае S_{mn} . Из

$$b_0(1+a_{mn}\xi_m) + b_1(\xi_m + a_{mn}\xi_m^2) + \dots + b_{2^m-1}(\xi_m^{2^m-1} - a_{mn}) = a \cdot 1$$

и линейной независимости S_2 над Z

имеем

$$b_0 - a_{mn}b_{2^m-1} = a,$$

$$a_{mn}b_0 = -b_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{mn}b_{2^m-2} = -b_{2^m-1}.$$

Следовательно, $a = (a_{mn}^2 + 1) b_0$. В случаях K_{1n} , T_{kln} это показывается аналогично.

Докажем, что 1 имеет нулевую характеристику в группе G_3 . Если $p \in \Pi$, то $h_p(1) = 0$, так как G_1 p -сервантна в группе G_3 . Пусть $p = p_{mn} \in \pi_m$. Допустим, что $1 \in p_{mn}G_3$. Тогда $1 \in p_{mn}G_{p_{mn}}$ и $1 = p_{mn}(c_0 + c_{11}\xi_1 + \dots + c_{11}\xi_1^{2l-1} + d_0j + d_{11}\xi_1j +$

$+ \dots + d_{il} \xi_i^{2l-1} j) + u_0(1 + a_{mn} \xi_m) + u_{11} \xi_1(1 + a_{mn} \xi_m) + \dots + u_{il} \xi_i^{2l-1} (1 + a_{mn} \xi_m) + e_0 j(1 + a_{mn} \xi_m) + e_{11} \xi_1 j(1 + a_{mn} \xi_m) + \dots + e_{il} \xi_i^{2l-1} j(1 + a_{mn} \xi_m)$. Умножив это равенство на $(a_{mn}^2 + 1)/p_{mn}$, приходим к противоречию, так как $(a_{mn}^2 + 1)/p_{mn}$ не делится на $(a_{mn}^2 + 1)$. Следовательно, $h_p(1) = 0$ в группе G_3 при $p \in \pi_m$. Если p принадлежит ρ , ρ_{kl} , то равенство $h_p(1) = 0$ в группе G_3 показывается аналогично.

Теперь покажем, что G_3 является FN -группой без кручения. Допустим, что существует эндоморфизм $\alpha \in E(G_3)$ такой, что $\alpha \in (E(G) \otimes Q) \setminus (K \otimes Q)$. Тогда имеем $m_{00} \alpha 1 - \beta_{00} 1$, $n_0 \alpha j = \eta_{00} j$, $m_{kl} \alpha \xi_k^{2l-1} - \beta_{kl} \xi_k^{2l-1}$, $n_{kl} \alpha \xi_k^{2l-1} j = \eta_{kl} \xi_k^{2l-1} j$, где $k \in \mathbb{N}$, $l = 1, 2^{k-1}$, $\beta_{00}, \beta_{kl}, \eta_{00}, \eta_{kl} \in K$. Если допустить, что $m_{kl} \beta_{kl} \xi_k^{2l-1} - m_{kl} \beta_{kl} \xi_k^{2l-1}$, $m_{kl} \alpha \xi_k^{2l-1} j - n_{kl} \beta_{kl} \xi_k^{2l-1} j$, $m_{00} \eta_{00} j - n_{00} \beta_{00} j$, где $(s, t) \in (0, 0) \cup \{(k, l) | k \in \mathbb{N}; l = 1, 2^{k-1}\}$; $k \in \mathbb{N}$; $l = 1, 2^{k-1}$, то $\alpha \in K \otimes Q$.

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} m_{00} m_k \alpha \xi_k^{2l-1} &= m_{00} \beta_{kl} \xi_k^{2l-1} - m_{kl} \beta_{00} \xi_k^{2l-1}, \\ m_{00} n_{kl} \alpha \xi_k^{2l-1} j &= m_{00} \eta_{kl} \xi_k^{2l-1} j = n_{kl} \beta_{00} \xi_k^{2l-1} j, \\ m_{00} n_{00} \alpha j - m_{00} \eta_{00} j &= n_{00} \beta_{00} j. \end{aligned}$$

Откуда $m_{00} \alpha - \beta_{00}$ на G_1 и, следовательно, на G_3 , т. е. $\alpha \in K \otimes Q$.

Если $m_{kl} \beta_{kl} \xi_k^{2l-1} \neq m_{kl} \beta_{kl} \xi_k^{2l-1}$ и $\xi_s^{2l-1} - \xi_r^{2l-1} \xi_r^{2u-1} (\xi_k^{2l-1} = \xi_s^{2l-1} \xi_r^{2u-1})$, то обозначим через $b = a_{rn}^{2l-1} (b = a_{rn}^{2u-1})$. Тогда $\xi_s^{2l-1} + b \xi_k^{2l-1}$ делится на $p_{rn} \in \pi_r$ в группе G_3 . Имеем $(m_{kl} \alpha - m_{kl} \beta_{kl}) (\xi_s^{2l-1} + b \xi_k^{2l-1}) - (m_{kl} \beta_{kl} - m_{kl} \beta_{kl}) b \xi_k^{2l-1} \neq 0$ и делится на $p_{rn} \in \pi_r$ в группе G_3 . Следовательно, $(m_{kl} \beta_{kl} - m_{kl} \beta_{kl}) \xi_k^{2l-1}$ делится на любое $p_{rn} \in \pi_r$. Так как существует $0 \neq \gamma \in K$ такой, что $\gamma (m_{kl} \beta_{kl} - m_{kl} \beta_{kl}) \xi_k^{2l-1} = c \cdot 1$, $0 \neq c \in \mathbb{Z}$, то $c \cdot 1 \in G_3$ делится на все простые числа из π_r в группе G_3 . Но это противоречит тому, что 1 имеет нулевую характеристику в G_3 .

Если $m_{st} \eta_{kl} \xi_k^{2l-1} j \neq n_{kl} \beta_{st} \xi_k^{2l-1} j$ и $\xi_k^{2l-1} = \xi_s^{2l-1} \xi_r^{2u-1} (\xi_k^{2l-1} = \xi_s^{2l-1} \xi_r^{2u-1})$, то обозначим через $b = b_{rum} (b = b_{1n})$ или $b = b_{r, 2^{l-2u-1}, n}$. Тогда $\xi_s^{2l-1} + b \xi_k^{2l-1} j$ делится на $q_{rum} \in \pi_{ru} (q_{1n} \in \pi_1)$ или $q_{r, 2^{l-2u+1}, n} \in \pi_{r, 2^{l-2u+1}, n}$ в группе G_3 . Имеем $0 \neq (m_{st} \eta_{kl} \alpha - n_{kl} \beta_{st}) (\xi_s^{2l-1} + b \xi_k^{2l-1} j) - (m_{st} \eta_{kl} - n_{kl} \beta_{st}) b \xi_k^{2l-1} j$ и де-

лится на $q_{r,u} \in p_{r,u}(q_{1,n} \in p_1$ или $q_{r,2^r-2u+1,n} \in p_{r,2^r-2u+1})$ в группе G_3 . Следовательно, $(m_{st} \eta_{kl} - n_{kl} \beta_{st}) \xi_k^{2l-1} j$ делится на любое простое число из $p_{r,u}(p_1$ или $p_{r,2^r-2u+1})$. Так как существует $0 \neq \gamma \in K$ такой, что $\gamma(m_{st} \eta_{kl} - n_{kl} \beta_{st}) \xi_k^{2l-1} j \cdot c \cdot 1, 0 \neq c \in \mathbb{Z}$, то снова приходим к противоречию с тем, что $1 \in G_3$ имеет нулевую характеристику в G_3 .

Если $m_{00} \eta_{00} j \neq n_{00} \beta_{00} j$, то $(n_{00} m_{00} \alpha - n_{00} \beta_{00})(1 + b_{1,n} j) - (m_{00} \eta_{00} - n_{00} \beta_{00}) b_{1,n} j \neq 0$ и делится на $q_{1,n} \in p_1$. Т.е. $(m_{00} \eta_{00} - n_{00} \beta_{00}) j$ делится на любое простое число из p_1 . Далее, так же как и в предыдущих случаях, приходим к противоречию. Следовательно, $E(G_3) \subseteq K \otimes Q$, т. е. G_3 — FN -группа т.к. $K \otimes Q$ — тело.

Пусть $f \in Z^1(\Phi_1, G_3)$ и $f(-\varepsilon) = g$. Тогда для некоторого нечетного n $nf(-\varepsilon) \in G_1$, т.е. $nf(-\varepsilon) (b_0 + b_1 \xi_1^{2^s-1} + \dots + b_{2^s-1} \xi_1^{2^s-1}) + (c_0 + c_1 \xi_1^{2^s-1} + \dots + c_{2^s-1} \xi_1^{2^s-1}) j$, где $b_0, b_1, \dots, b_{2^s-1}, c_0, \dots, c_{2^s-1} \in \mathbb{Z}$. Имеем $2nf \xi_1^{2^s-1} = n(\varepsilon - \xi_1^{2^s-1}) f(-\varepsilon) \in G_3$. Для некоторого нечетного m $2mnf \xi_1^{2^s-1} \in G_1$. Так как G_1 2-сервантна в G_3 , то $2mnf \xi_1^{2^s-1} \in 2G_1$. Таким образом, $nf(-\varepsilon) (b_0 + b_1 \xi_1^{2^s-1} + \dots + b_{2^s-1} \xi_1^{2^s-1}) + (c_0 + c_1 \xi_1^{2^s-1} + \dots + c_{2^s-1} \xi_1^{2^s-1}) j$, где $b_0, b_1, \dots, b_{2^s-1}, c_0, \dots, c_{2^s-1} \in \mathbb{Z}$. Имеем $2nf \xi_1^{2^s-1} = n(\varepsilon - \xi_1^{2^s-1}) f(-\varepsilon) \in G_3$. Для некоторого нечетного m $2mnf \xi_1^{2^s-1} \in G_1$. Так как G_1 2-сервантна в G_3 , то $2mnf \xi_1^{2^s-1} \in 2G_1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} & 2mnf \xi_1^{2^s-1} - m(b_0 - b_0 \xi_1^{2^s-1} + \dots + b_{2^s-1} \xi_1^{2^s-1} - b_{2^s-1} \xi_1^{2^s-1-1}) + \\ & + m(c_0 - c_0 \xi_1^{2^s-1} + \dots + c_{2^s-1} \xi_1^{2^s-1} - c_{2^s-1} \xi_1^{2^s-1-1}) j \\ & - 2(d_0 + d_1 \xi_1^{2^s-1} + \dots + d_{2^s-1} \xi_1^{2^s-1-1} + e_0 j + \dots + e_{2^s-1} \xi_1^{2^s-1-1} j), \end{aligned}$$

где $d_0, d_1, \dots, d_{2^s-1}, e_0, \dots, e_{2^s-1} \in \mathbb{Z}$. Откуда в силу линейной независимости s_2 над $\mathbb{Z}$ получаем $f(-\varepsilon) \in 2G_3$, т.е. $H^1(\Phi_1, G_3) = 0$. Следовательно, $H^1(\Phi_2, G_3)$ также нулевая группа.

Теорема 2.4. Существует абелева FN -группа G_4 без кручения такая, что $-\varepsilon \in \Phi_1$, $\Phi_2 \in \text{Aut } G_4$, $\Phi_1 = Z(2^\infty)$, $\Phi_2 \cong Q_{2^\infty}$ и $H^1(\Phi_1, G_4) \neq 0 \neq H^1(\Phi_2, G_4)$.

Доказательство. Построим группу G_4 следующим образом:

$$G_4 = \langle G_3, \frac{1+\alpha}{2} \mid \alpha \in S_2 \rangle.$$

гомоморфизм $j \in Z^1(\Phi_2, G_4)$ вида $f\alpha - \frac{(\varepsilon - \alpha)1}{2}$, $\alpha \in \Phi_2$. Отображение f не является главным скрещенным гомоморфизмом, так как $f(-\varepsilon) = 1 \notin 2G_4$. Следовательно, $H^1(\Phi_2, G_4) \neq 0$ и $H^1(\Phi_1, G_4) \neq 0$.

Заметим, что группы G_3, G_4 из теорем 2.3, 2.4 соответственно являются сильно неразложимыми однородными FN -группами без кручения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беккер И. Х. Об абелевых группах без кручения с периодическими группами автоморфизмов.— Изв. вузов. Математика, 1986, № 2, с. 3—11.
2. Кожухов С. Ф. Абелевы группы без нильпотентных эндоморфизмов.— В кн: Абелевы группы и модули. Томск, 1979, с. 87—94.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.— М., 1977, т. 2 — 416 с.
4. Кожухов С. Ф. Регулярно полные абелевы группы.— Изв. вузов Математика, 1980, вып. 12, с. 14—19.
5. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел.— М.: Наука, 1964 — 496 с.

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ E -КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ ИДЕАЛОВ КОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. М. Вечтомов

§ 1. Введение

Цель работы — доказательство теоремы об определяемости произвольного E -компактного пространства X основными частично упорядоченными множествами идеалов кольца $C(X, E)$ всех непрерывных E -значных функций на X для классических топологических тел E и другими структурами, связанными с $C(X, E)$. В [1] доказана определяемость E -компактных пространств (Q_E -пространств) мультипликативными полугруппами $C(X, E)$ для непрерывных, т. е. локально бикompактных неметризуемых, тел E . Здесь этот результат становится следствием новых, более широких и прозрачных связей. Да и приложения основной теоремы 1. Результаты работы неоднократно докладывались автором и анонсированы в [2].

Импульсом к возникновению теории колец непрерывных функций послужили работы М. Стоуна по представлению булевых колец (алгебр) кольцами (алгебрами) непрерывных $\mathbb{Z}_2$ -значных функций на их пространствах максимальных идеалов. Первой и основополагающей работой в этом направлении является статья И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова [3], в которой, в частности, доказана определяемость всякого бикompакта X , а также произвольного тихоновского пространства с первой аксиомой счетности, кольцом $C(X)$ всех непрерывных действительно-значных функций на X . Определяемость бикompакта X кольцом $C(X)$ означает, что для любого бикompакта Y изоморфность колец $C(X)$ и $C(Y)$ влечет гомеоморфность этих пространств. Далее Хьюитт [4] определил действительно-компактные пространства и доказал их определяемость кольцами $C(X)$. Т. Широта [5] доказал определяемость действительно-компактных пространств X решетками и полугруппами $C(X)$. Мрувка и Энгелькинг [6] и их последователи развили общую теорию

E -компактных пространств, в рамках которой удалось доказать определяемость E -компактных пространств теми или иными алгебраическими структурами $C(X, E)$ (см., например, [7], где для широкого класса топологических колец E доказана определяемость E -компактных пространств X кольцами $C(X, E)$). Говарц [8] сделал это для так называемых достаточно сложных алгебро-топологических структур E и привел ряд примеров таких структур. Отметим наконец работу Бахмана, Беккенштейна, Нариси и Уорнера [9] о кольцах $C(X, E)$ для полных нульмерных полей E , из результатов которой легко вывести определяемость E -компактных пространств X кольцами $C(X, E)$ для целых классов указанных полей E . Однако, скажем, определяемость действительно-компактных пространств кольцами непрерывных комплексно-значных функций на них или полугруппами $C(X)$ не отражена полностью в [7—9]. Теория колец $C(X)$ изложена в монографии Гиллмана и Джерисона [10], первое издание которой вышло в 1960 г.

Приведем необходимые определения и обозначения. Пусть E — некоторое топологическое тело, а X — произвольное топологическое пространство. Множество $B \subset X$ называется E -нуль-множеством на X , если

$$B = Z(f) - \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

для некоторой функции $f \in C(X, E)$. Положим

$$Z(X, E) = \{Z(f) \mid f \in C(X, E)\} -$$

множество всех E -нуль-множеств на X . Пространство X называется E -компактным [6], если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени пространства E . T_1 -пространство X называется E -регулярным [1], если для любого замкнутого множества $B \subset X$ и любой точки $x \in X \setminus B$ найдется такая функция $f \in C(X, E)$, что $f(B) = \{0\}$ и $f(x) = 1$. Легко видеть, что E -регулярность T_1 -пространства X эквивалентна тому, что $Z(X, E)$ является базой замкнутых множеств для X . В частности, для несвязных тел E понятия E -регулярности и нульмерности равносильны в классе T_1 -пространств.

Рассмотрим теперь E -регулярное пространство X . отображение $\sigma: X \rightarrow E^{C(X, E)}$, определенное формулой $\sigma(x)(f) = f(x)$ для любых $x \in X$ и $f \in C(X, E)$, осуществляет гомеоморфное вложение X в $E^{C(X, E)}$. Пространство $\overline{\sigma X}$ (замыкание в $E^{C(X, E)}$) является E -компактным расширением X , на которое

непрерывно продолжаются все функции из $C(X, E)$. Если $f \in C(X, E)$, то $f^* \in C(\nu X, E)$ — ее непрерывное продолжение. Отображение $f \mapsto f^*$ осуществляет изоморфизм колец $C(X, E)$ и $C(\nu X, E)$. Эти результаты получены в [6]. Если тело E удовлетворяет условию 1 из § 2, то в силу предложения 2.2 [7] $\nu X \cong H(X, E)$, где $H(X, E)$ — множество всех E -гомоморфизмов кольца $C(X, E)$, т. е. всех таких гомоморфизмов $C(X, E) \rightarrow E$, которые переводят функции-константы в их значения; ядра E -гомоморфизмов названы в [1] E -идеалами кольца $C(X, E)$. Таким образом, приведенная конструкция νX совпадает, по сути дела, с конструкцией νX из [1]. Следовательно, для тел с условием 1 свойство E -компактности равносильно свойству «быть Q_E -пространством», если только само E E -регулярно [1, § 3].

Пусть тело E само E -регулярно. Тогда для любого пространства X существует такое E -регулярное пространство τX , что кольца $C(X, E)$ и $C(\tau X, E)$ изоморфны [1, § 3]. При этом очевидным образом попарно изоморфны и частично упорядоченные по включению множества $Z(X, E)$, $Z(\tau X, E)$ и $Z(\nu \tau X, E)$. Непосредственно проверяется, что класс E -регулярных пространств замкнут относительно тихоновских произведений и подпространств. Значит, все подпространства произвольной тихоновской степени E E -регулярны.

Положим $O(X, E)$ ($O_r(X, E)$) — частично упорядоченное множество по включению всех главных (главных правых) идеалов в $C(X, E)$; $SL(X, E)$ ($SL_r(X, E)$) — верхняя полу-решетка всех конечно-порожденных идеалов (правых идеалов) кольца $C(X, E)$; $L(X, E)$ ($L_r(X, E)$) — решетка всех идеалов (правых идеалов) кольца $C(X, E)$.

Скажем, что функция $g \in C(X, E)$ делит функцию $f \in C(X, E)$, если существует такая функция $h \in C(X, E)$, что $f = gh$. Отношение делимости на множестве $C(X, E)$ превращает последнее в предупорядоченное множество. Мультипликативную полугруппу кольца $C(X, E)$ будем называть просто полугруппой $C(X, E)$.

§ 2. Формулировки

Нам потребуется накладывать на топологическое тело E следующие функционально-алгебро-топологические ограничения.

Условие I. Для любого пространства X и произвольных функций $f, g \in C(X, E)$ существуют такие функции $\varphi, \psi \in$

$\in C(X, E)$, что $Z(f+g\psi) = Z(f) \cap Z(g)$. Из этого условия вытекает, что частично упорядоченные множества $Z(X, E)$ являются решетками.

Условие II. Для любого пространства X и любых $f, g \in C(X, E)$ найдется функция $h \in C(X, E)$, делящая f и g , для которой $Z(h) = Z(f) \cap Z(g)$.

Условие III. Пространство E является E -регулярным. Как отмечено в § 1, это условие обеспечивает E -регулярность E -компактных пространств.

Условие IV. Для любого пространства X множество $Z(X, E)$ замкнуто относительно счетных пересечений.

Из этого условия также следует, что $Z(X, E)$ являются решетками. Максимальный фильтр решетки $Z(X, E)$ называется z -ультрафильтром на X . Фиксированные z -ультрафильтры на X — это фильтры вида $F_x = \{B \in Z(X, E) \mid x \in B\}$, $x \in X$.

Условие V. На любом E -компактном пространстве каждый z -ультрафильтр, замкнутый относительно счетных пересечений, фиксирован и является решеткой.

Теперь мы можем сформулировать наш основной результат.

Теорема 1. Пусть топологическое тело E удовлетворяет условиям I—V или конечно. Тогда для любых E -компактных пространств X и Y эквивалентны следующие утверждения:

- 1) пространства X и Y гомеоморфны;
- 2) кольца $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изоморфны;
- 3) кольца $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ эквивалентны в смысле Мориты, т. е. категории правых модулей над этими кольцами эквивалентны;
- 4) полугруппы $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изоморфны;
- 5) предупорядоченные множества делимости $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изоморфны;
- 6) частично упорядоченные множества $O(X, E)$ и $O(Y, E)$ (эквивалентно $O_r(X, E)$ и $O_r(Y, E)$) изоморфны;
- 7) полурешетки $SL(X, E)$ и $SL(Y, E)$ ($SL_r(X, E)$ и $SL_r(Y, E)$) изоморфны;
- 8) решетки $L(X, E)$ и $L(Y, E)$ ($L_r(X, E)$ и $L_r(Y, E)$) изоморфны;
- 9) решетки $Z(X, E)$ и $Z(Y, E)$ изоморфны.

Из теоремы 1 и отмеченных в § 1 результатов сразу вытекает

Теорема 2. Если топологическое тело E удовлетворяет условиям I—V или конечно, то для любых топологических

пространств X и Y утверждения 2)—9) теоремы 1 эквивалентны между собой.

Точка $x \in X$ называется G_δ -точкой (в X), если одноточечное множество $\{x\}$ является пересечением счетного семейства открытых множеств пространства X .

Теорема 3. Пусть топологическое тело E удовлетворяет условиям I—V с нулем, являющимся G_δ -точкой, а X и Y — произвольные E -регулярные пространства, все точки которых суть G_δ -точки. Тогда все утверждения 1)—9) теоремы 1 эквивалентны.

Кольцо $C(X, E)$, рассматриваемое как подпространство тихоновской степени E^X , становится топологическим кольцом в так называемой топологии поточечной сходимости.

Теорема 4. Пусть топологическое тело E удовлетворяет условиям I—V или конечно, X и Y — произвольные E -регулярные пространства и топологические полугруппы (в топологии поточечной сходимости) $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изоморфны. Тогда пространства X и Y гомеоморфны.

Следствие. Теоремы 1—4 справедливы для непрерывных тел и для подполей топологического поля действительных чисел.

Замечание 1. Частными случаями теорем 1—4 являются соответствующие результаты работ [1—5].

Замечание 2. Несколько усложнив доказательство следствия, можно показать, что любое финально компактное нормированное нульмерное неметризуемое тело удовлетворяет условиям I—V, т. е. для таких тел имеют место теоремы 1—4.

§ 3. Доказательства

Важнейшими составными частями доказательства теоремы 1 служат следующие три предложения, имеющие и самостоятельное значение.

Предложение 1. Если тело E удовлетворяет условиям I и II, то для любых пространств X и Y верна импликация 6) $\rightarrow$ 9) теоремы 1.

Доказательство. Если $A \subset C(X, E)$ и $f \in C(X, E)$, то положим $\Delta A = \bigcap \{Z(g) \mid g \in A\}$ и (f) — главный идеал кольца $C(X, E)$, порожденный f . Пусть

$$\alpha: O(X, E) \rightarrow O(Y, E) \text{ — изоморфизм.}$$

Если $A = (f) \in O(X, E)$, то $\Delta A = Z(f)$. Соответствие

$$Z(\alpha) = \{(\Delta A, \Delta(\alpha A)) \mid A \in O(X, E)\}$$

является соответствием между решетками $Z(X, E)$ и $Z(Y, E)$. Покажем, что $Z(\alpha)$ является биекцией. Для этого достаточно убедиться, что $\Delta A \neq \Delta B$ для $A, B \in O(X, E)$ влечет $\Delta(\alpha A) \neq \Delta(\alpha B)$. Тогда симметрии с участием α^{-1} завершат доказательство биективности $Z(\alpha)$. Итак, пусть $\Delta A \neq \Delta B$ для $A = (f)$ и $B = (g)$ из $O(X, E)$. Если, скажем, $p \in \Delta A \setminus \Delta B$, то возьмем $h = g - a$, где $a = g(p) \neq 0$, и положим $C = (h)$. Так как $Z(f) \cap Z(h) \neq \emptyset$, ибо $p \in Z(f)$, и $h(p) = g(p) - a = 0$, и $Z(g) \cap Z(h) = \emptyset$, то $\Delta A \cap \Delta C \neq \emptyset$ и $\Delta B \cap \Delta C = \emptyset$. Следующее утверждение (1) выражает свойство $\Delta B \cap \Delta C = \emptyset$, а значит, и свойство $\Delta A \cap \Delta C \neq \emptyset$ на языке $O(X, E)$. Следовательно, $\Delta(\alpha B) \cap \Delta(\alpha C) = \emptyset$ и $\Delta(\alpha C) \cap \Delta(\alpha A) \neq \emptyset$, ибо (1) верно и для $O(Y, E)$. Поэтому $\Delta(\alpha A) \neq \Delta(\alpha B)$. Имеем

$$\Delta A \cap \Delta B = \emptyset \leftrightarrow \sup A, B = (1) = C(X, E) \quad (1)$$

для любых $A, B \in O(X, E)$.

Действительно, пусть $A = (f)$ и $B = (g)$. Если $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$, то по условию $1 \in Z(f + g)$ для некоторых функций $f, g \in C(X, E)$. Всякий идеал C , содержащий f и g , содержит функцию $f + g$, которая является обратным элементом кольца $C(X, E)$. Поэтому $C = C(X, E)$ и $\sup \{A, B\} = (1)$. Обратно, если $\Delta A \cap \Delta B \neq \emptyset$, то по условию II существует такая функция $h \in C(X, E)$, что $Z(h) = Z(f) \cap Z(g)$ и h делит функции f и g . Если $C = (h)$, то $C \neq (1)$, $A \subset C$ и $B \subset C$. Следовательно, $\sup \{A, B\} \neq (1)$.

Остается доказать, что $Z(\alpha)$ сохраняет отношение включения (в силу симметрии обратная биекция $Z(\alpha^{-1})$ также изотонна, т. е. $Z(\alpha)$ — решеточный изоморфизм). Пусть $A = (f)$, $B = (g)$ и $\Delta A \subset \Delta B$, т. е. $Z(f) \subset Z(g)$. Тогда $Z(fg) = Z(g)$. Положив $C = (fg)$ имеем $C \subset A$ и $\Delta C = \Delta B$. Поэтому $\alpha C \subset \alpha A$ и $\Delta(\alpha C) = \Delta(\alpha B)$, откуда $\Delta(\alpha A) \subset \Delta(\alpha B)$.

Доказательство для случая, когда изоморфны $O(X, E)$ и $O(Y, E)$, дословно повторяет приведенное доказательство.

Предложение 2. Если тело E удовлетворяет условию 1, то для любых пространств X и Y верна импликация 7) $\rightarrow$ 9) теоремы 1.

Доказательство совершенно аналогично доказательству предложения 1, только надо учесть, что для идеала

$$A = (f_1, \dots, f_n) \in SL(X, E) \quad \Delta A = \bigcap_{i=1}^n Z(f_i) = Z(f) \quad \text{для некото-}$$

рой функции $f \in A$ (см. условие 1) и что для конечно-порожденных идеалов при установлении (1) условие II излишне.

Предложение 3. Если тело E удовлетворяет условиям III—V или конечно, то для любых E -компактных пространств X и Y изоморфизм решеток $Z(X, E)$ и $Z(Y, E)$ влечет гомеоморфизм самих пространств.

Доказательство. Пусть $\alpha: Z(X, E) \xrightarrow{\sim} Z(Y, E)$ — изоморфизм решеток для E -компактных пространств X и Y . Если тело E удовлетворяет условиям III—V (конечно), то z — ультрафильтры на X , замкнутые относительно счетных пересечений (просто z -ультрафильтры) — это в точности фиксированные z -ультрафильтры на X , т. е. фильтры вида $F_x, x \in X$. Изоморфизм α сохраняет указанные z -ультрафильтры. В E -регулярном пространстве X решетка $Z(X, E)$ является базой замкнутых множеств. Следовательно, отображение $\alpha(x) = y$, определенное формулой $x \rightarrow y$, если $\alpha(F_x) = F_y$, для любых $x \in X$ и $y \in Y$, осуществляет гомеоморфизм пространства X на пространство Y .

Доказательство теоремы 1. Сразу заметим, что конечное поле E удовлетворяет условиям I—III, ибо все E -нуль-множества открыто замкнуты. Ясно, что 1) влечет все остальные утверждения теоремы. Очевидно также, что 2) $\rightarrow$ 4) $\rightarrow$ 5) $\rightarrow$ 6). Импликация 3) $\rightarrow$ 8) является частью общей теоремы 3.5 [11]. Импликация 8) $\rightarrow$ 7) также носит общий характер. Идеал A произвольного кольца конечно-порожден тогда и только тогда, когда из того, что $A = \Sigma A_i = \sup A_i$ для произвольного семейства идеалов A_i , следует, что $A = \sup \{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}\}$ для некоторого его конечного подсемейства. Наконец, импликации 6) $\rightarrow$ 9), 7) $\rightarrow$ 9) и 9) $\rightarrow$ 1) доказаны в предложениях 1—3. Доказательство основной теоремы завершено.

Замечание 3. Пусть $\beta: C(X, E) \rightarrow C(Y, E)$ — изоморфизм предпорядоченных множеств делимости. Тогда формула $\alpha(fC(X, E)) = (\beta f)C(Y, E)$ определяет изоморфизм $\alpha: O_r(X, E) \rightarrow O_r(Y, E)$ и решеточный изоморфизм $Z(\alpha)$ (см. доказательство предложения 1). С другой стороны, можно рассмотреть соответствие

$$Z(\beta) = \{(Z(f), Z(\beta f)) \mid f \in C(X, E)\}$$

между решетками $Z(X, E)$ и $Z(Y, E)$. Ясно, что $Z(\beta) = Z(\alpha)$. Можно доказать 5) $\rightarrow$ 9), а значит, и 4) $\rightarrow$ 9) непосредственно через $Z(\beta)$ (см. следствие 4.2 [1]). Изоморфизм β сохраняет

E -идеалы (см. следствие 4.3 [1]). Точно так же, как теорема 5.2 [1], доказывается теорема 4.

Доказательство теоремы 3. Пусть выполнено одно из условий 2)–9) теоремы 1. Тогда по теореме 1 E -компактификации νX и νY E -регулярных пространств X и Y гомеоморфны. Достаточно показать, что при любом гомеоморфизме νX на νY X отображается на Y . А для этого достаточно доказать, что подпространство $X(Y)$ пространства $\nu X(\nu Y)$ характеризуется как множество всех G_δ -точек в $\nu X(\nu Y)$. Сначала докажем, что для любой точки x произвольного E -регулярного пространства X' имеет место соотношение

$$x \text{ — } G_\delta\text{-точка в } X' \leftrightarrow \{x\} \text{ — } E\text{-нуль-множество на } X'. \quad (2)$$

Так как $0 \text{ — } G_\delta\text{-точка в } E$, то каждое E -нуль-множество как прообраз нуля также является G_δ -множеством, т. е. пересечением счетного семейства открытых множеств. Обратно, берем G_δ -точку x в X' . Тогда $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ для некоторой последовательности $U_1, \dots, U_n, \dots$ открытых множеств в X' . В силу E -регулярности X' для каждого натурального n найдется такая функция $f_n \in C(X', E)$, что $f_n(x) = 0$ и $f_n = 1$ вне U_n . Ясно, что $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z(f_n)$. Остается применить условие IV.

Далее, для произвольной функции $f \in C(X, E)$ имеем

$$Z(f^\nu) = \overline{Z(f)}_{\nu X}. \quad (3)$$

В самом деле, $\overline{Z(f)}_{\nu X} \subset Z(f^\nu)$, поскольку $Z(f^\nu)$ замкнуто. Предположим от противного, что $x \in \overline{Z(f)}_{\nu X}$ для некоторой точки x . В силу E -регулярности пространства νX и изоморфности колец $C(X, E)$ и $C(\nu X, E)$ существует функция $g \in C(X, E)$ такая, что $g^\nu(x) = 0$ и $g^\nu(\overline{Z(f)}_{\nu X}) = \{1\}$. По условию II или I существует функция h^ν , $h^\nu \in C(X, E)$, для которой $Z(h^\nu) = Z(f) \cap Z(g^\nu)$. Тогда $x \in Z(h^\nu)$, но $Z(h) = \emptyset$. Следовательно, элемент h обратим в $C(X, E)$, но h не является обратимым в $C(\nu X, E)$. Полученное противоречие доказывает (3).

Теперь мы в состоянии доказать, что X — это в точности множество G_δ -точек в νX . Пусть $x \in X$. По условию x является G_δ -точкой в X . В силу (2) $\{x\} = Z(f)$ для некоторой $f \in C(X, E)$. Но тогда $\{x\} = \overline{\{x\}} = Z(f^\nu)$ на основании (3), откуда снова по (2) x является G_δ -точкой в νX . Если же

$x \in \nu X$ X , то x не является G_δ -точкой в νX , ибо иначе $\{x\} = Z(f^*)$ для некоторой $f \in C(X, E)$ в силу (2), что снова приводит к противоречию: $f^*(x) = 0$ и $Z(f) = \emptyset$.

Доказательство следствия. Для указанных в формулировке тел E проверим условия I—V. Для непрерывных тел выполнение условий III—V доказано в [1]. Если E — собственное подполе топологического поля R действительных чисел, то E удовлетворяет условию III (оно нульмерно), условию IV в силу теоремы 4 [9] и условию V на основании теоремы из [12]. Справедливость условия I для непрерывных тел доказана в лемме 1 [13], а для $E \subset R$ достаточно положить $\varphi = f$ и $\psi = g$. Остается установить справедливость условия II для наших тел E . Пусть $f, g \in C(X, E)$. Если E — связное непрерывное тело, т. е. по теореме Понтрягина — R , то топологическое поле комплексных чисел или топологическое тело кватернионов, то годится функция

$$h = \sqrt[3]{f\bar{f} + g\bar{g}} \in C(X, |R|) = C(X),$$

где $\bar{f}$ — сопряженная к f функция (доказывается так же, как и лемма 3 [14]).

Рассмотрим далее несвязное непрерывное тело E . На E определена норма $|\cdot|$, принимающая лишь значения ρ^n , где n — целое число или ∞ (конечно, $\rho^\infty = 0$), и $0 < \rho < 1$ (см. [1, § 2]). Возьмем элемент $\gamma \in E$ нормы ρ . Пусть $x \in X$, $|f(x)| = \rho^k$ и $|g(x)| = \rho^e$. Если $k = e = \infty$, то положим $h(x) = 0$. В противном случае положим $h(x) = \gamma^n$ для n , которое находится из подходящего равенства $\min\{k, e\} = 2n$ или $\min\{k, e\} = 2n + 1$. Легко видеть, что функция h искомая.

Рассмотрим, наконец, поле $E \subset R$. Для каждого натурального числа n положим $\rho_n = 2^{-\frac{1}{n+1}} \in E$. Тогда

$$1 \quad \rho_1 > \rho_2 > \rho_2^2 > \rho_3 \quad \dots > \rho_n > \rho_n^2 > \rho_{n+1} > \dots$$

Так как $E \subset R$, то каждый интервал (ρ_{n+1}, ρ_n^2) содержит число $r_n \notin E$. Множества $V_n = \{r \in E \mid r_{n+1} < |r| < r_n\}$ для натуральных n и $V_0 = \{r \in E \mid |r| > r_1\}$ открыто-замкнуты в E . Возьмем функцию $h_1 = \max\{|f|, |g|\} \in C(X, E)$ и с ее помощью построим искомую функцию h . Пусть $x \in X$. Если $h_1(x) \in V_0$ или $h_1(x) = 0$, то положим соответственно $h(x) = 1$ или $h(x) = 0$. Если же $h_1(x) \in V_n$ для некоторого натурального числа n , то определим $h(x) = \rho_n$. Ясно, что $h \in C(X, E)$

и $Z(h) = Z(h_1) = Z(f) \cap Z(g)$. Докажем, что h делит f . Рассмотрим функцию $f_1: X \rightarrow E$, равную нулю на $Z(h)$ и равную f/h на $X \setminus Z(h)$. Поскольку $f = hf_1$, то достаточно показать, что $f_1 \in C(X, E)$. Она непрерывна на открыто замкнутых множествах $h_1^{-1}(V_n) - h^{-1}(\rho_n)$, где n — натуральное число или нуль. Функция f_1 непрерывна и на $Z(h)$ в силу

$$|f_1(x)| = |f(x)/h(x)| \leq |(h_1(x)|/|h(x)|) \leq \frac{\rho_n}{\rho_n} < \frac{\rho_n^2}{\rho_n} \quad \rho_n \rightarrow 0$$

при $x \in h^{-1}(\rho_n)$ и $n \rightarrow \infty$. Поскольку роли f и g одинаковы, то тем самым доказано, что и h делит g . Следствие доказано.

З а м е ч а н и е 4. Для бесконечных дискретных тел E наш метод не применим, ибо перестает быть верным предложение 3. Действительно, такое E E -компактно и E -нуль-множество открыто-замкнуто. Однако стоун-чеховская бикомпактификация βE [15] имеет ту же самую решетку открыто-замкнутых множеств, что и E , но E и βE не гомеоморфны. Для конечного поля E E -компактные пространства — это в точности нульмерные бикомпакты. Если $E = \mathbb{Z}_2$, то кольцо $C(X, E)$ булево, а $\forall X$ — его булево пространство. Таким образом, теорема 1 дает хорошо известную информацию о булевых кольцах. В частности, заключаем, что в классе булевых колец с единицей каждое булево кольцо может быть охарактеризовано категорией всех правых модулей над ним.

В заключение выражаю глубокую благодарность Л. А. Скорнякову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вечтомов Е. М. Изоморфизм мультипликативных полугрупп колец непрерывных функций. — Сиб матем. ж., 1978, т. 19, № 4, с. 759—771.
2. Вечтомов Е. М. Еще о кольцах непрерывных функций — Вестник Мос. ун-та. Матем., механ., 1979, № 4, с. 96.
3. Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах. — ДАН СССР, 1939, т. 21, № 1, с. 11—15.
4. Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions. I. — Trans. Amer. Math. Soc., 1948, v. 64, N 1, p. 45—99.
5. Shirota T. A generalization of a Theorem of J. Kaplanski. — Osaka Math. J., 1952, v. 5', N 2, p. 121—132.
6. Mrowka S., Engelking R. On E -compact Spaces. — Bull. Acad. Polon. Sci. Math., 1958, v. 6, N 7, p. 429—436.

7. Chew K.-P. Structures of continuons functions. IX. Homomorphisms of some function rings.—Bull. Acad. Polen. Sci. Ser. Math., 1971, v. 19, N 6, p 485—489.

8 Govaerts W. E — compactness and continuons function spaces.—Acta Math Acad Sci. Hung, 1978, v. 32, N 3—4, p 235—242.

9 Bachman G., Beckenstein E., Narici L., Warner S. Rings of continuons functions with values in a topological field.—Trans. Amer. M th Soc, 1975, v 204, p 91—112.

10. Gillman L, Jerison M. Rings of continuons functions.—N. Y., Springer — Verlag, 1976 — 302 p

11 Басс Х Алгебраическая К-теория — М: Мир, 1973.— 591 с.

12 Шостак А П О Е-компактных пространствах.—ДАН СССР, 1972, т 205, № 6 с 1310—1312

13 Вечтомов Е М Дистрибутивные кольца непрерывных функций и F пространств Матем заметки, 1983, т. 34, вып. 3, с. 321—332.

14 Вечтомов Е М Об идеалах колец непрерывных функций.—Иветявов Матем, 1981, № 1, с 3—10

5 Кетли Д Общая топология.—М. Наука, 1980 — 431 с.

ИНДУКТИВНЫЕ ЧИСТОТЫ НАД КОЛЬЦАМИ КОНЕЧНОГО ТИПА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

А. И. Генералов

Ассоциативное кольцо R с единицей называется кольцом конечного типа представлений, если оно артиново справа, и существует лишь конечное число попарно неизоморфных неразложимых конечно-порожденных правых R -модулей. Известно [13], что такое кольцо R является артиновым слева и существует лишь конечное число попарно неизоморфных неразложимых конечно-порожденных левых R -модулей; кроме того, любой R -модуль является прямой суммой конечно-порожденных модулей [17, 4.4]. Через $\text{Mod } R$ будем обозначать категорию правых унитарных R -модулей, а через $\text{mod } R$ — ее полную подкатегорию, состоящую из конечно-порожденных модулей.

В работах [3, 4] (см. также [7]) описаны индуктивные чистоты в категории абелевых групп, при этом оказывается, что все они плоско порождены. В [1, 2] эти результаты были распространены на категорию $\text{Mod } R$, где R — коммутативное нетерово наследственное кольцо или ограниченное дедекиндово первичное кольцо. В данной работе мы изучаем индуктивные чистоты над кольцами конечного типа представлений.

В дальнейшем, если не оговорено противное, R обозначает кольцо конечного типа представлений, все рассматриваемые модули — правые унитарные R -модули. Через $\text{ind } R$ обозначим полное множество представителей классов изоморфных неразложимых модулей, а через P (соответственно I) — подмножество в $\text{ind } R$, состоящее из проективных (соответственно инъективных) модулей. По поводу основных свойств понятия чистоты мы отсылаем к [5, 6].

Короткая точная последовательность в $\text{mod } R$

$$E: 0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\rho} C \rightarrow 0 \quad (1)$$

называется почти расщепляемой [10, 11], если она не расщепляется, модули A и C неразложимы и выполняется одно из следующих равносильных условий:

а) для любого гомоморфизма $h: X \rightarrow C$ в $\text{mod } R$, не являющегося расщепляющимся эпиморфизмом, существует гомоморфизм $h': X \rightarrow B$ такой, что $\rho h' = h$;

б) для любого гомоморфизма $h: A \rightarrow X$ в $\text{mod } R$, не являющегося расщепляющимся мономорфизмом, существует гомоморфизм $h': B \rightarrow X$ такой, что $h'\sigma = h$.

Известно [9, 18, с. 276], что над кольцом конечного типа представлений для любого неразложимого неинъективного модуля A (соответственно непроективного модуля C) существует и единственна с точностью до изоморфизма почти расщепляемая последовательность вида [1]. Такую последовательность будем называть начинающейся в A , или оканчивающейся в C ; при этом используем обозначения $E = E^A$ или $E = E_C$ соответственно. Таким образом, существует биективное отображение $\tau: \text{ind } R \text{ } P \rightarrow \text{ind } R \text{ } I$ такое, что $\tau C = A$. Множество всех почти расщепляемых последовательностей в $\text{mod } R$ обозначим через $\Lambda(R)$.

Чистота ω в $\text{Mod } R$ называется индуктивной [3], если прямой предел индуктивной системы ω -чистых коротких точных последовательностей также ω -чист. Говорим, что чистота ω инъективно (проективно) порождена [6] множеством модулей Γ , если короткая точная последовательность в $\text{Mod } R$ является ω -чистой тогда и только тогда, когда относительно нее инъективны (проективны) все модули из Γ . Говорим, что чистота ω плоско порождена [6] множеством левых R -модулей Δ , если короткая точная последовательность E вида [1] является ω -чистой тогда и только тогда, когда последовательность

$$E \otimes_R M: 0 \rightarrow A \otimes_R M \rightarrow B \otimes_R M \rightarrow C \otimes_R M \rightarrow 0$$

точна для любого $M \in \Delta$.

Пусть $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ — минимальное проективное представление модуля M (см. [8, с. 357]). Для любого модуля X рассмотрим левый R -модуль $X^* = \text{Hom}(X, R)$. Тогда через $\text{Tr } M$ обозначим левый R -модуль, определяемый точной последовательностью

$$P_0^* \xrightarrow{f^*} P_1^* \rightarrow \text{Tr } M \rightarrow 0.$$

Для чистоты ω в $\text{Mod } R$ через $\Lambda(\omega)$ обозначим множество ω -чистых почти расщепляемых последовательностей.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. Пусть R — кольцо конечного типа представлений.

1. Отображение $\omega \rightarrow \Lambda(\omega)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между индуктивными чистотами в $\text{Mod } R$ и подмножествами множества $\Lambda(R)$.

2. Пусть ω — индуктивная чистота в $\text{Mod } R$. Тогда:

а) ω инъективно порождена множеством $\Gamma_1(\omega)$ неразложимых неинъективных модулей, в которых начинаются почти расщепляемые последовательности, не принадлежащие $\Lambda(\omega)$;

б) ω проективно порождена множеством $\Gamma_2(\omega)$ неразложимых непроективных модулей, в которых оканчиваются почти расщепляемые последовательности, не принадлежащие $\Lambda(\omega)$;

в) ω плоско порождена множеством $\Delta(\omega) = \{\text{Tr } M \mid M \in \Gamma_2(\omega)\}$.

Доказательству теоремы 1 посвящен § 1, где получено также описание ω -инъективных и ω -проективных модулей для индуктивной чистоты ω (теорема 9). В § 2 мы конкретизируем полученные результаты для случая, когда R — наследственная алгебра конечного типа представлений над алгебраически замкнутым полем.

§ 1

Лемма 2. Пусть ω — произвольная чистота в $\text{Mod } R$, M — конечно-порожденный модуль, $H = \bigoplus_{j \in J} H_j$, где H_j — конечно-порожденные модули. Тогда канонический гомоморфизм

$$k: \bigoplus_{j \in J} \omega \text{Ext}_R^1(M, H_j) \rightarrow \omega \text{Ext}_R^1(M, H)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда ω — абсолютная чистота.

Пусть дана точная последовательность $E: 0 \rightarrow H \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0$. Ввиду [12, лемма 2.2] существует конечное подмножество $K \subset J$ такое, что $\bigoplus_{j \in K} H_j$ — прямое слагаемое в X . Построив коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 E' : 0 \rightarrow \bigcirc_K H_J \rightarrow X & \xrightarrow{\bigoplus_{J \times K} H_J} & M \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & \downarrow & \parallel \\
 E : 0 \rightarrow H & \rightarrow & X & \rightarrow & M \rightarrow 0
 \end{array}$$

с точными строками, получаем, что $k(E') = E$, т. е. k — эпиморфизм. Если же для некоторого $E_1 \in \bigcirc_K \text{Ext}_R^1(M, H_J) =$

$\text{Ext}_R^1(M, H_J)$, где K — конечное подмножество в J , имеем $k(E_1) = 0$, то получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_1 : 0 \rightarrow & H_J & \rightarrow & X_1 & \rightarrow & M & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow i & & \downarrow & & \parallel & \\
 0 \rightarrow & H & \rightarrow & X & \rightarrow & M & \rightarrow 0,
 \end{array}$$

в которой нижняя строка расщепляется. Так как i — расщепляющийся мономорфизм, то и E_1 расщепляется. Таким образом, k — мономорфизм.

Теперь общий случай выводится из рассмотренного выше аналогично доказательству [3, теорема 10].

Замечая, что сейчас ввиду [6, теорема 6.1] чистота Кона совпадает с нулевой чистотой, аналогично [3, лемма 11] получаем

Предложение 3. Пусть ω — произвольная чистота в $\text{Mod } R$. Тогда любая ω -чистая последовательность является прямым пределом ω -чистых последовательностей из $\text{mod } R$. В частности, любая индуктивная чистота в $\text{Mod } R$ однозначно определяется своим ограничением на подкатегорию $\text{mod } R$.

Гомоморфизм $f: A \rightarrow B$ в $\text{mod } R$ называется неприводимым [11], если f не является ни расщепляющимся мономорфизмом, ни расщепляющимся эпиморфизмом и для любого представления $f = gh$ в виде произведения гомоморфизмов в $\text{mod } R$ либо g — расщепляющийся эпиморфизм, либо h — расщепляющийся мономорфизм.

Предложение 4 [11, теорема 2.4]. Для ненулевого гомоморфизма $f: A \rightarrow B$ в $\text{mod } R$, где B — неразложимый непроективный модуль, равносильны следующие условия:

- f неприводим;
- существует гомоморфизм $f': A' \rightarrow B$ такой, что

$$0 \rightarrow \text{Ker}(f, f') \rightarrow A \xrightarrow{(f, f')} B \rightarrow 0 -$$

почти расщепляемая последовательность.

Предложение 5 [16, лемма 12]. Пусть R — артиново справа кольцо и пусть $\{M_j | j \in J\}$ — множество неразложимых модулей таких, что для некоторого числа m длина модуля $l(M_j) \leq m$ для любого $j \in J$. Тогда существует число n такое, что для любых неизоморфизмов $f_k: M_{j_k} \rightarrow M_{j_{k+1}}$ ($k = 1, 2, \dots$) имеем $f_n \dots f_2 f_1 = 0$ (здесь необязательно $M_{j_k} \neq M_{j_l}$).

Рассмотрим нерасщепляемую точную последовательность

$$E: 0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\rho} C \rightarrow 0,$$

в которой A, C — неразложимые модули. Пусть

$$E_C: 0 \rightarrow \tau C \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n C_i \xrightarrow{(f_i)} C \rightarrow 0$$

почти расщепляемая последовательность, оканчивающаяся в C , где C_i — неразложимые модули. Тогда можно построить следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} E: 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\sigma} & B & \xrightarrow{\rho} & C \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \lambda & & \parallel \\ E_C: 0 & \rightarrow & \tau C & \rightarrow & \bigoplus C_i & \xrightarrow{(f_i)} & C \rightarrow 0, \end{array}$$

а также для любого i коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} Ef_i: 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\sigma_i} & B_i & \xrightarrow{\rho_i} & C_i \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \mu_i & \downarrow f_i & \\ E: 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\sigma} & B & \xrightarrow{\rho} & C \rightarrow 0 \end{array} \quad (2)$$

с точными строками.

Лемма 6. В указанных выше обозначениях последовательность E является ω -чистой тогда и только тогда, когда ω -чистыми являются последовательности E_C и Ef_i , $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Если E — ω -чистая последовательность, то из того, что $(f_i)\lambda = \rho$, $\mu_i \sigma_i = \sigma$, ввиду битреугольности чистоты ω [5, 6] получаем, что (f_i) и σ_i — ω -чистые гомоморфизмы, т. е. последовательности E_C и Ef_i ($i = 1, \dots, n$) ω -чисты. Обратно, пусть E_C, Ef_i , $i = 1, \dots, n$, — ω -чистые последовательности. Тогда из [5, (1.1) и Ч 4*] следует, что эпиморфизм $\varphi = (f_i) \left(\bigoplus \rho_i \right)$ ω -чист. Так как $\varphi = (f_i \rho_i) = \rho (\mu_i)$, то из котреугольности чистоты ω [5, 6] следует, что E — ω -чистая последовательность.

Лемма 7. В прежних обозначениях если для любого i последовательность Ef_i расщепляется, то $E \simeq E_C$.

Доказательство. Пусть $h: X \rightarrow C$ — гомоморфизм, не являющийся расщепляющимся эпиморфизмом. По определению почти расщепляемой последовательности существует гомоморфизм $(h'_1, \dots, h'_n): X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n C_i$ такой, что $h = \sum_{i=1}^n f_i h'_i$.

С другой стороны, из расщепляемости Ef_i следует существование гомоморфизмов $f'_i: C_i \rightarrow B$ таких, что $\rho f'_i = f_i, i=1, \dots, n$. Следовательно, $h = \rho \sum_{i=1}^n f'_i h'_i$. Таким образом, E — почти

расщепляемая последовательность, и в силу единственности почти расщепляемой последовательности, оканчивающейся в C , $E \simeq E_C$.

Пусть I' — подмножество, состоящее из $i \in \{1, \dots, n\}$ таких, что последовательности Ef_i не расщепляются. Рассмотрим почти расщепляемые последовательности

$$E_{C_i}: 0 \rightarrow \tau C_i \rightarrow \bigoplus_{j \in I_i} C_{ij} \xrightarrow{(f_{ij})} C_i \rightarrow 0 \quad (i \in I')$$

и построим коммутативную диаграмму, аналогичную диаграмме (2):

$$\begin{array}{ccccccc} Ef_i f_{ij}: 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B_{ij} & \rightarrow & C_{ij} \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow f_{ij} \\ Ef_i: 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B_i & \rightarrow & C_i \rightarrow 0. \end{array} \quad (i \in I', j \in I_i)$$

Для тех i, j , для которых последовательность $Ef_i f_{ij}$ не расщепляется, почти расщепляемые последовательности $E_{C_{ij}}$ позволяют продолжить описанный процесс. Ввиду предложения 4 гомоморфизмы $f_i, f_{ij}, \dots$ неприводимы, поэтому из предложения 5 следует, что этот процесс обрывается. В конце каждой цепочки гомоморфизмов $f_i, f_{ij}, \dots$, на предпоследнем шагу получается нерасщепляемая последовательность, обладающая тем свойством, что применение к ней неприводимых гомоморфизмов, определяемых соответствующей почти расщепляемой последовательностью, приводит к расщепляемым последовательностям. Из леммы 7 следует, что такая последовательность является почти расщепляемой. Все почти расщепляемые последовательности, полученные в описанном выше процессе, назовем индуцированными данной последовательностью E .

С помощью простого индуктивного рассуждения из леммы 6 выводится

Предложение 8. Пусть ω — произвольная чистота в $\text{mod } R$. Нерасщепляемая точная последовательность

$$E: 0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0,$$

где A, C — неразложимые модули, является ω -чистой тогда и только тогда, когда все почти расщепляемые последовательности, индуцированные последовательностью E , ω -чисты.

Теорема 9. Пусть R — кольцо конечного типа представлений, ω — индуктивная чистота в $\text{Mod } R$.

а) модуль M является ω -инъективным тогда и только тогда, когда $M \sim \bigoplus_{j \in J} M_j$, где M_j — неразложимые модули такие, что либо M_j инъективен, либо $M_j \in \Gamma_1(\omega)$;

б) модуль M является ω -проективным тогда и только тогда, когда $M \simeq \bigoplus_{j \in J} M_j$, где M_j — неразложимые модули такие, что либо M_j проективен, либо $M_j \in \Gamma_2(\omega)$.

Доказательство. а. Пусть $M = \bigoplus_j M_j$, M_j — неразложимые модули, и если M_j неинъективен, то $E^{M_j} \notin \Lambda(\omega)$. Докажем сначала, что для любого j модуль M_j ω -инъективен. Действительно, если ω -чистая точная последовательность

$$E: 0 \rightarrow M_j \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow 0, \quad (3)$$

где X — конечно-порожденный модуль, то она должна расщепляться, так как в противном случае дуально доказательству леммы 6 получили бы, что $E^{M_j} \in \Lambda(\omega)$. Далее, если в ω -чистой последовательности (3) X — произвольный модуль, то рассмотрим его представление в виде прямой суммы $X = \bigoplus_{k \in K} X_k$, где X_k — конечно-порожденные модули. Существует конечное подмножество $K' \subset K$ такое, что $M_j \subset \bigoplus_{k \in K'} X_k$, $X_k = X'_k$. Так как M_j — ω -чистый подмодуль в X' , то M_j — прямое слагаемое в X' , а следовательно, и в X .

Пусть теперь дана ω -чистая последовательность $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow 0$. Для любого j модуль M_j ω -чист в X , а по доказанному выше M_j — прямое слагаемое в X . Следовательно, M чист по Кону в X [6, § 6], а тогда M — прямое слагаемое в X . Таким образом, M — ω -инъективный модуль.

Обратное утверждение тривиально.

б) Ввиду [5, (1.5)] достаточно рассмотреть случай, когда M — неразложимый модуль. Пусть последовательность

$E_M: 0 \rightarrow \tau M \rightarrow N \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$ не принадлежит $\Delta(\omega)$, и дана ω -чистая нерасщепляемая последовательность $E: 0 \rightarrow X \rightarrow Y \xrightarrow{\rho} M \rightarrow 0$. Пусть $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$, Y_j — конечно-порожденные модули, $\lambda_j: Y_j \rightarrow Y$ вложение в качестве прямого слагаемого. Так как $\rho \lambda_j$ ($j \in J$) не является расщепляющим эпиморфизмом, то существует гомоморфизм $\mu_j: Y_j \rightarrow N$ такой, что $\varphi \mu_j = \rho \lambda_j$. Пусть $\mu: Y \rightarrow N$ — гомоморфизм такой, что $\mu \lambda_j = \mu_j$ ($j \in J$). Тогда $\varphi \mu = \rho$. Из котреугольности чистоты ω вытекает, что $E_M \in \Delta(\omega)$. Полученное противоречие означает, что модуль M ω -проективен.

Доказательство теоремы 1. Докажем сначала вторую часть теоремы. Пусть ω — индуктивная чистота в $\text{Mod } R$.

а) Рассмотрим чистоту ω_1 , инъективно порожденную множеством $\Gamma_1(\omega)$. Из теоремы 9 следует, что $\omega \subset \omega_1$. Так как ω_1 Σ -замкнута [6, предложение 3.2] и содержит чистоту Кона, то из [6, предложение 7.1] следует, что ω_1 — индуктивная чистота. Таким образом, ввиду предложения 3 достаточно доказать совпадение ω и ω_1 на $\text{mod } R$.

Пусть $E: 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ — ω_1 -чистая нерасщепляемая последовательность, в которой A, C — неразложимые модули. По предложению 8 ω_1 -чисты все почти расщепляемые последовательности, индуцированные последовательностью E . Тогда все модули, в которых начинаются эти почти расщепляемые последовательности, не принадлежат множеству $\Gamma_1(\omega)$, а потому эти последовательности ω -чисты. Вновь применяя предложение 8, получим, что E — ω -чистая последовательность.

б) Пусть ω_1 — чистота, проективно порожденная множеством $\Gamma_2(\omega)$. Из [6, предложение 1.2 и предложение 7.1] следует, что ω_1 индуктивна. Совпадение ω и ω_1 на $\text{mod } R$ доказывается дуально части а) потому что $\omega = \omega_1$.

в) В части б) доказано, что точная последовательность $E: 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ в $\text{Mod } R$ является ω -чистой тогда и только тогда, когда для любого $M \in \Gamma_2(\omega)$ точна последовательность $\text{Hom}_R(M, E)$:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, A) \rightarrow \text{Hom}_R(M, B) \rightarrow \text{Hom}_R(M, C) \rightarrow 0.$$

Ввиду [6, следствие 5.1] последнее условие равносильно тому, что для любого $N \in \Delta(\omega)$ точна последовательность

$$E \otimes_R N: 0 \rightarrow A \otimes_R N \rightarrow B \otimes_R N \rightarrow C \otimes_R N \rightarrow 0.$$

Докажем теперь первую часть теоремы 1. Пусть $\Lambda \subset \Lambda(R)$ и пусть $\Gamma(\Lambda)$ — множество, состоящее из неразложимых неинъективных модулей M таких, что $E^M \notin \Lambda$. Тогда через $\omega(\Lambda)$ обозначим чистоту, инъективно порожденную множеством $\Gamma(\Lambda)$. С использованием второй части теоремы 1 легко доказывается, что соответствия $\omega \rightarrow \Lambda(\omega)$ и $\Lambda \rightarrow \omega(\Lambda)$ взаимно обратны.

Из доказательства теоремы 1 получаем

Следствие 10. Пусть R — кольцо конечного типа представлений. Тогда любая проективно (инъективно) порожденная чистота в $\text{Mod } R$ индуктивна.

Следствие 11. Соответствие $\omega \rightarrow \Lambda(\omega)$ является взаимно однозначным соответствием между произвольными чистотами в $\text{mod } R$ и подмножествами множества $\Lambda(R)$.

Из теоремы 1 и [6, предложения 2.1 и 3.3] вытекает

Следствие 12. Любая индуктивная чистота в $\text{Mod } R$ является инъективной и проективной.

§ 2

В этом параграфе R обозначает конечномерную алгебру над алгебраически замкнутым полем k .

Колчаном Габриеля Q_R алгебры R называется ориентированный граф, множеством вершин которого является множество P представителей классов изоморфных неразложимых проективных модулей, а стрелка $A \rightarrow B$ ($A, B \in P$) имеется в точности тогда, когда $\text{Ext}_R(A/\text{Rad } A, B/\text{Rad } B) \neq 0$.

Р. Габриелем [14, 1.2] доказано, что наследственная алгебра R имеет конечный тип представления тогда и только тогда, когда Q_R — несвязное объединение ориентированных графов, для которых соответствующие неориентированные графы являются схемами Дынкина типов A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$), E_6 , E_7 или E_8 .

Далее предполагаем, что R — двусторонне неразложимая наследственная k -алгебра конечного типа представлений.

Сопоставим алгебре R колчан Ауслендера — Райтена Γ_R [15]: множество его вершин — это $\text{ind } R$, а стрелка $M \rightarrow N$ имеется в точности тогда, когда существует неприводимое отображение $f: M \rightarrow N$. Колчан Γ_R содержит полную информацию о множестве $\Lambda(R)$: если $N_i \rightarrow N$, $i = 1, \dots, n$, — все стрелки в Γ_R , оканчивающиеся в N , и $f_i: N_i \rightarrow N$ — соответствующие неприводимые гомоморфизмы, то для непроективного модуля N

$$0 \rightarrow \pi N \xrightarrow[\vee]{(g_i) \pi} N \xrightarrow{f_i} N \rightarrow 0$$

почти расщепляемая последовательность. Гомоморфизмы g_i , соответствующие всем стрелкам в Γ_R , начинающимся в τN , обоначим через $g_i \circ f_i$.

Метод построения колчана Γ для рассматриваемых алгебр R предложен в [15, 6.5]. Если колчан Q имеет тип A , D_n , E_6 , E_7 или E_8 , то $\text{ind} R$ имеет мощность $\frac{n(n+1)}{2}$, $n(n-1)$, 36, 63 или 120 соответственно [14]. Таким образом, для этих случаев мощность множества $\Lambda(R)$ равна соответственно $\frac{n(n-1)}{2}$, $n(n-2)$, 30, 56 или 112. Из вида Γ_R можно непосредственно получать описание всех чистот в $\text{mod} R$.

Пример. Пусть R — наследственная алгебра с колчаном Габриеля $Q_R: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 4$. Тогда (см. [15]) Γ_R имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} P_3 & = & \tau^2 I_3 & \rightarrow & P_4 & = & \tau^2 I_4 \\ \sigma^3 \sigma \downarrow & & & & \downarrow & & \sigma^2 \beta \\ P_2 & = & \tau I_2 & \xrightarrow{\sigma \alpha} & \tau I_3 & \xrightarrow{\sigma \beta} & \tau I_4 \\ \downarrow & & & & \downarrow \sigma \alpha & & \downarrow \beta \\ P_1 & = & \tau I_1 & \xrightarrow{\alpha} & I_2 & \xrightarrow{\alpha} & I_3 \rightarrow I_4 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & I_1 & & \end{array}$$

где I_i (P_i), $i=1, 2, 3, 4$, — неразложимые инъективные (соответственно проективные) модули.

Если фиксировать $\Lambda = \{E_{\tau I_i}, E_{\tau I_j}, E_I\}$, то ограничение $\omega(\Lambda)$ на $\text{mod} R$ состоит в точности из конечных прямых сумм расщепляющихся последовательностей, последовательностей из Λ , а также последовательностей

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \tau^2 I_3 \xrightarrow{\sigma^2 \alpha} \tau I_2 \xrightarrow{\sigma \beta \cdot \sigma \alpha} \tau I_4 \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \tau I_4 \xrightarrow{\sigma \alpha \cdot \sigma^2 \beta} I_2 \xrightarrow{\alpha} I_3 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Генералов А. И. Индуктивные чистоты в категории модулей — Сиб мат. ж., 1983, т. 24, № 4, с. 201—205.

2. Генералов А. И. Модули, инъективные относительно индуктивных чистот. — XVII Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений. Часть 2. Минск, 1983, с. 46—47.

3. Кузьминов В. И. О группах чистых расширений.— Сиб. мат. ж., 1976, т. 17, № 6, с. 1308—1320.
4. Мановцев А. А. Индуктивные чистоты в абелевых группах.— Мат. сб., 1975, т. 96, № 3, с. 414—446.
5. Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули.— М.: Наука, 1969.— 151 с.
6. Скляренок Е. Г. Относительная гомологическая алгебра в категории модулей.— Успехи мат. наук, 1978, т. 33, № 3, с. 85—120.
7. Скляренок Е. Г. К теореме Мановцева.— Кузьминова.— Сиб. мат. ж., 1981, т. 22, № 1, с. 144—150.
8. Фейс К. Алгебра: кольца, модули, и категории.— М.: Мир, 1979, т. 2.— 463 с.
9. Auslander M. Representation theory of artin algebras, II.— Commun. Algebra, 1974, v. 1, N 4, p. 269—310.
10. Auslander M., Reiten I. Representation theory of artin algebras, III.— Commun. Algebra, 1975, v. 3, N 3, p. 239—294.
11. Auslander M., Reiten I. Representation theory of artin algebras, IV.— Commun. Algebra, 1977, v. 5, N 5, p. 443—518.
12. Brune H. On the global dimension of the functor category $(\text{mod}-R)^{\text{op}}, \text{Ad}$ and a theorem of Kulikov.— J. pure appl. algebra, 1983, v. 28, N 1, p. 31—39.
13. Eisenbud D., Griffith P. The structure of serial rings.— Pacific J. Math., 1971, v. 36, N 1, p. 109—121.
14. Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen, I.— Manuscr. Math., 1972, v. 6, N 1, p. 71—103.
15. Gabriel P. Auslander-Reiten sequences and representation—finite algebras.— Lect. Notes Math., 1980, N 831, p. 1—71.
16. Harada M., Sai Y. On categories of indecomposable modules, I.— Osaka J. Math., 1970, v. 7, N 2, p. 323—344.
17. Ringel C. M., Tachikawa H. QF-3 rings.— J. reine angew. Math., 1975, v. 272, p. 49—72.
18. Yamagata K. On artinian rings of finite representation type.— J. Algebra, 1978, v. 50, N 2, p. 276—283.

ФУНКТОР HF В КАТЕГОРИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

С. И. Комаров

Работа посвящена изучению определяемого ниже в категории A всех абелевых групп функтора HF. При помощи функтора HF в категории A определяется функтор NHF, свойства которого изучаются в § 2 данной работы. Оказывается, что при помощи функтора NHF в категории абелевых групп выделяются некоторые известные классы абелевых групп — узкие группы, проективные группы для чистоты Кепка.

§ 1

Зафиксируем две группы A и B . Хорошо известно, что для многих гомоморфизмов $\varphi: A \rightarrow B$ диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \downarrow \varphi & & \\ G \xrightarrow{\psi} B \rightarrow 0 \end{array} \quad (1)$$

с точной строкой нельзя дополнить до коммутативной некоторым гомоморфизмом из A в G . Однако для некоторых гомоморфизмов из A в B , каково бы ни было накрытие $G \xrightarrow{\psi} B \rightarrow 0$, существует гомоморфизм из A в G , дополняющий диаграмму (1) до коммутативной. Тривиальный пример — гомоморфизм φ нулевой. Гомоморфизмы из A в B с указанным свойством будем называть свободными гомоморфизмами или HF-гомоморфизмами. Множество всех HF-гомоморфизмов из A в B обозначим $\text{HF}(A, B)$. Следующее утверждение указывает на различные способы определения HF-гомоморфизмов.

Теорема 1. Для гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ эквивалентны следующие условия:

1) φ — свободный гомоморфизм;

2) существует накрытие $G \xrightarrow{\psi} B \rightarrow 0$, где G — свободная группа, для которого диаграмму (1) можно дополнить до коммутативной;

3) для любого накрытия $G \xrightarrow{\psi} B \rightarrow 0$ имеем $\varphi \in \text{Im } \psi_*$, где $\psi_*: \text{Hom}(A, G) \rightarrow \text{Hom}(A, B)$ — индуцированный гомоморфизм (см. [1, с. 216]);

4) существует накрытие $G \xrightarrow{\psi} B \rightarrow 0$, где G — свободная группа, для которого $\varphi \in \text{Im } \psi_*$;

5) для группы A существует разложение $A = K \oplus F$, где $\varphi(K) = 0$; F — свободная группа.

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 3), а также 2) и 4) — это просто переход от языка диаграмм к языку последовательностей для Hom и обратно. Следствие 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 5). Пусть $\alpha: A \rightarrow G$ — гомоморфизм в свободную группу G , дополняющий диаграмму (1) до коммутативной. Так как G — свободная группа, то существует разложение $A = K \oplus F$, где $\alpha(K) = 0$; F — свободная группа. Далее, $\varphi = \psi\alpha$, поэтому $\text{Ker } \alpha \subseteq \text{Ker } \varphi$. Таким образом, указанное для A разложение удовлетворяет пункту 5).

Пусть теперь для гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ имеет место разложение $A = K \oplus F$, где $\varphi(K) = 0$; F — свободная группа. Тогда дополняемость диаграммы (1) до коммутативной следует из дополняемости до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{c} F \\ \downarrow \varphi|_F \\ G \xrightarrow{\psi} B \rightarrow 0. \end{array}$$

Дополняемость последней диаграммы со свободной группой F до коммутативной общеизвестна. Этим доказана импликация 5) $\Rightarrow$ 1). Ясно, что указанных импликаций достаточно для эквивалентности всех предложений теоремы 1.

В этой работе мы в основном для определения свободного гомоморфизма будем пользоваться условием 5) теоремы 1. Разложение $A = K \oplus F$ для гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow B$, где $\varphi(K) = 0$, а F — свободная группа, будем называть разложением, доказывающим свободу гомоморфизма φ .

Очень важно следующее простое следствие, использую-

щее, например, условие 3) для свободного гомоморфизма из теоремы 1.

Предложение 2. $\text{HF}(A, B)$ — подгруппа в $\text{Hom}(A, B)$.

Пример 1. Очевидно, что для свободной группы A ранга m $\text{HF}(A, B) = \text{HF}(+Z, B) = \text{Hom}(+Z, B) \cong \text{PB}$.

Пример 2. Если B — свободная группа, то опять, очевидно, $\text{HF}(A, B) = \text{Hom}(A, B)$.

Предложение 3. 1) $\text{HF}(A, B) = \text{Hom}(A, B)$ для фиксированной группы A и произвольной группы B в том и только том случае, если A является свободной группой.

2) $\text{HF}(A, B) = \text{Hom}(A, B)$ для произвольной группы A и фиксированной группы B в том и только том случае, если B является свободной группой.

Доказательство. Достаточность уже отмечалась. Необходимость в обоих случаях следует из того, что тождественное отображение A в A (соответственно B в B) может быть свободным гомоморфизмом, только если A (соответственно B) — свободная группа, так как в соответствующем разложении в прямую сумму, доказывающем свободу тождественного отображения, одно слагаемое нулевое, а другое свободное.

Теперь укажем, когда подгруппа $\text{HF}(A, B)$ будет нулевой.

Предложение 4. Для ненулевой группы B эквивалентны равенства $\text{HF}(A, B) = 0$ и $\text{Hom}(A, Z) = 0$.

Доказательство. Если $\text{Hom}(A, Z) \neq 0$, то существует разложение $A = K \oplus F$, где $F \cong Z$. Тогда любой ненулевой гомоморфизм $\alpha: F \rightarrow B$ (очевидно, существующий) порождает гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow B$, для которого $\varphi(K) = 0$. Разложение $A = K \oplus F$ доказывает свободу $\varphi \neq 0$. Таким образом, если $\text{HF}(A, B) = 0$, то и $\text{Hom}(A, Z) = 0$.

Если $\text{Hom}(A, Z) = 0$, то единственным разложением, доказывающим свободу какого-либо гомоморфизма, может быть только $A = A + 0$. Следовательно, существует единственный свободный гомоморфизм — нулевой.

Многие элементарные свойства группы $\text{HF}(A, B)$ индуцируются соответствующими свойствами $\text{Hom}(A, B)$ (см. [1, с. 213, А), Б), В), Д)). В частности, если B — группа без кручения, то это же имеет место для группы $\text{HF}(A, B)$. Пункт Г) из [1, с. 213] (о делимости группы Hom) имеет место и для группы $\text{HF}(A, B)$ в силу следующего утверждения.

Предложение 5. $\text{HF}(A, B)$ — сервантная подгруппа в $\text{Ном}(A, B)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \text{Ном}(A, B)$, а $n\varphi \in \text{HF}(A, B)$ для некоторого натурального n . Существует разложение $A = K + F$, где $n\varphi(K) = 0$; F — свободная группа, доказывающая свободу $n\varphi$. Рассмотрим гомоморфизм $\psi: A \rightarrow B$ такой, что $\psi(k) = 0$, если $k \in K$, и $\psi(f) = \varphi(f)$, если $f \in F$. Очевидно, гомоморфизм свободный и при этом $n\varphi = n\psi$.

Теперь мы начнем изучать последовательности для HF , связанные с последовательностью

$$E: 0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0. \quad (2)$$

Хорошо известно, что если последовательность (2) точна, то для любой группы G точны индуцированные последовательности:

$$0 \rightarrow \text{Ном}(C, G) \xrightarrow{\beta^*} \text{Ном}(B, G) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Ном}(A, G), \quad (3)$$

$$0 \rightarrow \text{Ном}(G, A) \xrightarrow{\alpha_*} \text{Ном}(G, B) \xrightarrow{\beta_*} \text{Ном}(G, C), \quad (4)$$

где β^* , α^* , α_* и β_* — соответствующие индуцированные гомоморфизмы (см. [1, с. 216, теорема 44.4]).

Пусть $\alpha: A \rightarrow B$ — гомоморфизм, α^* и α_* — индуцированные гомоморфизмы для Ном . Тогда имеет место

Теорема 6. $\alpha^*(\text{HF}(B, G)) \subseteq \text{HF}(A, G)$,

$$\alpha_*(\text{HF}(G, A)) \subseteq \text{HF}(G, B).$$

Доказательство. Нужно показать, что для $\varphi \in \text{HF}(B, G)$ и $\psi \in \text{HF}(G, A)$ получаем $\alpha^*(\varphi) \in \text{HF}(A, G)$ и $\alpha_*(\psi) \in \text{HF}(G, B)$.

Сначала пусть $\varphi \in \text{HF}(B, G)$. Имеем разложение $B = K + F$, где $\varphi(K) = 0$; F — свободная группа. Пусть π — проекция B на F , тогда $\pi\alpha$ — гомоморфизм из A в F . Следовательно, $A = K' + F'$, где $K' = \text{Кер}\pi\alpha$; $F' \cong \text{Im}\pi\alpha$ — свободная группа. Очевидно, $\alpha(K') \subseteq K$, поэтому $\varphi\alpha(K') = 0$, откуда видно, что разложение $A = K' \oplus F'$ доказывает свободу гомоморфизма $\varphi\alpha = \alpha^*(\varphi)$.

Теперь пусть $\psi \in \text{HF}(G, A)$. Имеем разложение $G = K + F$, где $\psi(K) = 0$; F — свободная группа. Очевидно, $\alpha\psi(K) = 0$, откуда разложение $G = K + F$ доказывает свободу гомоморфизма $\alpha\psi = \alpha_*(\psi)$.

Теорема 6 позволяет определить для гомоморфизма $\alpha: A \rightarrow$

$\rightarrow B$ индуцированные гомоморфизмы для любой группы G , являющиеся сужением гомоморфизмов α^* и α_* с группы Hom на подгруппу HF :

$$\alpha_{\text{HF}}^* : \text{HF}(B, G) \rightarrow \text{HF}(A, G),$$

$$\alpha_{\text{HF}}^{\text{HF}} : \text{HF}(G, A) \rightarrow \text{HF}(G, B).$$

Теперь у нас для любой группы G и последовательности (2) возникают две последовательности:

$$0 \rightarrow \text{HF}(C, G) \xrightarrow{\beta_{\text{HF}}^*} \text{HF}(B, G) \xrightarrow{\alpha_{\text{HF}}^*} \text{HF}(A, G), \quad (5)$$

$$0 \rightarrow \text{HF}(G, A) \xrightarrow{\alpha_{\text{HF}}^{\text{HF}}} \text{HF}(G, B) \xrightarrow{\beta_{\text{HF}}^{\text{HF}}} \text{HF}(G, C). \quad (6)$$

Теорема 44.4 из [1] о точности Hom сразу позволяет утверждать, что β_{HF}^* и $\alpha_{\text{HF}}^{\text{HF}}$ — мономорфизмы (последовательности (5) и (6) точны в первом «ненулевом» члене), а также $\alpha_{\text{HF}}^* \beta_{\text{HF}}^* = 0$ и $\beta_{\text{HF}}^{\text{HF}} \alpha_{\text{HF}}^{\text{HF}} = 0$.

Мы хотим выяснить большее о последовательностях (5) и (6). Для чего докажем несколько лемм.

Лемма 7. Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \psi & G \\ & \swarrow & \downarrow \varphi \\ 0 \rightarrow A & \xrightarrow{a} & B \end{array}$$

с точной строкой. Тогда если $\varphi \in \text{HF}(G, B)$, то $\psi \in \text{HF}(G, A)$.

Доказательство. Очевидно, так как в этом случае $\text{Ker} \psi = \text{Ker} \varphi$, и разложение, доказывающее свободу гомоморфизма φ , доказывает свободу гомоморфизма ψ .

Для точной последовательности (2) и произвольной группы G существует естественный гомоморфизм $E_* : \text{Hom}(G, C) \rightarrow \text{Ext}(G, A)$, связывающий соответствующие короткие точные последовательности для Hom и Ext в одну точную длинную последовательность (см. [1, теорема 51.3]). Как действует E_* на $\text{HF}(G, C)$?

Лемма 8. $E_*(\text{HF}(G, C)) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & & \downarrow \varphi & & \\ E : 0 \rightarrow A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{\beta} & C \rightarrow 0 \end{array} \quad (7)$$

с точной строкой, где $\varphi \in \text{HF}(G, C)$. Используя определение свободного гомоморфизма, получаем гомоморфизм $\psi: G \rightarrow B$, дополняющий диаграмму (7) до коммутативной. Но существование такого гомоморфизма означает, что последовательность $E\varphi$ расщепляется (см. [1, лемма 51.2]), то есть $E_*(\varphi) = 0$.

Обозначим сужение E_* на $\text{HF}(G, C)$ через E_*^{HF} . Тогда доказанная лемма означает, что $\text{Im} E_*^{\text{HF}} = 0$.

Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & & \downarrow \psi & & \\ E: 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0 \end{array} \quad (8)$$

с точной строкой. Оказывается, что если композиция $\beta\psi$ является свободным гомоморфизмом из G в C , то ψ можно представить некоторым специальным образом.

Лемма 9. Если в диаграмме (8) гомоморфизм $\beta\psi$ свободен, то существуют гомоморфизмы $\gamma \in \text{Hom}(G, A)$ и $\psi_0 \in \text{HF}(G, B)$ такие, что $\psi = \alpha\gamma + \psi_0$.

Доказательство. Так как $\beta\psi \in \text{HF}(G, C)$, то существует разложение $G = K + F$, где $\beta\psi(K) = 0$; F — свободная группа. Из диаграммы (8) тогда получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & K & & \\ & & \downarrow \psi|_K & & \\ E: 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B \rightarrow C \rightarrow 0, \end{array}$$

где $\psi|_K$ — сужение ψ на K . Ясно, что $\beta\psi|_K = 0$. Поэтому существует такой гомоморфизм $\tau: K \rightarrow A$, что $\alpha\tau = \psi|_K$ (см. лемму 2.1 из [1]). Естественно, так как K — прямое слагаемое в G , гомоморфизм τ порождает гомоморфизм $\gamma: G \rightarrow A$, для которого $\gamma(F) = 0$ и $\gamma(k) = \tau(k)$, если $k \in K$. Положим $\psi_0 = \psi - \alpha\gamma$. Рассмотрим $k \in K$, $(\psi - \alpha\gamma)(k) = \psi(k) - \alpha\gamma(k) = \psi|_K(k) - \alpha\tau(k) = (\psi|_K - \alpha\tau)(k) = 0$. Значит, $\psi_0(k) = 0$, поэтому разложение $G = K + F$ доказывает свободу гомоморфизма ψ_0 .

Следствие 10. Если в диаграмме (7) с точной строкой E гомоморфизм φ свободен, то существует гомоморфизм $\psi_0 \in \text{HF}(G, B)$, дополняющий диаграмму (7) до коммутативной.

Доказательство. По условию существует такой гомоморфизм $\psi: G \rightarrow B$, что $\varphi = \beta\psi$. По лемме 9 $\psi = \alpha\gamma + \psi_0$, где $\gamma \in \text{Hom}(G, A)$ и $\psi_0 \in \text{HF}(G, B)$, так как $\beta\psi \in \text{HF}(G, C)$. Тогда

да $\varphi(\beta(\alpha\gamma + \psi_0)) = \beta\alpha\gamma + \beta\psi_0 = \beta\psi_0$, откуда видно, что ψ_0 — иско-
мый гомоморфизм.

Теперь мы в состоянии доказать основной результат о
последовательности (6).

Теорема 11. Для точной последовательности (2) и для
любой группы G точна индуцированная последовательность

$$0 \rightarrow \text{HF}(G, A) \xrightarrow{\alpha^{\text{HF}}} \text{HF}(G, B) \xrightarrow{\beta^{\text{HF}}} \text{HF}(G, C) \xrightarrow{\gamma^{\text{HF}}} 0.$$

Доказательство. Так как точна последовательность
(4), то нужно показать; а) $\text{Ker } \beta^{\text{HF}} \subseteq \text{Im } \alpha^{\text{HF}}$; б) точность в
члене $\text{HF}(G, C)$.

а. Пусть $\psi \in \text{Ker } \beta^{\text{HF}}$. Тогда $\psi \in \text{HF}(G, B)$, $\beta\psi = 0$. Рассмотрим
диаграмму (8). По лемме 2.1 из [1] существует такой
гомоморфизм $\gamma: G \rightarrow A$, что $\alpha\gamma = \psi$. По лемме 7 γ — свобод-
ный гомоморфизм. Таким образом, $\psi = \alpha^{\text{HF}}(\gamma)$, то есть $\psi \in$
 $\text{Im } \alpha^{\text{HF}}$. Следовательно, $\text{Ker } \beta^{\text{HF}} \subseteq \text{Im } \alpha^{\text{HF}}$.

б. В силу леммы 8 для точности в члене $\text{HF}(G, C)$ доста-
точно показать, что β^{HF} — эпиморфизм. Но это фактически
утверждается в следствии 10. Теорема доказана.

К сожалению, последовательность (5) в общем случае не
обязана быть точной.

Предложение 12. При фиксированной группе G по-
следовательность (5) точна для любой точной последователь-
ности (2) в том и только том случае, если G — свободная
группа.

Доказательство. Пусть G — несвободная группа, яв-
ляющаяся эпиморфным образом свободной группы F с ядром
 R . Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow R \rightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \oplus F \xrightarrow{\beta} G \oplus G \rightarrow 0$$

с естественными гомоморфизмами. Далее рассмотрим гомо-
морфизм $\gamma: G + G \rightarrow G$, являющийся проекцией на первую ком-
поненту суммы $G + G$. Тогда $\text{Ker } \gamma$ — это вторая компонента
этой суммы. Очевидно, гомоморфизм $\gamma\beta$ является свободным
(так как $F \oplus F$ — свободная группа), $\gamma\beta \in \text{Ker } \alpha^{\text{HF}}$, так как
 $\gamma\beta\alpha = 0$. Далее, $\gamma\beta = \beta^*(\gamma)$, где $\gamma \in \text{Hom}(G \oplus G, G)$. Других
прообразов, кроме γ , у гомоморфизма $\gamma\beta \in \text{HF}(F \oplus F, G)$ нет
(β^* — мономорфизм). Гомоморфизм γ при этом не является
свободным: если $G + G = K \oplus H$, где $\gamma(K) = 0$; H — свободная

группа, то K содержится во втором слагаемом суммы $G \oplus G$, значит, первое слагаемое этой суммы в пересечении с K дает 0, поэтому изоморфно подгруппе свободной группы H — противоречие с выбором несвободной группы G . Итак, γ — не HF -гомоморфизм. Это показывает, что не всякий гомоморфизм из $\text{Ker } \alpha_{\text{HF}}^*$ принадлежит $\text{Im } \beta_{\text{HF}}^*$. Таким образом, необходимость условия предложения 12 доказана. Достаточность этого условия следует из того, что для свободной группы G и любой группы M имеем $\text{Hom}(M, G) = \text{HF}(M, G)$. Поэтому последовательность (5) превращается в последовательность (3), точность которой общеизвестна.

Укажем теперь на тот случай, когда последовательность (5) будет точной. Для этого заметим, что $\text{Ker } \alpha_{\text{HF}}^* = \text{Ker } \alpha^* \cap \cap \text{HF}(B, G) = \text{Im } \beta^* \cap \text{HF}(B, G)$, а $\text{Im } \beta_{\text{HF}}^* = \text{Im } \beta_{\text{HF}}^* \cap \text{HF}(B, G)$. Тем самым если $\text{Im } \beta_{\text{HF}}^* = \text{Im } \beta^*$, то $\text{Ker } \alpha_{\text{HF}}^* = \text{Im } \beta_{\text{HF}}^*$, и последовательность (5) оказывается точной. Равенство $\text{Im } \beta^* = \text{Im } \beta_{\text{HF}}^*$ выполнено, когда $\beta_{\text{HF}}^* = \beta^*$, то есть $\text{HF}(C, G) = \text{Hom}(C, G)$. Получаем

Предложение 13. Пусть в точной последовательности (2) группа C такова, что $\text{HF}(C, G) = \text{Hom}(C, G)$, тогда последовательность (5) точна.

Для дальнейшего рассмотрим класс всех групп M , для которых $\text{Hom}(M, Z) = 0$. Понятно, что этот класс групп замкнут относительно расширений, прямых сумм и эпиморфных образов групп. Мы получили радикальный класс групп (см. [3, § 2]). Поэтому в каждой группе существует максимальная подгруппа A_0 из этого радикального класса (радикал группы A , определяемый полученным радикальным классом).

Предложение 14. Пусть в группе A подгруппа A_0 такова, что $\text{Hom}(A_0, Z) = 0$, в частности, A_0 — максимальная подгруппа с таким свойством, тогда $\text{HF}(A, B) \cong \text{HF}(A/A_0, B)$ для любой группы B .

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow A_0 \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A/A_0 \rightarrow 0$$

с естественными гомоморфизмами. Ей соответствует индуцированная последовательность

$$0 \rightarrow \text{HF}(A/A_0, B) \xrightarrow{\beta_{\text{HF}}^*} \text{HF}(A, B) \xrightarrow{\alpha_{\text{HF}}^*} \text{HF}(A_0, B),$$

последний член которой нулевой (см. предложение 4). Пусть

$\varphi: A \rightarrow B$ — свободный гомоморфизм, $A = K \oplus F$, где $\varphi(K) = 0$; F — свободная группа. Так как $\text{Hom}(A_0, Z) = 0$, то $A_0 \subseteq K$, значит, φ индуцирует гомоморфизм $\psi: A/A_0 \rightarrow B$ такой, что $\varphi = \psi\beta$. При этом имеем разложение $A/A_0 = K/A_0 \oplus F'$, для которого $\psi(K/A_0) = \psi\beta(K) = \varphi(K) = 0$, а $F' = \beta(F) \cong F$ — свободная группа. Это разложение доказывает свободу гомоморфизма $\psi: A/A_0 \rightarrow B$. Таким образом, произвольный свободный гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow B$ представляется в виде $\psi\beta$, где ψ — свободный гомоморфизм. Следовательно, β_{HF} — эпиморфизм. Так же β_{HF} — мономорфизм (как сужение β^*). Это доказывает нужный изоморфизм.

Следствие 15. Пусть A — счетная группа, N — наибольшая подгруппа в A , такая, что $\text{Hom}(N, Z) = 0$. Тогда для любой группы B $\text{HF}(A, B) \cong \prod B$, где $n = r(A/N) \leq \omega_0$.

Доказательство. Всякая счетная группа может быть представлена в виде $A = N \oplus F$, где $\text{Hom}(N, Z) = 0$, а F — свободная группа (см. [1, следствие 19.3]). Используя предложение 14, получаем $\text{HF}(A, B) \cong \text{HF}(A/N, B) \cong \text{HF}(F, B) = \text{Hom}(Z, B) \cong \prod \text{Hom}(Z, B) \cong \prod B$, где $n = r(A/N)$.

Теперь выясним, как ведет себя HF по отношению к прямым суммам.

Теорема 16. Существуют естественные изоморфизмы

$$\text{HF}(A, \bigoplus_{i=1}^n B_i) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{HF}(A, B_i) \text{ и}$$

$$\text{HF}(\bigoplus_{i \in I} A_i, B) \cong \prod_{i \in I} \text{HF}(A_i, B).$$

Доказательство. Естественные изоморфизмы для HF являются сужением естественных изоморфизмов для Hom (см. [1, теоремы 43.1 и 43.2]). Проверим это.

Пусть π_i — i -я координатная проекция $\bigoplus_{i=1}^n B_i \rightarrow B_i$. Тогда для каждого $\alpha \in \text{HF}(A, \bigoplus_{i=1}^n B_i)$ определен гомоморфизм $\pi_i \alpha: A \rightarrow B_i$. В силу теоремы 6 $\pi_i \alpha \in \text{HF}(A, B_i)$. Таким образом, получаем гомоморфизм $\eta: \alpha \rightarrow (\dots, \pi_i \alpha, \dots)$ из $\text{HF}(A, \bigoplus_{i=1}^n B_i)$ в $\prod_{i=1}^n \text{HF}(A, B_i)$. Ясно, что η — мономорфизм. Рассмотрим $(\dots, \alpha_i, \dots)$ из $\prod_{i=1}^n \text{HF}(A, B_i)$. Существует $\alpha \in \text{Hom}(A, \bigoplus_{i=1}^n B_i)$ такой, что $\alpha_i = \pi_i \alpha$. Для каждого α_i ($i = 1, \dots, n$) имеем раз-

* Через ω_0 обозначается счетное кардинальное число.

ложение $A_i = K_i \oplus F_i$, где $\alpha_i(K_i) = 0$; F_i — свободная группа. Положим $K = \bigcap_{i=1}^n K_i$. Тогда, очевидно, A/K — свободная группа. Поэтому $A = K + H$, где H — свободная группа, а $\alpha_i(K) = 0$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Последнее означает, что $\alpha(K) = 0$. Тем самым разложение $A = K + H$ доказывает свободу гомоморфизма α , то есть $\alpha \in \text{HF}(A, + B_1)$. А это означает, что η — эпиморфизм.

Докажем второй изоморфизм. Пусть $\alpha \in \text{HF}(\bigoplus_{i \in I} A_i, B)$, а $\alpha_i: A_i \rightarrow B$ — сужение гомоморфизма α на A_i . Получаем отображение $\eta: \alpha \mapsto (\dots, \alpha_i, \dots)$ группы $\text{HF}(\bigoplus_{i \in I} A_i, B)$ в группу $\text{ПНФ}(\bigoplus_{i \in I} A_i, B)$ (так как в силу теоремы 6, очевидно, α_i — свободный гомоморфизм). Опять ясно, что η — мономорфизм. Рассмотрим элемент $(\dots, \alpha_i, \dots)$ из $\text{ПНФ}(\bigoplus_{i \in I} A_i, B)$. Существует элемент $\alpha \in \text{Ном}(\bigoplus_{i \in I} A_i, B)$ такой, что $\eta(\alpha) = (\dots, \alpha_i, \dots)$. Для каждого $i \in I$ имеет разложение $A_i = K_i + F_i$, где $\alpha_i(K_i) = 0$; F_i — свободная группа. Используя эти разложения, получаем разложение $\bigoplus_{i \in I} A_i = (\bigoplus_{i \in I} K_i) + (\bigoplus_{i \in I} F_i)$, где, очевидно, $\alpha(\bigoplus_{i \in I} K_i) = 0$, а $\bigoplus_{i \in I} F_i$ — свободная группа, значит, это разложение доказывает свободу гомоморфизма α . Итак, η — эпиморфизм. Теорема доказана.

Сформулируем теперь уже ясный результат о HF.

Теорема 17. HF есть аддитивный бифунктор из категории $A \times A$ в категорию A , контравариантный по первому и ковариантный по второму аргументу.

Доказательство. Ясно, что нам нужно показать лишь, что для любых гомоморфизмов $\alpha: A' \rightarrow A$ и $\beta: B \rightarrow B'$ каждый свободный гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow B$ порождает свободный гомоморфизм $\beta\varphi\alpha: A' \rightarrow B'$. Для этого, последовательно применяя теорему 6, сначала получим, что $\varphi\alpha = \alpha^*(\varphi) \in \text{HF}(A', B)$, а затем $\beta\varphi\alpha = \beta_*(\varphi\alpha) \in \text{HF}(A', B')$.

Оказывается, функтор HF обладает очень интересным свойством: прямые произведения неизмеримого числа компонент он переводит в прямые суммы при фиксированном втором аргументе. Таким же свойством обладает Ном, если второй аргумент — узкая группа (см. [2, следствие 94.5]), но для HF такого условия можно избежать.

Теорема 18. Пусть $A_i (i \in I)$ — семейство групп, при-

чем множество I неизмеримо. Тогда для произвольной группы B существует естественный изоморфизм $\text{HF}(\prod_{i \in I} A_i, B) \cong \text{HF}(A_i, B)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \text{HF}(\prod_{i \in I} A_i, B)$. Определим гомоморфизм $\eta: \varphi \rightarrow (\dots, \varphi_i, \dots)$, где φ_i — сужение φ на A_i , в $\text{ПНот}(A_i, B)$. Теорема 6 позволяет утверждать, что η действует в $\text{HF}(A_i, B)$. Действительно, для $\varphi \in \text{HF}(\prod_{i \in I} A_i, B)$ существует разложение $\prod_{i \in I} A_i = K + F$, где $\varphi(K) = 0$, а F — свободная группа. Свободная группа является обобщенно-узкой (определение см. в [4]). Используя результаты работы [4, следствие 1.1], получаем тогда, что при проектировании группы $\prod_{i \in I} A_i$ на ее прямое слагаемое F почти все A_i переходят в 0. Тем самым $A_i \subseteq K$ для почти всех $i \in I$. Таким образом, $\varphi(A_i) = 0$ для почти всех $i \in I$, то есть $\varphi_i = 0$ для почти всех $i \in I$. Итак, действительно, η — гомоморфизм в прямую сумму.

Покажем, что η — эпиморфизм. Если $(\dots, \varphi_i, \dots)$ принадлежит $\text{HF}(A_i, B)$, то $\varphi_i = 0$ для почти всех $i \in I$, а для всех $i \in I$ существует разложение $A_i = K_i \oplus F_i$, где $\varphi_i(K_i) = 0$; F_i — свободная группа ($\varphi_i(F_i) \neq 0$ для почти всех i). Пусть $J = \{i \in I, \varphi_i \neq 0\}$ — конечное подмножество в I . Ясно, что $\prod_{i \in I \setminus J} A_i \subseteq \prod_{i \in I \setminus J} (K_i \oplus F_i) \subseteq \prod_{i \in I \setminus J} K_i \oplus \prod_{i \in I \setminus J} F_i$, где $A' = \prod_{i \in I \setminus J} A_i \subseteq \prod_{i \in I \setminus J} K_i \oplus \prod_{i \in I \setminus J} F_i$.

Определим теперь гомоморфизм $\varphi: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow B$ так, что $\varphi(A') = 0$, $\varphi(f_i) = \varphi_i(f_i)$, если $f_i \in F_i$. Очевидно, φ — свободный гомоморфизм, при сужении φ на A_i получаем гомоморфизм φ_i . Таким образом, $(\dots, \varphi_i, \dots) = \eta(\varphi)$.

Покажем, что η — мономорфизм. Пусть φ — свободный гомоморфизм из $\prod_{i \in I} A_i$ в B и $\varphi_i = 0$ для каждого $i \in I$. Существует разложение $\prod_{i \in I} A_i = K \oplus F$, где $\varphi(K) = 0$; F — свободная группа. Используя то, что F — обобщенно узкая группа, и теорему 1.1 из [4] (в этом месте используется неизмеримость I), можем утверждать, что существует конечное подмножество $J \subseteq I$ такое, что $\prod_{i \in I \setminus J} A_i$ проектируется в 0 при проектировании $\prod_{i \in I} A_i$ на прямое слагаемое F (вдоль K).

Это означает, что $\prod_{I \in I} A_i \in K$, то есть получаем $\varphi(\prod_{I \in I} A_i) = 0$.
 Далее, $\varphi(\prod_{I \in I} A_i) - \varphi(\prod_{I \in I \setminus J} A_i) + \sum_{I \in J} \varphi(A_i) = 0$. Это означает, что $\varphi = 0$. Теорема доказана.

Замечание. В доказательстве теоремы 18 неизмеримость множества I использовалась только для доказательства мономорфности гомоморфизма $\eta: \text{HF}(\prod_{I \in I} A_i, B) \rightarrow \bigoplus_{I \in I} \text{HF}(A_i, B)$. Следовательно, в общем случае мы можем утверждать, что существует естественный эпиморфизм группы $\text{HF}(\prod_{I \in I} A_i, B)$ на группу $\text{HF}(A_i, B)$, являющийся сужением естественного гомоморфизма группы $\text{Hom}(\prod_{I \in I} A_i, B)$ в группу $\prod_{I \in I} \text{Hom}(A_i, B)$.

Следствие 19. Для любой группы G и неизмеримого кардинала π имеем

$$\text{HF}(\prod_{\pi} Z, G) \cong \bigcup_{\pi} G.$$

Следствие 20. Для любой группы G , кардинала m и неизмеримого кардинала π имеют место изоморфизмы:

$$\begin{aligned} \text{HF}(\prod_{\pi} \prod_m Z, G) &\cong \prod_m \prod_{\pi} G, \\ \text{HF}(\prod_{\pi} \prod_m Z, G) &\cong \prod_m \prod_{\pi} G. \end{aligned}$$

§ 2

Так как $\text{HF}(A, B)$ подгруппа в $\text{Hom}(A, B)$, то естественно ввести еще одну группу, определяемую группами A и B .

Определение. $\text{NHF}(A, B) = \text{Hom}(A, B) / \text{HF}(A, B)$.

Таким образом, элементами группы $\text{NHF}(A, B)$ являются классы эквивалентных по модулю свободных гомоморфизмов элементов группы $\text{Hom}(A, B)$. Будем обозначать их $[\varphi]$, где $\varphi \in \text{Hom}(A, B)$, то есть $[\varphi] = \{\psi \in \text{Hom}(A, B) \mid (\varphi - \psi) \in \text{HF}(A, B)\}$.

Пример 1. Поскольку в случае, когда A или B свободные группы, $\text{HF}(A, B) = \text{Hom}(A, B)$ (см. § 1, примеры 1 и 2), получаем, что $\text{NHF}(A, B) = 0$.

Переформулировав предложения 3 и 4 из § 1 на язык NHF , получим

Предложение 21. 1) $\text{NHF}(A, B) = 0$ для фиксиро-

ванной группы A и произвольной группы B в том и только том случае, если A является свободной группой.

2) $\text{HNF}(A, B) = 0$ для фиксированной группы B и произвольной группы A в том и только том случае, если B является свободной группой.

Предложение 22. Для ненулевой группы B эквивалентны равенства

$$\text{Hom}(A, Z) = 0 \text{ и } \text{HNF}(A, B) = \text{Hom}(A, B).$$

Определение HNF позволяет ожидать близость свойств этой группы к свойствам Hom (см. [1, с. 213]).

Предложение 23. Если $B[n] = 0$ для некоторого натурального n , то $\text{HNF}(A, B)[n] = 0$ для любой группы A .

Доказательство. Пусть $[\varphi] \in \text{HNF}(A, B)$, а $n[\varphi] = 0$, то есть $n\varphi \in \text{HF}(A, B)$. Тогда существует разложение $A = -K \cup F$, где $n\varphi(K) = 0$, а F — свободная группа. Так как $B[n] = 0$, то $\varphi(K) = 0$, откуда то же разложение доказывает свободу φ . Это означает, что $[\varphi] = 0$. Таким образом, $\text{HNF}(A, B)[n] = 0$.

Очевидно, верны следующие утверждения для HNF (ср. [1, B), Г), с. 213]): $\text{HNF}(A, B)$ — группа без кручения, если B — группа без кручения; $\text{HNF}(A, B)$ — делимая группа без кручения, если B — делимая группа без кручения.

Пусть $\alpha: A \rightarrow B$ — гомоморфизм. Мы знаем, что для любой группы гомоморфизм α индуцирует гомоморфизмы α_{HNF} и α_{HF} , которые являются сужением соответствующих гомоморфизмов для Hom . Наша задача — определить индуцированные гомоморфизмы для HNF . Это естественно сделать следующим образом: пусть $[\varphi] \in \text{HNF}(G, A)$, тогда $\alpha_{\text{HNF}}([\varphi]) = [\alpha_*(\varphi)]$; пусть $[\psi] \in \text{HNF}(B, G)$, тогда $\alpha_{\text{HNF}}([\psi]) = [\alpha^*(\psi)]$. Нужно проверить корректность указанных отображений. Но это очевидно, так как по теореме 6 из § 1 $\alpha_*(\text{HF}(G, A)) \subseteq \text{HF}(G, B)$ а $\alpha^*(\text{HF}(B, G)) \subseteq \text{HF}(A, G)$. Итак, для каждого гомоморфизма $\alpha: A \rightarrow B$ определены индуцированные гомоморфизмы:

$$\alpha_{\text{HNF}}^{\bullet}: \text{HNF}(G, A) \rightarrow \text{HNF}(G, B),$$

$$\alpha_{\text{HNF}}^{\circ}: \text{HNF}(B, G) \rightarrow \text{HNF}(A, G).$$

Следовательно, для точной последовательности (2) (см. § 1) получаем для каждой группы G последовательности:

$$\text{HNF}(G, A) \xrightarrow{\alpha_{\text{HNF}}^{\bullet}} \text{HNF}(G, B) \xrightarrow{\beta_{\text{HNF}}^{\bullet}} \text{HNF}(G, C), \quad (9)$$

$$\text{HNF}(C, G) \xrightarrow{\beta_{\text{HNF}}^{\circ}} \text{HNF}(B, G) \xrightarrow{\alpha_{\text{HNF}}^{\circ}} \text{HNF}(A, G). \quad (10)$$

В силу свойств гомоморфизмов α_* и β_* , β^* и α^* для Hom легко получаем, что $\beta_{\text{HNF}} \alpha_{\text{HNF}}^* = 0$ и $\alpha_{\text{HNF}} \beta_{\text{HNF}}^* = 0$.

Далее мы можем определить гомоморфизм E_{HNF}^* : $\text{HNF}(G, C) \rightarrow \text{Ext}(G, A)$ следующим образом: $E_{\text{HNF}}^*([\varphi]) = E_*(\varphi)$, где E_* — гомоморфизм из $\text{Hom}(G, C)$ в $\text{Ext}(G, A)$, связывающий точные последовательности для Hom и Ext (см. [1, теорема 51.3]). Корректность отображения E_{HNF}^* следует из того, что по лемме 8 $E_*(\text{HNF}(G, C)) = 0$.

Обозначим естественный эпиморфизм $\text{Hom}(A, B)$ на $\text{HNF}(A, B)$ через $\pi_{\text{HNF}}^{A, B}$, а естественное вложение $\text{HNF}(A, B)$ в $\text{Hom}(A, B)$ через $1_{\text{HNF}}^{A, B}$. Таким образом, например, $[\varphi] \in \text{HNF}(A, B)$ означает, что $[\varphi] = \pi_{\text{HNF}}^{A, B}(\varphi)$.

Теперь сформулируем основной результат о последовательности и (9).

Теорема 24. Для каждой точной последовательности (2) и группы G имеет место коммутативная диаграмма с точно ми строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & \text{HNF}(G, A) & \xrightarrow{\alpha_{\text{HNF}}} & \text{HNF}(G, B) & \xrightarrow{\beta_{\text{HNF}}} & \text{HNF}(G, C) & \xrightarrow{E_{\text{HNF}}} 0 \\
 & \downarrow 1_{\text{HNF}}^{G, A} & & \downarrow 1_{\text{HNF}}^{G, B} & & \downarrow 1_{\text{HNF}}^{G, C} & \\
 0 \rightarrow & \text{Hom}(G, A) & \xrightarrow{\alpha_*} & \text{Hom}(G, B) & \xrightarrow{\beta_*} & \text{Hom}(G, C) & \xrightarrow{E_*} \text{Ext}(G, A) \rightarrow \dots \rightarrow 0 \\
 & \downarrow \pi_{\text{HNF}}^{G, A} & & \downarrow \pi_{\text{HNF}}^{G, B} & & \downarrow \pi_{\text{HNF}}^{G, C} & \\
 0 \rightarrow & \text{HNF}(G, A) & \xrightarrow{\alpha_{\text{HNF}}} & \text{HNF}(G, B) & \xrightarrow{\beta_{\text{HNF}}} & \text{HNF}(G, C) & \xrightarrow{E_{\text{HNF}}} \text{Ext}(G, A) \rightarrow \dots \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Доказательство. Коммутативность диаграммы очевидна из определения указанных гомоморфизмов. Точность первой строки доказана в теореме 11. Точность второй строки общеизвестна (см. [1, теорема 51.3]).

Для точности третьей строки нужно доказать точность в первых четырех ненулевых членах. При этом для доказательства точности в члене $\text{HNF}(G, A)$ нам понадобится природа $\text{HNF}(G, A)$, а в остальных членах точность следует из точности двух первых строк.

Точность в члене $\text{HNF}(G, A)$. Пусть $\alpha_{\text{HNF}}^*([\varphi]) = 0$, где $[\varphi] \in \text{HNF}(G, A)$, тогда $[\alpha_*(\varphi)] = 0$, откуда $\alpha_*(\varphi) \in \text{Im } 1_{\text{HNF}}^{G, B} =$

$=\text{HF}(G, B)$, но по лемме 7 в этом случае $\varphi \in \text{HF}(G, A)$. Таким образом, $[\varphi] \pi_{\text{HNF}}^{G,A}(\varphi) = 0$. Отсюда α_{HNF}^* — мономорфизм.

Точность в члене $\text{HNF}(G, B)$. $\text{Im } \alpha_{\text{HNF}}^* \subseteq \text{Ker } \beta_{\text{HNF}}^*$, так как уже отмечалось, что $\beta_{\text{HNF}}^* \alpha_{\text{HNF}}^* = 0$. Пусть $[\varphi] \in \text{Ker } \beta_{\text{HNF}}^*$, $\varphi \in \text{Hom}(G, B)$, тогда $[\beta_*(\varphi)] = \pi_{\text{HNF}}^{C,G} \beta_*(\varphi) = \beta_{\text{HNF}}^* \pi_{\text{HNF}}^{G,B}(\varphi) = 0$. Значит, $\beta_*(\varphi) \in \text{HF}(G, C) = \text{Im } \beta_{\text{HNF}}^*$, откуда $\beta_*(\varphi) = \beta_{\text{HNF}}^*(\varphi') = -\beta_*(\varphi')$, где $\varphi' \in \text{HF}(G, B)$. Далее, $(\varphi - \varphi') \in \text{Ker } \beta_* = \text{Im } \alpha_*$. Поэтому $\varphi - \varphi' = \alpha_*(\psi)$, где $\psi \in \text{Hom}(G, A)$. Теперь имеем $\alpha_{\text{HNF}}^*([\psi]) = [\alpha_*(\psi)] = [\varphi - \varphi'] = [\varphi]$. Таким образом, $\text{Ker } \beta_{\text{HNF}}^* \subseteq \text{Im } \alpha_{\text{HNF}}^*$.

Точность в члене $\text{HNF}(G, C)$. Пусть $[\varphi] \in \text{HNF}(G, B)$. Имеем $E_{\text{HNF}}^* \beta_{\text{HNF}}^*([\varphi]) = E_* \beta_*(\varphi) = 0$. Следовательно, $\text{Im } \beta_{\text{HNF}}^* \subseteq \text{Ker } E_{\text{HNF}}^*$. Теперь пусть $[\gamma] \in \text{Ker } E_{\text{HNF}}^*$, $\gamma \in \text{Hom}(G, C)$. Тогда $E_*([\gamma]) = 0$, откуда $\gamma \in \text{Ker } E_* = \text{Im } \beta_*$, то есть $\gamma = \beta_*(\varphi)$, где $\varphi \in \text{Hom}(G, B)$. Таким образом, $[\gamma] = \beta_{\text{HNF}}^*([\varphi]) \in \text{Im } \beta_{\text{HNF}}^*$. Тем самым $\text{Ker } E_{\text{HNF}}^* \subseteq \text{Im } \beta_{\text{HNF}}^*$. Отсюда $\text{Im } \beta_{\text{HNF}}^* = \text{Ker } E_{\text{HNF}}^*$.

Точность в члене $\text{Ext}(G, A)$ следует из точности второй строки и того, что $\text{Im } E_{\text{HNF}}^* \subseteq \text{Im } E_*$. Теорема доказана.

Обратимся теперь к последовательности (10). Говорить о ее точности в общем случае не приходится, так как неточна даже последовательность (5). Более того, если β_{HNF}^* — мономорфизм, то про β_{HNF}^* этого уже сказать нельзя. Действительно, пусть B — свободная группа, C — ненулевая группа такая, что $\text{Hom}(C, Z) = 0$ и $C = B/A$. Тогда $\text{HNF}(C, G) = \text{Hom}(C, G)$ для $G \neq 0$ (см. предложение 22), а $\text{HNF}(B, G) = 0$ [см. предложение 23.1)]. Отсюда видно, что если $\text{Hom}(C, G) \neq 0$, то β_{HNF}^* не мономорфизм.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & \text{HF}(C, G) & \xrightarrow{\beta_{\text{HNF}}^*} & \text{HF}(B, G) & \xrightarrow{\alpha_{\text{HNF}}^*} & \text{HF}(A, G) & \\
 & \downarrow 1_{\text{HNF}}^{C,G} & & \downarrow 1_{\text{HNF}}^{B,G} & & \downarrow 1_{\text{HNF}}^{A,G} & \\
 0 \rightarrow & \text{Hom}(C, G) & \xrightarrow{\beta_*} & \text{Hom}(B, G) & \xrightarrow{\alpha_*} & \text{Hom}(A, G) & \xrightarrow{E_*} \text{Ext}(C, G) \\
 & \downarrow \pi_{\text{HNF}}^{C,G} & & \downarrow \pi_{\text{HNF}}^{B,G} & & \downarrow \pi_{\text{HNF}}^{A,G} & \downarrow \pi \\
 0 \rightarrow & \text{HNF}(C, G) & \xrightarrow{\beta_{\text{HNF}}^*} & \text{HNF}(B, G) & \xrightarrow{\alpha_{\text{HNF}}^*} & \text{HNF}(A, G) & \xrightarrow{E_{\text{HNF}}^*} \text{HNF}(C, G) \\
 & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & \downarrow 0
 \end{array} \quad (11)$$

Здесь $\tau: \text{Ext}(C, G) \rightarrow \text{EHF}(C, G) = \text{Ext}(C, G)/E^*(\text{HF}(C, G))$ — естественный эпиморфизм, а гомоморфизм E_{HNF}^* определен так:

$E_{\text{HNF}}^*([\gamma]) = \tau(E^*(\gamma))$. Ясно, что E_{HNF}^* определен корректно.

В силу определения всех указанных гомоморфизмов диаграмма (11) действительно коммутативна. Средняя строка ее точна. Про гомоморфизмы из первой и третьей строки известно, что β_{HNF}^* — мономорфизм, $\alpha_{\text{HNF}} \beta_{\text{HNF}}^* = 0$, $\alpha_{\text{HNF}}^* \beta_{\text{HNF}}^* = 0$ (так как $\alpha^* \beta^* = 0$). Теперь попытаемся получить некоторую информацию о $\text{Ker } \beta_{\text{HNF}}^*$, $\text{Im } \beta_{\text{HNF}}^*$, $\text{Ker } \alpha_{\text{HNF}}^*$, $\text{Im } \alpha_{\text{HNF}}^*$, $\text{Ker } E_{\text{HNF}}^*$.

Для удобства введем обозначение. Пусть $\alpha: A \rightarrow B$ — гомоморфизм, тогда для подгруппы C в B обозначим через $\alpha^{-1}(C)$ подгруппу в A , состоящую из всех таких элементов a , что $\alpha(a) \in C$.

Л е м м а 25. Для диаграммы (11) имеем

$$\text{Ker } \beta_{\text{HNF}}^* = \pi_{\text{HNF}}^{C, G}((\beta^*)^{-1}(\text{HF}(B, G))), \quad (12)$$

$$\text{Im } \beta_{\text{HNF}}^* = \pi_{\text{HNF}}^{B, G}(\text{Ker } \alpha^*), \quad (13)$$

$$\text{Ker } \alpha_{\text{HNF}}^* = \pi_{\text{HNF}}^{B, G}((\alpha^*)^{-1}(\text{HF}(A, G))), \quad (14)$$

$$\text{Im } \alpha_{\text{HNF}}^* = \pi_{\text{HNF}}^{A, G}(\text{Ker } E^*), \quad (15)$$

$$\text{Ker } E_{\text{HNF}}^* = \pi_{\text{HNF}}^{A, G}(\text{HF}(A, G) + \text{Ker } E^*). \quad (16)$$

Доказательство. (12). $\text{Ker } \beta_{\text{HNF}}^* = \{\pi_{\text{HNF}}^{C, G}(\varphi) \mid \varphi \in \text{Hom}(C, G), \pi_{\text{HNF}}^{B, G} \beta^*(\varphi) = 0\} = \{\pi_{\text{HNF}}^{C, G}(\varphi) \mid \varphi \in \text{Hom}(C, G), \beta^*(\varphi) \in \text{HF}(B, G)\} = \pi_{\text{HNF}}^{C, G}((\beta^*)^{-1}(\text{HF}(B, G)))$.

(13). $\text{Im } \beta_{\text{HNF}}^* = \beta_{\text{HNF}}^* \pi_{\text{HNF}}^{C, G}(\text{Hom}(C, G)) = \pi_{\text{HNF}}^{B, G} \beta^* \text{Hom}(C, G) = \pi_{\text{HNF}}^{B, G}(\text{Im } \beta^*) = \pi_{\text{HNF}}^{B, G}(\text{Ker } \alpha^*)$.

(14) аналогично (12).

(15) аналогично (13).

16 $\text{Ker } E_{\text{HNF}}^* = \{\pi_{\text{HNF}}^{A, G}(\varphi) \mid \varphi \in \text{Hom}(A, G), E_{\text{HNF}}^* \pi_{\text{HNF}}^{A, G}(\varphi) = 0\} = \{\pi_{\text{HNF}}^{A, G}(\varphi) \mid \varphi \in \text{Hom}(A, G), \tau(E^*(\varphi)) = 0\} = \{\pi_{\text{HNF}}^{A, G}(\varphi) \mid \varphi \in \text{Hom}(A, G), E^*(\varphi) \in E^*(\text{HF}(A, G))\} = \pi_{\text{HNF}}^{A, G}(\text{HF}(A, G) + \text{Ker } E^*)$.

Воспользуемся выведенными равенствами для доказательства нескольких утверждений.

Предложение 26. Пусть β_{HNF}^* является мономорфизмом для фиксированной группы G и каждой точной последовательности (2), тогда G — свободная группа.

Доказательство. Если G — несвободная группа, то

рассмотрим (как в доказательстве предложения 12) точную последовательность

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} G \circ G \rightarrow 0$$

с естественными гомоморфизмами, где $G = F/R$; F — свободная группа. Легко видеть (это показано в доказательстве предложения 12), что гомоморфизм $\gamma \in \text{Hom}(G \circ G, G)$, являющийся проекцией на первую компоненту суммы $G \circ G$, не является свободным. Тем не менее $\gamma \in (\beta^*)^{-1}(\text{HF}(F/R, G))$, так как $\beta^*(\gamma) \in \text{Hom}(F/R, G) \cap \text{HF}(F/R, G)$. Таким образом, $0 \neq \pi_{\text{HNF}}^{\alpha, \beta}(\gamma) \in \text{Ker } \beta_{\text{HNF}}^*$, то есть β_{HNF}^* не мономорфизм.

Предложение 27. Пусть в точной последовательности (2) группа A такова, что $\text{Hom}(A, Z) = 0$. Тогда точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{HNF}(C, G) \xrightarrow{\beta_{\text{HNF}}} \text{HNF}(B, G) \xrightarrow{\alpha_{\text{HNF}}} \text{HNF}(A, G) \rightarrow \text{Ext}(C, G).$$

Доказательство. $\text{Hom}(A, Z) = 0$, поэтому $\text{HF}(A, G) = 0$ по предложению 4. Из доказательства предложения 14. ясно, что β_{HNF}^* — изоморфизм, откуда сразу получаем, что $(\beta^*)^{-1}(\text{HF}(B, G)) \cap \text{HF}(C, G) = 0$. Применяя теперь равенство (12), получаем, что $\text{Ker } \beta_{\text{HNF}}^* = \pi_{\text{HNF}}^{\alpha, \beta}(\text{HF}(C, G)) = 0$, то есть β_{HNF}^* — мономорфизм. Так как $\text{HF}(A, G) = 0$, то $(\alpha^*)^{-1}(\text{HF}(A, G)) = 0$, отсюда, используя равенства (13) и (14), получаем $\text{Im } \beta_{\text{HNF}} = \text{Ker } \alpha_{\text{HNF}}$, а используя равенства (15) и (16), получаем $\text{Ker } E_{\text{HNF}} = \text{Im } \alpha_{\text{HNF}}$. Теперь, учитывая, что $\text{HNF}(A, G) = \text{Hom}(A, G)$ и $E_{\text{HNF}}^* = E^*$, завершаем проверку точности указанной в условии предложения 8 последовательности.

Следствие 28. Пусть $T(A)$ — периодическая часть группы A . Тогда $\text{HNF}(A, B) \cong \text{HNF}(A/T(A), B)$ для любой группы B .

Следствие 29. Пусть A — подгруппа группы B такая, что для некоторой группы $G \neq 0$ имеем $\text{Hom}(A, G) = 0$, тогда $\text{HNF}(B/A, G) \cong \text{HNF}(B, G)$.

$$\text{Теорема 30. } \text{HNF}(A, \bigoplus_{i=1}^n B_i) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{HNF}(A, B_i),$$

$$\text{HNF}(\bigoplus_{i \in I} A_i, B) \cong \prod_{i \in I} \text{HNF}(A_i, B).$$

Доказательство. Первый изоморфизм. Пусть $\eta: \text{Hom} \left(A, \bigoplus_{i=1}^n B_i \right) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom} (A, B_i)$ — естественный, изоморфизм (см. доказательство теоремы 43.2 из [1]). В доказательстве теоремы 16 показано, что $\eta \left(\text{HF} \left(A, \bigoplus_{i=1}^n B_i \right) \right) = \bigoplus_{i=1}^n \text{HF} (A, B_i)$.

Следовательно, имеем $\text{NHF} \left(A, \bigoplus_{i=1}^n B_i \right) = \text{Hom} \left(A, \bigoplus_{i=1}^n B_i \right) / \text{HF} \left(A, \bigoplus_{i=1}^n B_i \right) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom} (A, B_i) / \bigoplus_{i=1}^n \text{HF} (A, B_i) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom} (A, B_i) / \text{HF} (A, B_i) = \bigoplus_{i=1}^n \text{NHF} (A, B_i)$.

Второй изоморфизм. Пусть $\eta: \text{Hom} \left(\bigoplus_{i \in I} A_i, B \right) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom} (A_i, B)$ — естественный изоморфизм (см. доказательство теоремы 43.1 из [1]). В доказательстве теоремы 16 показано, что $\eta(\text{HF}(\bigoplus_{i \in I} A_i, B)) = \prod_{i \in I} \text{HF}(A_i, B)$. Следовательно, имеем $\text{NHF}(\bigoplus_{i \in I} A_i, B) = \text{Hom}(\bigoplus_{i \in I} A_i, B) / \text{HF}(\bigoplus_{i \in I} A_i, B) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom} (A_i, B) / \prod_{i \in I} \text{HF} (A_i, B) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom} (A_i, B) / \text{HF} (A_i, B) = \prod_{i \in I} \text{NHF} (A_i, B)$.

Теорема 31. NHF есть аддитивный бифунктор из категории $A \times A$ в категорию A , контравариантный по первому и ковариантный по второму аргументу.

Доказательство. Пусть $\alpha: A' \rightarrow A$, $\beta: B \rightarrow B'$ — фиксированные гомоморфизмы. Определим $\text{NHF}(\alpha, \beta): \text{NHF}(A, B) \rightarrow \text{NHF}(A', B')$ следующим образом: $\text{NHF}(\alpha, \beta)([\varphi]) = [\beta\varphi\alpha] = [\text{Hom}(\alpha, \beta)(\varphi)]$. Докажем корректность отображения $\text{NHF}(\alpha, \beta)$. Пусть $(\varphi_1 - \varphi_2) \in \text{HF}(A, B)$. Тогда $[\beta\varphi_1\alpha - \beta\varphi_2\alpha] = [\beta(\varphi_1 - \varphi_2)\alpha]$, где $\beta(\varphi_1 - \varphi_2)\alpha \in \text{HF}(A', B')$ (см. теорему 17). Следовательно, $[\beta(\varphi_1 - \varphi_2)\alpha] = 0$. Ясно, что $\text{NHF}(\alpha, \beta)$ — гомоморфизм. При $A'' \rightarrow A' \rightarrow A$ и $B \rightarrow B' \rightarrow B''$ получаем $\text{NHF}(\alpha\alpha', \beta'\beta)([\varphi]) = [\text{Hom}(\alpha\alpha', \beta'\beta)(\varphi)] = [\text{Hom}(\alpha', \beta') \text{Hom}(\alpha, \beta)(\varphi)] = \text{NHF}(\alpha', \beta')(\text{NHF}(\alpha, \beta)([\varphi]))$. Далее, $\text{NHF}(1_A, 1_B)([\varphi]) = [\text{Hom}(1_A, 1_B)(\varphi)] = [\varphi]$, тем самым $\text{NHF}(1_A, 1_B) = 1_{\text{NHF}(A, B)}$. Итак, NHF — функтор. Аддитивность этого функтора указана в теореме 30.

Отметим, что функторов HF и NHF наиболее интересными являются группы, обладающие достаточным числом свободных прямых слагаемых (см. следствия 19, 20). Вообще эти функторы не реагируют на факторизацию группы по подгруппе, не имеющей свободных прямых слагаемых (см. пред-

ложение 14 и следствие 28, 29). Наиболее богаты прямыми свободными слагаемыми прямые произведения свободных групп. Приведем интересное свойство функтора HNF , связанное с этими группами.

Предложение 32. Пусть $F_i (i \in I)$ — свободные группы, множество I неизмеримо; $G_j (j \in J)$ — редуцированные группы без кручения, тогда $\text{HNF}(\prod_{i \in I} F_i, \prod_{j \in J} G_j) \cong \text{HNF}(\prod_{i \in I} F_i, \bigoplus_{j \in J} G_j)$.

Доказательство. Определим отображение $\tau: \text{HNF}(\prod_{i \in I} F_i, \prod_{j \in J} G_j) \rightarrow \text{HNF}(\prod_{i \in I} F_i, \bigoplus_{j \in J} G_j)$ следующим образом: $\tau([\varphi]) = (\dots, [\pi_j \varphi], \dots)$, где $\pi_j: \prod_{i \in I} G_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} G_j$ — проекция. Отображение τ определено корректно. Действительно, если $(\varphi_1 - \varphi_2) \in \text{HNF}(\prod_{i \in I} F_i, \prod_{j \in J} G_j)$, то $\pi_j(\varphi_1 - \varphi_2) \in \text{HNF}(\prod_{i \in I} F_i, \bigoplus_{j \in J} G_j)$ по теореме 6. Таким образом, $[\pi_j \varphi_1] = [\pi_j \varphi_2]$. Ясно, что τ — гомоморфизм.

Из результатов работы [5] (см. [5, следствие 1.6]) следует, что для любого гомоморфизма $\varphi: \prod_{i \in I} F_i \rightarrow \bigoplus_{j \in J} G_j$ существуют конечные подмножества $I' \subseteq I$ и $J' \subseteq J$ такие, что $\varphi(\prod_{i \in I'} F_i) \subseteq \bigoplus_{j \in J'} G_j$. Возникает разложение для каждого гомоморфизма $\varphi: \prod_{i \in I} F_i \rightarrow \prod_{i \in I'} F_i \times \prod_{i \in I \setminus I'} F_i$, которое мы будем называть специальным φ -разложением группы.

Покажем, что τ лежит в $\text{HNF}(\prod_{i \in I} F_i, \prod_{j \in J} G_j)$. Пусть $\varphi \in \text{Hom}(\prod_{i \in I} F_i, \prod_{j \in J} G_j)$. Тогда существует специальное φ -разложение $\prod_{i \in I} F_i \rightarrow \prod_{i \in I'} F_i \times \prod_{i \in I \setminus I'} F_i$. Рассмотрим гомоморфизм φ' такой что $\varphi'(f) = \varphi(f)$ для $f \in \prod_{i \in I'} F_i$, а $\varphi'(\prod_{i \in I \setminus I'} F_i) = 0$. Тогда $(\varphi - \varphi')(\prod_{i \in I} F_i) = 0$. Значит, специальное φ -разложение для $\prod_{i \in I} F_i$ доказывает свободу гомоморфизма $\varphi - \varphi'$. Отсюда $[\varphi] = [\varphi']$. Далее, $\varphi'(\prod_{i \in I} F_i) = \varphi(\prod_{i \in I} F_i) \subseteq \bigoplus_{j \in J'} G_j$, где J' — конечное подмножество в J . Поэтому для почти всех $j \in J$ имеем $\pi_j \varphi' = 0$. Таким образом, $\tau([\varphi]) = \tau([\varphi']) = (\dots, [\pi_j \varphi'], \dots)$, где для почти всех $j \in J$ имеем $[\pi_j \varphi'] = 0$.

Покажем, что образ τ совпадает с $\text{HNF}(\prod_{i \in I} F_i, \prod_{j \in J} G_j)$. Действительно, если $(\dots, [\varphi_j], \dots) \in \text{HNF}(\prod_{i \in I} F_i, \prod_{j \in J} G_j)$, то $J' = \{j \in J \mid [\varphi_j] \neq 0\}$ — конечное множество. Определим гомо-

морфизм $\varphi = \sum_{i \in J'} \varphi_i: \text{NHF}(\prod_{i \in I} F_i, \bigoplus_{i \in J} G_i) \rightarrow \bigoplus_{i \in J} \text{NHF}(\prod_{i \in I} F_i, G_i)$. Тогда очевидно, $\tau([\varphi]) = (\dots, [\varphi_i], \dots)$.

Покажем, что τ — мономорфизм. Пусть $\tau([\varphi]) = 0$. Это означает, что $\pi_j \varphi \in \text{NHF}(\prod_{i \in I} F_i, G_j)$ для каждого $j \in J$. Пусть $\prod_{i \in I} F_i = \prod_{i \in I' \setminus J'} F_i + \prod_{i \in J'} F_i$ — специальное φ -разложение. Имеем $\varphi(\prod_{i \in I' \setminus J'} F_i) \subseteq \prod_{i \in J'} G_i$, где J' — конечное подмножество в J . Обозначим через φ' сужение гомоморфизма φ на $\prod_{i \in I' \setminus J'} F_i$. Тогда $\varphi' = \sum_{i \in J'} \varphi_i$, где $\varphi_i = \pi_i \varphi$. Для $j \in J'$ существует разложение $\prod_{i \in I' \setminus J'} F_i = K_j \circ H_j$, доказывающее свободу φ_j , где $\varphi_j(K_j) = 0$; H_j — свободная группа. Положим $K = \bigcap_{i \in J'} K_i$. Очевидно, $(\prod_{i \in I' \setminus J'} F_i)/K$ — свободная группа, поэтому $\prod_{i \in I' \setminus J'} F_i = K \oplus F$, где F — свободная группа. Теперь $\varphi(K) = \varphi'(K) = \sum_{i \in J'} \varphi_i(K) = 0$. Но тогда разложение $\prod_{i \in I} F_i = K \oplus F$ доказывает свободу гомоморфизма φ , то есть $[\varphi] = 0$. Итак, τ — мономорфизм. Предложение доказано.

Теперь покажем, как функтор NHF выделяет известные классы абелевых групп.

Среди групп без кручения имеется интересный класс узких групп (см. [2, § 94, 95]).

Предложение 33. Группа без кручения A является узкой тогда и только тогда, когда $\text{NHF}(P, A) = 0$, где $P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle$, $0(e_n) = \infty$.

Доказательство. Пусть A — узкая группа, тогда для каждого $\varphi: \prod_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle \rightarrow A$ существует множество индексов J такое, что $|J| < \infty$, $\varphi(\prod_{n \in J} \langle e_n \rangle) = 0$. Разложение $\prod_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle = \prod_{n \in J} \langle e_n \rangle \oplus (\prod_{n \in J} \langle e_n \rangle)$ доказывает свободу φ . Таким образом, $\text{NHF}(\prod_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle, A) = \text{Hom}(\prod_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle, A)$.

Обратно. Пусть $\text{NHF}(\prod_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle, A) = \text{Hom}(\prod_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle, A)$. Тогда для

любого $\varphi: \prod_{n=1}^{\infty} Z \rightarrow A$ существует разложение $\prod_{n=1}^{\infty} Z = K \oplus F$, где F — свободная группа, а $\varphi(K) = 0$. Так как F — узкая группа (см. [2, теорема 95.3]), то существует конечное множество индексов J такое, что при проектировании $\prod_{n=1}^{\infty} Z$ на F подгруппа $\prod_{n \in J} Z$ переходит в 0. То есть $\prod_{n \in J} Z \subseteq K$. Следовательно, $\varphi(\prod_{n \in J} Z) = 0$. Отсюда A — узкая группа.

Теперь, применяя теорему 24 и предложение 32, получаем хорошо известные факты об узких группах: класс узких групп замкнут относительно подгрупп, расширений и прямых сумм.

Теперь пусть L — класс групп, замкнутый относительно подгрупп и расширений. По этому классу определяем чистоту в категории абелевых групп: подгруппа A будет O — L -чистой в группе B , если существует такая подгруппа C в B , что $A \cap C = O$ и $B = A + C$ ($A, C \in L$ (см. [6])). Если U — класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и расширений, то можно определить еще одну чистоту: подгруппа A будет U — O -чистой в группе B , если существует такая подгруппа C в B , что $A \cap C \in U$ и $B = A + C$ (см. [6])). Пусть P_{O-L} (соответственно P_{U-O}) — класс проективных групп для O — L -чистоты (соответственно U — O -чистоты). В [6] было доказано, что

$$P_{U-O} = \{G \mid \text{Ext}(G, A) = 0 \quad \forall A \in U\}.$$

Оказывается, функтор NHF аналогичным образом выделяет класс P_{O-L} .

Предложение 34. $P_{O-L} = \{G \mid \text{NHF}(G, L) = 0 \quad \forall L \in L\}$.

Доказательство. Это легко следует из описания класса P_{O-L} , данного в теореме 5 из [7]. Такая характеристизация класса P_{O-L} позволяет на основании свойств функтора NHF получить ряд свойств этого класса.

Предложение 35. Пусть $G \in P_{O-L}$, $G_0 \subseteq G$, $\text{Hom}(G_0, Z) = 0$. Тогда $G/G_0 \in P_{O-L}$.

Доказательство следует из предложения 27. В этом случае точна последовательность $0 \rightarrow \text{NHF}(G/G_0, L) \rightarrow \text{NHF}(G, L) \rightarrow \text{NHF}(G_0, L)$ для любой группы $L \in L$, а средний член этой последовательности нулевой.

Предложение 36. Пусть $G_0 \subseteq G$, $\text{Hom}(G_0, L) = 0$ для лю-

бой группы L из L . Тогда $G \in P_{0-L}$ в том и только том случае, если $G/G_0 \in P_{0-L}$.

Доказательство. Применяем следствие 29.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Фукс Л Бесконечные абелевы группы/Пер. с англ. — М.: Мир, 1974. т 1.— 335 с.
- 2 Фукс Л Бесконечные абелевы группы/Пер. с англ.— М. Мир, 1977, т 2.— 416 с.
- 3 Мишина А П, Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули — М. Наука, 1969.— 159 с.
4. Рычков С. В Тестовые абелевы группы и их применения.— Изв. вузов. Мат, 1984, № 8, с. 29—39.
- 5 Иванов А В Прямые суммы и полные прямые суммы абелевых групп.— В кн Абелевы группы и модули. Томск, 1980, с. 70—90
6. Керка Т One class of purities.— Comment. math. Univ. carol., 1973, v. 14, N 1, p. 139—154
- 7 Комаров С. И Об u - z -чистоте в абелевых группах — Вестн. Мос ун-та Сер 1 Матем, механ, 1982, № 2, с. 11—18

О КОЛЬЦАХ НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Е. И. Компанцева

В [1] сформулирована проблема описания абсолютного радикала Джекобсона и абсолютного ниль-радикала абелевой группы. Под абсолютным радикалом Джекобсона (абсолютным ниль-радикалом) абелевой группы G понимается пересечение $R^*(G)$ ($N^*(G)$) радикалов Джекобсона (верхних ниль-радикалов) всех ассоциативных колец, построенных на G как на аддитивной группе.

В [2] показано, что если абелева группа G содержит ненулевую делимую подгруппу без кручения, то абсолютный радикал Джекобсона группы G совпадает с подгруппой Фраттини ее периодической части. Из этого следует, что для абелевой группы без кручения G , не являющейся редуцированной, $N^*(G) = R^*(G) = \{0\}$, и вопрос об описании абсолютных радикалов абелевых групп без кручения сводится к изучению редуцированных групп.

В данной работе описаны абсолютные радикалы редуцированных групп из двух классов абелевых групп без кручения: векторных сепарабельных групп и вполне разложимых групп.

Нами рассматриваются только абелевы группы, и слово «группа» всюду в дальнейшем означает абелева группа. Используются следующие определения и обозначения. Умножением на группе G называется гомоморфизм $\mu: G \otimes G \rightarrow G$. Это умножение часто будем обозначать знаком $\times$, т. е. для любых элементов g_1 и g_2 из G $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$. Умножение μ на группе G определяет некоторое кольцо, аддитивная группа которого совпадает с G , это кольцо называется кольцом на группе G и обозначается (G, μ) , радикал Джекобсона кольца (G, μ) (если оно ассоциативно) обозначается $R(G, \mu)$, верхний ниль-радикал — $N(G, \mu)$ (или соответственно $(G, \times)$, $R(G, \times)$, $N(G, \times)$). Всегда p обозначает некоторое простое число; N — множество натуральных чисел;

$t(G)$ — тип однородной группы без кручения G ; $t(g)$ и (g) обозначают соответственно тип и характеристику элемента $g \in G$. Элемент прямого произведения $\prod_{i \in I} G_i$ записывается в виде $(g_i)_{i \in I}$, где $g_i \in G_i$. За всеми определениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к [1, 3].

Лемма 1. Для любого множества индексов I и для любого семейства групп $\{G_i | i \in I\}$ имеют место следующие включения:

$$\begin{aligned} N^*(\prod_{i \in I} G_i) &\subseteq \prod_{i \in I} N^*(G_i), \\ N^*(\bigoplus_{i \in I} G_i) &\subseteq \bigoplus_{i \in I} N^*(G_i), \\ R^*(\prod_{i \in I} G_i) &\subseteq \prod_{i \in I} R^*(G_i), \\ R^*(\bigoplus_{i \in I} G_i) &\subseteq \bigoplus_{i \in I} R^*(G_i). \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть A и B — произвольные группы, в [2] показано, что $R^*(A+B) \subseteq R^*(A) \oplus R^*(B)$. Докажем, что $N^*(A \oplus B) \subseteq N^*(A) \oplus N^*(B)$. Пусть $a+b \notin N^*(A) + N^*(B)$ ($a \in A, b \in B$). Допустим $a \notin N^*(A)$, т.е. существует такое ассоциативное умножение μ на A , что $a \notin N(A, \mu)$. Определим умножение $\bar{\mu}$ на $A+B$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &(a_1, a_2 \in A)(\forall b_1, b_2 \in B) \\ &\bar{\mu}[(a_1+b_1) \otimes (a_2+b_2)] = \mu(a_1 \otimes a_2). \end{aligned}$$

Так как $a \notin N(A, \mu)$, то существует такой элемент u , принадлежащий идеалу, порожденному элементом a в кольце (A, μ) , что при любом $n \in \mathbb{N}$ $u^n \neq 0$ (u^n — степень элемента u в кольце (A, μ)). Легко видеть, что u имеет вид $u = v + mb$, где элемент v принадлежит идеалу, порожденному элементом $a+b$ в кольце $(A \oplus B, \bar{\mu})$, m — целое число. Тогда при любом натуральном $n \geq 2$ $v^n = (u - mb)^n$ $u^n \neq 0$ (v^n — степень элемента v в кольце $(A \oplus B, \bar{\mu})$), т.е. элемент $a+b$ порождает в кольце $(A \oplus B, \bar{\mu})$ идеал, не являющийся ниль-идеалом. Значит, $a+b \notin N^*(A+B)$, откуда следует нужное включение.

Докажем теперь, что $N^*(\prod_{i \in I} G_i) \subseteq \prod_{i \in I} N^*(G_i)$. Пусть $g = (g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$, $g \notin \prod_{i \in I} N^*(G_i)$, т.е. существует такой индекс $j \in I$, что $g_j \notin N^*(G_j)$. Выделяя группу G_j прямым слагаемым в группе $\prod_{i \in I} G_i$ и применяя доказанное выше включение, получим, что $g \notin N^*(\prod_{i \in I} G_i)$ и, значит, $N^*(\prod_{i \in I} G_i) \subseteq \prod_{i \in I} N^*(G_i)$.

Остальные включения доказываются аналогично.

Л е м м а. 2. Пусть $(G, \times)$ — ассоциативное кольцо, $g \in G$. Пусть существует такой элемент $b \in G$, что $g + b - g \times b$ является квазирегулярным элементом кольца $(G, \times)$. Тогда g является квазирегулярным элементом этого кольца.

Доказательство. Утверждение леммы следует из того факта, что множество элементов группы G с заданной на нем круговой композицией 0, определяемой следующим образом:

$$(g_1, g_2 \in G) \quad g_1 \circ g_2 = g_1 + g_2 - g_1 \times g_2,$$

является полугруппой [3, с. 20].

Л е м м а 3. Пусть $G = R_1 \amalg R_2$, где R_1, R_2 — группы без кручения ранга 1 такие, что $t(R_1)$ — неидемпотентный тип, $t(R_2)$ — идемпотентный тип и $t(R_1) \leq t(R_2)$. Пусть g — такое простое число, что $gR_2 \neq R_2$, тогда

$$R^*(G) \subseteq qR_1 \oplus \bigcap_p pR_2,$$

$$N^*(G) - \{0\}.$$

Доказательство. Запишем группу G в виде $G = R_1 a_1 \amalg R_2 a_2$, выбрав элементы a_1 и a_2 таким образом, чтобы в характеристике $\chi(a_2)$ были только нули и символы ∞ , а в $\chi(a_1)$ нули стояли на всех тех местах, где в $\chi(a_2)$ стоят нули. Тогда можно определить умножение $\times$ на G , положив

$$a_1 \times a_1 = a_1, \quad a_2 = a_2 \times a_1 = a_2, \quad a_2 = a_2.$$

Заметим, что $R_2 a_2$ — идеал кольца $(G, \times)$.

Так как $R^*(R_2 a_2) = (\bigcap_p pR_2) a_2$ [2, лемма 2], то по лемме 1 $R^*(G) \subseteq R^*(R_1 a_1) + (\bigcap_p pR_2) a_2$. Пусть $g = r_1 a_1 + r_2 a_2 \in R^*(G)$, где $r_1 \in R_1$, $r_2 \in \bigcap_p pR_2$. Допустим, $r \notin qR_1$. Группу R_1 можно рассматривать как подгруппу группы R_2 . В группе R_2 рассмотрим элемент $r_1 + r_2 \cdot \frac{n}{l}$ (n, l — целые числа). Так как $r_2 \in \bigcap_p pR_2$ и $r_1 \notin qR_1$, то q не делит n (очевидно, q не делит l). Следовательно, существуют целые числа s и t такие, что $qt + ns = 1$. Так как $g \in R^*(G)$ то $g \times a_2 = (r_1 + r_2) a_2 = \frac{n}{l} a_2 \in R(G)$. Следовательно, $ns a_2 \in R(G, \times) \cap (R_2 a_2, \times) = R(R_2 a_2)$. Значит, существует элемент $\frac{c}{d} a_2 \in R_2 a_2$ (c, d —

целые числа, q не делит d) такой, что $nsa_2 + \frac{c}{d}a_2 - \left(\frac{c}{d}ns\right)a_2 = 0$, откуда $ns + \frac{c}{d} - \frac{c}{d}ns = ns + \frac{c}{d}(1 - ns) - ns + \frac{c}{d}qt = 0$.

Следовательно, $nsd + cqt = 0$, что является противоречием, так как ни одно из чисел n, s, d не делится на q . Таким образом, $g \notin R^*(G)$ и $R^*(G) \subseteq qR_1 \cap pR_2$.

Так как любое ненулевое кольцо на группе $R_2\gamma_2$ не имеет делителей нуля [1, теорема 121.1], то $N^*(R_2\gamma_2) = \{0\}$ и, следовательно, $N^*(G) \subseteq N^*(R_1a_1)$. Пусть $g = r_1a_1 \in N^*(G)$. Допустим, $r_1 \neq 0$, тогда $g = r_1a_2 \in N(G, x)$. Но $R_2\gamma_2$ — идеал кольца $(G, \times)$, не имеющий делителей нуля, следовательно, $N^*(G) = \{0\}$.

Лемма 4. Пусть I — неизмеримое множество, $G = \prod_{i \in I} R_i$, где все R_i — редуцированные группы без кручения ранга 1 одного и того же идемпотентного типа, t . Тогда $\bigcap_p pG \subseteq R^*(G)$.

Доказательство. Пусть $g \in \bigcap_p pG$ и $\mu: G \otimes G \rightarrow G$ — ассоциативное умножение на G . Так как G — сепарабельная однородная группа [1, лемма 96.4], то сервантная подгруппа, порожденная элементом g , выделяется в G прямым слагаемым [1, предложение 87.2]. Так как каждое прямое слагаемое группы G изоморфно прямому произведению некоторого подсемейства групп R_i [1, § 96, упр. 10], то можно считать, что $G = R_1 + \prod_{i \in I} R_i$, $I = \{1\} \cup I_1$ и $g \in R_1$.

Рассмотрим группу $G = \prod_{i \in I} R_i$, где R_i — Z -адическое пополнение группы R_i . Так как группа G — алгебраически компактна, G — сервантная подгруппа группы G и фактор-группа G/G делима, то G является сервантно инъективной оболочкой группы G . Следовательно, умножение μ на G однозначно продолжается до ассоциативного умножения на G [1, следствие 119.4]. В кольце (G, μ) элемент g имеет квазиобратный элемент

$$b = \lim \{-g - g^2 - \dots - g^n\}_{n \in N},$$

где знак предела обозначает предел последовательности Коши в Z -адической топологии на группе G ; g^n — n -я степень элемента g в кольце (G, μ) .

Обозначим через π_i проекцию G на группу R_i , тогда су-

жение π_i на группу G есть проекция G на R_i . Пусть $k \in I$, покажем, что $\pi_k(b) \in R_k$, т. е. что $b \in G$. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow R_k$, определенный следующим образом:

$$(\forall c \in G) \varphi(c) = \pi_k \mu(c \otimes g).$$

Так как R_k — узкая группа, то почти для всех $i \in I$

$$\varphi(R_i) = \{\varphi(r) | r \in R_i\} = \{0\}$$

[1, теорема 94.4]. Рассмотрим множества

$$M_1 = \{i \in I | \varphi(R_i) \neq \{0\}\}, \quad M = \{1, k\} \cup M_1 \text{ и}$$

$S = I \setminus M$, тогда M — конечное множество. Пусть $G_M = \bigoplus_{i \in M} R_i$, $G_M = \bigoplus_{i \in M} R_i$ и η — проекция группы G на группу G_M , сужение η на группу G есть проекция G на G_M . Так как $\varphi(\bigoplus_{i \in S} R_i) =$

0 и множество I неизмеримо, то $\varphi(\prod_{i \in S} R_i) = \{0\}$ [1, теорема 94.4], следовательно, $\varphi(G) = \varphi(\bigoplus_{i \in M} R_i)$, т. е.

$$(\forall c \in G) \pi_k \mu(c \otimes g) = \pi_k \mu(\eta(c) \otimes g). \quad (1)$$

Рассмотрим гомоморфизм $\eta_\mu: G \otimes G \rightarrow G_M$, сужение η_μ на группу $G_M \otimes G_M$ является умножением на группе G_M , т. е. определено кольцо (G_M, η_μ) . Нетрудно видеть, что (G_M, η_μ) — подкольцо кольца (G_M, η_μ) . Обозначим для любых элементов $g_1, g_2 \in G_M$ $g_1 * g_2 = \eta_\mu(g_1 \otimes g_2)$ и $g_1^{[2]} = g_1 * g_1$, $g_1^{[n]} = g_1^{[n-1]} * g_1$.

Так как группа G_M алгебраически компактна и $g \in G_M$, то определен элемент $b' = \lim \{-g - g^{[2]} - \dots - g^{[n]}\}_{n \in \mathbb{N}} \in G_M$ (предел берется в Z -адической топологии на G_M), который удовлетворяет уравнению

$$g + x - x * g = 0. \quad (2)$$

Покажем, что в кольце $(G_M, *)$ это уравнение может иметь не более одного решения. Пусть существуют такие элементы $c_1, c_2 \in G_M$, что $g_1 + c_1 - c_1 * g = g + c_2 - c_2 * g = 0$, тогда $c_1 - c_2 = ((c_1 - c_2) * g) = (\dots (c_1 - c_2) * g) \dots) * g$ для любого числа сомножителей g . Так как $g \in \bigcap_p pG$, то элемент $c_1 - c_2$ принадлежит делимой подгруппе редуцированной группы G_M , т. е. $c_1 - c_2 = 0$.

Покажем, что уравнение (2) имеет решение в кольце $(G_M, *)$. Без потери общности можно считать, что $M = \{1, 2\}$.

..., k, n], где k, n — натуральные числа и $k \leq n$. Запишем группу G_M в виде $G_M = R\alpha_1 + \dots + R\alpha_n$, где R — подкольцо с единицей 1 кольца рациональных чисел. Пусть $g = r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$ ($x_1, \dots, x_n \in R, r_1 \in \bigcap_p pR$), тогда из уравнения (2) получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} r_1 a_1 + x_1 a_1 - \pi_1(x_1 r_1(a_1 * a_1)) - \dots - \pi_1(x_n r_1(a_n * a_1)) = 0, \\ \vdots \\ x_n a_n - \pi_n(x_1 r_1(a_1 * a_1)) - \dots - \pi_n(x_n r_1(a_n * a_1)) = 0. \end{cases}$$

Обозначив для любых $i, l \in M$ $\pi_i(a_l * a_1) = \tau_{il} a_i$, получим систему уравнений над кольцом R :

[illegible]

ИЛИ

[illegible]

Эта система имеет решение $(b_1, \dots, b_n)$ в кольце R , так как ее определитель обратим в этом кольце. Следовательно, уравнение (2) имеет решение $b_1 a_1 + \dots + b_n a_n$ в кольце $(G_m, *)$. Поскольку в кольце $(G_n, *)$ уравнение (2) имеет единственное решение b' , то $b' = b_1 a_1 + \dots + b_n a_n$ и, значит, $\pi_k(b') \in R_k$.

Покажем, что $\pi_k(b) = \pi_k(b')$. Нетрудно видеть, что последовательности

$$\{-\pi_k(g) - \pi_k(g^2) - \dots - \pi_k(g^n)\}_{n \in N},$$

$$\{-\pi_k(g) - \pi_k(g^{[2]}) - \dots - \pi_k(g^{[n]})\}_{n \in N}$$

являются последовательностями Коши элементов группы R_* в Z -адической топологии и

$$\begin{aligned}\pi_k(b) &= \lim \{ -\pi_k(g) - \dots - \pi_k(g^n) \}_{n \in N}, \\ \pi_k(b') &= \lim \{ -\pi_k(g') - \dots - \pi_k(g'^n) \}_{n \in N}.\end{aligned}$$

Следовательно, достаточно доказать, что $\pi_k(g^n) = \pi_k(g^{[n]})$.

Обозначая умножение μ на группе G знаком $\times$, из (1) будем иметь

$$\begin{aligned} & \pi_k(g^n) \quad \pi_k((g \quad g) \quad g^{n-2}) \\ & \pi_k(\gamma(g \quad g) \quad g^{n-2}) \quad \pi_k((g^{[2]} \quad g) \quad g^{n-3}) = \\ & \pi_k(\gamma(g^{[2]} \quad g) \quad g^{n-3}) \quad \pi_k(g^{[3]} \times g^{n-3}) - \\ & \dots \quad \pi_k(g^{[n]}). \end{aligned}$$

Следовательно, $\pi_k(b) \quad \pi_k(b') \in R_k$. Так как k — произвольный индекс из I , то в $b \in \prod_{k \in I} R_k \subseteq G$.

Таким образом, $\bigcap_p pG$ является квазирегулярным идеалом кольца (G, μ) и, значит, $\bigcap_p pG \subseteq R(G, \mu)$. В силу произвольности умножения μ на G $\bigcap_p pG \subseteq R^*(G)$. Лемма доказана.

Далее будем использовать следующие обозначения и определение. Пусть $\{G_i \mid i \in I\}$ — семейство редуцированных однородных групп без кручения и J — подмножество множества I . Тогда $T(J)$ — множество различных типов в семействе $\{t(G_i) \mid i \in J\}$ и для каждого

$$i \in I \quad J^{(i)} = \{j \in J \mid t(G_j) = t(G_i)\}.$$

Обозначим $I_0 = \{i \in I \mid t(G_i) \text{ — идемпотентный тип}\}$ и для любого $i \in I$

$$\Delta_i = \{p \mid (\exists k \in I_0^{(i)}) \quad pG_k \neq G_k\}.$$

Если $J \subseteq I_0$, то $J' = \{j \in J \mid t(G_j) \text{ — содержит конечное число нулей}\}$.

Определение. Группа G_i удовлетворяет условию (а), если существует счетное подмножество $\{i_1, i_2, \dots\}$ множества I такое, что $i = i_1$, и для любого $n \in \mathbb{N}$

$$t(G_{i_{n-1}}) = t(G_{i_n}) \cdot t(G_{i_n}).$$

Определим подмножество $\bar{I}$, I множества I следующим образом: $\bar{I} = \{i \in I \mid I_0^{(i)} = \emptyset\}$, $I = \{i \in I \mid t(G_i) \text{ — неидемпотентный тип и } I_0^{(i)} \neq \emptyset\}$, $\bar{I} = \{i \in I \mid G_i \text{ не удовлетворяет условию (а)}\}$.

Отметим, что $\Delta_i = \emptyset$ ($i \in I$) тогда и только тогда, когда $i \in \bar{I}$, в этом случае будем считать, что $\bigcap_{p \in \Delta_i} pG_i = G_i$.

Л е м м а 5. Пусть I — неизмеримое множество индексов и

$G = \prod_{i \in I} R_i$ — редуцированная векторная сепарабельная группа. Пусть множество $T(I)$ конечно. Тогда

$$\prod_{i \in I} \left(\bigcap_{p \in \Lambda_i} p R_i \right) \subseteq R^*(G).$$

Доказательство. Запишем группу G в виде $G = \prod_{i \in J} G_i$, где G_i — прямое произведение групп R_i одного и того же типа. Тогда множество J конечно, и так как G — сепарабельная группа, то все группы G_j ($j \in J$) являются однородными [1, теорема 96.6].

Пусть $\times$ — ассоциативное умножение на G , $G^0 = \prod_{i \in I} \left(\bigcap_{p \in \Lambda_i} p R_i \right)$, тогда группу G^0 можно представить в виде $G^0 = \prod_{i \in J} \left(\bigcap_{p \in \Lambda_i} p G_i \right)$.

Покажем, что G^0 — идеал кольца $(G, \times)$. Пусть $a \in G$ и $g = \sum_{j \in J} g_j \in G^0$, где $g_j \in \bigcap_{p \in \Lambda_j} p G_j$. Пусть $k \in J$, тогда $g_k \times a \in \left(\bigcap_{p \in \Lambda_j} p G_j \right)$, но для любого $j \in J^{(k)}$ множество $J^{(j)}$ содержится в $J_0^{(k)}$, поэтому $\Delta_j \subseteq \Delta_k$ и, следовательно, $\bigcap_{p \in \Lambda_j} p G_j \subseteq \bigcap_{p \in \Lambda_k} p G_k$.

Таким образом, $g_k \times a \in \bigcap_{i \in J^{(k)}} \left(\bigcap_{p \in \Lambda_j} p G_j \right)$ и, значит, $g \times a \in G^0$.

Аналогично $a \times g \in G^0$.

Запишем теперь множество J в виде $J = \{1, 2, \dots, n\}$ и индукцией по n докажем, что $G^0 \subseteq R^*(G)$.

При $n=1$ G является однородной группой. Если $t(G)$ — идемпотентный тип, то по лемме 4 $G^0 = \bigcap_p p G \subseteq R^*(G)$. Если $t(G)$ — неидемпотентный тип, то любое умножение $\times$ на G — нулевое, так как для любых $0 \neq a, b \in G$ $t(a \times b) > t(a) = t(b)$, откуда $a \times b = 0$. Следовательно, $N^*(G) = R^*(G) = G$ и $G^0 \subseteq R^*(G)$.

Допустим, утверждение леммы верно для любого натурального $k < n-1$ и пусть $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_n$. Тогда среди типов $t(G_1), \dots, t(G_n)$ есть максимальный тип, пусть это $t(G_n) = t_n$. Подгруппа G_n является идеалом кольца $(G, \times)$ и определено фактор-кольцо $(G/G_n, \times)$, аддитивная группа которого удовлетворяет индукционному предположению.

Пусть $g = \sum_{i \in J} g_i \in G^0$ ($g_j \in \bigcap_{p \in \Lambda_j} p G_j$), тогда нетрудно видеть, что в силу предположения индукции $g + G_n$ — квазирегулярный элемент кольца $(G/G_n, \times)$, т.е. существует такой элемент $b \in G_1 \dots G_{n-1}$, что $g + b - g \times b = c \in G_n$.

Если t_n — неидемпотентный тип, то из сказанного выше следует, что G_n — ниль-идеал кольца $(G, \times)$. Следовательно, элемент c и, значит, элемент g квазиобратимы в кольце $(G, \times)$ (лемма 2).

Пусть t_n — идемпотентный тип и π — проекция группы G на G_n . Тогда $c = \pi(g) = \sum_{j \in J} \pi(g_j \times b)$. Так как t_n — идемпотентный тип, то $\pi(g) \in \bigcap_{p \in \Lambda_n} pG_n$. Покажем, что для всех $j \in J$ $\pi(g_j \times b) \in \bigcap_p pG_n$. Если $\pi(g_j \times b) \neq 0$, то $t_n = t(\pi(g_j \times b))$

$t(g_j \times b) = t(g_j)$, следовательно, так как $g_j \in \bigcap_{p \in \Lambda_j} pG_j$, то g_j , а значит, и $\pi(g_j \times b)$ делится на все такие p , для которых $pG_n \subseteq G_n$, т. е. $\pi(g_j \times b) \in \bigcap_p pG_n$. Таким образом, $c \in \bigcap_p pG_n \subseteq R(G_n)$ (лемма 4) т. е. c — квазирегулярный элемент кольца $(G, \times)$, значит, g является квазирегулярным элементом этого кольца. Следовательно, G^0 — квазирегулярный идеал кольца $(G, \times)$, откуда $G^0 \subseteq R(G, \times)$. В силу произвольности умножения на G $G^0 \subseteq R^*(G)$.

Лемма 6. Пусть $G = G_1 + \dots + G_n$, где каждая группа G_k ($k = 1, \dots, n$) является однородной группой без кручения неидемпотентного типа. Тогда любое ассоциативное кольцо на G является ниль-кольцом.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n аналогично доказательству леммы 5, с учетом того, что любое умножение на однородной группе неидемпотентного типа нулевое.

Лемма 7. Пусть I — неизмеримое множество, $G = \prod_{i \in I} R_i$ — редуцированная векторная сепарабельная группа. Пусть для каждого $i \in I$ $t(R_i)$ — идемпотентный тип. Тогда $\bigcap_p pG \subseteq R^*(G)$.

Доказательство. Пусть $g \in \bigcap_p pG$ и $\times$ — ассоциативное умножение на G , тогда, очевидно, $g \in G' = \prod_{i \in I'} R_i$. Группа G' является сепарабельной [1, теорема 87.5], следовательно, $G' = G_1 \dots \bigcirc G_m \bigcirc G''$, где для каждого $k \in \{1, \dots, m\}$ G_k — группа ранга 1; $t(G_k) \in I'$ [1, предложение 96.2] и $g = g_1 + \dots + g_m$ ($g_k \in G_k$). Обозначим

$$I^{(k)} = \{i \in I \mid t(R_i) = t(G_k)\} \quad (k = 1, \dots, m), \\ I^{(m)} = I^{(1)} \cup \dots \cup I^{(m)}, \quad G^{(m)} = \prod_{i \in I^{(m)}} R_i.$$

Так как для любого натурального $k < m$ $t(G_k)$ содержит лишь конечное число нулей, то множество $T(I^{[k]})$ конечно. Следовательно, конечно и множество $T(I^m)$.

Покажем, что $G^{(m)}$ — идеал кольца $(G, \times)$ содержащий элемент g . Так как для всех натуральных $k < m$ $t(g_k) = t(G_k)$, то $g_k \in \bigcap_{i \in I^{[k]}} R_i \subseteq G^{(m)}$, и, значит, $g \in G^{(m)}$. Пусть $a \in G^{(m)}$, $b \in G$.

Так как группа $G^{(m)}$ сепарабельна, то элемент a можно представить в виде $a = a_1 + \dots + a_l$ ($l \in N$), где для любого $k \leq l$ $t(a_k) \in T(I^{[m]})$ [1, предложение 96.2]. Следовательно, для каждого такого k существует натуральное число $s \leq m$ такое, что $t(a_k) \in T(I^{[s]})$, откуда $t(a_k \times b) \setminus t(a_k) \geq t(G_s)$. Значит, $a_k \times b \in \bigcap_{i \in I^{[s]}} R_i \subseteq G^{(m)}$ и, следовательно, $a \times b \in G^{(m)}$. Аналогично $b \times a \in G^{(m)}$.

Итак, группа $G^{(m)}$ удовлетворяет условиям леммы 5 и, следовательно,

$\bigcap_{i \in I^{(m)}} (\bigcap_{p \in \Lambda_i} pR_i) = \bigcap_p pG^{(m)} \subseteq R(G^{(m)}, \times) = R(G, \times) \cap G^{(m)}$ [3, глава 1, § 7, теорема 1], т. е. $g \in R(G, \times)$, откуда $\bigcap_p pG \subseteq R(G, \times)$.

Из произвольности умножения $\times$ на G следует, что $\bigcap_p pG \subseteq R^*(G)$.

Теорема 1. Пусть I — неизмеримое множество, $G = \bigcap_{i \in I} R_i$ — редуцированная векторная сепарабельная группа. Тогда

$$N^*(G) = \bigcap_{i \in I} R_i, \quad R^*(G) = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{p \in \Lambda_i} pR_i.$$

Доказательство. Обозначим $I_1 = \{i < I \mid t(R_i) \text{ — неидемпотентный тип}\}$,

$$G_0 = \bigcap_{i \in I_0} R_i, \quad G_0' = \bigcap_{i \in I_0'} R_i,$$

$$G^0 = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{p \in \Lambda_i} pR_i, \quad G = \bigcap_{i \in I} R_i.$$

Пусть $\times$ — ассоциативное умножение на G . Так как группа G сепарабельна, то множество I конечно [1, теорема 96.6]. Пусть

$$a \in G, \quad g = \sum_{i \in I} g_i \in G \quad (g_i \in R_i),$$

тогда

$$g \times a = \sum_{i \in I} (g_i \times a) \in \bigoplus_{i \in I} \bigcap_{k \in I^{(i)}} R_k.$$

Но для любого $i \in I$ $I^{(i)} \subseteq I$, поэтому $g \times a \in G$. Аналогично $a \times g \in G$, т. е. G — идеал кольца $(G, \times)$. Из леммы 6 следует, что G является ниль-идеалом этого кольца, откуда $G \subseteq N(G)$.

Покажем, что G'_0 — идеал кольца $(G, \times)$. Пусть $g \in G'_0$, т. к. группа G'_0 сепарабельна, то элемент g можно вложить в некоторое вполне разложимое прямое слагаемое группы G'_0 , имеющее конечный ранг, поэтому элемент g можно представить в виде

$$g = g_1 + \dots + g_n,$$

где

$t(g_k) \in T(I_0')(k=1, \dots, n)$ [1, предложение 96,2]. Тогда для каждого натурального $k \leq n$, $t(g_k \times a) = t(g_k)$, т. е. $t(g_k \times a)$ — идемпотентный тип с конечным числом нулей. Следовательно,

$$g_k \times a \in \bigcap_{i \in I'} R_i = G'_0,$$

значит,

$$g \times a = g_1 \times a + \dots + g_n \times a \in G'_0.$$

Следовательно, G'_0 — идеал кольца $(G, \times)$. Так как

$$\bigcap_p pG_0 \subseteq \bigcap_p pG'_0,$$

то $\bigcap_p pG_0$ также является идеалом кольца $(G, \times)$.

Покажем теперь, что подгруппа G^0 является идеалом кольца $(G, \times)$. Так как множество I_1 конечно [1, теорема 96,6], то группу G^0 можно записать в виде

$$G^0 = \left(\bigcap_{i \in I_1} pR_i \right) \bigcap_p pG_0.$$

Пусть $a \in G$, $g = \sum_{i \in I_1} g_i + g_0 \in G^0$, где $g_i \in \bigcap_{p \in \Lambda_i} pR_i$; $g_0 \in \bigcap_p pG_0$.

Тогда

$$g \times a = \sum_{i \in I_1} (g_i \times a) + g_0 \times a.$$

Так же, как в доказательстве леммы 5, показывается, что для любого $i \in I_1$ $g_i \times a \in G^0$. Так как по доказанному выше $g_0 \times a \in \bigcap_p pG_0$, то $g \times a \in G^0$. Аналогично $a \times g \in G^0$.

Докажем, что идеал G^0 квазирегулярен в кольце $(G, \times)$. Для этого рассмотрим множество

$$I = \{i \in I \mid I^{(i)} \subseteq I_0' \cup I_1\}.$$

Ясно, что $I = I_0' \cup I_1$,
где

$$I_1 = I \cap I_1 = \{i \in I_1 \mid I_0^{(i)} \subseteq I_0'\}.$$

Нетрудно видеть, что $\bar{G} = \prod_{i \in \bar{I}} R_i$ — вполне характеристическая подгруппа группы G , значит, $(\bar{G}, \times)$ — подкольцо кольца $(G, \times)$.

Пусть

$$(\bar{G})^0 = \prod_{i \in \bar{I}} (\bigcap_{p \in \bar{I}_i} p R_i),$$

где

$$\bar{I}_i = \{p \mid (\exists k \in (I_0')^{(i)}) p R_k \neq R_k\}.$$

Тогда $(\bar{G})^0 = G^0$, следовательно, G^0 является идеалом кольца $(\bar{G}, \times)$. Покажем, что G^0 — квазирегулярный идеал кольца $(\bar{G}, \times)$.

Нетрудно видеть, что $\bar{G} = \bar{G}_1 \oplus G_0'$, где

$$\bar{G}_1 = \prod_{i \in I_1} R_i.$$

Поскольку, как было показано выше, G_0' — идеал кольца $(G, \times)$, то G_0' — идеал в $(\bar{G}, \times)$. Следовательно, определено фактор-кольцо $(\bar{G}/G_0', \times)$, аддитивная группа которого изоморфна группе $\bar{G}_1$. По лемме 5 кольцо $(\bar{G}/G_0', \times)$ является ниль-кольцом. Пусть $g \in G^0$. Тогда элемент $g + G_0'$ нильпотентен в кольце $(\bar{G}/G_0', \times)$, следовательно, в кольце $(\bar{G}, \times)$ существует такой элемент b , что

$$g + b - g \times b = c \in G_0'.$$

Так же, как в доказательстве леммы 5, показывается, что $c \in \bigcap_{p \in \bar{I}} G_0'$, значит, c — квазирегулярный элемент идеала $(G_0', \times)$ (лемма 7). Тогда по лемме 2 g является квазирегулярным элементом кольца $(\bar{G}, \times)$, следовательно, G^0 — квазирегулярный идеал в кольцах $(\bar{G}, \times)$ и $(G, \times)$. В силу произвольности умножения $\times$ на G $G^0 \subseteq R^*(G)$.

Докажем обратные включения. Так как множество I_1 конечно и для групп R_i идемпотентного типа

$$N^*(R_i) = \{0\}, \quad R^*(R_i) = \bigcap_p pR_i \quad (\text{см. лемму 3}),$$

то по лемме 1

$$N^*(G) \subseteq G \oplus \bigoplus_{i \in I} R_i,$$

$$R^*(G) \subseteq \bigcap_p pG_0 \oplus \bigoplus_{i \in I} R_i.$$

$$\text{Пусть } g \in N^*(G), \quad g = \tilde{g} + \sum_{i \in I} g_i,$$

где $\tilde{g} \in G$; $g_i \in R_i (i \in I)$. Допустим, существует такой индекс $k \in I$, что $g_k \neq 0$, тогда существует $i_0 \in I_0$, для которого $t(R_{i_0}) > t(R_k)$. Группу G запишем в виде $G = R_k \oplus R_{i_0} \oplus G'$, где $G' = \prod_{i \neq k, i \neq i_0} R_i$. Так как R_{i_0} — редуцированная группа,

то по леммам 1 и 3

$$N^*(G) \subseteq N^*(R_k + R_{i_0}) \quad N^*(G') = N^*(G').$$

Значит, $g \in N^*(G)$, что противоречит выбору элемента g . Следовательно, $N^*(G) \subseteq G$.

$$\text{Пусть } g \in R^*(G), \quad g = g_0 + \tilde{g} + \sum_{i \in I} g_i, \quad \text{где } g_0 \in \bigcap_p pG_0;$$

$$\tilde{g} \in G; \quad g_i \in R_i (i \in I).$$

Допустим, существует $k \in I$, для которого $g_k \notin \bigcap_{p \in \Lambda_k} pR_k$, т. е.

существует такое $q \in \Lambda_k$, что $g_k \notin qR_k$. Тогда существует такой индекс $i_0 \in I_0$, что $t(R_{i_0}) > t(R_k)$ и $qR_{i_0} \neq R_{i_0}$. Проводя дальнейшие рассуждения так же, как для $N^*(G)$, получим, что $g \notin R^*(G)$. Следовательно, для любого $i \in I$ $g_i \in \bigcap_{p \in \Lambda_i} pR_i$,

т. е.

$$g \in \bigcap_p pG_0 \oplus \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{p \in \Lambda_i} pR_i = G^0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} R_i$ — вполне разложимая редуцированная группа. Тогда

$$N^*(G) = \bigoplus_{i \in I \cap I} R_i,$$

$$R^*(G) = \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{p \in \Lambda_i} pR_i.$$

Доказательство. Будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} G_0 &= \bigoplus_{i \in I_0} R_i, & G^0 &= \bigoplus_{i \in I} (\bigcap_{p \in \Lambda_i} pR_i), \\ G &= \bigoplus_{i \in I} R_i, & \tilde{G} &= \bigoplus_{i \in I} R_i, \\ G^0 &= G^0 \cap G = \bigoplus_{i \in I} (\bigcap_{p \in \Lambda_i} pR_i), \\ G &= G \cap G = \bigoplus_{i \in I \cap I} R_i. \end{aligned}$$

Пусть $\times$ — ассоциативное умножение на G . Нетрудно видеть, что G — идеал кольца $(G, \times)$, надо только заметить, что если группа R_i ($i \in I$) не удовлетворяет условию (а) и при некотором $k \in I$ $t(R_k) \geq t(R_i)$, то для группы R_k также не выполняется условие (а). Путем рассуждений, аналогичных рассуждениям в доказательствах леммы 5 и теоремы 1, показывается, что подгруппы G^0 и G являются идеалами кольца $(G, \times)$. Следовательно, G^0 и $\tilde{G}$ — идеалы этого кольца.

Пусть $g \in G^0$ и π_i — проекция группы G на R_i ($i \in I$). Определим натуральные числа $m_1, \dots, m_n, \dots$ и подмножества $I_1, \dots, I_n, \dots$ множества I следующим образом:

$$I_1 = \{i \in I \mid \pi_i(g) \neq 0\}, \quad m_1 = |I_1|$$

(число элементов множества I_1), если числа $m_1, \dots, m_n$ и множества $I_1, \dots, I_n$ определены, то

$$I_{n+1} = \{i \in I \mid \pi_i(g^{(m_1+1) \dots (m_n+1)}) \neq 0\}$$

(здесь $g^{(m_1+1) \dots (m_n+1)}$ — степень элемента g в кольце $(G, \times)$), $m_{n+1} = |I_{n+1}|$.

Пусть $i_m \in I_m, i_n \in I_n$ ($n > m$), будем говорить, что i_n является продолжением i_m , если существует такое множество индексов $\{i_m, i_{m+1}, \dots, i_n\}$, что для любого $k \in \{m, \dots, n-1\}$ $i_k \in I_k$ и $t(R_{i_{k+1}}) < t(R_{i_k}) \cdot t(R_{i_k})$.

Нетрудно видеть, что

$$(\forall n \in N)(\forall i \in I_{n+1})(\exists j \in I_n),$$

i является продолжением j .

Докажем, что существует такое натуральное число n , что для любого $i \in I_n$ $t(R_i)$ — идемпотентный тип. Допустим противное, т. е.

($n \in N$)($\exists \alpha_n \in I_n$) $t(R_{\alpha_n})$ — неидемпотентный тип.

Тогда

($n \in N$)($\exists \alpha_n \in I_n$)($\exists i_1^{(n)} \in I_1$) α_n является продолжением $i_1^{(n)}$.

Так как множество I_1 конечно, то существует индекс $i_1 \in I_1$, для которого выполняется следующее условие (назовем его условием (c)):

($n \geq 1$)($\exists \alpha_n \in I_n$) $t(R_{\alpha_n})$ — неидемпотентный тип и α_n является продолжением i_1 .

Допустим, построена цепочка индексов

$$i_1, \dots, i_m (i_k \in I_k, k=1, \dots, m),$$

в которой каждый член i_k является продолжением предыдущего и удовлетворяет условию (c) (при замене 1 на k). Тогда, так как множество I_{m+1} конечно, то в нем существует индекс i_{m+1} , являющийся продолжением i_m и удовлетворяющий условию (c). Таким образом, получаем бесконечную цепочку $i_1, \dots, i_m, \dots$ ($i_m \in I_m$), каждый член которой является продолжением предыдущего и удовлетворяет условию (c).

Так как $g \in G^0$, то для любого $n \in N$ и для любого $i \in I_n$ если $t(R_i)$ — идемпотентный тип, то $t(R_i)$ содержит конечное число нулей. Поэтому если индекс $\alpha \in I_n$ является продолжением $i \in I_m$ ($m, n \in N, m < n$) и $t(R_\alpha)$ — неидемпотентный тип, то и $t(R_i)$ — неидемпотентный тип. Следовательно, для любого $m \in N$ $t(R_{i_m})$ является неидемпотентным типом и, значит,

$$t(R_{i_{m+1}}) \neq t(R_{i_m}) \cdot t(R_{i_m}^{\sim}) \cdot t(R_{i_m}),$$

откуда $i_{m+1} \neq i_m$. Следовательно, группа R_t удовлетворяет условию (a), что противоречит тому, что $g \in G$.

Таким образом, существует такое натуральное n , что для любого $i \in I_n$ $t(R_i)$ — идемпотентный тип.

Если $g \in G(\cong G^0)$, т.е. $I_1 \subseteq I$, то $I_n = \emptyset$, это значит, что при некотором натуральном m $g^m = 0$, откуда получаем, что $G \subseteq N(G, \times)$.

Если g — произвольный элемент из G^0 , то

$$g^m \in G_0 \cap G^0 - (\bigcap_p pG_0) \cap G.$$

Пусть $g^m = g_1 + \dots + g_s$, где $0 \neq g_k \in \bigcap_p pR_{j_k}$, R_{j_k} — группа идемпотентного типа, не удовлетворяющая условию (a) ($k=1, \dots, s$).

Рассмотрим множество $I^{(s)} = I^{(1)} \cup \dots \cup I^{(s)}$ и группу $G^{(s)} = R_{I^{(s)}}$.

Так же, как в доказательстве леммы 7, показывается, что $G^{(s)}$ — идеал кольца $(G, \times)$, содержащий элемент g^m ; и множество $T(I^{(s)})$ содержит лишь конечное число типов. Так как ни одна из групп R_{j_k} ($k=1, \dots, s$) не удовлетворяет условию (а), то множество $I^{(s)}$ конечно. Так как $g^m \in \bigcap_p pG^{(s)}$, то по лемме 7 g^m является квазирегулярным элементом кольца $(G^{(s)}, \times)$. Но

$$g(-g - g - g^2 - \dots - g^{m-1}) - g \times (-g - g^2 - \dots - g^{m-1}) - g^m.$$

Значит, по лемме 2 g является квазирегулярным элементом кольца $(G, \times)$. Следовательно, G^0 — квазирегулярный идеал этого кольца, откуда $G^0 \subseteq R(G, \times)$.

Из того, что $\times$ — произвольное умножение на G , следует, что $G \subseteq V^*(G)$, $G^0 \subseteq R^*(G)$.

Докажем обратные включения. Так же, как и в теореме 1, доказываем, что:

$$R^*(G) \subseteq G^0, \quad (3)$$

$$V^*(G) \subseteq G. \quad (4)$$

Пусть $g = g_1 \dots g_m$, где $0 \neq g_k \in R_{i_k}$, $i_k \in I$ ($k=1, \dots, m$). Допустим, среди индексов $i_1, \dots, i_m$ какой-то не принадлежит I , пусть это i_1 . Тогда существует счетное множество индексов $M = \{j_1, \dots, j_n, \dots\}$ такое, что

$$i_1 = j_1 \text{ и } (\forall n \in N) \ i(R_{i_n-1}) \cdot t(R_{j_n}) \cdot t(R_{j_n}).$$

Без потери общности можно считать, что $i_2, \dots, i_m \in M$. Запишем группу G в виде $G = G_M \circ G'$, где

$$G_M = \bigoplus_{i \in M} R_i; \quad G' = \bigoplus_{i \in I \setminus M} R_i.$$

Тогда $g = g_1 g'$, где $g' \in G'$. Покажем, что $g \notin R^*(G)$. Так как в силу леммы 1 $R^*(G) \subseteq R^*(G_M) + R^*(G')$, то достаточно доказать, что $g_1 \notin R^*(G_M)$.

Обозначим $R_{j_n} = R_n$ ($n \in N$) и запишем группу G_M в виде $G_M = \bigoplus_{n \in N} R_n a_n$, где элементы a_n ($n \in N$) выбраны таким образом, чтобы для любого $n \in N$ $\chi(a_{n-1}) \cdot \chi(a_n) \cdot \chi(a_n)$. Определим ассоциативное и коммутативное умножение $\times$ на G_M ,

положив для любых $n, k \in N$ $a_n \times a_k = x_{n+k}$. Это определение корректно, так как

$$\chi(a_{n+k}) - \chi(a_{n+k-1}) \cdot \chi(a_{n+k-1}) \geq \chi(a_n) \cdot \chi(a_k).$$

Пусть $g_1 = r_1 a_1$, $r_1 \neq 0$. Допустим, $g_1 \in R(G_M, \times)$, тогда существует элемент $b = b_1 a_1 + \dots + b_n a_n \in G_M (b_k \in R_k)$, для которого выполняется соотношение $g_1 + b - g_1 \times b = 0$, т. е. верна система равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 a_1 + b_1 a_1 = 0, \\ b_2 a_2 - r_1 b_1 a_2 = 0, \\ b_3 a_3 - r_1 b_2 a_3 = 0, \\ \dots \\ b_n a_n - r_1 b_{n-1} a_n = 0, \\ -r_1 b_n a_{n+1} = 0, \end{array} \right.$$

откуда получаем, что $b_n - b_{n-1} = \dots - b_1 = 0$ т. е. $b = 0$ и, значит, $g_1 \notin 0$, что противоречит выбору элемента g_1 . Следовательно, $g_1 \notin R^*(G_M)$ и поэтому $g \notin R^*(G)$. Следовательно, $R^*(G) \subseteq G$ и в силу (3) $R^*(G) \subseteq G^0 \cap G = G^0$.

Из (4) и того, что $N^*(G) \subseteq R^*(G)$, следует, что $N^*(G) \subseteq G \cap G = G$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.— М.: Мир, 1977, т. 2.— 416 с.
2. Компанцева Е. И. Абсолютный радикал Джекобсона смешанной абелевой группы ранга без кручения один.— М., 1982.— 16 с. Деп. в ВИНТИ 31 янв. 1983, № 548—83 Деп.
3. Джекобсон Н. Строение колец.— М.: ИЛ, 1961.— 392 с

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ КВАЗИСЕРВАНТНО ИНЪЕКТИВНЫХ И ТРАНЗИТИВНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

П. А. Крылов

В статье рассматриваются редуцированные абелевы группы без кручения с циклическими p -базисными подгруппами. Такие группы изучались в ряде работ, например [1—4] и др. На некоторые из этих групп (например, неразложимые конечного ранга) можно смотреть как на ближайшее обобщение групп без кручения ранга 1 (см. [1, 2]). Тем не менее группы с циклическими p -базисными подгруппами могут быть устроены весьма сложно.

§ 1 является приложением некоторых общих результатов работ [5, 6]. Интересно проследить, как выглядят результаты из [5, 6] в случае групп с циклическими p -базисными подгруппами. В частности, в § 1 обобщаются и уточняются основные факты из работ автора [4, 7].

В § 2 строятся три примера квазисервантно инъективных, вполне транзитивных и транзитивных групп без кручения. Характерной чертой построенных групп является отсутствие максимальных элементов во множестве типов всех ненулевых элементов группы. Существование таких групп ранее не было известно [8]. Построения ведутся в классе групп с циклическими p -базисными подгруппами. Квазисервантно инъективные и вполне транзитивные группы привлекли в последнее время внимание многих специалистов (см., например, [5, 6, 8—12]).

Строится связная квазисервантно инъективная группа с указанным свойством множества всех типов (пример 2.3). К такой группе можно подойти и с другой (но равносильной) точки зрения. Во всех имеющихся примерах кольцо эндоморфизмов неразложимой квазисервантно инъективной группы, а также неразложимой вполне транзитивной или транзитивной группы без кручения [5, 6, 9, 10] является сильно однородным. Пример 2.3 доказывает существование иных квазисервантно инъективных групп.

Следующий пример — это суперразложимая вполне транзитивная и транзитивная группа (предложение 2.5). Оказываясь, что суперразложимая группа с циклическими p -базисными подгруппами, построенная автором в [4], является вполне транзитивной и транзитивной. Отметим, что эта группа не является квазисервантно инъективной.

Третий пример носит более специальный характер. Он показывает, что ситуация с вполне транзитивными группами намного более сложная, чем с квазисервантно инъективными. Примечательно, что во всех трех примерах группы возникают как адитивные группы определенных счетных E -колец. В связи с этим напомним, что неразложимая счетная однородная вполне транзитивная группа G без кручения имеет вид $G \sim T \otimes A$, где T — некоторое сильно однородное E -кольцо; A — группа ранга 1 [6, следствие 2.9]. То же верно для произвольной неразложимой однородной квазисервантно инъективной группы [9, теорема 3.1].

Кольцо эндоморфизмов абелевой группы G обозначаем $E(G)$. Z, Q, N и $\mathbb{P}$ соответственно кольцо целых, поле рациональных, множество натуральных и множество простых чисел. Далее Q_p — группа или кольцо рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с p , Q_p — группа или кольцо целых p -адических чисел. Рациональная алгебра $E(G) \otimes_{\mathbb{Z}} Q$ называется кольцом (или алгеброй) квазиэндоморфизмов группы G без кручения. Ее обозначаем $E(G)$.

Пусть G — редуцированная группа без кручения с циклическими p -базисными подгруппами. Для всякого простого p ранг p -базисной подгруппы группы G равен $\dim_{F_p}(G/pG)$, называется p -рангом группы G и обозначается $r_p(G)$. Поэтому класс всех таких групп G совпадает с классом всех редуцированных групп G без кручения со свойством $r_p(G) \leq 1$, $p \in \mathbb{P}$. Известно также, что этот класс совпадает с классом всех ненулевых сервантных подгрупп группы $\prod_{p \in \mathbb{P}} Q_p^*$. В частности, сюда попадают все сервантные подгруппы в $\prod_{p \in \mathbb{P}} Q_p$.

Полноценное G группы G в $\mathbb{Z}$ -адической топологии изоморфно $\prod_{p \nmid G} Q_p^*$. Поэтому группу G можно рассматривать как сервантную плотную подгруппу в $\prod_{p \in \mathbb{P}} Q_p$. Следовательно, кольцо $E(G)$ вкладывается в $E(\prod_{p \in \mathbb{P}} Q_p)$. Так как $E(G) \cong \prod E(Q_p^*) \cong \prod Q_p^*$, то $E(G)$ — коммутативное кольцо.

§ 1. Группы G с циклическими p -базисными подгруппами такие, что $G = \text{Soc } G$

Псевдооколом группы G без кручения — обозначение $\text{Soc } G$ — называется сервантная подгруппа, порожденная в G всеми ее минимальными сервантными вполне характеристическими подгруппами. В общем случае о псевдооколе можно сказать немного [5, теорема 2.1, следствие 2.2]. Однако группы, указанные в названии параграфа, допускают довольно детальное изучение. Доказываемая ниже теорема 1.1 похожа на теорему 4.2 [5]. В случае групп конечного ранга существуют результаты о классах групп, включающих группы конечного ранга из теорем 1.1 и 4.2 [5] (см. [13, теорема 15.5; 14, следствие 9]).

Определение. Ассоциативное кольцо R с единицей называется сильно однородным, если каждый его элемент есть целое кратное некоторого обратимого в R элемента.

Теорема 1.1. Пусть G — редуцированная группа без кручения с циклическими p -базисными подгруппами и $G = \text{Soc } G$. Тогда $G = \sum_{i \in I} G_i$, где каждое кольцо $E(G_i)$ сильно однородно.

Доказательство подобно доказательству теоремы 4.2 [5]. Используем также обозначения этой теоремы. Положим $V = G \otimes Q$, $S = E(G) \otimes Q$, $K = \text{End}_{S^p} V$. Естественным образом V является S - K -бимодулем. Поскольку $G = \text{Soc } G$, то S -модуль V — вполне приводимый [5, лемма 1.5]. Напишем $V = \sum_{i \in I} V_i$, где V_i — однородные компоненты S -модуля V ; I — некоторое множество индексов. Положим $G_i = V_i \cap G$, $i \in I$.

Возьмем два различных индекса $i, j \in I$ и допустим, что $pG_i \neq G_i$ и $pG_j \neq G_j$ для какого-либо простого числа p . Выберем некоторый циклический K -подмодуль W_i в V_i и некоторый циклический K -подмодуль W_j в V_j , причем образующие их элементы лежат в каких-то неприводимых подмодулях S -модуля V . Положим $A = W_i \cap G$, $B = W_j \cap G$ и $C = (W_i + W_j) \cap G$. По следствию 2.2 [5] группы C и $A + B$ квазиравны. Проверим, что $pA \neq A$ и $pB \neq B$. Для этого нужно учесть, что сумма всех таких циклических подмодулей K -модуля V_i совпадает с V_i . Пересечения этих подмодулей с группой G попарно квазиизоморфны [5, следствие 2.2], и фактор-группа группы G_i по сумме всех пересечений периодична. Поэтому если предположить, что $pA = A$, то все рассмат-

риваемые пересечения в силу квазиизоморфизма также будут делиться на p . Учитывая периодичность фактор-группы группы G_i по сумме всех пересечений, получаем, что p -делимой будет и группа G_i . Противоречие с тем, что $pG_i \neq G_i$. Таким образом, $pA \neq A$ и аналогично $pB \neq B$. Откуда $r_p(A), r_p(B) > 0$ и $r_p(A \oplus B) > 1$. Поскольку подгруппа C квазиравна $A \oplus B$, то $r_p(C) = 1$. Но это невозможно, ведь подгруппа C сервантна в G и $r_p(C) = r_p(G) < 1$.

Итак, установили, что для любых $i, j \in I$ с $i \neq j$ и любого p выполняется: если $pG_i \neq G_i$, то $pG_j = G_j$. Теперь, так же как в аналогичном месте доказательства теоремы 4.2 [5], учитывая периодичность фактор-группы $G / \sum_{i \in I}^{\oplus} G_i$, получаем $G =$

$$= \sum_{i \in I}^{\oplus} G_i.$$

Далее покажем, что кольцо квазиэндоморфизмов $E(G_i)$ есть тело для каждого $i \in I$. С этой целью проверим, что K -модуль V_i является циклическим. Так как этот модуль — однородный вполне приводимый, то в противном случае он содержит два непересекающихся циклических подмодуля, скажем W_1 и W_2 . Положим $A = (W_1 + W_2) \cap G$ и $A_i = W_i \cap G$, $i = 1, 2$. По следствию 2.2 [5] группа A квазиравна $A_1 \oplus A_2$, а группы A_1 и A_2 квазиизоморфны. Выберем простое p , для которого $pA_1 \neq A_1$. Так как A_1 квазиизоморфна A_2 , то $pA_2 \neq A_2$ и $r_p(A) = r_p(A_1 \oplus A_2) > 1$, что невозможно ввиду сервантности A в G . Следовательно, V_i — действительно циклический K -модуль. Тогда по следствию 2.2 [5] фактор-кольцо $M(G_i)/N(G_i)$ является телом, где $M(G_i) = \{\alpha \in E(G_i) \mid \alpha G_i \text{ квазисодержится в } G_i\}$; $N(G_i) = \{\alpha \in E(G_i) \mid \alpha G_i = 0\}$. Но G_i — прямое слагаемое в G , поэтому $M(G_i)/N(G_i)$ канонически изоморфно $E(G_i)$. Так что $E(G_i)$ — тело. В частности, ненулевые эндоморфизмы групп G_i являются мономорфизмами.

Теперь можем показать, что кольцо $E(G_i)$ сильно однородно. Для удобства опустим индекс i . Пусть φ — некоторый эндоморфизм группы G . Выберем какую-нибудь минимальную сервантную вполне характеристическую подгруппу H в G , а в ней некоторый элемент $z \neq 0$. Существуют в силу минимальности подгруппы H эндоморфизм ξ группы G и натуральное k , для которых $\xi(\varphi(z)) = kz$. Рассмотрим эндоморфизм $\chi = \xi\varphi - 1 \cdot k$. Если допустить, что $\chi \neq 0$, тогда ввиду $\chi(z) = 0$ было бы $\ker \chi \neq 0$, что невозможно, поскольку ненулевые эндоморфизмы группы G являются мономорфизмами. Следова-

тельно, $\chi=0$ и $\varphi\xi=\xi\varphi=1\cdot k$. Откуда $\text{im } \varphi \supseteq kG$. Так как все группы G/pG циклические, то G/kG — циклическая группа. Поэтому имеем

$$\text{im } \varphi \cap kG = n(G \cap kG) = nG \cap kG$$

для некоторого делителя n числа k . Следовательно, $\text{im } \varphi = nG$. Зададим теперь автоморфизм Ψ группы G следующим образом. Если $x \in G$, то $\varphi(x) \in nG$, поэтому $\varphi(x) = nu$ для единственного элемента $u \in G$. Положив $\Psi(x) = u$, получим автоморфизм Ψ группы G со свойством $\varphi = n\Psi$. Каждый элемент кольца $E(G)$ есть целое кратное некоторого обратимого элемента, то есть $E(G)$ — сильно однородное кольцо. Теорема доказана.

В следующих трех следствиях редуцированная группа G без кручения имеет циклические p -базисные подгруппы. Поскольку кольцо $\prod_{p \in \pi} Q_p^*$ не имеет ненулевых нильпотентных элементов, то их нет и в $E(G)$. Поэтому, если G имеет конечный ранг, то $G = \text{Soc } G$ [5, теорема 3.1]. Следовательно, справедливо

Следствие 1.2 [1]. Группа G конечного ранга равна $\sum_{i=1}^n G_i$,

где все кольца $E(G_i)$ сильно однородны.

Следствие 1.3 [4]. Кольцо эндоморфизмов $E(G)$ неразложимой группы G сильно однородно тогда и только тогда, когда $G = \text{Soc } G$.

Доказательство. Если кольцо $E(G)$ сильно однородно, то кольцо $E(G) \otimes Q$ — поле, поскольку все идеалы кольца $E(G)$ имеют вид $nE(G)$, $n \in Z$. Отсюда, $E(G) \otimes Q$ -модуль $G \otimes Q$ вполне приводим, т. е. $G = \text{Soc } G$. Обратное содержится в теореме 1.1.

Определение. 1) Группа G называется сильно однородной, если группа $\text{Aut } G$ действует транзитивно на множестве всех сервантных подгрупп ранга 1 группы G . 2) Группа G называется неприводимой, если $E(G) \otimes Q$ -модуль $G \otimes Q$ неприводим.

Следствие 1.4. Следующие свойства группы G равносильны: 1) G — сильно однородная группа; 2) G — неприводимая группа; 3) $G \cong R \otimes_Z A$, где R — некоторое сильно однородное кольцо без кручения такое, что если $pR \neq R$, то $R/pR \cong F_p$, A — группа без кручения ранга 1 и если $pA = A$, то $pR = R$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) верно всегда. 2) $\Rightarrow$ 3). Неприводимая группа G однородна. Поэтому если $G = F \rtimes H$, где $F, H \neq 0$ и $pG \neq G$, то $pF \neq F$ и $pH \neq H$. Откуда $r_p(G) =$

$=r_p(F) + r_p(H) = 2$, что невозможно. Заключаем, что группа G неразложима. Теперь по следствию 1.3 кольцо $E(G)$ сильно однородно. По предложению 5.1 [5] группа $\text{Aut } G$ действует транзитивно на множестве всех сервантных подгрупп ранга 1 группы G , т. е. G — сильно однородная группа. Если элемент $g \in G$, $g \neq 0$, то вполне характеристическая подгруппа $E(G)g$ такова, что $G/E(G)g$ — периодическая группа (ввиду неприводимости G). Таким образом, группа G является $E(G)$ -модулем ранга 1. По следствию 2.7 [6] или следствию 1 [15] $G \cong E(G) \otimes_{\mathbb{Z}} A$, где A — группа ранга 1. 3) $\rightarrow$ 1). Аддитивная группа R^+ сильно однородного кольца является сильно однородной группой, и группа G сильно однородна по лемме 2.3 [6] или лемме 1 [15]. Следствие доказано.

В заключение параграфа рассмотрим связанные группы, о которых можно сказать больше. Редуцированная группа G без кручения называется связной, если каждая ее ненулевая сервантная подгруппа плотна в $\mathbb{Z}$ -адической топологии [16]. Известно, что связная группа неразложима и имеет циклические p -базисные подгруппы. Связными группами являются все однородные группы с циклическими p -базисными подгруппами, в частности, все сервантные подгруппы в Q_p^* .

Следствие 1.5. Следующие свойства связной группы G эквивалентны: 1) $G = \text{Soc } G$; 2) $\text{Soc } G \neq 0$; 3) $E(G)$ — сильно однородное кольцо.

Доказательство. Всякий ненулевой эндоморфизм связной группы является мономорфизмом, поэтому последний абзац доказательства теоремы 1.1 справедлив и здесь. Таким образом, 2) $\rightarrow$ 3), а 3) $\rightarrow$ 1) установлено в следствии 1.3.

Рассмотрим специально сервантные подгруппы группы целых p -адических чисел Q_p . Такая подгруппа G плотна в Q_p^* , поэтому всякий эндоморфизм группы G однозначно продолжается до эндоморфизма группы Q_p^* . В этом смысле считаем, что $E(G) \subseteq Q_p^*$, причем $E(G)$ — сервантное подкольцо в Q_p^* .

Определение. Подкольцо R кольца S называется унитарным, если всякий элемент кольца R , обратимый в S , обратим и в R .

Следствие 1.6 [7]. Следующие утверждения о ненулевой сервантной подгруппе G группы Q_p^* равносильны:

- 1) $G = \text{Soc } G$;
- 2) $\text{Soc } G \neq 0$;

- 3) $E(G)$ — сильно однородное кольцо;
- 4) $E(G)$ — унитарное подкольцо в Q_p^* ;
- 5) G не имеет собственных изоморфных себе сервантных подгрупп;
- 6) $E(G)$ — кольцо дискретного нормирования;
- 7) $E(G)$ — локальное кольцо;
- 8) $J(E(G)) = pE(G)$, где $J(E(G))$ — квазирегулярный радикал кольца $E(G)$.

Доказательство. Равносильность 1), 2), 3) доказана в следствии 1.5. Учитывая, что Q_p^* — сильно однородное кольцо, нетрудно проверить, что $3) \Leftrightarrow 4)$. $3) \rightarrow 5)$ очевидно. $5) \rightarrow 3)$. Пусть $0 \neq \lambda \in E(G)$. Тогда в кольце Q_p^* имеем $\lambda = n\theta$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$ и обратимого элемента θ . В силу сервантности $E(G)$ в Q_p^* , $\theta \in E(G)$ и θ сохраняет высоты всех элементов группы G , поскольку θ обратим в Q_p^* . Следовательно, подгруппа $\text{im } \theta$ сервантна в G и по 5) $\text{im } \theta = G$, т. е. θ — автоморфизм группы G и $\lambda = n\theta$, что доказывает 3). Эквивалентность первых пяти условий доказана.

3) $\rightarrow$ 6). Если $k \in \mathbb{Z}$ и $(k, p) = 1$, то $kG = G$ и также $kE(G) = E(G)$. Идеалы сильно однородного кольца $E(G)$ исчерпываются идеалами вида $mE(G)$, $m \in \mathbb{Z}$. В силу замеченного выше можно считать, что $m = 0, 1, p, p^2, \dots$ и верно 6). 6) $\rightarrow$ 7) верно всегда. 7) $\rightarrow$ 8). Так как $E(G)/pE(G) \cong F_p$, то $pE(G)$ — максимальный идеал и $pE(G) \supseteq J(E(G))$. По предположению $E(G)/J(E(G))$ — поле, поэтому $J(E(G)) = pE(G)$. 8) $\rightarrow$ 5). Поскольку $E(G)/J(E(G)) = E(G)/pE(G) \cong F_p$, то $E(G)$ — локальное кольцо. Допустим теперь, что G имеет собственную изоморфную себе сервантную подгруппу H и пусть $\lambda: G \rightarrow H$ — некоторый изоморфизм. Тогда $\lambda \in J(E(G))$ ввиду необратимости λ и локальности $E(G)$. Однако $\lambda \notin pE(G)$, так как H — сервантная подгруппа, поэтому λ сохраняет высоты элементов. Противоречие означает, что 5) справедливо и следствие доказано.

Эквивалентность 4) и 7) установил Орсатти [17].

Определение. Кольцо R называется E -кольцом, если его левое регулярное представление является изоморфизмом, т. е. всякий эндоморфизм аддитивной группы R^+ совпадает с умножением кольца R слева на некоторый элемент из R .

Хорошо известно, что Q_p^* — E -кольцо. Отсюда выводится также известный факт, что любое сервантное подкольцо в $\bigcap_{p \in \pi} Q_p^*$ является E -кольцом.

Пример сервантной подгруппы $G \subset Q_p^*$, для которой $\text{Soc } G = 0$. Пусть σ — некоторый обратимый элемент из Q_p^* , не являющийся алгебраическим числом. Положим R — сервантное подкольцо в Q_p^* , порожденное 1 и σ , и $G = R^+$. Тогда R — E -кольцо и $E(G)$ канонически изоморфно R . Допустим теперь, что для некоторого обратимого элемента $\omega \in R$ и натурального n , $\sigma = n\omega$. Выберем целые числа $k, k_0, k_1, \dots, k_t$, отличные от нуля, и натуральные $l_0, l_1, \dots, l_t$ так, что $k\omega = k_1\sigma^{l_1} + k_0\sigma^{l_0} + \dots + k_t\sigma^{l_t}$. Отсюда $k\sigma = nk_0\sigma^{l_0} + \dots + nk_t\sigma^{l_t}$, что противоречит выбору σ . Значит, кольцо $E(G)$ не сильно однородно и $\text{Soc } G = 0$ по следствию 1.6.

§ 2. Примеры квазисервантно инъективных и транзитивных групп

Если a — элемент группы без кручения G , $p \in \pi$, то $h_p(a)$ ($\chi(a)$) обозначает p -высоту (характеристику) элемента a в группе G .

Определение. 1) Группа G называется квазисервантно инъективной, если всякий гомоморфизм $A \rightarrow G$, где A — сервантная подгруппа в G , индуцируется эндоморфизмом группы G .

2) Группа G без кручения называется вполне транзитивной (транзитивной), если всякий (всякий сохраняющий высоты) гомоморфизм $A \rightarrow G$, где A — сервантная ранга 1 подгруппа в G , индуцируется эндоморфизмом (автоморфизмом) группы G . Это определение равносильно

2') Группа G без кручения называется вполне транзитивной (транзитивной), если для любых элементов $0 \neq a, b \in G$, таких, что $\chi(a) \leq \chi(b)$ ($\chi(a) = \chi(b)$), существует эндоморфизм (автоморфизм) α группы G со свойством $\alpha a = b$.

Л е м м а 2.1. Следующие свойства кольца без кручения R равносильны:

1) для всякого простого p и любых $a, b \in R$, если $ab : p$, то $a : p \vee b : p$;

2) $h_p(ab) = h_p(a) + h_p(b)$ для всякого простого p и любых $a, b \in R$ или, что то же, $\chi(ab) = \chi(a) + \chi(b)$;

3) для всякого простого p кольцо R/pR есть область целостности.

Доказательство. 1) $\rightarrow$ 2). Если $a = p^k a'$, $b = p^l b'$, где $k, l \in \mathbb{N}$; $a', b' \in R$, то $ab = p^{k+l} a' b'$. Откуда $h_p(ab) \geq h_p(a) +$

$+h_p(b)$. Допустим теперь, что $h_p(ab)=n$, $h_p(a)=k$, $h_p(b)=l$ и $n > k+l$. Имеем $\frac{a}{p^k} \cdot \frac{b}{p^l} = \frac{ab}{p^{k+l}} \in p$, но $\frac{a}{p^k}$ и $\frac{b}{p^l}$ не делятся на p , что противоречит 1). Значит, 2) верно.

2) $\Rightarrow$ 3). Предположим, что существуют элементы $a, b \in R$, для которых $ab \in pR$, но $a, b \notin pR$. Или $h_p(ab) > 0$, но $h_p(a) = h_p(b) = 0$, что невозможно ввиду 2). Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) очевидна и лемма доказана.

В дальнейшем удобно называть группу G квазиоднородной, если для любой сервантной подгруппы A в G из того, что $nA = A$, $n \in N$, следует $nG = G$.

Предложение 2.2. Пусть R — коммутативная область целостности без кручения такая, что все кольца R/pR — области целостности, а R^+ — квазиоднородная группа (но не делимая). Обозначим R — поле частных кольца R и положим $S = \{b \in R \mid a, b \in R, \chi(a) \leq \chi(b)\}$. Тогда S — такое подкольцо в R , что S^+ — вполне транзитивная и транзитивная группа, а R — сервантное подкольцо в S .

Доказательство. Если $a \in R$, то $\gamma(1) \chi(a)$ и $a = a/1 \in S$, т. е. $R \subseteq S$. Пусть теперь $b, a, d, c \in S$. Значит, $\chi(a) \leq \chi(b)$ и $\chi(c) \leq \chi(d)$. Отсюда по лемме 2.1 $\chi(ac) \leq \chi(a) + \chi(c) \leq \chi(b) + \chi(d) = \chi(bd)$ и $b, a \cdot d, c \in S$. Далее имеем $\chi(ac) = \chi(a) + \chi(c) \leq \chi(b) + \chi(c) = \chi(bc)$ и аналогично $\chi(ac) \leq \chi(ad)$. Следовательно, $h_p(ac) = \min(h_p(bc), h_p(ad)) = h_p(bc) + \chi(ad)$ для всех $p \in \pi$ и $\chi(ac) \leq \chi(bc) + \chi(ad)$. Поэтому $b, a + d, c \in (bc + ad)$ и $ac \in S$ и S — подкольцо в R .

Докажем, что R — сервантное подкольцо в S . Пусть $b, a \in S$, $p \in \pi$ и $pb, a = c \in R$, причем $pR \neq R$. Сократив, если нужно, элементы b и a на $h_p(a)$, можно считать, что $h_p(a) = 0$. Тогда $pb = ac$, откуда $h_p(ac) = 1$. Но $h_p(ac) = h_p(a) + h_p(c) = h_p(c)$. Так что $h_p(c) \geq 1$ и $c \in pR$, $c' \in R$. Следовательно, $pb, a = c = pc'$ и $b, a - c' \in R$, чем сервантность R в S установлена.

Ниже будет полезен такой факт. Если $b, a \in S$, то $\chi(b/a) = \chi(b) - \chi(a)$, где разность вычисляется покомпонентно и она имеет смысл, поскольку $h_p(a) \leq h_p(b)$, $p \in \pi$. Зафиксируем $p \in \pi$ с $pR \neq R$ и докажем, что $h_p(b/a) = h_p(b) - h_p(a)$. Как и выше, можно считать, что $h_p(a) = 0$, поэтому нужно проверить, что $h_p(b/a) = h_p(b)$. Пусть $b = p^n b'$, $n \in N$, где $b' \in R$ с $h_p(b') = 0$. Если $b' = a = pd, c$, где $h_p(c) = 0$ (заметим, что $\chi(a) \leq \chi(b')$ и $b'/a \in S$), то $b'c = pad$ и $h_p(b') = h_p(b') + h_p(c) = h_p(b'c) \geq 1$, что противоречит выбору b' . Последнее

предложение показывает, что $h_p(b'/a) = 0$. Так как $b/a \in p^n b'/a$, то $h(b/a) \in h_p(b)$ и равенство $\chi(b/a) = \chi(b) - \chi(a)$ доказано.

Осталось доказать, что S^+ — вполне транзитивная и транзитивная группа. Пусть $b/a, d/c \in S$ с $\chi(b/a) < \chi(d/c)$. Тогда $\chi(b) - \chi(a) < \chi(d) - \chi(c)$, $\chi(b) < \chi(c)$ и $\chi(a) < \chi(d)$ или $\chi(bc) < \chi(ad)$. Следовательно, $ad/bc \in S$ и $b/a \times d/bc \in d/c$. Таким образом, умножение элементов кольца S на ad/bc является эндоморфизмом группы S^+ , переводящим b/a в d/c , т. е. S^+ вполне транзитивная группа.

Если $\chi(b/a) < \chi(d/c)$, то в силу симметрии $\chi(ad) < \chi(bc)$ и поэтому $\chi(bc) < \chi(ad)$. Отсюда элементы $ad/bc, bc/ad \in S$ и ad/bc — обратимый элемент кольца S . Он индуцирует автоморфизм группы S^+ , переводящий b/a в d/c , и S^+ — транзитивная группа. Предложение доказано.

Из определения видно, что квазисервантно инъективная группа без кручения вполне транзитивна. О соотношении между квазисервантно инъективными и транзитивными группами можно сказать следующее. Во всех известных результатах квазисервантно инъективные группы без кручения являются транзитивными. Что касается вполне транзитивных и транзитивных групп, то существует пример транзитивной, но не вполне транзитивной группы без кручения [8]. Напомним, что в примарном случае понятия вполне транзитивной группы и транзитивной группы независимы.

Пример 2.3. Существует счетная группа A без кручения, имеющая следующие свойства:

1) A есть аддитивная группа некоторого E -кольца, являющегося коммутативной областью целостности;

2) A — связная квазисервантно инъективная и транзитивная группа;

3) кольцо $E(A)$ не является сильно однородным или, что то же, множество типов всех ненулевых элементов группы A не имеет максимальных элементов.

Доказательство. Элемент a произведения $\prod_{p \in \pi} Q_p$ будем записывать в виде a_p , где a_p — p -компонента элемента a . Для каждого простого числа p выберем в Q_p^* обратимый элемент σ_p , не являющийся алгебраическим числом. Затем для каждого $n=0,1,2 \dots$ положим $\sigma_n = \langle p^n \sigma_p \rangle$ — элемент кольца $\prod_{p \in \pi} Q_p^*$. Пусть R — сервантное подкольцо в $\prod_{p \in \pi} Q_p^*$ (здесь и далее в произведении $\prod_{p \in \pi} Q_p^*$ опускаем „ $p \in \pi$ “),

порожденное множество $\{\sigma_n | n=0, 1, 2, \dots\}$. Отметим, что очень важно, что подгруппа, порожденная в PQ_p множеством $\{\sigma_n | n=0, 1, 2, \dots\}$, является подкольцом и R есть сервантная оболочка этого подкольца.

Проверим, что все требования на кольцо R из предложения 2.2 выполняются. Во-первых, $R/pR \cong F_p$ — поле вычетов по модулю p . Во-вторых, R^+ — квазиоднородная группа. В противном случае в R есть ненулевой элемент бесконечной p -высоты для какого-то p . Это означает, что p -компонента этого элемента в PQ_p^* равна 0. Следовательно, есть натуральные числа $m_1, \dots, m_s, n_1, \dots, n_s$, для которых $m_1 p^{n_1} \sigma_p^{n_1} + \dots + m_s p^{n_s} \sigma_p^{n_s} = 0$. Но это противоречит выбору σ_p . Наконец, по построению R — коммутативная область целостности. Пусть $\hat{R}$ — поле частных кольца R , а S — такое кольцо, как в предложении 2.2.

Обозначим через A_p поле p -адиических чисел. Так как все компоненты любого ненулевого элемента из R отличны от нуля, то все ненулевые элементы кольца R обратимы в A_p . Поэтому можно считать, что поле частных $\hat{R}$ лежит в A_p .

Убедимся, что при этом соглашении $S \subset PQ_p^*$. В самом деле, если $b/a \in S$, $b = \langle b_p, a = a_p \rangle$, то запишем $b_p = p^{m_p} b'_p$ и $a_p = p^{n_p} a'_p$, где b'_p, a'_p — обратимые элементы в Q_p . Так как $\chi(a) < \chi(b)$, то $h_p(a'_p)^{-1} \cdot h_p(b_p)$ для каждого p и m_p, n_p . Отсюда $b_p/a_p = p^{m_p - n_p} b'_p(a'_p) \in Q_p$ и $b/a = \langle b_p, a_p \rangle \in PQ_p^*$.

Теперь покажем, что подкольцо S сервантно в PQ_p . Пусть $z \in PQ_p^*$, $b/a \in S$, $p \in \pi$ и $pz = b/a \in S$. Тогда $b = pza$ и $b = pb'$ для некоторого $b' \in R$ в силу сервантности R в PQ_p^* . Имеем $pz = pb'/a$ и $z = b'/a$. Из $b = pza$ следует $h_p(a) < h_p(b)$ и потому $h_p(a) < h_p(b')$. Если $q \in \pi$ с $q \neq p$, то снова $h_q(b') = h_q(b) \geq h_q(a)$ ввиду $b = pza$. Следовательно, $\chi(a) \leq \chi(b')$ и $z = b'/a \in S$, чем сервантность подкольца S установлена. Кроме того, S является E -кольцом.

Положим $A = S^+$ и 1) выполнено. Так как A — квазиоднородная сервантная подгруппа в PQ_p , то A — связанная группа. По предложению 2.2 A — вполне транзитивная и транзитивная группа. Пусть B — ненулевая сервантная подгруппа группы A и $0 \neq \varphi: B \rightarrow A$ — гомоморфизм. Выберем некоторый элемент $0 \neq b \in B$. Тогда $\chi(b) \leq \chi(\varphi b)$ и ввиду вполне транзитивности группы A найдется $\alpha \in E(A)$ такой, что $\alpha b = \varphi b$. Так как $(\alpha - \varphi)b = 0$, то $(\alpha - \varphi)B = 0$, поскольку A — связанная груп-

па и всякий ненулевой гомоморфизм $B \rightarrow A$ есть мономорфизм. Таким образом, α индуцирует φ , A — квазисервантно инъективная группа и 2) справедливо.

3) Если $b/a \in A$, то $\chi(b/a) = \chi(b) - \chi(a) \leq \chi(b)$. Далее для любого $n = 0, 1, 2, \dots$, $\chi(\sigma_n) < \chi(\sigma_{n+1})$, а некоторое кратное любого элемента из A линейно выражается через элементы σ_n . Поэтому тип любого ненулевого элемента из A не больше типа какого-то σ_n . Эти замечания показывают, что множество всех типов ненулевых элементов группы A не имеет максимальных элементов. Раз группа A вполне транзитивна, это влечет, что $\text{Soc } A = 0$ (минимальная сервантная вполне характеристическая подгруппа всегда однородна). По следствию 1.5 это равносильно тому, что кольцо $E(A)$, которое канонически изоморфно S , не является сильно однородным. Можно показать, что оно даже не нетерово.

В книге [18] записана задача: «изучить свойства квазисервантно инъективных групп» (проблема 17). Построенный пример вместе с существующими показывает, что эти группы могут быть весьма разнообразными. Тем более это справедливо по отношению к вполне транзитивным и транзитивным группам, что подтверждает предложение 2.5.

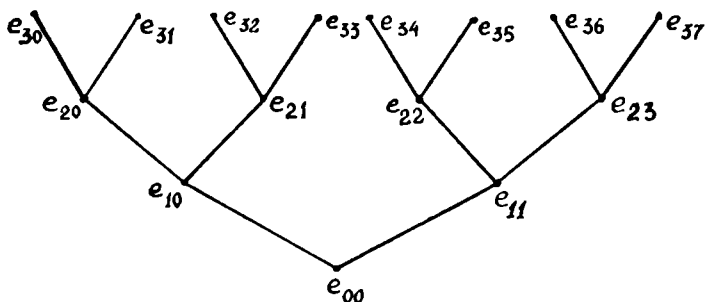
Определение. Группа G называется суперразложимой, если она не имеет ненулевых неразложимых прямых слагаемых.

Существование суперразложимых групп доказал Корнер [19]. В [4] построена суперразложимая группа без кручения с циклическими p -базисными подгруппами. На самом деле доказательство теоремы 2 из [4] дает целую серию таких групп. Подобная серия суперразложимых групп приведена в [20]. Более точно сформулируем теорему 2 работы [4] и докажем ее, используя некоторые обозначения, заимствованные из [20].

Теорема 2.4 [4]. Существует счетная суперразложимая группа A без кручения такая, что A — аддитивная группа некоторого E -кольца, являющегося сервантным подкольцом в $\prod_{p \in \mathbb{P}} Q_p$.

Доказательство. Обозначим $P = \prod_{p \in \mathbb{P}} Q_p$ и e_{00} — единичный элемент в P . Отметим, что $e_{00} = \langle 1_p^{\pi} \rangle$, где 1_p — единичный элемент в Q_p . Запишем $e_{00} = e_{10} + e_{11}$, где e_{10}, e_{11} — некоторые ортогональные идемпотенты в P , содержащие бесконечное число отличных от нуля компонент. Если $e_{\lambda m}$ уже определены, то выберем некоторые ортогональные идемпотенты

$e_{n+1,2m}, e_{n+1,2m+1}$ в P , содержащие бесконечное число отличных от нуля компонент, и такие что $e_{nm} = e_{n+1,2m} + e_{n+1,2m+1}$. Тогда множество $E = \{e_{nm} | n=0,1,2,\dots; 0 < m < 2^n\}$ является полным бинарным деревом с корнем e_{00} в терминологии [20]:



Пусть B —подгруппа в P , порожденная множеством E . Тогда B —подкольцо в P . Действительно, пусть $b, c \in B$, $b = \sum_{i=1}^k s_i e_{n_i, m_i}$, $c = \sum_{j=1}^l t_j e_{n'_j, m'_j}$, где $s_i, t_j \in Z$. Будем всегда считать, и это очень удобно, что все элементы e_{n_i, m_i} и $e_{n'_j, m'_j}$ лежат в одном слое, т. е. имеют одинаковый первый индекс. Если это не так, то выберем натуральное $n \geq \max \{n_1, \dots, n_k, n'_1, \dots, n'_l\}$. Затем выразим все e_{n_i, m_i} , $e_{n'_j, m'_j}$ через элементы e_{nm} ,

$0 \leq m < 2^n$. Итак, можно написать $b = \sum_{m=0}^{2^n-1} s_m e_{nm}$, $c = \sum_{m=0}^{2^n-1} t_m e_{nm}$, $s_m, t_m \in Z$. Теперь ясно, что $bc \in B$, так как при фиксированном n множество $e_{nm} | 0 \leq m < 2^n$ состоит из попарно ортогональных идемпотентов. Пусть R —сервантное подкольцо в P , порожденное B , или, что все равно, множеством E .

Для любого $r \in R$ существует $n \in N$, для которого $nr \in B$. Положим $A = R^+$. Так как R — E -кольцо, то $E(A)$ канонически изоморфно R .

Нужно только показать, что A —суперразложимая группа. С этой целью установим, что всякий идемпотент $e \neq 0$ кольца R равен сумме некоторых e_{nm} , откуда сразу получается суперразложимость группы A . Выберем $s, n \in N$ и $t_m \in Z (0 \leq m < 2^n)$ так, что $\forall e - \sum t_m e_{nm}$ или $e = \sum t_m / s e_{nm}$ в

ольце P . Поскольку $e^2 = e$, то $(t_m/s)^2 e_{nm} = t_m/se_{nm}$ и $(t_m/s)^2 = t_m/s$ для всех m . Отсюда или $t_m = 0$, или $t_m = s$. Таким образом, идемпотент e равен сумме каких-то e_{nm} при фиксированном n , что и утверждалось. Теорема доказана.

В [21, 22] изучалась проблема существования суперразложимых м-дулей над дедекиндовым кольцом R . Доказано, что такие м-дули существуют всегда, кроме очевидных исключений. R — поле или R — полное кольцо дискретного нормирования.

Суперразложимые группы из теоремы 2.4 и [20] имеют многие интересные свойства. Некоторые из них указаны в [20, предложение 3.1]. В следующем предложении дадим простое доказательство как известных свойств этих групп, так и рассмотрим некоторые новые. Доказательства основаны на том важном обстоятельстве, что группа A из теоремы 2.4 является аддитивной группой некоторого E -кольца. Ниже используются обозначения из доказательства теоремы 2.4.

Положим E_{nm} — дерево с корнем e_{nm} , R_{nm} — сервантное подкольцо в P , порожденное E_{nm} , и $A_{nm} = R_{nm}^+(A_{00} = A)$. Тогда $R_{nm} = e_{nm}R$, R_{nm} есть E -кольцо, а A_{nm} — суперразложимая группа и для всякого $n = 0, 1, 2, \dots$, $A = \sum_{0 \leq m < 2^n} A_{nm}$.

Предложение 2.5. Группа A , построенная в теореме 2.4, обладает следующими свойствами:

- 1) A — вполне транзитивная и транзитивная группа;
- 2) A — объединение счетной возрастающей цепи сервантных вполне разложимых подгрупп конечного ранга, являющихся аддитивными группами E -колец;
- 3) эндоморфизмы группы A определяются своим значением на элементе e_{00} ;
- 4) прямые слагаемые группы A исчерпываются слагаемыми вида

$$\sum_{i=1}^k e_{nm_i} A = \sum_{i=1}^k A_{nm_i};$$

5) всякое прямое разложение группы A имеет конечное число слагаемых;

6) для любого $\alpha \in E(A)$, $A = \ker \alpha \circ \{ \text{Im } \alpha \}_*$;

7) для всякого простого p $p^\infty A = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm_n}$.

где для каждого n берется одно вполне определенное слагаемое A_{nm} , зависящее от p , а $A/p^w A$ — группа ранга 1;

8) A не является квазисервантно инъективной группой, однако всякий гомоморфизм $\phi: B \rightarrow A$, где B — сервантная подгруппа конечного ранга из A , продолжается до эндоморфизма группы A ;

9) замыкание в Z -адической топологии всякой сервантной подгруппы B конечного ранга из A выделяется в A прямым слагаемым.

Доказательство. 1) Пусть $a, b \in A$ и $\chi(a) \chi(b)$. Если $k \in N$ и $ka, kb \in B$, то $\chi(ka) \chi(kb)$. Далее, если $\alpha \in E(A)$ и $\alpha(ka) = kb$, то $\alpha a = b$. Так что можем считать, что $a, b \in B$. Тогда для какого-то $n \in N$ запишем $a = \sum s_m e_{nm}$, $b = \sum t_m e_{nm}$ ($0 < m < 2^n$), $s_m, t_m \in Z$. Так как $\chi(a) < \chi(b)$, то $\chi(s_m e_{nm}) < \chi(t_m e_{nm})$ для всех m (это получается из того, что $kQ_p = Q_p$, если $(k, p) = 1$). Отсюда $(t_m/s_m) | e_{nm}$, т. е. $(t_m/s_m) e_{nm} \in R$ (считаем $0/0 = 1$). Определим $r = \sum_{0 < m < 2^n} (t_m/s_m) e_{nm} \in R$. Тогда $ra =$

$= b$ и A — вполне транзитивная группа. Если $\chi(a) \chi(b)$, то из соображений симметрии $(s_m/t_m) | e_{nm}$, $(s_m/t_m) e_{nm} \in R$. Поэтому r является автоморфизмом, так как $r \cdot \sum (s_m/t_m) e_{nm} = \sum e_{nm} = e_{00} = 1$ (мы, естественно, отождествляем R с $E(A)$).

Следовательно, A — транзитивная группа.

2) Для $n \geq 0$ пусть R_n — сервантное подкольцо в R , порожденное множеством $\{e_{nm} | 0 < m < 2^n\}$. Тогда R_n — E -кольцо, а как группа R_n — вполне разложимая группа ранга 2^n . Ясно, что $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$, где $A_n = R_n^+$.

3) — 5) Эндоморфизмы группы A выступают как умножения на элементы из R и 3) очевидно, поскольку e_{00} — единственный элемент кольца R . Утверждение 4) доказано в теореме 2.4, а 5) вытекает из того, что прямые разложения группы A и кольца R в сумму идеалов — это одно и то же, раз $A = R^+$, а R есть E -кольцо.

6) Если $\alpha \in E(A)$, $k \in N$, то $\ker \alpha = \ker k\alpha$, $\{\text{im } \alpha\}_* = \{\text{im } k\alpha\}_*$. Поэтому считаем, что $\alpha \in B$. Для определенного $n \in N$ запишем $\alpha = \sum t_m e_{nm}$ ($0 < m < 2^n$), $t_m \in Z$. Тогда $\ker \alpha = \sum e_{nm} A$ для m с $t_m = 0$, а $\{\text{im } \alpha\}_* = \sum e_{nm} A$ для m с $t_m \neq 0$.

7) Напомним, что если $A = B \oplus C$ и $pB \neq B$, то $pC = C$. Теперь запишем $A = A_{00} = A_{10} \oplus A_{11}$. Пусть для определенности $pA_{11} = A_{11}$. Полагаем $A_{11} = A_{11,1}$. Теперь записываем $A_{10} = A_{20} + A_{21}$, где, например, $pA_{21} = A_{21}$. Полагаем $A_{21} = A_{21,1}$.

Продолжая так, далее получим последовательность прямых слагаемых A_{nmn} , $n \in N$ группы A таких, что сумма $\sum_{n=1}^{\infty} A_{nmn}$ — прямая. Докажем, что $p^{\omega} A = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus A_{nmn}$. По построению все $A_{nmn} \subset p^{\omega} A$. Если элемент $a \in p^{\omega} A$, то, учитывая сервантность подгруппы $p^{\omega} A$, считаем $a \in B$. Тогда $a = \sum_{0 < m < 2^n} t_m e_{nm}$, $t_m \in Z$ для некоторого $n \in N$. В разложении $A = \sum_{0 < m < 2^n} A_{nm}$ только одно слагаемое A_{nm} не делится на p , а сумма всех остальных лежит в $\sum_{n=1}^{\infty} A_{nmn}$. Так как элемент a имеет бесконечную p -высоту, то он лежит в сумме этих остальных слагаемых. Значит, $a \in \sum_{n=1}^{\infty} A_{nmn}$. Далее, $A/p^{\omega} A = A/(p^{\omega} P \cap A) \cong \cong (p^{\omega} P \cap A)/p^{\omega} P \subseteq P/p^{\omega} P \cong Q_p$.

8) Выберем строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots$. Зафиксируем простое p и пусть α — эндоморфизм группы $p^{\omega} A$ такой, что на слагаемом A_{nmn} из 7) α есть умножение на ε_n . Если бы группа A была квазисервантно инъективной, то α имел бы продолжение до некоторого эндоморфизма $r \in R$ группы A . Выберем k , $n \in N$ и $t_m \in Z$, так что $kr \in B$ и $kr = \sum_{0 < m < 2^n} t_m e_{nm}$. В разложении $A = \sum_{0 < m < 2^n} A_{nm}$ пусть A_{nm} — то слагаемое, которое не делится на p , т. е. не входит в $p^{\omega} A$. Тогда эндоморфизм kr на A_{nm} действует как умножение на t_m . Но с другой стороны от A_{nm} отщепляется бесконечное число слагаемых, входящих в $p^{\omega} A$, на которых эндоморфизм kr есть умножение на соответствующие числа $k\varepsilon_1$, чего не может быть. Значит, эндоморфизм α не имеет продолжения и A — не квазисервантно инъективная группа.

Пусть теперь B — сервантная подгруппа в A конечного ранга и $\alpha: B \rightarrow A$ — некоторый гомоморфизм. Подгруппа αB также имеет конечный ранг и, следовательно, B и αB лежат в некоторой подгруппе A_n из 2). Но A_n — квазисервантно инъективная группа [23, теорема 2.1] и поэтому α продолжается до эндоморфизма группы A_n . Так как A_n является аддитивной группой E -кольца R_n , то этот эндоморфизм есть

умножение кольца R_n на определенный элемент $r \in R_n$. Тогда умножение кольца R на элемент r является эндоморфизмом группы A , продолжающим α .

9) Пусть подгруппы B и A_n — такие, как в 8). В группе A_n замыкание всякой сервантной подгруппы выделяется прямым слагаемым [24, теорема 1.8]. Следовательно, $A_n = B \circ C$, где $\bar{B}$ — замыкание подгруппы B в A_n ; C — дополнительное слагаемое. Пусть $e: A_n \rightarrow B$ — проекция. Так же как в 8), $e \in P_n \subset R$ и, следовательно, $A = eA \oplus D$ для некоторой подгруппы D . Так как $B \subset eA_n \subset eA$ и eA — замкнутая в A подгруппа, то $\bar{B} \subseteq eA$ (здесь и дальше $\bar{B}$ — замыкание подгруппы B в A). Поскольку A имеет циклические p -базисные подгруппы, то $\{e\}_*$ — плотная подгруппа в eA , т. е. $\{\bar{e}\}_* = eA$. Но $\{e\}_* \subset \bar{B}$, значит, $eA = \{\bar{e}\}_* \subseteq \bar{B}$ и $\bar{B} = eA$. Получили $A = \bar{B} \oplus D$ и 9), и предположение доказаны.

Для группы без кручения A , так же как в § 1, положим $V = A \otimes Q$, $S = E(A) \otimes Q$. Пусть $W_i(i \geq 0)$ — цепь цоколей S -модуля $V(W_0 = 0)$. Обозначим $P_i = W_i \cap A(i \geq 0)$ — цепь псевдоцоколей группы A [25, с. 219] (отметим, что $P_1 = \text{Soc } A$). Из результатов работ [5, 9] можно вывести, что цепь псевдоцоколей квазисервантно инъективной группы A обрывается во всяком случае на P_1 . Следующий пример показывает, что это не так для (вполне) транзитивной группы.

Пример 2.6. Существует счетная вполне транзитивная и транзитивная группа A без кручения такая, что:

1) $\sum_{p \in \pi} Q_p \subset A \subset \prod_{p \in \pi} Q_p$, причем A сервантна, но не вполне характеристична в $\prod_{p \in \pi} Q_p$;

2) $A = P_2$;

3) A есть аддитивная группа некоторого E -кольца.

Доказательство. Пусть R — сервантное подкольцо в $\prod_{p \in \pi} Q_p$, порожденное $\sum_{p \in \pi} Q_p$ и единичным элементом $1 \in \prod_{p \in \pi} Q_p$. Положим $A = R^+$, чем обусловлено выполнение 3). Затем $P_1 = \text{Soc } A = \sum_{p \in \pi} Q_p$. Поскольку $r(A \setminus P_1) = 1$, то $A = P_2$. Если бы группа A была вполне характеристична в $\prod_{p \in \pi} Q_p$, то отображение ограничения $\prod_{p \in \pi} Q_p \rightarrow A$ являлось изоморфизмом. Откуда $R = E(A) \cong \prod_{p \in \pi} Q_p$, что противоречит счетности R .

Осталось установить вполне транзитивность и транзитив-

ность группы A . Пусть $0 \neq a, b \in A$ и $\chi(a) \neq \chi(b)$. Можно считать, что эти элементы входят в подгруппу, порожденную $\sum_{p \in \pi} Q_p$ и 1. Тогда можно выбрать $n \in N$, так, что $a = a_1 + \dots + a_n, b = b_1 + \dots + b_n$, где $a_i, b_i \in \sum_{p_i \in \pi} Q_{p_i}; a_i, b_i \in \langle 1 - \sum_{p_i \in \pi} 1_{p_i} \rangle$ — подгруппа, порожденная элементом $1 - \sum_{p_i \in \pi} 1_{p_i}$ (здесь $1 = \langle 1_p \rangle$).

Имеем $\chi(a_1) \neq \chi(b_1)$ и $\chi(a_n) \neq \chi(b_n)$. Так как $\sum_{p_i \in \pi}^{\oplus} Q_{p_i}$ есть E -кольцо, то $r_1 a_1 = b_1$ для некоторого $r_1 \in \sum_{p_i \in \pi}^{\oplus} Q_{p_i}$ и $s a_n = b_n$ для некоторого $s \in Z$. Положив $r = r_1 + s \left(1 - \sum_{p_i \in \pi} 1_{p_i} \right)$, получаем $r \in R$ и $r a = b$.

Если $\chi(a) \neq \chi(b)$, то $\chi(a_1) \neq \chi(b_1)$ и $\chi(a_n) = \chi(b_n)$. Поэтому элемент r_1 можно выбрать обратимым в $\sum_{p_i \in \pi}^{\oplus} Q_{p_i}$, а $s \neq \pm 1$. Тогда элемент r обратим в $R: r^{-1} = r_1^{-1} + s \left(1 - \sum_{p_i \in \pi} 1_{p_i} \right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Murley C. E. The classification of certain classes of torsion free abelian groups.— *Pacific J. Math*, 1972, v. 40, N 3, p. 647—665.
2. Murley C. E. Direct products and sums of torsion free abelian groups.— *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1973, v. 38, N 2, p. 235—241.
3. Иванов А. М. Об одном свойстве p -сервантных подгрупп группы целых p -адических чисел.— *Матем. заметки*, 1980, т. 27, № 6, с. 859—867.
4. Крылов П. А. Абелевы группы без кручения с циклическими p -базисными подгруппами.— *Матем. заметки*, 1976, т. 20, № 6, с. 805—813.
5. Крылов П. А. Об абелевых группах без кручения, I.— В кн.: *Абелевы группы и модули*. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1984, с. 40—64.
6. Крылов П. А. Неприводимые абелевы группы без кручения и их кольца эндоморфизмов.— В кн.: *Абелевы группы и модули*. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986, вып. 4, с. 73—100.
7. Крылов П. А. О сервантных подгруппах группы целых p -адических чисел.— В кн.: *Абелевы группы и модули*. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1979, с. 122—126.
8. Добрусин Ю. Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения, II.— В кн.: *Абелевы группы и модули*. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985, вып. 5, с. 31—41.

9. Добрусин Ю. Б. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980, с. 45—69.
10. Arnold D. M., O'Brien B., Reid J. D. Quasi-pure injective and projective torsion free abelian groups of finite rank.— Proc. London Math. Soc., 1979, v. 38, N 3, p. 532—544.
11. Benabdallah K., Laroche A. Quasi-p-pure injective groups.— Canadian J. Math., 1977, v. 29, N 3, p. 578—586.
12. Гриншпон С. Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981, с. 56—92.
13. Arnold D. M. Finite rank torsion free abelian groups and rings.— Lecture Notes in Math., 1982, N 931. —191 p.
14. Крылов П. А. Об абелевых группах без кручения, II.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985, вып. 5, с. 56—79.
15. Крылов П. А. Сильно однородные абелевы группы без кручения.— СМЖ, 1983, № 2, с. 77—84.
16. Dubois D. W. Cohesive groups and p adic integers.— Publ. math., 1965, v. 12, № 1—4, p. 51—58.
17. Orsatti A. Alcuni gruppi abeliani il cui anello degli endomorfismi è locale.— Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1965, v. 35, Parte I, p. 107—115.
18. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.— М., 1974, т. 1.— 335 с.
19. Corner A. L. S. Every countable reduced torsion free ring is an endomorphism ring.— Proc. London Math. Soc., 1963, v. 13, N 52, p. 687—710.
20. Benabdallah K., Birtz A. Sur une famille de groupes abéliens super-décomposables.— Canad. Math. Bull., 1981, v. 24, N 2, p. 213—218.
21. Meinert K. Superdecomposable modules over Dedekind domains.— Arch. Math., 1982, v. 39, p. 11—18.
22. Dugas M., Cobel R. Every cotorsion free algebra is an endomorphism algebra.— Math. Z., 1982, v. 181, p. 451—470.
23. Добрусин Ю. Б. Квазисервантно инъективные группы.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1979, с. 45—63.
24. Чехлов А. Р. О некоторых классах абелевых групп.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1984, с. 137—152.
25. Крылов П. А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения.— Матем. сб., 1974, т. 95, № 2, с. 214—228.

ОБ ИЗОМОРФНЫХ КВАЗИПРОДОЛЖЕНИЯХ ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

С. Ю. Максимов

В [1] введено понятие m -связанных (слева) прямых разложений абелевой группы. В данной работе рассматриваются приложения этого понятия к некоторым конкретным классам групп. При этом изучается вопрос о существовании изоморфных квазипродолжений [1].

Через Σ и Π будем обозначать прямую сумму и полную прямую сумму соответственно. Под «группой» всегда понимается абелева группа, под «счетностью» — не более чем счетность; $T(G)$ обозначает периодическую часть группы G , $T_p(G)$ — p -компоненту группы $T(G)$. Запись $A \lesssim B$ означает, что A в основном содержится в B [3, с. 201]. Группы Уорфилда и группы с почти m -свойством замены определены в [3, с. 200] и [4, с. 217] соответственно.

Определение 1. Пусть K — произвольный класс групп. Группа G называется квази- m - K -малой, если для любого гомоморфизма $\varphi: G \rightarrow \prod_{k \in K} G_k$, где $G_k \in K$, существует подмножество $L \subseteq K$ такое, что $|L| \leq m$ и $G \subseteq \varphi^{-1}(\prod_{k \in L} G_k)$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $m \geq \omega_0^*$.

Лемма 1. Прямое слагаемое квази- m - K -малой группы и прямая сумма не более чем m квази- m - K -малых групп являются квази- m - K -малыми группами.

Доказательство повторяет доказательства лемм 1, 2 из [5].

Обозначим через K_0 класс редуцированных групп, периодические части которых являются прямыми суммами периодически полных групп.

Лемма 2. Прямая сумма не более чем m периодически полных p -групп, ульмовские инварианты которых не превосходят m , является квази- m - K_0 -малой группой.

* Через ω_0 обозначается счетное кардинальное число.

Доказательство. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} B_i$, где $|I| \leq m$; B_i — периодически полные p -группы с ульмовскими инвариантами, не превосходящими m . В силу [2, предложение 71.2 и 4, предложение 1.5] B_i — группа Уорфилда относительно класса K_0 , поэтому для любого гомоморфизма $\varphi: B_i \rightarrow \bigoplus_{j \in J} C_j$, где $C_j \in K_0$, существует разложение $B_i = B_i' + B_i''$ и конечное подмножество $J_i' \subseteq J$ такие, что $B_i' \subseteq \varphi^{-1}(\bigoplus_{j \in J_i'} C_j)$, а B_i'' ограничена. Так как

ульмовские инварианты B_i не превосходят m , то то же самое верно и для B_i'' , следовательно, $|B_i''| < m$. Отсюда следует, что существует подмножество $J_i'' \subseteq J$ такое, что $|J_i''| < m$ и $B_i'' \subseteq \varphi^{-1}(\bigoplus_{j \in J_i''} C_j)$. Поэтому согласно [3, лемма 1.1] $B_i = B_i'$

$B_i' \subseteq \varphi^{-1}(\bigoplus_{j \in J_i} C_j)$, где $J_i = J_i' \cup J_i''$, т.е. B_i — квази- m - K_0 -малая

группа для всех $i \in I$. Теперь нужное утверждение следует из леммы 1.

Теорема 1. Пусть K — произвольный класс групп, замкнутый относительно взятия прямых сумм и прямых слагаемых, $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где A_i — квази- ω_0 - K -малые группы и $A_i \in K$. Тогда если $A = \bigoplus_{j \in J} B_j = \bigoplus_{k \in K} C_k$, где B_j, C_k обладают (почти) ω_0 -свойством замены, причем упорядоченные пары $A_i + B_j$ и $\bigoplus_{i \in I} A_i = \bigoplus_{k \in K} C_k$ ω_0 -связаны слева, то разложения $\bigoplus_{i \in I} A_i = \bigoplus_{j \in J} B_j = \bigoplus_{k \in K} C_k$ имеют изоморфные (квази)-продолжения.

Доказательство. В силу первой части теоремы 1 из [1] и леммы 1 B_j и C_k разлагаются в прямые суммы квази- ω_0 - K -малых групп. Следовательно, разложения $A = \bigoplus_{j \in J} B_j = \bigoplus_{k \in K} C_k$ продолжаются до разложений, в которых каждое слагаемое является квази- ω_0 - K -малой группой. Пусть D_l и E_m — такие продолжения разложений $A = \bigoplus_{j \in J} B_j$ и $A = \bigoplus_{k \in K} C_k$ соответственно. Ясно, что $D_l, E_m \in K$, поэтому разложения $\bigoplus_{l \in L} D_l = \bigoplus_{m \in M} E_m$ ω_0 -связаны. Тогда ввиду второй части теоремы 1 из [1] существуют две системы попарно непересекающихся подмножеств $L_\alpha \subseteq L, M_\alpha \subseteq M$ такие, что $\bigcup L_\alpha = L, \bigcup M_\alpha = M, |L_\alpha| \leq \omega_0, |M_\alpha| \leq \omega_0$ и $\bigoplus_{l \in L_\alpha} D_l \cong \bigoplus_{m \in M_\alpha} E_m$ для всех α . Кро-

ме того, согласно [6, лемма 3.10] (соответственно [4, теорема 1.2]) D_i и E_m обладают ω_0 -свойством замены (соответственно почти ω -свойством замены). Теперь утверждение теоремы вытекает из [6, теорема 4.2] соответственно [8, теорема 1].

В категории абелевых групп теорема 1 является обобщением теоремы 6 из [7]. Результаты, близкие к теореме 1, получены также в [6, 8, 9, 10].

Определение 2. Пусть $G = \prod_{i \in I} A_i$, причем I неизмеримо.

Будем говорить, что группа G принадлежит классу $A(m, K)$, где K — некоторый класс редуцированных групп, если выполнены следующие условия:

(1) $T(A_i)$ — квази- m - K -малая группа для всех $i \in I$;

(2) $|A_i, T(A_i)| \leq m$ для всех $i \in I$;

(3) для любого простого p существует конечное подмножество $J \subseteq I$ такое, что $T_p(A_i) = 0$ для всех $i \in I \setminus J$.

Теорема 2. Группы из класса $A(m, K)$ являются квази- m - K -малыми.

Доказательство. Пусть $G \in A(m, K)$, $G = \prod_{i \in I} A_i$, $\varphi: G \rightarrow G_k$ гомоморфизм, причем $G_k \in K$ для всех $k \in K$. Дока-

жем сначала, что для любого $i \in I$ существует подмножество $K_i \subseteq K$ такое, что $|K_i| \leq m$ и $A_i \subseteq \varphi^{-1}(\bigoplus_{k \in K_i} G_k)$. В самом деле, из условия (1) следует, что существует подмножество $K'_i \subseteq K$ такое, что $|K'_i| \leq m$ и $T(A_i) \subseteq \varphi^{-1}(\bigoplus_{k \in K'_i} G_k)$.

Пусть E_i — множество всех представителей смежных классов фактор-группы $A_i, T(A_i)$. Так как $|E_i| \leq m$, то существует подмножество $K''_i \subseteq K$ такое, что $|K''_i| \leq m$ и $E_i \subseteq \varphi^{-1}(\bigoplus_{k \in K''_i} G_k)$. Положим $K_i = K'_i \cup K''_i$ и докажем, что $A_i \subseteq \varphi^{-1}(\bigoplus_{k \in K_i} G_k)$. Действительно, пусть $g \in A_i$. Если $g \in T(A_i)$, то по условию существует $0 \neq ng \in \varphi^{-1}(\bigoplus_{k \in K'_i} G_k) \subseteq \varphi^{-1}(\bigoplus_{k \in K_i} G_k)$.

Предположим теперь, что $0(g) = \infty$. Тогда существует $e \in E_i$ такое, что $g - e \in T(A_i)$. Поэтому существует целое q такое, что $q(g - e) = 0$, т. е. $g = q\varphi^{-1}(\bigoplus_{k \in K''_i} G_k)$. Итак, $A_i \subseteq \varphi^{-1}(\bigoplus_{k \in K_i} G_k)$, причем $|K_i| \leq m$. Далее, поскольку I неизмеримо,

то в силу [11, следствие 1.6] существуют конечные подмножества $I' \subseteq I$, $K' \subseteq K$ и целое число n такие, что $\varphi(n \prod_{i \in I'} A_i) \subseteq$

$\cong + G_k$. Из условия (3) следует, что существует конечное подмножество $I'' \subseteq I$ такое, что для всех $i \in I''$ имеет место $T_p(A_i) = 0$ для любого простого делителя p числа n . Отсюда $na \neq 0$ для любого ненулевого $a \in \prod_{i \in I \setminus I_0} A_i$, где $I_0 = I' \cup I''$, поэтому $\prod_{i \in I \setminus I_0} A_i \subseteq \varphi^{-1}(\bigoplus_{k \in K'} G_k)$. По доказанному ранее для любого $i \in I_0$ существует $K_i \subseteq K$ такое, что $A_i \sim \varphi^{-1}(\bigoplus_{k \in K_i} G_k)$ и $|K_i| < \leq m$. Применяя лемму 1.1 из [3], получаем, что $\bigoplus_{i \in I} A_i \subseteq \varphi^{-1}(\bigoplus_{k \in L} G_k)$, где $L = \bigcup_{i \in I} K_i \cup K'$. Теорема доказана.

Следующим образом расширим класс $A(m, K)$: $\bar{A}(m, K) = \{A \mid \text{существует } B \text{ такое, что } A \cong B + C, \text{ где } |I| \leq m \text{ и } C_i \in A(m, K)\}$.

Следствие 1. Группы из класса $\bar{A}(m, K)$ являются квази- m - K -малыми.

Следствие 2. Пусть K — класс всех редуцированных групп и $G \in \bar{A}(m, K)$. Тогда G не разлагается в прямую сумму более чем m ненулевых групп. Если, в частности, $|G| > m$, то G не разлагается в прямую сумму групп мощности $\leq m$.

Действительно, пусть $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$. Тогда из следствия 1 вытекает, что $G \cong \bigoplus_{i \in J} G_i$ для некоторого подмножества $J \subseteq I$ тако- го, что $|J| \leq m$. Отсюда $G_i = 0$ для всех $i \in I \setminus J$.

Следствие 2 обобщает основной результат из [12].

Следствие 3. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i, A_i \in \bar{A}(\omega_0, K_0) \cap K_0$. Тогда любые два разложения группы A в прямую сумму групп с (почти) ω_0 -свойством замены и счетными ульмовскими инвариантами обладают изоморфными (квази-) продолжениями.

Доказательство. Пусть $A = \bigoplus_{i \in J} B_i \oplus \bigoplus_{k \in K} C_k$, причем B_i, C_k обладают (почти) ω_0 -свойством замены и имеют счетные ульмовские инварианты. Очевидно, что класс K_0 замкнут относительно прямых сумм, а ввиду [2, теорема 73.7] он замкнут и относительно прямых слагаемых. Поэтому в силу теоремы 1 и следствия 1 достаточно доказать, что упорядоченные пары разложений $\bigoplus_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in J} B_i \oplus \bigoplus_{k \in K} C_k$ и $\bigoplus_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in J'} B_{i'} \oplus \bigoplus_{k \in K'} C_{k'}$ связаны слева. Докажем это для первой пары. Поскольку $B_i \in K_0$, то $T(B_i)$ — прямая сумма периодически полных групп. Из лем-

мы 2 и счетности ульмовских инвариантов нетрудно вывести, что $T(B_J)$ является квази- ω_0 - K_0 -малой группой. По тому существует счетное подмножество $I_{J'} \subseteq I$ такое, что

$$T(B_J) \subseteq \bigcup_{i \in I_{J'}} A_i. \quad (*)$$

Пусть теперь π_{s_j} — проекция A на некоторое прямое слагаемое S_j группы B_J , I' — счетное подмножество в I . Так как A_i квази- ω_0 - K_0 -мала для всех $i \in I$, то в силу леммы 1 $\bigoplus_{i \in I'} A_i$ также является квази- ω_0 - K_0 -малой. Поэтому существует счетное подмножество $I_J'' \subseteq I$ такое, что

$$\bigcup_{i \in I'} A_i \sim \pi_{s_j}^{-1} \left(\bigcup_{i \in I_J''} A_i \right). \quad (**)$$

Докажем, что $\pi_{s_j} \left(\bigcup_{i \in I'} A_i \right) \subseteq \bigcup_{i \in I_J} A_i$, где $I_J = I_{J'} \cup I_J''$. Пусть $0 \neq a \in \bigcup_{i \in I'} A_i$. Если $\pi_{s_j}(a) \neq 0$ и $0(\pi_{s_j}(a)) \infty$, то $\pi_{s_j}(a) \in T(B_J)$ и ввиду (*) существует $0 \neq n \pi_{s_j}(a) \in \bigcup_{i \in I_{J'}} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I_J} A_i$. Если же $0(\pi_{s_j}(a)) \infty$, то из (**) следует, что $m \pi_{s_j}(a) \in \bigcup_{i \in I_J''} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I_J} A_i$ при некотором m . Итак, доказано, что $\pi_{s_j} \left(\bigcup_{i \in I'} A_i \right) \subseteq \bigcup_{i \in I_J} A_i$.

Кроме того, в силу следствия 1 существует счетное подмножество $J_1 \subseteq J$ такое, что $A_i \subseteq B_{J_1}$. Следовательно, упорядоченная пара разложений $\bigoplus_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in J_1} B_{J_1} \oplus \bigoplus_{i \in J \setminus J_1} B_{J_1}$ ω_0 -связана слева. Для пары $\bigoplus_{i \in I} A_i = \bigoplus_{k \in K} C_k$ доказательство аналогично. Тем самым следствие доказано.

Лемма 3. Группа конечного ранга обладает почти m -свойством замены для всех m .

Доказательство. Пусть G — группа конечного ранга, E — максимальная независимая система в G , состоящая только из элементов бесконечного порядка и элементов порядков, равных степеням простых чисел. Так как E конечна, то для любого гомоморфизма $\varphi: G \rightarrow \bigoplus_{k \in K} G_k$ существует конечное подмножество $K' \subseteq K$ такое, что $E \subseteq \varphi^{-1} \left(\bigoplus_{k \in K'} G_k \right)$. Но тогда $G \subseteq \varphi^{-1} \left(\bigoplus_{k \in K'} G_k \right)$, т. е. G — группа Уорфилда. В силу [4, теорема 1.7] группа G обладает почти m -свойством замены.

Следствие 4. Пусть $A = \bigoplus_{j \in J} B_j \bigoplus_{k \in K} C_k$, где B_j, C_k — группы конечного ранга. Тогда эти разложения обладают изоморфными квазипродолжениями.

Доказательство. Так как B_j и C_k счетны, то A — прямая сумма квази- ω_0 - K -малых групп, где K — класс всех групп. Кроме того, ясно, что упорядоченные пары $B_j \bigoplus_{j \in J} B_j$ и $\bigoplus_{j \in J} B_j \bigoplus_{k \in K} C_k$ ω_0 -связаны слева. Следовательно, из леммы 3 и теоремы 1 вытекает существование изоморфных квазипродолжений.

Следствие 4 дает другой способ изучения разложений группы без кручения в прямые суммы групп конечного ранга по сравнению с их описанием в терминах квазизоморфизма [2, § 92].

Автор признателен А. П. Мишиной за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максимов С. Ю. О прямых разложениях абелевой группы — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986, вып. 6, с. 92—101.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1977, т. 2 — 416 с.
3. Иванов А. В. О тестовой проблеме Капланского. Труды Моск. матем. о-ва, 1981, т. 42, с. 200—220.
4. Иванов А. В. Счетные прямые суммы некоторых групп. Труды Моск. матем. о-ва, 1980, т. 41, с. 217—240.
5. Максимов С. Ю. CSW -группы. — Вестник Моск. ун-та, 1982, вып. 1, с. 27—31.
6. Grawley P., Jonsson B. Refinement for infinite direct decompositions of algebraic systems. — Pacif. J. Math., 1964, v. 14, N 3, p. 797—855.
7. Warfield R. Decompositions of injective modules — Pacif. J. Math., 1969, v. 31, p. 263—276.
8. Максимов С. Ю. Об изоморфных почти продолжениях некоторых прямых разложений абелевых групп. — Мат. заметки, 1983, т. 33, вып. 1, с. 15—22.
9. Grawley P. An isomorphic refinement theorem for certain abelian p -groups — J. Algebra, 1967, v. 6, N 3, p. 376—387.
10. Warfield R. An isomorphic refinement theorem for abelian groups. — Pacif. J. Math., 1970, v. 34, p. 237—255.
11. Иванов А. В. Прямые суммы и полные прямые суммы абелевых групп. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980, с. 70—90.
12. Loš J. On the complete direct sum of countable abelian groups. — Publ. Math. Debrecen, 1954, N 3, p. 269—272.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ, ЧИСТО ПРОСТЫЕ КАК МОДУЛИ НАД СВОИМИ КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

С. К. Росошек, М. А. Турманов

К роткая точная последовательность

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

правых R -модулей и R -гомоморфизмов называется точной чистой последовательностью (по П. Кону), если для любого левого R -модуля P естественный гомоморфизм $A \otimes_R P \xrightarrow{f \times 1} B \otimes_R P$ инъективен [1]. Подмодуль N модуля M называется чистым, если естественное вложение $0 \rightarrow N \rightarrow M$ есть точная чистая последовательность.

Теорема А. Для короткой точной последовательности правых R -модулей и R -гомоморфизмов

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \rightarrow 0$$

следующие утверждения эквивалентны:

(1) для любого конечно-представленного правого R -модуля L естественный гомоморфизм

$$\text{Hom}_R(L, M) \xrightarrow{g} \text{Hom}_R(L, K)$$

сюръективен;

(2) для любого левого R -модуля P естественный гомоморфизм

$$N \otimes_R P \xrightarrow{f \times 1} M \otimes_R P$$

инъективен;

(3) любая конечная система линейных уравнений над модулем N с коэффициентами из кольца R , которая разрешима в модуле M , разрешима и в N .

Доказательство в [2, предложение 3]. Относительно свойств чистых подмодулей см. [3].

Определение. Модуль A назовем чисто простым, если A не содержит собственных ненулевых чистых подмодулей. Абелеву группу G будем называть эндочистопростой (сокращенно *EPS*-группой), если модуль G_E являлся чисто простым (E — кольцо эндоморфизмов группы G). Следующая лемма играет важную роль в изучении эндочистопростых групп.

Лемма. Пусть B_E — чистый E -подмодуль модуля A_E (где E — кольцо эндоморфизмов абелевой группы A). Тогда B есть сервантная вполне характеристическая подгруппа группы A .

Доказательство. Очевидно, B — вполне характеристическая подгруппа группы A . Проверим, что B есть сервантная подгруппа группы A . Пусть уравнение $nx=b \in B$ разрешимо в группе A . Это уравнение можно рассматривать как линейное уравнение над E -подмодулем B_E с коэффициентом из кольца E (умножение на n есть эндоморфизм группы A), разрешимое в модуле A_E . Поскольку B_E — чистый подмодуль A_E , по теореме A уравнение $nx=b$ должно быть разрешимо в подмодуле B_E , но это и означает, что B есть сервантная подгруппа группы A .

Имеет место следующая

Теорема. Периодическая абелева группа G является *EPS*-группой тогда и только тогда, когда G есть p -группа.

Доказательство. Необходимость. Пусть периодическая абелева группа G является *EPS*-группой. Покажем, что G есть p -группа. Имеем

$$G = \bigoplus_p G_p,$$

где G_p — p -компонента группы G . Так как для любого простого числа p группа G_p есть вполне характеристическое прямое слагаемое группы G , то имеем прямое разложение модуля G_E в прямую сумму E -подмодулей G_p . Поскольку прямое слагаемое модуля есть его чистый подмодуль, то условие, что G_E — чисто простой модуль, влечет $G = G_p$ для некоторого простого числа p .

Достаточность. Пусть G — p -группа, тогда $G = A \cap D$, где A — редуцированная группа; D — делимая группа. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. $A=0$. Тогда $G=D$ есть *EPS*-группа. Действи-

тельно делимая группа, очевидно, не имеет собственных сервантных вполне характеристических подгрупп. Следовательно, по лемме G_E не имеет собственных ненулевых чистых E -подмодулей.

С л у ч а й 2. $D=0$. Тогда $G=A$ есть EPS -группа, поскольку редуцированная p -группа не имеет собственных ненулевых сервантных вполне характеристических подгрупп.

С л у ч а й 3: $A \neq 0$, ранг $r(D)$ группы D равен единице. Тогда имеем $G = A' \oplus A_1 \oplus D$, где $A = A' \oplus A_1$; $A_1 \cong Z(p^n)$, $1 \leq n < \infty$; $D \cong Z(p^\infty)$. Кольцо эндоморфизмов $E(G)$ группы G имеет вид

$$E(G) \cong \begin{pmatrix} E(A) & \text{Hom}(A, D) \\ 0 & E(D) \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ 0 & \eta \end{pmatrix} \in E(G), \text{ где}$$

$$\varphi = p^n \cdot 1_A; \eta = 0, \text{ а } \psi \in \text{Hom}(A, D)$$

действует по следующему правилу: если зафиксировать систему образующих $c_1, c_2, \dots, c_n$ квазициклической группы D , то для любого $a \in A$

$$\psi a = \begin{cases} \psi a' & 0, \\ \psi(kc_1) & kc_n, \text{ где} \end{cases}$$

$$a = (a', kc_1); a' \in A'; 0 \leq k < p^n.$$

Ясно, что отображение ψ есть гомоморфизм с ядром $\text{Ker } \psi = A'$ и образом $\text{Im } \psi = \langle c_n \rangle$.

Рассмотрим уравнение

$$x \alpha = z, \quad (*)$$

где $z = (0, c_n) \in D$. Имеем

$$(a_1, 0) \begin{pmatrix} p^n 1_A \psi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (p^n a_1, \psi a_1) = (0, c_n) = z,$$

т. е. уравнение $(*)$ имеет решение в группе G . В то же время уравнение $(*)$ не имеет решения в подгруппе D : если $(0, d) \in D$, то

$$(0, d) \begin{pmatrix} p^n 1_A & \psi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (0, 0) \neq z,$$

Таким образом, D не является чистым E -подмодулем модуля G_E и тогда G_E — чисто простой модуль. Действительно, если N — чистый подмодуль модуля G_E , то N есть сервантная вполне характеристическая подгруппа группы G . Из строения группы G следует, что единственная собственная ненулевая сервантная вполне характеристическая подгруппа группы G — делимая часть D группы G . Но, как показано выше, D не является чистым E -подмодулем. Следовательно, $N=0$ или $N=G$, т. е. G_E — чисто простой модуль.

Случай 4. $A \neq 0$, $r(D) \geq 2$.

Если зафиксировать прямое слагаемое $Z(p^\infty)$ в подгруппе D , то рассуждениями, совершенно аналогичными, приведенными в случае 3, можно показать, что G_E — чисто простой модуль.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cohn P. On the free product of associative rings I.—Math. Zeith., 1959, N 71, p. 380—398.
2. Warfield R. B. Purity and algebraic compactness for modules.—Pacif. J. Math., 1969, N 28, p. 699—719.
3. Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули.—М.: Наука, 1969.—152 с.

АБЕЛЕВЫ k -СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ ГРУППЫ

С. В. Рычков

Данная работа продолжает начатое автором ранее (см. [1]) исследование k -сепарабельных абелевых групп для произвольных кардиналов k . В [1] это изучение проводилось в классе p -групп, что дало возможность построить в каждой несчетной и регулярной не слабо компактной мощности k такое k -эндожесткое семейство, состоящее из 2^k k -сепарабельных p групп мощности k и финальных рангов k , что каждая из этих групп неразложима в прямую сумму даже двух своих подгрупп финальных рангов k . Из результатов работы, в частности, будет следовать возможность построения в каждой несчетной и регулярной не слабо компактной мощности k такого k -эндожесткого семейства, состоящего из 2^k k -сепарабельных групп без кручения мощности k , что каждая из этих групп не может быть разложена в прямую сумму даже двух своих подгрупп мощностей k . Результаты (так же как и данные [1]) получены в предположении справедливости аксиомы конструктивности $V=L$ теории множеств. До сих пор неразложимые k свободные абелевы группы без кручения мощности k строились в классе так называемых сильно k -свободных групп, причем эти группы не были k -сепарабельными в силу метода их построения (см. [2, 3, 4] и др.). Результаты работы были доложены на научном семинаре по теории абелевых групп и модулей Московского государственного педагогического института им. В. И. Ленина в октябре 1985 г.

В монографии Л. Фукса [5, с. 145] сказано следующее: «Непосредственным обобщением понятия сепарабельности является понятие k -сепарабельности, где k — бесконечное кардинальное число. Группа A называется k -сепарабельной, если каждое ее подмножество мощности $< k$ может быть вложено во вполне разложимое прямое слагаемое группы A . Никаких серьезных результатов, касающихся этих групп, пока нет». Фактически ситуация с изучением k -сепарабельных групп без

кручения для мощностей выше ω_1^* не изменилось. (Следует отметить, что в классе p -групп изучение ω_1 -сепарабельных групп было начато в [7] и продолжено автором для k -сепарабельных групп в примарном случае при любом несчетном регулярном не слабо компактном кардинале k в [1]). Отметим, что из полученных данных следует и отрицательное решение тестовой проблемы Капланского в классе k -сепарабельных абелевых групп без кручения. Полученные результаты являются также продвижением в решении 5-й проблемы из [6], так как класс k -сепарабельных групп является, несомненно, самым обозримым подклассом групп мощности k из вышеупомянутой 5-й проблемы Л. Фукса. Под словом «группа» в этой работе понимаются слова «абелева группа».

Определение 1. Пусть A и B — абелевы группы без кручения. Будем называть гомоморфизм $f: A \rightarrow B$ k -малым, если $|\text{Im } f| < k$. Если $E(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы без кручения A , то через $E_k(A)$ будем обозначать его идеал k -малых гомоморфизмов.

Определение 2. Кольцо $E(A)$ является расщепляющимся расширением кольца R с помощью идеала $E_k(A)$, если существуют такие кольцевые гомоморфизмы $R \xrightarrow{\alpha} E(A) \xrightarrow{\beta} R$, что $\beta\alpha = 1_R$ и $E_k(A) \subseteq \text{Ker } \beta$.

Определение 3 (см., например, [8]). Если k — несчетный регулярный кардинал, то множество $E \subseteq k$ называется разреженным, если $E \cap \alpha$ нестационарно в α при любом предельном $\alpha < k$.

Принцип $E(k)$: «Существует разреженное стационарное подмножество E в k такое, что $cf(\sigma) = \omega$ для всех $\sigma \in E$ ».

Отметим, что принцип $E(k)$, как показал Енсен [9], не зависит от ZFC.

Теорема Енсена ([8, 9]). Если k — регулярный не слабо компактный кардинал, то $V=L$ влечет выполнимость принципа $E(k)$.

Теорема 1 ($V=L$). Пусть k — несчетный регулярный не слабо компактный кардинал и Z — кольцо целых чисел. Тогда существует k -сепарабельная группа A без кручения мощности k такая, что кольцо эндоморфизмов $E(A)$ является расщепляющимся расширением кольца Z с помощью идеала $E_k(A)$.

Доказательство. Необходимая нам группа A будет получена как объединение строго возрастающей цепи групп

* Через ω_0 (ω_1) обозначается счетное (первое несчетное) кардинальное число

$\{A_\nu | \nu < k\}$. Будем через $Z^{(\omega)}$ обозначать прямую сумму счетного числа копий группы Z . Для каждого $\sigma < k$ положим $C_\sigma = Z^{(\omega)}$ и возьмем $G = \prod_{\sigma < k} C_\sigma$. Необходимая нам группа A будет построена как некоторая подгруппа группы G . Для каждого $\tau < k$ пусть $G_{\tau+1} = \prod_{\sigma < \tau} C_\sigma$, а для предельных μ пусть $G_\mu = \bigcup_{\tau < \mu} G_\tau$. Используя вышеприведенную теорему Енсена, можно выбрать такое стационарное, костационарное, состоящее из предельных ординалов подмножество E в k , что $cf(\sigma) = \omega$ для всех $\sigma \in E$. Определим индукцией по ординалам $\nu < k$ такую гладкую цепь подгрупп A_ν в G_ν , что $C_\sigma \subseteq A_\nu$ и для всех $\mu < \nu < \omega_1$ выполняется:

- 1) $A_\nu \cap G_\mu = A_\mu$;
- 2) если $\nu \notin E$, то $A_{\nu+1} = A_\nu \oplus C_\nu$;

3) если $\lambda \in E$, то существует счетная возрастающая последовательность, сходящаяся к λ , ординалов $\{\tau_n | n \in \omega\}$, и элементы $x_n \in \prod_{\sigma < \tau_n} C_\sigma \subseteq G_{\tau_n+1}$ со счетными носителями такие, что $x_{\lambda n} = (n+1) \cdot x_{\tau_n+1} \pmod{A_{\tau_n}}$; при этом $A_{\tau_n+1} = A_\lambda + \sum_{n \in \omega} \langle x_{\lambda n} \rangle$, где $\langle x_{\lambda n} \rangle$ — группа, порожденная в G элементом $x_{\lambda n}$.

Так как абелева группа $A = \bigcup_{\nu < k} A_\nu$ является Z -модулем, то можно отождествить кольцо Z с подкольцом в $E(A)$. Возьмем ${}_k(E)$ — бриллиантовую последовательность (см., например, [8 или 10]) функций $\{h_\lambda : A_\lambda \rightarrow A_\lambda | \lambda \in E\}$. При построении групп A , возможны следующие случаи:

а) Если ν — предельный ординал, то полагаем A , равной $\bigcup_{\rho < \nu} A_\rho$.

б) Если $\nu = \lambda + 1$ и $\lambda \notin E$, то полагаем A , равной $A_\lambda \oplus C_\lambda$.

в) Если $\nu = \lambda + 1$, $\lambda \in E$, существует такая строго возрастающая последовательность сходящихся ординалов $\{\tau_n | n \in \omega\}$, что $\tau_n \notin E$ и $h_\lambda(A_{\tau_n}) \subseteq A_{\tau_n}$ при всех $n \in \omega$, кроме того, для любого $n \in \omega$ найдется такой $z_n \in A_{\tau_{n+1}} \setminus A_{\tau_n}$ с конечным носителем, что $\forall r \in Z (h_\lambda(z_n) - r \cdot z_n \in A_{\tau_{n+1}} \setminus A_{\tau_n})$. Возьмем в этом случае в группе G следующие элементы:

$$\begin{cases} x_{\lambda 1} = z_1 + 2! z_2 + 3! z_3 + 4! z_4 \cdots n! z_n \cdots, \\ x_{\lambda 2} = z_2 + \frac{3!}{2!} z_3 + \frac{4!}{2!} z_4 \cdots + \frac{n!}{2!} z_n + \cdots, \\ \vdots \\ x_{\lambda n} = z_n + \frac{4!}{3!} z_4 \cdots + \frac{n!}{3!} z_n \cdots, \\ \vdots \\ x_{\lambda n} = z_n + \frac{(n+1)!}{n!} z_{n+1} + \cdots, \\ \vdots \end{cases} \quad (*)$$

где бесконечные суммы берутся в декартовом произведении $G = \prod C_n$ и при этом $\sup_{n < k} (z_i) \cap \sup_{n < k} (z_j) = \emptyset$ при $i \neq j$. Отметим, что носитель каждого из элементов x_n счетен.

Возьмем в качестве A_1 группу $A + \sum_{n \in \omega} \langle x_n \rangle$ и покажем, что в этом случае не существует эндоморфизма $\varphi: A_1 \rightarrow A_{\lambda 1}$, продолжающего функцию $h_{\lambda}: A_{\lambda} \rightarrow A_{\lambda}$. Предположим противное и рассмотрим фактор-группу $A_{\lambda 1}/A_{\lambda}$. Ясно, что $A_{\lambda 1}/A_{\lambda} \cong Q$ и, следовательно, $\text{End}(A_{\lambda 1}/A_{\lambda}) \sim Q$. Кроме того, т. к. $h_{\lambda}(A_{\lambda}) = \varphi(A_{\lambda})$ и $h(A) = \bigcup_{n \in \omega} h_{\lambda}(A_{\tau_n}) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_{\tau_n} = A_{\lambda}$, то $\varphi(A_{\lambda}) \subseteq A_{\lambda}$ для любого эндоморфизма $\varphi: A_{\lambda 1} \rightarrow A_{\lambda 1}$. Следовательно, любой эндоморфизм $\varphi: A_1 \rightarrow A_1$ индуцирует некоторый эндоморфизм $\bar{\varphi}$ группы A_1/A , где $\bar{\varphi}(x_n/A) = \varphi(x_n/A) + A_{\lambda}$. Т. к. $\text{End}(A_1/A) \sim Q$, то найдутся такие взаимно простые числа $t, l \in \mathbb{Z}$, что $\varphi(x_{\lambda 1}) = \frac{l}{t} \cdot x_{\lambda 1} \pmod{A_{\lambda}}$, т. е. $t \cdot \varphi(x_{\lambda 1}) = l \cdot x_{\lambda 1} + a_i$ при некотором $i < \omega$, где $a_i \in A_{\tau_i}$. Т. к. $\varphi(x_{i+1}) = \frac{l}{t} \cdot x_{i+1} \pmod{A_{\lambda}}$, то $t \cdot \varphi(x_{i+1}) = l \cdot x_{i+1} + a_j$ при некотором $j < \omega$, где $a_j \in A_{\tau_j}$. Но $x_{i+1} - il \cdot x_{\lambda 1} \in A_{\tau_i}$ и $\varphi(A_{\tau_i}) = h_{\lambda}(A_{\tau_i}) \subseteq A_{\tau_i}$, а значит, $a_i - il \cdot a_j = t \cdot \varphi(x_{i+1} - il \cdot x_{\lambda 1}) - l \cdot (x_{i+1} - il \cdot x_{\lambda 1}) \in A_{\tau_i}$. Следовательно, т. к. мы находимся в группе без кручения, $j \leq i$, и мы можем (для определенности) даже считать $j = i$, т. е. что $t \cdot \varphi(x_{i+1}) = l \cdot x_{i+1} + a_i$. Далее, т. к. $x_{i+1} - (i+1) \cdot x_{\lambda 1} \in A_{\tau_{i+1}}$ и $\varphi(A_{\tau_{i+1}}) = h_{\lambda}(A_{\tau_{i+1}}) \subseteq A_{\tau_{i+1}}$, то $(i+1) \times [l \cdot x_{i+1} - t \varphi(x_{\lambda 1})] - t \varphi(x_{i+1} - (i+1) \cdot x_{\lambda 1}) - l(x_{i+1} - (i+1) \cdot x_{\lambda 1}) - a_i \in A_{\tau_{i+1}}$, а значит (учитывая то, что мы находимся в группе без кручения), имеем $t \cdot \varphi(x_{i+1}) = l \cdot x_{i+1} + a_{i+1}$ для

редельном $\tau < k$, для любых $k \in Z$ и нередельного $\tau < k$ найдется такое $z^*(\tau, k) \in A_{A_\tau}$ с конечным носителем, что $\varphi(z^*) \cap z^* \in A_{A_\tau}$.

Покажем, что множество $C = \{\mu < k \mid \forall l \in Z \forall \tau < \mu \exists z \in A_\mu, A_\tau (z \text{ с конечным носителем и } \varphi(z) - l \cdot z \in A_\mu \setminus A_\tau)\}$ является кубом в k (см., например, [7]).

i) Замкнутость множества C в k очевидна.

ii) Для того чтобы показать неограниченность C в k , возьмем произвольный ординал $\rho < k$. Выбираем так, как это было указано выше, множество элементов $\{z^*(\rho, k) \mid k < \omega\}$. Пусть при этом $z^*(\rho, k) \in A_{\tau(\rho, k)}$. Возьмем $\rho_1 = \bigcup_{k < \omega} \tau(\rho, k)$. Далее выбираем множество элементов $\{z^*(\rho_1, k) \mid k < \omega\}$, где $z^*(\rho_1, k) \in A_{\tau(\rho_1, k)}$, и берем $\rho_2 = \bigcup_{k < \omega} \tau(\rho_1, k)$. Затем берем множество $\{z^*(\rho_2, k) \mid k < \omega\}$ и $\rho_3 = \bigcup_{k < \omega} \tau(\rho_2, k)$. Продолжая действовать таким образом, мы построим цепь ординалов $\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n < \dots$ (При этом все ординалы ρ и $\{\tau(\rho_i, k) \mid i < \omega, k < \omega\}$ можно выбирать нередельными.) Возьмем $\delta = \bigcup_{i < \omega} \rho_i$.

Так как $cf(k) < \omega$, то $\delta < k$, при этом, очевидно, выполняется $l \in Z \forall \tau < \delta \exists z \in A_\delta, A_\tau (\varphi(z) - l \cdot z \in A_\delta \setminus A_\tau)$, т. е. $\delta \in C$. Т. к. $\rho < \delta$, то этим и ограничена C в k доказана.

Так как множество E стационарно, то замыкание множества $k - E$ тоже куб в k .

Покажем, что множество $K = \{\nu < k \mid \varphi(A_\nu) \subseteq A_\nu\}$ тоже куб в k . Замкнутость в k множества K очевидна. Для того чтобы показать неограниченность в k множества K , возьмем произвольное $\rho < k$. Тогда, т. к. $|A_\rho| < k$, существует $\rho_1 < \rho$ такое, что $\varphi(A) \subseteq A_{\rho_1}$, где $\rho_1 < k$. Аналогично существует $\rho_2 < k$ такое, что ρ_1, ρ_2 и $\varphi(A_{\rho_1}) \subseteq A_{\rho_2}$. Продолжая действовать таким образом, мы построим последовательность ординалов

$$\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$$

такую, что $\forall i < \omega (\varphi(A_{\rho_i}) \subseteq A_{\rho_{i+1}})$. Но тогда, взяв $\delta = \bigcup_{i < \omega} \rho_i$, получим $\varphi(A_\delta) = \varphi(\bigcup_{i < \omega} A_{\rho_i}) = \bigcup_{i < \omega} \varphi(A_{\rho_i}) \subseteq \bigcup_{i < \omega} A_{\rho_{i+1}} = A_\delta$, т. е. $\delta \in K$.

Так как $cf(k) \neq \omega$, то $\delta \neq k$ и $\delta < \rho$, что и доказывает неограниченность множества K в k .

Но тогда т. к. $cf(k) \neq \omega$, то $C \cap F \cap K$ — тоже куб в k . Следовательно, в силу принципа бриллианта $\diamond_k(E)$ (см., например, [8 или 10]) найдется $\lambda \in C \cap F \cap K \cap E$. Но если $\lambda \in F \cap E$, то, учитывая $cf(\sigma) < \omega$ для всех $\sigma \in E$, мы оказываемся при построении группы $A_{\lambda+1}$ в условиях пункта в) нашего

индукционного построения цепи групп $\{A_\nu | \nu \leq k\}$. Следовательно, h_k совпадает с ограничением эндоморфизма φ на A_k .

Покажем, что если $\varphi(A_\lambda) \subseteq A_\lambda$, то $\varphi(A_{\lambda+1}) \subseteq A_{\lambda+1}$. Предположим противное. Тогда, т. к. $A_{\lambda+1} = A_\lambda + \sum_{\alpha \in \omega} \langle x_\alpha \rangle$, $\varphi(A_\lambda) \subseteq A_\lambda$ и $A = A_{\lambda+1} + (A - A_{\lambda+1})$, имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x_1) = t_{11} + t_{12}, \text{ где } t_{11} \in A_{\lambda-1} \text{ и } t_{12} \in A_{\lambda-1}, \\ \varphi(x_2) = t_{21} + t_{22}, \text{ где } t_{21} \in A_{\lambda-1} \text{ и } t_{22} \in A_{\lambda+1}, \\ \varphi(x_n) = t_{n1} + t_{n2}, \text{ где } t_{n1} \in A_{\lambda-1} \text{ и } t_{n2} \in A_{\lambda-1}, \end{array} \right.$$

Напомним, что $x_{\lambda n} \cdot (n+1) \cdot x_{n-1} \pmod{A_{\tau_n}}$. Так как $\varphi(x_{\lambda_1-n!} \cdot x_n) = (t_{11}-n! \cdot t_{n1}) + (t_{12}-n! \cdot t_{n2})$, то, учитывая $x_{\lambda_1-n!} \cdot x_n \in A_{\tau_n} \subseteq A$, $t_{11}-n! \cdot t_{n1} \in A$ и $\varphi(A_{\tau_n}) \subseteq A_{\lambda}$, получаем $t_{12}-n! \cdot t_{n2} \in A_{\lambda} \cap (A_{\lambda-1})$. Следовательно, элемент t_{12} делится на $n!$ при любом $n < \omega$, т. е. $t_{12} = 0$. Но тогда $t_{12} = 0$ при любом $i < \omega$, следовательно, $\varphi(A_{\lambda-1}) \subseteq A_{\lambda-1}$.

Итак, мы получили, что гомоморфизм $\varphi: A_\lambda \rightarrow A_\lambda$, с одной стороны, продолжается до гомоморфизма $\varphi: A_{\lambda+1} \rightarrow A_{\lambda+1}$, а с другой стороны, φ совпадает с функцией h_λ . Но это противоречит построению пункта в) индукционного шага цепи групп $\{A_\nu \mid \nu \leq k\}$. Полученное противоречие и показывает, что для некоторого $l \in Z$ будет $l - \varphi \in E_k(A)$, т. е. кольцо $E(A)$ является расщепляющимся расширением кольца Z с помощью идеала $E_k(A)$, т. к. очевидно, что $Z \cap E_k(A) = 0$.

В заключительной части доказательства теоремы 1 мы будем доказывать k -сепарабельность построенной группы A . Для этого, учитывая $A = A_{+1}$ ($A = A_{p-1}$) при $p \notin E$, достаточно показать, что каждая из групп A_λ (при $\lambda \leq k$) является свободной группой. Доказательство этого утверждения проведем индукцией по λ . Предположим, что все A_β при $\beta < \lambda$ являются свободными группами.

А) Если $\lambda = \beta + 1$ и $\beta \notin E$, то $A_\lambda - A_\beta + C_\lambda$ — свободная группа, т. к. A_β свободна и $C_\lambda \subset Z^{(w)}$.

Б) Если $\lambda = \beta + 1$ и $\beta \in E$, то по построению $A_\lambda = A_\beta + \sum_{n \in \omega} \langle x_{\beta n} \rangle$. Пусть $\{\tau_n | n \in \omega\}$ — последовательность ординалов,

сходящаяся к β , определенная при построении $A_{\beta+1}$ в случае $\beta \in E$. Т. к. $\tau_1 \neq E$, то $A_{\beta+1} = A_{\tau_1} + (A_{\beta+1} \cap \prod_{\tau_1 < \sigma < \beta} C_\sigma)$ и $A_\beta = A_{\tau_1} \oplus$

$$\bigoplus_{\substack{\alpha \\ \sigma \leq \beta}} (A_\beta \cap \prod C_\sigma).$$

При этом объединение множества всех носи-

телей (в декартовом произведении $G_1 = \prod_{\tau_1 \leq \alpha < \beta} C_\alpha$) группы $A_{\beta+1}$ всего лишь счетно, следовательно, счетная группа $\sum_{n \in \omega} \langle x_{\beta n} \rangle$ содержится в декартовом произведении D лишь счетного числа групп, изоморфных Z . Если L — прямая сумма тех групп, изоморфных Z , декартово произведение которых есть D , то группа $L + \sum_{n \in \omega} \langle x_{\beta n} \rangle$ лишь счетна и, следовательно, будет свободной группой (т. к. $D \sim \prod_{\omega} Z$ является ω_1 -свободной группой по теореме Бэра—Шпекера). Напомним, что все элементы $\gamma_n(\beta) | n < \omega$, использовавшиеся при построении элементов в $x_{\beta n} | n < \omega$, имели конечные носители. Кроме того, если $\gamma < \beta$, то, учитывая $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \beta \neq \gamma$, найдется такое $l \in N$, что $n \in N(l | n \rightarrow \gamma \cap \tau_n)$. Следовательно, для каждого конкретного $\gamma < \beta$ имеем

$$|(\bigcup_{n \in \omega} \sup(x_{\gamma n})) \cap (\bigcup_{n \in \omega} \sup(x_{\beta n}))| \leq |\bigcup_{m=1}^l \sup(z_m(\beta))| < \omega_0,$$

$$\text{т. е. } (L + \sum_{n \in \omega} \langle x_{\gamma n} \rangle) \cap (L + \sum_{n \in \omega} \langle x_{\beta n} \rangle) \subseteq L,$$

$$\text{т. к. } \{t \in L + \sum_{n \in \omega} \langle x_{\beta n} \rangle \mid |\sup(t)| < \omega_0\} \subseteq L.$$

Но тогда очевидно, что

$$(\bigcup_{\{\gamma \mid \beta | \gamma \in E\}} (L + \sum_{n \in \omega} \langle x_{\gamma n} \rangle)) \cap (L + \sum_{n \in \omega} \langle x_{\beta n} \rangle) \subseteq L.$$

Следовательно, группа

$$A_{\beta+1} = A_{\tau_1} (L + \sum_{n \in \omega} \langle x_{\beta n} \rangle) [A_\beta \cap ((\prod_{\tau_1 \leq \alpha < \beta} C_\alpha) D)]$$

является свободной группой, т. к. по индуктивному предположению таковы A_β и A_{τ_1} .

В) Если λ — предельный ординал, меньший k , то тогда в силу разреженности множества E , использовавшегося при построении группы A , множество $E \cap \lambda$ не стационарно в λ , а значит, существует нормальная функция $f: \lambda \rightarrow \lambda$, область значений которой не пересекается с E . Тогда A_λ является объединением гладкой цепи подгрупп $\{B_\beta \mid \beta < \lambda\}$, где через B_β обозначены группы $A_{f(\beta)}$, каждая из которых по индуктивному предположению свободна. Т. к. $f(\beta) \notin E$, то B_β выделяется прямым слагаемым в A , следовательно, для доказательства свободы группы A_λ достаточно показать свободу групп $B_{\beta+1}/B_\beta$ при всех $\beta < \lambda$. Из $f(\beta) \notin E$ следует $A = B_\beta \oplus (A \cap$

$\bigcap_{f(\beta) < \alpha} C_\alpha$). Значит, $B_{\beta+1}/B_\beta$ изоморфна подгруппе $B_{\beta+1} \cap (A \cap \bigcap_{f(\beta) < \alpha} C_\alpha)$ свободной группы $B_{\beta+1}$, т. е. $B_{\beta+1}/B_\beta$ сама свободна, что и требовалось доказать. Теорема 1 доказана.

Следствие 1 ($V=L$). Для любого несчетного регулярного не слабо компактного кардинала k существует k -сепарабельная группа без кручения A мощности k , не разложимая в прямую сумму даже двух своих подгрупп мощности k .

Доказательство. Взять группу A из теоремы 1 и учесть, что кольцо Z неразложимо в прямую сумму. Следствие доказано.

Следующее утверждение показывает, что при $V=L$ для несчетных регулярных не слабо компактных кардиналов в классе k -сепарабельных групп без кручения тестовая проблема Капланского решается отрицательно.

Следствие 2 ($V=L$). Пусть k — несчетный регулярный не слабо компактный кардинал. Тогда для любого целого положительного числа q существует такая k -сепарабельная группа без кручения G , что для $n, l \in \mathbb{N}$ группы G и $\bigoplus_l G$ изоморфны тогда и только тогда, когда $n \equiv l \pmod{q}$.

Доказательство. Использовать теорему 1 и идеи Корнера [11].

Определение 4. Семейство групп без кручения $\{G_i | i \in I\}$ назовем k -эндожестким, если любой гомоморфизм $f_{ij}: G_i \rightarrow G_j$ (при $i \neq j$) является k -малым и при любом $i \in I$ кольцо $E(G_i)$ является расщепляющимся расширением кольца Z с помощью идеала $E_k(G_i)$.

Теорема 2 ($V=L$). Пусть k — несчетный регулярный не слабо компактный кардинал. Тогда существует k -эндожесткое семейство $\{G_i | i \in I\}$, состоящее из 2^k k -сепарабельных абелевых групп без кручения мощности k .

Доказательство. Получается модификацией доказательства теоремы 1 с использованием соответствующих методов из [8].

В заключение отметим, что результаты работы (по крайней мере, в полном объеме) не могут быть получены только в аксиоматике ZFC теории множеств, т. к. Пауль Эклоф и Алан Меклер установили, что в аксиоматике $ZFC + MA + 2^\omega > \omega_1$ любая ω_1 -сепарабельная группа мощности ω_1 является разложимой.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Научно-исследовательский семинар при кафедре высшей алгебры МГУ им. М. В. Ломоносова (тезисы докладов весеннего еместра 1984/85 уч. года) — Вестник МГУ (серия мат.-мех.), 1985, № 5, с. 87
- 2 Палютин Е. А. О неразложимых ω_1 -свободных абелевых группах — Сиб мат журн., 1978, т. 19, № 6, с. 1415—1417.
- 3 Eklof P., Mekler A. On constructing indecomposable groups in L . — J. Algebra, 1977, v. 49, p. 96—103.
- 4 Dugas M., Göbel R. Every cotorsion-free ring is endomorphism ring — Proc. Lond. Math. Soc., 1982, v. 45, p. 319—336.
- 5 Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1977, т. 2. — 416 с.
- 6 Фукс Л. Бесконечные абелевы группы — М.: Мир, 1974, т. 1. — 335 с.
- 7 Eklof P., Mekler A. On endomorphism rings of ω_1 -separable primary groups. — Lect. Notes Math., 1983, v. 1006, p. 320—339.
- 8 Eklof P. Set theoretic methods in homological algebra and abelian groups — Les Presses de l'University de Montreal (Canada), 1980. — p. 117.
- 9 Jensen R. The fine structure of constructible hierarchy. — Ann. Math. Logics, 1972, v. 4, p. 229—308.
- 10 Палютин Е. А. О числе моделей в L_{∞, ω_1} -теориях — Алгебра и логика, 1977, т. 16, с. 74—87.
- 11 Corner A. L. S. On the conjecture of Pierce concerning direct decompositions of abelian groups — Proc. Colloq. Abelian groups. Budapest, 1964, p. 43—48.
- 12 Eklof P., Mekler A., Shelah S., Almost disjoint Abelian groups — Israel J. Math., 1984, v. 49, p. 34—54.

О КЛАССАХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП С НЕКОТОРЫМ СВОЙСТВОМ ЭНДОМОРФИЗМОВ

Е. В. Тараканов

В последнее время в литературе широко изучаются свойства абелевых групп, рассматриваемых как модули над своим кольцом эндоморфизмов (см., например, работы [1, 2]). Естественно, возникает вопрос об изучении абелевых групп, обладающих следующим свойством: для любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ из абелевой группы A существует $b \in A$ и эндоморфизмы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ группы A такие, что $\varphi_i b = a_i$ для $i=1, 2, \dots, n$ (такие группы назовем локально разрешаемыми над своим кольцом эндоморфизмов). Отметим, что всякая локально циклическая группа и всякая группа, являющаяся локально циклическим модулем над своим кольцом эндоморфизмов, локально разрешаема. В данной работе показано, что любая периодическая группа обладает этим свойством. В случае без кручения найдены широкие классы групп, являющиеся локально разрешаемыми над своим кольцом эндоморфизмов (вполне разложимые, инъективные, сепарабельные). Вместе с тем показано, что для любого $n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$, существует группа без кручения ранга n , не являющаяся локально разрешаемой.

Определение 1. Абелева группа A называется локально разрешаемой над своим кольцом эндоморфизмов $E(A)$, если для любых $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ существует $b \in A$ и $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in E(A)$ такие, что $\varphi_i b = a_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Лемма 1. Группа A является локально разрешаемой над $E(A)$ тогда и только тогда, когда для любых $a_1, a_2 \in A$ существуют $b \in A$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in E(A)$ такие, что $\varphi_1 b = a_1, \varphi_2 b = a_2$.

Доказательство. Необходимость условия очевидна, достаточность проверяется по индукции.

Лемма 2. Всякая локально циклическая группа A является локально разрешаемой над $E(A)$.

Доказательство. Пусть a и b — два произвольных элемента из A . Тогда, в силу локальной цикличности A , существует $c \in A$ такой, что $a = mc$, $b = nc$. Отсюда непосредственно следует локальная разрешимость A над $E(A)$.

Лемма 3. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где A_i является локально разрешаемой над $E(A_i)$ группой для любого $i \in I$. Тогда A локально разрешаема над $E(A)$.

Доказательство. Пусть $A = A_1 \oplus A_2$, где A_i — локально разрешаема над $E(A_i)$ ($i = 1, 2$). Учитывая лемму 1, достаточно показать, что для любых $a, b \in A$ существует $c \in A$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in E(A)$ такие, что $\varphi_1 c = a$, $\varphi_2 c = b$. Пусть $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, где $a_1, b_1 \in A_1$, $a_2, b_2 \in A_2$. По условию, существует $c_1 \in A_1$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in E(A_1)$ такие, что $\varphi_1 c_1 = a_1$, $\varphi_2 c_1 = b_1$. Аналогично существуют $c_2 \in A_2$ и $\varphi_3, \varphi_4 \in E(A_2)$ такие, что $\varphi_3 c_2 = a_2$, $\varphi_4 c_2 = b_2$. Пусть ε_1 и ε_2 — естественные проекции A на A_1 и A_2 соответственно. Рассмотрим следующие эндоморфизмы группы A : $\psi_1 = \varphi_1 \varepsilon_1 + \varphi_3 \varepsilon_2$, $\psi_2 = \varphi_2 \varepsilon_1 + \varphi_4 \varepsilon_2$. Имеем $\psi_1(c_1 + c_2) = \varphi_1 c_1 + \varphi_3 c_2 = a_1 + a_2 = a$; $\psi_2(c_1 + c_2) = \varphi_2 c_1 + \varphi_4 c_2 = b_1 + b_2 = b$. Выбрав в качестве c элемент $c_1 + c_2$, получим $\psi_1 c = a$, $\psi_2 c = b$, что и требовалось. На случай $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ доказательство переносится непосредственно.

Теорема 1. Всякая периодическая абелева группа A является локально разрешаемой над $E(A)$.

Доказательство. Согласно [3, с. 268] всякая p -группа является локально разрешаемой. В силу леммы 3 это же справедливо и для любой периодической группы.

Рассмотрим теперь абелевы группы без кручения.

Лемма 4. Всякая группа без кручения G ранга 1 является локально разрешаемой над $E(G)$.

Доказательство. Всякая группа без кручения ранга 1 изоморфна некоторой подгруппе полной рациональной группы Q , следовательно, является локально циклической группой. Согласно лемме 2 такая группа локально разрешаема над своим кольцом эндоморфизмов.

Следствие 1. Всякая вполне разложимая группа без кручения G является локально разрешаемой над $E(G)$.

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из лемм 3 и 4.

Следствие 2. Всякая инъективная группа G является локально разрешаемой над $E(G)$.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы о строении инъективных абелевых групп.

Теорема 2. Всякая сепарабельная группа без кручения G является локально разрешаемой над $E(G)$.

Доказательство. Пусть G — сепарабельная группа без кручения, a и b — произвольные элементы из G . Тогда существует разложение $G = H \rtimes K$, где H — вполне разложимая подгруппа G , $a, b \in H$. Поскольку H является локально разрешаемой группой над $E(H)$ согласно следствию 1 из леммы 4, то существуют элементы $h \in H$, $\varphi_1, \varphi_2 \in E(H)$ такие, что $\varphi_1 h = a$, $\varphi_2 h = b$. Пусть ε — естественная проекция G на H . Рассмотрим эндоморфизмы $\psi_1 = \varphi_1 \varepsilon$, $\psi_2 = \varphi_2 \varepsilon$ ($\psi_1, \psi_2 \in E(G)$). Имеем $\psi_1 h = a$, $\psi_2 h = b$, следовательно, G локально разрешаема над $E(G)$. Теорема доказана.

Итак, как мы показали, достаточно широкие классы абелевых групп без кручения являются локально разрешаемыми над своими кольцами эндоморфизмов. Вместе с тем, в отличие от периодического случая, существуют группы без кручения, не обладающие этим свойством. Более того, справедлива следующая теорема:

Теорема 3. Для данного целого $n \geq 2$ существует группа без кручения G ранга n , не являющаяся локально разрешаемой над $E(G)$.

Доказательство. Согласно [3, с. 153] для любого целого $n \geq 2$ существует группа без кручения G ранга n , кольцо эндоморфизмов которой $E(G)$ изоморфно кольцу целых чисел $\mathbb{Z}$. Так как ранг G не меньше двух, в G существует по крайней мере два независимых элемента a и b . Пусть G является локально разрешаемой над $E(G)$. Тогда существуют $c \in G$, $\varphi_1, \varphi_2 \in E(G)$ такие, что $a = \varphi_1 c$, $b = \varphi_2 c$. Но поскольку $E(G) \cong \mathbb{Z}$, то $a = mc$, $b = nc$ для некоторых $m, n \in \mathbb{Z}$, следовательно, $na = mb$. Получено противоречие с независимостью элементов a и b . Таким образом, G не является локально разрешаемой над $E(G)$.

Автор выражает глубокую благодарность А. В. Михалеву, а также А. А. Туганбаеву за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reid J. Abelian groups finitely generated over their endomorphism rings. — Lect. Notes. Math., 1981, v. 874, u. 41—52.
2. Vinsonhaler C., Wickless W. J. Torsion free Abelian groups quasi-projective over their endomorphism rings. — Pacif. J. Math., 1977, v. 68, N 2, p. 527—535.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1977, т. 2 — 416 с.

О МОНОИДНЫХ КОЛЬЦАХ

А. А. Туганбаев

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Дистрибутивным модулем называется модуль с дистрибутивной структурой подмодулей.

Пусть A — кольцо, T — моноид, т. е. полугруппа с единицей. Если T — коммутативный моноид с сокращениями, A — коммутативное кольцо, то известно [1], когда кольцо $A[T]$ дистрибутивно. В [2] для любого кольца A и произвольного моноида T выяснено, когда моноидное кольцо $A[T]$ является дистрибутивной справа областью. Основным результатом данной работы является теорема 1, решающая задачу описания дистрибутивных справа моноидных колец для произвольного моноида с сокращениями T и любого коммутативного кольца A . Рассмотрен также случай, когда A — не коммутативно.

Для формулировки основного результата потребуется ряд определений. Моноид T называется моноидом с сокращениями, если для любых его элементов a, b, c, d каждое из равенств $ac = bc, da = db$ влечет равенство $a = b$. Гамильтоновой группой называется группа G , удовлетворяющая следующим двум эквивалентным условиям:

(1) G — неабелева группа, у которой все подгруппы нормальны;

(2) группа G изоморфна прямому произведению группы кватернионов порядка 8, элементарной абелевой 2-группы и периодической абелевой группы, все элементы которой имеют нечетные порядки. Если T — коммутативный моноид с сокращениями, G — его абелева группа частных с периодической частью $t(G)$, причем $t(G) \subseteq T$, то через ρ обозначим отношение в $T: a\rho b \Leftrightarrow a = bf$, где $f \in t(G)$. Отношение ρ является конгруэнцией и T/ρ — моноид с сокращениями, обладающий абелевой группой частных $G/t(G)$ (см. [1]). Через $H(A)$ обозначается обычная алгебра кватернионов над коммутативным кольцом

А. Через $F(\epsilon_n)$ обозначается поле, получаемое присоединением к полю F примитивного корня ϵ_n степени n из единицы.

Теорема 1. Пусть A — коммутативное кольцо, T — моноид с сокращениями. Тогда правая дистрибутивность кольца $A[T]$ равносильна выполнению одного из следующих трех условий:

(а) T — коммутативный моноид, обладающий абелевой непериодической группой частных G и содержащий периодическую часть $t(G)$ группы G , причем моноид T изоморфен либо подгруппе аддитивной группы рациональных чисел, либо конусу неотрицательных элементов такой подгруппы, A — регулярное кольцо, в котором обратимы порядки всех элементов из $t(G)$;

(б) T — периодическая абелева группа, A — дистрибутивное кольцо, причем если M — такой максимальный идеал кольца A , что $\text{char}(A/M) = p > 0$, $T_p \neq 1$, то кольцо частных A_M является полем и p -примарная компонента группы T либо циклическа, либо квазциклическа;

(в) T — гамильтонова группа, A — дистрибутивная справа алгебра над полем рациональных чисел Q , причем для любого нечетного числа n , являющегося порядком элемента группы T , алгебра кватернионов над кольцом $A \otimes_Q Q(\epsilon_n)$ дистрибутивна справа.

Теорема 2. Пусть A — кольцо, T — моноид с сокращениями, не являющийся периодической абелевой группой. Тогда правая дистрибутивность кольца $A[T]$ равносильна тому, что либо A — коммутативное регулярное кольцо и выполнено условие (а) теоремы 1, либо T — гамильтонова группа, A — дистрибутивная справа алгебра над полем рациональных чисел Q , причем для любого нечетного числа n , являющегося порядком элемента группы T , кольцо $A \otimes_Q H(Q(\epsilon_n))$ дистрибутивно справа.

Лемма 1 [1]. Если A — коммутативное кольцо, T — коммутативный моноид с сокращениями, то дистрибутивность кольца $A[T]$ равносильна выполнению одного из условий (а), (б) теоремы 1.

Лемма 2 [2]. Пусть A — кольцо, T — моноид с сокращениями, причем кольцо $A[T]$ дистрибутивно справа. Тогда:

(а) если T не является периодической группой, то A — коммутативное регулярное кольцо, моноид T обладает непериодической правой группой частных G и кольцо $A[G]$ дистрибутивно справа;

(б) либо A — алгебра над полем рациональных чисел Q

и $Q[T]$ — дистрибутивное справа кольцо, либо множество P всех простых чисел, не обратимых в кольце A , не пусто и для любого $p \in P$ кольцо $(Z/pZ)[T]$, где Z — кольцо целых чисел, дистрибутивно справа;

(в) если G — неединичная группа без кручения, то A — коммутативное регулярное кольцо, а моноид T изоморфен либо подгруппе аддитивной группы рациональных чисел, либо конусу неотрицательных элементов такой подгруппы.

Лемма 3 [3]. Дистрибутивность модуля M_A над кольцом A равносильна тому, что для любых элементов $x, y \in M$ найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $1 = a + b$, $xa \in xA \cap yA$, $yb \in xA \cap yA$.

Лемма 4 [4]. Пусть A — дистрибутивное справа кольцо, N — его правый идеал. Если t — такой элемент кольца A , что для некоторого $n \geq 0$ $t^{n+1}N \subseteq \sum_{i=0}^n t^i N$, то $tN \subseteq N$.

Лемма 5. Пусть A — кольцо, G — группа. Тогда равносильны следующие условия:

(а) кольцо $A[G]$ дистрибутивно справа;

(б) для любого фактора-кольца $\bar{A}$ кольца A и каждой фактор-группы $\bar{G}$ группы G кольцо $\bar{A}[\bar{G}]$ дистрибутивно справа,

(в) для любой подгруппы H группы G кольцо $A[H]$ дистрибутивно справа;

(г) для любой конечно-порожденной подгруппы H группы G кольцо $A[H]$ дистрибутивно справа.

Доказательство. Эквивалентность условий (а) и (б) следует из того, что кольцо $\bar{A}[\bar{G}]$ изоморфно фактор-кольцу кольца $A[G]$. Импликация (а) $\rightarrow$ (в) вытекает из того, что структура правых идеалов кольца $A[H]$ изоморфно вкладывается в структуру правых идеалов кольца $A[G]$. Импликация (в) $\rightarrow$ (г) тривиальна.

(г) $\rightarrow$ (а). По лемме 3 достаточно доказать, что для любых элементов $x, y \in A[G]$ найдутся такие элементы $a, b, c, d \in A[G]$, что $1 = a + b$, $xa = yc$, $yb = xd$. Пусть H — подгруппа в G , порожденная объединением носителей элементов x, y . Так как кольцо $A[H]$ по условию дистрибутивно справа, то по лемме 3 искомые элементы найдутся уже в подкольце $A[H]$ кольца $A[G]$.

Лемма 6. Пусть A — кольцо, G — группа, T — множество всех периодических элементов из G , причем $A[G]$ — дистрибутивное справа кольцо. Тогда:

(а) для любого $t \in T$ и любой подгруппы H из G верно, что H — нормальная подгруппа группы $\langle H, t \rangle$;

(б) T — подгруппа группы G , причем T — либо абелева, либо гамильтонова группа;

(в) T — нормальная локально конечная подгруппа группы G , причем G/T — группа без кручения;

(г) если H — произвольная подгруппа без кручения группы G , то $\langle T, H \rangle = T \times H$;

(д) T — либо гамильтонова группа, либо центральная подгруппа группы G ;

(е) если группа G содержит элемент t порядка 8, то T — центральная подгруппа группы G ;

(ж) если группа G содержит элемент g бесконечного порядка, то T — центральная подгруппа группы G .

Доказательство. (а) Пусть $R = A[G]$, $n = |\langle t \rangle|$, $h \in H$, $x \in \langle t \rangle$, $f = xhx^{-1}$. Достаточно доказать включение $f \in \langle h \rangle$, равносильное включению $1 - f \in (1 - h)R$ [5, с. 235]. Так как $xn = 1$, то $x(1 - h) \in (1 - h)R$ по лемме 4. Поэтому $1 - f = x(1 - h)x^{-1} \in (1 - h)R$.

(б) По лемме Цорна среди периодических подгрупп группы G найдется подгруппа H , максимальная относительно этого свойства. По лемме 5 кольцо $A[H]$ дистрибутивно справа. По пункту (а), примененному к H , все подгруппы из H нормальны в H , откуда H — либо абелева, либо гамильтонова группа. Остается доказать, что $t \in H$ для любого $t \in T$. Так как по пункту (а) $H \triangleleft \langle H, t \rangle$, то $\langle H, t \rangle$ — периодическая группа, по выбору H получаем, что $\langle H, t \rangle = H$, откуда $t \in H$.

(в) Утверждение следует из пункта (б).

(г) По пункту (в) $T \triangleleft \langle T, H \rangle$. По пункту (а) $H \triangleleft \langle T, H \rangle$. Кроме того, $T \cap H = 1$.

(д) Пусть T — негамильтонова группа. Достаточно доказать, что $tg = gt$ для любого $g \in G$. Это вытекает из пункта (б), если $|g| < \infty$, и пункта (г), если $|g| = \infty$.

(е) Так как $t \in T$, то утверждение следует из пункта (д) и того, что гамильтонова группа не содержит элементов порядка 8.

(ж) Пусть $H = \langle g \rangle$, $N_1 = \langle T, H \rangle$, $\bar{H} = H / \langle g^8 \rangle$, $N = T \times H$, $\bar{N} = T \times \bar{H}$. Так как по пункту (г) $N = N_1$, то группа $\bar{N}$ изоморфна фактор-группе группы N_1 . По лемме 5 кольцо $A[\bar{N}]$ дистрибутивно справа, причем $\bar{N}$ содержит элемент порядка 8. По пункту (е), примененному к $\bar{N}$, эта группа абелева. Тогда T — абелева и, следовательно, негамильтонова группа. По пункту (д) T — центральная подгруппа группы G .

Лемма 7. Пусть S — моноид с сокращениями, для кото-

рого существует такое кольцо A , что кольцо $A[S]$ дистрибутивно справа. Тогда S — либо гамильтонова группа, либо коммутативный моноид с абелевой непериодической группой частных, либо периодическая абелева группа.

Доказательство. По лемме 6(б) можно считать, что S не является периодической группой. По лемме 2(а) S обладает непериодической правой группой частных G , причем кольцо $A[G]$ дистрибутивно справа. Достаточно доказать абелевость группы G . Пусть $g \in G$, $|g| = \infty$, T — множество всех периодических элементов из G . По лемме 6(ж) T — центральная подгруппа группы G . Пусть B — произвольная конечно-порожденная подгруппа группы G , $N = \langle T, Bg \rangle$, $\bar{G} = G/T$, $N \cap T = \{1\}$. Тогда $\bar{G}$ — наединичная группа без кручения и по лемме 5 кольцо $A[\bar{G}]$ дистрибутивно справа. По лемме 2(в) $\bar{G}$ — локально циклическая группа. Тогда N — бесконечная циклическая группа. Поэтому найдется такой элемент h бесконечного порядка, что $N = \langle T, h \rangle$, где $h = \langle h \rangle$. По лемме 6(г) $N = T \times \langle h \rangle$. Тогда группа N и, следовательно, ее подгруппа B являются абелевыми группами. Поэтому G — абелева группа.

Лемма 8. Пусть A — алгебра над полем рациональных чисел Q , G — конечная гамильтонова группа, $G = K \times D \times B$, где K — группа кватернионов порядка 8, D — абелева группа нечетного порядка, B — прямое произведение m групп порядка 2, E — циклическая подгруппа порядка n группы D . Тогда:

(а) алгебра кватернионов над полем $Q(\epsilon_n)$ изоморфна кольцевому прямому слагаемому кольца $Q[K \times E]$;

(б) кольцо $Q[G]$ изоморфно прямому произведению конечного числа полей и алгебр кватернионов над полями $Q(\epsilon_{n(i)})$, где $n(i)$ — некоторые нечетные порядки элементов группы G ;

(в) правая дистрибутивность кольца $A[G]$ равносильна тому, что для любого нечетного числа n , являющегося порядком элемента из G , кольцо $A \otimes_Q H(Q(\epsilon_n))$ дистрибутивно справа, где $H(Q(\epsilon_n))$ — алгебра кватернионов над полем $Q(\epsilon_n)$;

(г) если кольцо A коммутативно, то правая дистрибутивность кольца $A[G]$ равносильна тому, что для любого нечетного числа n , являющегося порядком элемента из G , дистрибутивна справа алгебра кватернионов над кольцом $A \otimes_Q Q(\epsilon_n)$.

Доказательство. (а) Известно [6], что если F — поле нулевой характеристики, то кольцо $F[K]$ изоморфно прямому произведению четырех экземпляров поля F и алгебры ква-

тернионов над F . Кроме того, кольцо $Q[E]$ изоморфно прямому произведению поля $Q(\epsilon_n)$ и еще конечного числа полей. Тогда применяем изоморфизм $Q[K \times E] \cong (Q[E])[K]$.

(б) Кольцо $Q[G]$ изоморфно прямому произведению 2^m копий кольца $Q[K \times D]$. Повторяя рассуждения из доказательства пункта (а), проверяем, что кольцо $Q[K \times D]$ изоморфно прямому произведению четырех копий кольца $Q[D]$ и конечного числа алгебр кватернионов над полями $Q(\epsilon_{n(i)})$, где $n(i)$ — некоторые порядки элементов группы D .

(в), (г) Утверждения вытекают из пунктов (б), (в) и кольцевых изоморфизмов.

Лемма 9. Пусть A — кольцо, T — некоммутативный моноид с сокращениями. Тогда правая дистрибутивность кольца $A[T]$ равносильна невыполнению условия (а) теоремы 1 при выполнении утверждения теоремы 2.

Доказательство. Необходимость следует из леммы 8 (в). При доказательстве достаточности ввиду лемм 2 (а) и 7 можно считать, что T — гамильтонова группа. По лемме 5 можно считать, что T конечна. По лемме 8 (в) достаточно доказать, что A — алгебра над полем рациональных чисел. Допустим противное. По лемме 2 (б) найдется такое простое число p , что кольцо $F[T]$ дистрибутивно справа, где F — поле из p элементов. По лемме 5 дистрибутивно справа кольцо $F[K]$, где K — группа кватернионов порядка 8. Случай $p > 2$ невозможен, так как согласно [6] кольцо $F[K]$ в этом случае изоморфно прямому произведению четырех копий поля F и кольца матриц второго порядка над F и, в частности, не дистрибутивно справа. Пусть $p = 2$. Так как группа T имеет фактор-группу G , изоморфную прямому произведению двух групп второго порядка, то по лемме 5 кольцо $F[G]$ дистрибутивно справа, что противоречит лемме 1.

Доказательство теорем 1 и 2. Теорема 1 вытекает из лемм 1, 8 (г), 9. Теорема 2 следует из лемм 1 и 9.

Автор благодарен А. В. Михалеву за ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hardy B. R., Shores T. C. Arithemical semigroup rings. — Can. J. Math., 1980, v. 32, N 6, p. 1361—1371.
2. Туганбаев А. А. Дистрибутивные полугрупповые кольца. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск, 1986, вып. 6, с. 133—144.

- Stephenson W. Modules whose lattice of submodules is distributive. *Proc. London Math. Soc.*, 1974, v. 28, N 2, p. 291—310.
- 4 Туганбаев А. А. Кольца с плоскими правыми идеалами и инбутивные кольца. *Матем. заметки*, 1985, т. 38, № 2, с. 218—228.
- Ламбек И. Кольца и модули.—М.: Мир, 1971.—280 с.
- 6 Manal P. Group rings in which every left ideal is a right ideal.—*Proc. Math. Soc.*, 1979, v. 76, N 2, p. 204—208.

АБЕЛЕВЫ CS -ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

А. Р. Чехлов

Все группы в данной работе предполагаются абелевыми редуцированными без кручения. Здесь рассматриваются группы (называемые CS -группами), в которых все замкнутые в Z -адической топологии сервантные подгруппы выделяются прямыми слагаемыми. Отметим, что CS -группы изучались также в работах [1—6]. В частности, в работах [3—5] рассматривались CS -группы из довольно широкого класса R групп. Оказалось, что все CS -группы из R , не имеющие элементов бесконечной p -высоты для некоторого простого числа p , являются либо связными, либо p -однородными группами (см. § 1), что позволило охарактеризовать CS -группы в ряде классов групп (в частности, в классе групп конечного ранга).

В данной статье исследуются произвольные CS -группы. Оказывается, что изучение CS -групп сводится к изучению квазиоднородных CS -групп, а последние являются либо Q_p^* -модулями (при достаточно большом p -ранге — алгебраически компактными группами), либо конечными прямыми суммами связных групп. В § 1 вводятся необходимые понятия и доказываются вспомогательные результаты. Основные результаты изложены в § 2.

§ 1. Определения и вспомогательные результаты

В дальнейшем R_p будет обозначать класс групп без элементов бесконечной p -высоты; $Q_p^*(J_p)$ — кольцо (группу) целых p -адических чисел; $r_p(A)$ — p -ранг группы A , т. е. ранг фактор-группы A/pA ; $\Pi(A)$ — множество всех простых чисел p со свойством $pA \neq A$; $p^\omega A = \bigcap_{n=1}^{\infty} p^n A$; G^- — замыкание

в Z -адической (p -адической) топологии подгруппы G ; ω_0 — счетное кардинальное число; $h_p^A(a)$ — p -высоту элемента a в группе A .

Группу называют связной, если все ее фактор-группы по ненулевым сервантным подгруппам делимы. Группу называют квазиноднородной, если характеристики любых ее ненулевых элементов содержат символ ∞ на одних и тех же местах.

Напомним, что p -характеристикой $H_p^A(a)$ [7] элемента a группы $A \in R_p$ называется множество $\{\xi | \xi \in J_p \text{ и } \xi a \text{ определено}\}$, где под ξa понимается элемент группы A , являющийся пределом в p -адической топологии последовательности $s_n(\xi)a$ ($n=0, 1, 2, \dots$), $s_n(\xi)$ — n -я частичная сумма числа ξ , записанного в виде формального степенного ряда. p -характеристика элемента является p -сервантной подгруппой группы J_p [7, лемма 1]. Класс эквивалентных p -характеристик [4—5] называется p -типом. Элемент a группы $A \in R_p$ будем называть ее p -образующим, если любой элемент группы A представим в виде ξa для некоторого $\xi \in J_p$. Согласно [7, теорема 3] группа $A \in R_p$ обладает p -образующим тогда и только тогда, когда $r_p(A)=1$. Группу $A \in R_p$ назовем p -однородной, если p -типы любых ее ненулевых элементов равны. Если H — p -характеристика, то для группы $A \in R_p$ обозначим $A(H) = \{a | a \in A, H \subseteq H_p^A(a)\}$.

Лемма 1.1. Если $R_p \ni A = B + G$ — CS -группа, то для любого элемента $0 \neq b \in B$ существует гомоморфизм $\varphi: B \rightarrow G$ такой, что $\varphi(b) \neq 0$. Если к тому же B — связная группа, то φ можно выбрать так, чтобы $\varphi(B)$ была p -сервантной подгруппой группы G .

Доказательство. Можно предполагать, что $b \in B \setminus pB$, и пусть $g \in G \setminus pG$. Имеем $H_p^A(b+pg) \subseteq H_p^A(g)$. Так как $h_p^A(b+pg) > 0$, то $b+pg$ является p -образующим прямого слагаемого $\langle b+pg \rangle_-$ группы A [7, доказательство теоремы 3].

Так как p -ранг этого слагаемого равен 1, то согласно [7, лемма 7] существует гомоморфизм $\varphi: \langle b+pg \rangle_- \rightarrow G$ такой, что $\varphi(b+pg) = g$. Для проекции $\theta: A \rightarrow G$ имеем $\theta\varphi(b+pg) = \theta\varphi(b) + \theta\varphi(pg) = g$. Тогда если $\theta\varphi(b) = 0$, то $\theta\varphi(pg) = p\theta\varphi(g)$ $g \in pG$. Противоречие с выбором элемента g . Пусть b — p -образующий связной группы B и $H_p^A(b) \subseteq H_p^A(g)$ для некоторого $g \in G$ (такой элемент найдется, поскольку

гомоморфизмы не понижают p -характеристики элементов). Так как $H_p(g) \cong H_p(p^n g)$ (p -характеристика является p -сервантной подгруппой в J_p) для каждого натурального n , то можно считать, что $g \in G \cap pG$. Пусть $\varphi: B \rightarrow G$ гомоморфизм со свойством $\varphi b = g$. Всякий элемент группы $\varphi(B)$ можно записать в виде ξg , где $\xi \in J_p$. Если $p'x = \xi g$, то $x \in \langle g \rangle$. g — p -образующий группы $\langle g \rangle$, поэтому $x = \eta g$ для некоторого $\eta \in J_p$. Отсюда $p'\eta = \xi$. Значит, $\eta \in H_p^A(b)$. Откуда $\varphi: \eta b \rightarrow \eta g$, т. е. $x = \eta g \in \varphi(B)$.

Лемма 1.2. Если $A \in R_p$ — связная группа, то для любого элемента $0 \neq a \in A$ аддитивная группа $E(A)$ кольца $E(A)$ изоморфна группе $A(H_p^A(a))$.

Доказательство. В силу p -сервантности p -характеристики в J_p $H_p^A(p^n a) \cong H_p^A(a)$ для любого натурального n . Поэтому можно предполагать, что $a \in A \cap pA$. Тогда a есть p -образующий группы A , значит, для каждого $b \in A(H_p^A(a))$ существует единственный $\varphi_b \in E(A)$ со свойством $\varphi_b(a) = b$ [7, лемма 7]. Отображение $b \rightarrow \varphi_b$ есть искомым изоморфизм $A(H_p^A(a)) \sim E(A)$.

Лемма 1.3. Если A — такая группа, что замыкание сервантной оболочки каждой счетно-порожденной ее подгруппы является алгебраически компактной группой, то A -алгебраически компактна.

Доказательство. Пусть $\sum_{i \in J} n_{ij} x_j = a_i$, $i \in I$, $a_i \in A$, $|I| = \omega_0$ — система уравнений (где n_{ij} — целые числа, которые при фиксированном i почти все равны нулю) такая, что любая ее конечная подсистема разрешима в A . Достаточно показать, что исходная система разрешима в A [8, с. 187]. В силу сервантности подгруппы $\langle a_i | i \in I \rangle$ в A любая конечная подсистема рассматриваемой системы имеет решение в этой подгруппе [8, с. 144]. Разрешимость всей системы следует из того, что такие подгруппы группы A алгебраически компактны.

Лемма 1.4. Для любого кардинального числа $\pi > \omega_0$ существует несвободный редуцированный Q_p^* -модуль без кручения, порожденный системой элементов мощности π .

Доказательство. Пусть $A = \bigoplus_{\omega} J_p + \bigoplus_n J_p$, где $D = \bigoplus J_p$ — p -адическое пополнение группы $\bigoplus J_p$. A является Q_p^* -модулем.

Ранг модуля $D > \omega_0$, а D/pD есть Q_p -модуль счетного ранга. Сравнение рангов модуля D и модуля D/pD показывает, что D несвободный Q_p -модуль. Если $p \geq 2^{\omega_0}$, то, так как $|D| = 2^{\omega_0}$, A является искомым модулем. Если же $p < 2^{\omega_0}$, то в модуле D выберем линейно независимую систему элементов мощности p . Эту систему можно вложить в сервантную подгруппу группы D мощности p [8, с. 137]. Пусть G — подмодуль модуля D , порожденный элементами этой подгруппы. Поскольку G — сервантная подгруппа в D , то G/pG — счетно-порожденный Q_p -модуль. Существование в G линейно независимой системы элементов мощности $> \omega_0$ показывает, что модуль G не свободен.

Лемма 1.5. Пусть $A = B \times G$ — группа без элементов бесконечной высоты с проекциями π , θ и пусть H — подгруппа группы A такая, что $H \cap B = H \cap G = 0$, причем πH — замкнутая, а θH — сервантная подгруппа в группах B и G соответственно, и существует натуральное число m такое, что $h_p(x) \cdot h_p^{-H}(x) \leq m$ ($\infty - \infty = 0$) для всех $x \in \pi H$ и простых чисел p . Тогда H замкнута в A .

Доказательство. Существует изоморфизм $\varphi: \pi H \rightarrow \theta H$ так и, что $\varphi(\pi a) = \theta a$ для каждого элемента $a \in H$. Предположим, что последовательность $a_n \in H$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится к пределу $a \in A$. Тогда πa_n ($n = 1, 2, \dots$) является последовательностью Коши в группе πH . В силу замкнутости πH элемент $\pi a \in \pi H$. Тогда $\theta a \in \theta H$. Таким образом, $a \in H$, т. е. H — замкнута в A .

§ 2. CS-группы

Цель следующих двух теорем — получить общую информацию о строении CS-групп и, в частности, свести задачу изучения CS-групп к изучению квазиоднородных CS-групп.

Теорема 2.1. Всякая CS-группа A представима в виде

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} S +_{p \in \Pi} A_p \subseteq A \subseteq \prod_{p \in \Pi} A_p = \bar{S}, \\ \text{где } A \text{ — сервантная подгруппа в } \bar{S}; \Pi \text{ — некоторое мно-} \\ \text{жество различных простых чисел; } \Pi(A_{p_1}) \cap \Pi(A_{p_2}) = \emptyset \\ \text{при } p_1 \neq p_2, p_1, p_2 \in \Pi, \text{ а } A_p \text{ — квазиоднородные CS-груп-} \\ \text{пы из соответствующих классов } R_p, \text{ однозначно опреде-} \\ \text{ляемые группой } A. \end{array} \right.$$

Доказательство. Так как $p A$ — замкнутая сервантная подгруппа в A , то $A \cap p A = p A$ для некоторой подгруппы $A_p \sim A/p A$. Предположим, что $q \in \Pi(A_p) \cap \Pi(p A)$. Поскольку $q A$ — вполне характеристическая подгруппа в A , то $q A \cap p A = p A \cap q A = p A$, $A_p \cap q A = A_p \cap p A = p A$, $q A \cap p A = p A$. Так как $q A \cap p A = p A$ и $q A \cap p A = p A$ — q -делимые подгруппы, то $A_p \cap q A = p A$. Далее, $A \sim A_p$, $A_q \sim A/q A$. Согласно лемме 1.1 $\text{Hom}(A_q, A_p) = 0$. С другой стороны из $A_p \in R_p$, $A_q \cap p A_q$ следует, что $\text{Hom}(A_q, A_p) = 0$. Противоречие. Итак, $\Pi(A_p) \cap \Pi(p A) = \emptyset$. В частности, A_p — вполне характеристическая подгруппа в A , поэтому они определяются группой A однозначно.

Обозначим через S подгруппу в A , порожденную $\bigcup_{p \in \Pi} A_p$. Покажем, что $S = \bigcap_{p \in \Pi} A_p$ для некоторого множества Π различных простых чисел. Заметим сначала, что для любых p, q либо $A_p \subseteq A_q$, либо $A_p \cap q A = 0$. В самом деле, $A_p = A_p \cap A_q \cap q A$. Откуда, как и выше, получаем, что $A_p \cap q A = 0$ или $A_p \subseteq q A$. 0 приводит к противоречию: с одной стороны, $\text{Hom}(A_p \cap q A, A_p \cap A_q) = 0$, а с другой — $\text{Hom}(A_p \cap q A, A_p \cap A_q) = 0$. Далее, если $A_p \subseteq A_q$, то и $A_q \subseteq A_p$, т. е. $A_p = A_q$. Действительно, если $A_p \subseteq A_q$, но $A_q \not\subseteq A_p$, то $A_p \subseteq A_q \subseteq p A$, противоречие. Следовательно, для любых p и q либо $A_p \subseteq A_q$, либо $A_p \cap q A = 0$. В частности, все подгруппы A_p являются квазиоднородными. Если теперь $A_p \cap A_{p_i} = 0$ ($i = 1, n$), то $A_{p_i} \subseteq p A$. Откуда $A_p \cap (A_p + \dots + A_{p_n}) = 0$. Следовательно, найдется такой набор Π простых чисел p , что $S = \bigcap_{p \in \Pi} A_p$.

Эпиморфизмы $A \rightarrow A_p$ индуцируют гомоморфизм $A \rightarrow \prod_{p \in \Pi} A_p = \bar{S}$ с ядром $D = \bigcap_{p \in \Pi} A_p$. Поскольку D — делимая группа, то $D = 0$. Поэтому этот гомоморфизм осуществляет вложение A в $\bar{S}$. Далее, $\bar{S}$ — сервантная подгруппа в $\bar{S}$, а $A/\bar{S}$ как делимая подгруппа сервантна в $\bar{S}/\bar{S}$. Поэтому A — сервантная подгруппа в $\bar{S}$.

Следствие 2.2. Всякая CS -группа $A \in R_p$ является квазиоднородной.

Идемпотенты π, θ кольца эндоморфизмов $E(A)$ группы A назовем эквивалентными, если $\pi A = \theta A$.

Теорема 2.3. Для группы A , представимой в виде $(*, ($ эквивалентны следующие условия:

- 1) A — CS -группа;
- 2) для каждого прямого разложения $\bar{S} = B \oplus G$ подгруппа $A \cap B$ является прямым слагаемым в A ;
- 3) $E(A)$ вкладывается в кольцо $E(\bar{S})$ и содержит хотя бы один элемент из каждого класса эквивалентных идемпотентов кольца $E(\bar{S})$.

Доказательство. Если $\bar{S} = B \oplus G$, то $A \cap B$ является замкнутой сервантной подгруппой в A . Поэтому $1) \Rightarrow 2)$.

$2) \Rightarrow 3)$. Если $\varphi \in E(A)$, то ясно, что $\varphi(S) \subseteq S$. Пусть $\varphi_p = \varphi|_{A_p}$. Тогда $\psi = (\dots, \varphi_p, \dots) \in E(\bar{S})$ продолжает $\varphi|_S$, причем в силу делимости групп $\bar{S}/S$ и A/S это продолжение единственно и $\psi|_A = \varphi$. Поэтому $E(A)$ вкладывается в $E(\bar{S})$. Пусть $\bar{S} = B \oplus G$. Имеем $A = A \cap B \oplus N$ для некоторой подгруппы $N \subseteq A$. Далее, $A_p = A_p \cap B \oplus A_p \cap N$ и $\bar{S} = \Pi(A_p \cap B) +$

$\Pi(A_p \cap N)$. Так как $(A_p \cap B) \subseteq B$ и $\Pi(A_p \cap B) + (A_p \cap B)$, B — делимые группы, то $B = \Pi(A_p \cap B)$. Пусть $\pi_1: \bar{S} \rightarrow B$ и $\pi: A \rightarrow A \cap B$ проекции групп $\bar{S}$ и A соответственно в разложениях $\bar{S} = B \oplus G$ и $A = A \cap B \oplus N$. Так как $\pi((A_p \cap A)) = 0$, $\pi((A_p \cap B)) = 1_{(A_p \cap B)}$, то $\pi(\Pi(A_p \cap N)) = 0$, $\pi|_B = 1_B$, т. е. π — проекция группы $\bar{S}$ на B в разложении $\bar{S} = B \oplus \Pi(A_p \cap N)$. Следовательно, идемпотент π_1 кольца $E(\bar{S})$ эквивалентен π .

$3) \Rightarrow 1)$. Согласно [5, предложение 2.1] $\bar{S}$ есть CS -группа. Поэтому если B — замкнутая сервантная подгруппа группы A , то $\bar{S} = B \oplus G$, где B — замыкание подгруппы B группы $\bar{S}$. Пусть π — проекция группы $\bar{S}$ на B и $\pi_1 \in E(A)$ — идемпотент, эквивалентный идемпотенту π . Тогда $\bar{S} = B \oplus G_1$, где $B = \pi_1 \bar{S}$ и $G_1 = (1 - \pi_1) \bar{S}$ [8, с. 61]. Имеем $\pi_1 A \subseteq A$ и $(1 - \pi_1) A \subseteq A$. Отсюда $A = A \cap B \oplus A \cap G_1$. Так как $A \cap B = B$, то B — прямое слагаемое в A и, следовательно, A — CS -группа.

Рассмотрим теперь квазиоднородные CS -группы.

Лемма 2.4. Если $A \in R_p$ — CS -группа бесконечного p -ранга, то A является Q_p^* -модулем.

Доказательство. Покажем сначала, что A есть Q_p -модуль, где Q_p — кольцо всех рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с p . Пусть B — p -базис-

ная подгруппа группы A . Так как B — свободная группа ранга ω_0 , то она имеет в качестве гомоморфного образа аддитивную группу Q_p кольца Q_p , т. е. $B/H \sim Q_p$ для некоторой подгруппы $H \subset B$. Так как H — p -сервантная подгруппа в A , то H является ее сервантной подгруппой. Поэтому $A/H \cong N/H$ и $A/H \cong N/H$. Поскольку B/H — p -сервантная подгруппа в A/H , не имеющая элементов бесконечной p -высоты, то $B/H \not\subset N/H$. Откуда вытекает, что $(N+H)/H \cong N/H$ имеет элементы с бесконечной q -высотой для каждого простого числа $q \neq p$. Так как A квазиоднородна, то $qA = A$ для каждого простого числа $q \neq p$, т. е. A является Q_p -модулем.

Имеем $A \cong a \oplus A'$, где a — связная группа. В группе A' также имеется связное прямое слагаемое C . В силу леммы 1.1 существует гомоморфизм $a \rightarrow G$ такой, что его образ — p -сервантная подгруппа в G , а так как $A \cong Q_p$ -модуль, то это сервантная подгруппа. В силу бесконечности p -ранга группа A' имеет сервантную подгруппу $G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i \cong a > (H_p^A(a))$. Согласно лемме 1.2 $E(A_i)^+ \cong A_i$. Следовательно, G можно рассматривать как свободный модуль над кольцом $K \sim E(A_1)$ (K — подкольцо кольца Q_p^*), $G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} K\varepsilon_i$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — базис модуля G . Пусть теперь $\xi = r_0 + r_1 p + \dots$ — произвольное целое p_K -адическое число. Положим $b_i = r_{i-1} \varepsilon_1 + \varepsilon_{i-1} - p \varepsilon_i$ ($i=1, 2, \dots$). Система элементов $\{b_1, b_2, \dots\}$ независима над K . Поэтому подмодуль B модуля G , порожденный этой системой, имеет вид $B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} K b_i$. Нетрудно проверить, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \notin B$ и что B — сервантная подгруппа в G .

Предположим, что B — замкнутые в p -адической топологии группы G . Из $\varepsilon_2 \in \langle \varepsilon_1, B \rangle + p^n G$ для любого натурального числа n следует, что $r_p(G/B) = 1$. Имеем $A'/B \cong B/B + N/B$. Так как G/B — сервантная подгруппа в A'/B без элементов бесконечной p -высоты, а B/B — делимая группа, то $G/B \cap B/B = 0$. Поэтому N/B можно так выбрать, чтобы $G/B \cong N/B$. Далее, $A' = B \wedge F$ для некоторой подгруппы $F \cong N/B$. Для любого элемента $g+B$ группы G/B имеем $H_p^{G/B}(g+B) \cong H_p^G(g) \cong H_p^A(a)$. С другой стороны, группа G/B изоморфна некоторой подгруппе в A' , которую можно вло-

ж в связанное прямое слагаемое C группы A' (таким образом замыкаемым будет замыкание этой сервантной подгруппы группы A'). Гомоморфизм $C \rightarrow a >$ индуцирует гомоморфизм $GB \rightarrow a > (H_p^A(a))$. Таким образом, GB можно вложить в группу $D/B \sim a > (H_p^A(a))$. Поскольку DB — циклический K -модуль, то $D = B \oplus D'$. Пусть $D' = Kx$. Имеем $\lambda b + \dots + \lambda_n b_n + \lambda x, \dots - \alpha_1 b + \dots - \alpha_m b_m + \alpha x$, где $\lambda, \lambda_i, \alpha, \alpha_j \in K$ ($i = 1, n; j = 1, m$). Если $m = n$, то $\alpha_1 = \alpha(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda(\varepsilon_2 + \alpha b - \dots - \alpha_m b_m) = \lambda \varepsilon_2 + (\alpha \lambda_1 - \lambda \alpha) b_1 + \dots + (\alpha \lambda_n - \lambda \alpha_n) b_n - \lambda \alpha_n b_{n-1} - \dots - \lambda \alpha_m b_m$. Получили противоречие с независимостью системы $\varepsilon, \varepsilon_2, b, b_2, \dots$. Следовательно, B не является в радикальной топологии групп G .

Пусть $\lambda = \lambda_1 \varepsilon_2 \in B$. Тогда для любого натурального n разширо уравнение $\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + B = p^n x + B$. Существуют $\alpha_i \in K$ ($i = 1, m$), α_m . Откае, что $\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \alpha_1 (r \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - p \varepsilon_3) + \dots + \alpha_m (r_{m-1} \varepsilon + \varepsilon_m - p \varepsilon_{m+2}) = p^n x$. Имеем $(\lambda_1 + \alpha_1 r_0 + \dots + \alpha_m r_{m-1}) \varepsilon_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \varepsilon_2 + (\alpha_2 - \alpha p) \varepsilon_3 + \dots + (\alpha_m - p \alpha_{m-1}) \varepsilon_{m+1} - \alpha_m p \varepsilon_{m+2} = p^n x$. Откуда $\alpha_1 = -\lambda_2(p), \alpha_2 = \lambda_2 p(p), \dots, \alpha_m = -\lambda p^{m-1}(p)$, значит, $(\lambda_1 - \lambda_2)(r_0 + r_1 p + \dots + r_{m-1} p^{m-1}) = 0(p^n)$, т. е. $\lambda_2 = \lambda_1$. Пусть B — замыкание в радикальной топологии подгруппы B группы G . Имеем $GB = B \oplus RB$. Так как $\varepsilon + B \notin B$ и B — делимая группа, то выберем RB так, чтобы $\varepsilon + B \in RB$. Так же как и выше, $F \subset B = F$ для некоторой группы F такой, что $R \subset F$ и F_1 есть циклический K -модуль. Имеем $\varepsilon_1 = b + g$, где $b \in B, g \in F_1$. Тогда $g = -b - \varepsilon_1 = \lambda(r_0 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - p \varepsilon_3) - \dots - \lambda_n (r_{n-1} \varepsilon_1 + \varepsilon_n - p \varepsilon_{n+2}) = (1 - \lambda_1 r - \dots - \lambda_n r_{n-1}) \varepsilon_1 - \lambda_1 \varepsilon_2 + (\lambda p - \lambda_2) \varepsilon_3 + \dots + (\lambda_{n-1} p - \lambda_n) \varepsilon_{n+1} + \lambda_n p \varepsilon_{n+2}$. Из этой формы записи следует, что $g \in G \cap pG$ и что если $\eta \in J_p$ и ηg определено, то $\eta \in K$. Действительно, если $\eta \in H_p(g)$, то $\eta \lambda, \dots, \eta \lambda_n \in K, \eta(1 - \lambda_1 r_0 - \dots - \lambda_n r_{n-1}) \in K$. Откуда $\eta \in K$. Имеем $G \subset B \oplus F_1, \varepsilon_2 = b_1 - g_1, b_1 \in B, g_1 \in F_1$ и $g_1 = \lambda g$ для некоторого $\lambda \in K$. Тогда $\lambda \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \lambda b + b_1 \in B$. В силу доказанного выше $\lambda = \xi$, т. е. $\xi \in K$. Итак, $H_p(\varepsilon_1) \subset K \cap J_p$. Так как $K \varepsilon_1 \cong \langle a \rangle \cdot (H_p^A(a))$ и a — произвольный элемент группы A , то, следовательно, A является Q_p -модулем.

Лемма 2.5. Пусть $A = B \oplus G$ — CS -группа, являющаяся Q_p^* -модулем, и G вкладывается в B в качестве плотной сервантной подгруппы. Тогда B также вкладывается в G в качестве плотной сервантной подгруппы.

Доказательство. Пусть B' — образ группы G при этом вложении, H — подпрямая сумма групп B', pG . Соглас-

но лемме 1.5 H — замкнутая сервантная подгруппа в A . Поэтому $A = H \cup N$. Здесь $B \cap N = 0$. В самом деле, в противном случае для любого элемента $b \in B \cap N$ со свойством $h^A(b) = 0$ подгруппа $\langle b \rangle \cap H$ являлась бы p -сервантной в A . В силу плотности B' в B существуют элементы $b' \in B'$, $b' \in B$ такие, что $b = b' + pb''$. Далее, $b' + g \in H$ для некоторого $g \in H$. Отсюда $b - (b' + pg) = pb'' - pg \in b^{-1}H$, $h_p^A(b - (b' + pg)) = 0$. С другой стороны, $h_p^A(b) = h_p^A(b) = h_p^A(b' + pg) = 0$. Откуда $h_p^H(b +) = 0$, значит, $b \in (b +) \notin p(\langle b \rangle \cap H)$, что противоречит p -сервантности $b \in H$ в A . Итак, $B \cap N = 0$.

Пусть H_1 и N_1 — образы проекции группы B на прямые слагаемые H и N соответственно. Имеем $B \cap H = H \cap N = 0$ и $A/(B \cap H) \cong G/pG \cong V/\wedge_1$. Отсюда $pN \subseteq N_1 \subseteq N$. Покажем, что $N_1 = pN$. Допустим противное и пусть $\lambda \in N_1 \setminus pN$. Тогда $N = \langle \lambda \rangle$ — p -сервантная подгруппа в N . Значит, $H \cap N' = 0$ — p -сервантная подгруппа в A . Так как $H \cap V' = H \cap B \cap (H \cap N')$, то $H \cap \langle b \rangle = 0$ — p -сервантная подгруппа в A для всякого элемента $b \in B \cap (H \cap N')$, $h_p^A(b) = 0$, что противоречит уже доказанному выше. Следовательно, $N_1 = pN$.

Имеем $B \cap H = H \cap pN$. Поэтому проекция группы B на прямое слагаемое H не повышает p -высоты элементов. Значит, образ этой проекции H_1 является сервантной подгруппой в H . Замыкание H_1 — прямое слагаемое в H , скажем $H = H_1 \oplus H_2$. Тогда $B \subseteq H_1 \oplus N_1$ и $H_2 \cap B = 0$ — прямое слагаемое в A . Однако, так же как и выше, можно показать, что для любого элемента $x \in H \cap pN$ $\langle x \rangle \cap B$ не является p -сервантной подгруппой в A . Следовательно, $H_2 = 0$. Далее, $H \cong pG \sim G$, $B \cap N = 0$. Поэтому $B \cong H_1$ вкладывается в G в качестве плотной сервантной подгруппы.

Теорема 2.6. Если $R_p \cong A = B \oplus G$ — CS -группа, где B — алгебраически компактная группа бесконечного p -ранга, то A — алгебраически компактна.

Все CS -группы из R_p p -ранга не меньше мощности континуума являются алгебраически компактными группами.

Доказательство. Так как B — алгебраически компактная группа, то она имеет прямое слагаемое $N \cong J_p$. Согласно лемме 1.1 существует ненулевой гомоморфизм $\varphi: N \rightarrow \langle g \rangle_*$ для всякого $0 \neq g \in G$ такой, что $\varphi(N)$ — p -сервантная подгруппа в $\langle g \rangle_*$. $\varphi(N)$ — прямое слагаемое в $\langle g \rangle_*$, а так как $\langle g \rangle_*^-$ — связная группа, то $\langle g \rangle_*^- =$

$-\varphi(N) \simeq J_p$. Отсюда вытекает, что A является Q_p^* -модулем. Если $r_p(G) < \omega_0$, то A как прямая сумма двух алгебраически компактных групп алгебраически компактна. Поэтому будем предполагать, что p -ранг группы G бесконечен, и в B и G выделим прямые слагаемые B_1 и F одинакового p -ранга. Для простоты будем считать, что $B_1 = B$. Тогда F можно вложить в B в качестве плотной сервантной подгруппы. По лемме 2.5 B также изоморфна плотной сервантной подгруппе группы F . В силу алгебраической компактности эта плотная сервантная подгруппа совпадает с F . Поскольку F — произвольное прямое слагаемое бесконечного p -ранга в G , то из леммы 1.3 вытекает, что G — алгебраически компактна, значит, и сама группа A является таковой.

Если теперь A — CS -группа и B — ее p -базисная подгруппа ранга ≥ 2 , то B имеет подгруппу H такую, что B/H — p -адическая алгебраически компактная группа бесконечного p -ранга. Так как B/H — сервантная подгруппа в A/H , то $AH = BH = NH$ для некоторой подгруппы $NH \subset A/H$. Как замкнутая сервантная подгруппа NH выделяется в A прямым слагаемым $A = N \oplus G$, где $G \cong B/H$. В силу доказанной части теоремы A — алгебраически компактная группа.

Следствие 2.7. Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$ ($A = \prod_{i \in I} A_i$), где $A_i \in R_p$ и $|I| = \omega_0$. Группа A является CS -группой тогда и только тогда, когда $A \simeq J_p$ (A — алгебраически компактная группа).

Доказательство. Для $A = \prod_{i \in I} A_i$ утверждение вытекает из предыдущей теоремы, так как $r_p(A) = 2$.

Пусть теперь $A = \prod_{i \in I} A_i$. Необходимость. В силу леммы 2.4 A является Q_p^* -модулем. Поэтому в каждой группе A_i можно отщепить прямое слагаемое $G_i \simeq J_p$. Пусть $J \subseteq I$, $|J| = \omega_0$ и $G = \prod_{i \in J} G_i$. Имеем $A = G \oplus B$. Согласно лемме 2.5 всякое прямое слагаемое в B со счетной p -базисной подгруппой изоморфно некоторой подгруппе группы G , а так как Q_p^* является кольцом главных идеалов, то это прямое слагаемое изоморфно J_p . Предположим, что $A \not\simeq J_p$. Тогда $\pi = r_p(B) > \omega_0$.

Поэтому группа B содержит плотную сервантную подгруппу $E \cong J_p$. Согласно лемме 1.4 свободный Q_p^* -модуль E имеет в качестве гомоморфного образа несвободный Q_p^* -модуль F , причем p -ранг группы F счетен. Пусть $E/H \cong F$ и $B/H =$

$= H \wedge / H \quad K/H$, где $E/H \subseteq K/H$. Имеем $B = H \quad C$, где $C \cong K/H$. Следовательно, B имеет прямое слагаемое C , которое содержит плотную сервантную подгруппу, изоморфную группе E/H . В частности, $\neq + J_p$, а $r_p(C) = \omega_0$. Полученное противоречие доказывает, что $A \sim_{\omega_0} J_p$.

Достаточность. Если $A \cong_{\omega_0} J_p$ и H — замкнутая сервантная подгруппа в A , то A/H — редуцированный Q_p -модуль без кручения ранга $\leq \omega_0$. Известно, что такой модуль является свободным (см., например, [9, с. 184]). Поэтому подмодуль H выделяется в A прямым слагаемым.

Следствие 2.8. Группа A мощности < 2 является CS -группой тогда и только тогда, когда она представима в виде $A = \bigoplus_{p \in \Pi} A_p$, где Π — некоторое множество различных простых чисел, $\Pi(A_{p_1}) \cap \Pi(A_{p_2}) = \emptyset$ при $p_1 \neq p_2$, $p_1, p_2 \in \Pi$, а A_p есть CS -группы, являющиеся конечными прямыми суммами связанных групп.

Доказательство. Согласно теореме 2.1 $A_p \subseteq A \subseteq \bigoplus_{p \in \Pi} A_p$. Предположим, что $\bigoplus_p A_p \neq A$, пусть $a = (\dots, a_p, \dots) \in A \setminus \bigoplus_p A_p$, где $a_p \in A_p$. Обозначим через Π' — носитель [8, с. 54] элемента a . Имеем $|\Pi'| = \omega_0$. Каждому подмножеству Π'' множества Π' поставим в соответствие идемпотент $\pi \in E(\bigoplus_p A_p) \cong \bigoplus_p E(A_p)$, $\pi = (\dots, 0_{p_1}, \dots, 1_p, \dots)$, где 0_{p_1} и 1_p — соответственно ноль и единица кольца $E(A_{p_1})$, а носитель элемента π есть Π'' . Заметим, что если $\Pi_1, \Pi_2 \subseteq \Pi'$ и $\Pi_1 \neq \Pi_2$, то для соответствующих идемпотентов π_1, π_2 имеем $\pi_1 a \neq \pi_2 a$. В силу вполне характеристичности дополнительное прямое слагаемое $\bigoplus_{p \in \Pi \setminus \Pi'} A_p$ к $\bigoplus_{p \in \Pi''} A_p = \pi(\bigoplus_p A_p)$ определяется однозначно [8, с. 61]. Следовательно, если θ — эквивалентный π идемпотент, то $\theta = \pi$. Поэтому в силу теоремы 2.3 $\pi \in E(A)$. Откуда $\pi a \in A$. Таким образом, каждому подмножеству множества Π' можно однозначно поставить в соответствие некоторый элемент группы A . Множество этих элементов имеет мощность континуума, а это противоречит тому, что $|A| < 2^{\omega_0}$. Следовательно, $A = \bigoplus_p A_p$. Далее, всякая группа, являющаяся Q_p^* -модулем, имеет мощность $\geq 2^{\omega_0}$. Поэтому A_p не являются

Q_p модулями Ссылка на лемму 2.4 заканчивает доказательство

Известно, что если B_p p -базисные подгруппы группы A для каждого простого числа p , то $|A| = (\sum_p |B_p|)^m$ [8, с. 172] Поэтому, учитывая теорему 2.6, получаем

Следствие 2.9. Квазиоднородная CS -группа мощности >2 является алгебраически компактной.

Рассмотрим теперь CS группы из R_p конечного p -ранга. Для этого введем следующие понятия. Если τ_1, τ_2 — p -типы, $H \in \tau_1, H_2 \in \tau_2$, то под $\tau_1 \cap \tau_2 (\tau_1 \cup \tau_2)$ будем понимать p -тип, содержащий p характеристику $H_1, H_2 (<H_1+H_2)_p$, где через C обозначена p сервинтная оболочка подгруппы G группы J_p). Будем писать $\tau_1 \rightarrow \tau_2$, если для p -характеристик $H \in \tau_1, H_2 \in \tau_2$ существует ненулевой гомоморфизм $H_1 \rightarrow H_2$. Поскольку для группы $A \in R_p$ p -ранга 1 и $a \in A$ pA $A \simeq I^A(a)$ (любой элемент $a \in A$ pA является p о разующим группы A) то $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ означает, что для групп $B, G \in R_p, r_p(B) - r_p(G) = 1$ таких, что $\tau_1 \in T_p(B), \tau_2 \in T_p(G)$, существует $\tau \in T_p(G)$ со свойством $\tau_1 \rightarrow \tau$. Обозначим через $T_p(A)$ множество всех различных p -типов ненулевых элементов группы $A \in R_p, H_p(A)$ —множество всех различных p характеристик её ненулевых элементов, $\tau_p^A(a)$ — p -тип элемента $a \in A$ в группе $A, A(\tau) = \{a \in A, \tau_p^A(a) = \tau\}$.

Лемма 2.10. Пусть $A \in R_p, B \in G, r_p(B) - r_p(G) = 1$ и $H = \langle b+g \rangle$, где $b+g \in A$ $pA; 0 \neq b \in B, 0 \neq g \in G$. Тогда $\tau_p(b+g) \in \tau_p(b) \cup \tau_p(g)$.

Доказательство. Пусть $a+H = \xi(b+H) + \eta$. A/H —группа p -ранга 1. Для любого n имеем $a = s_n(\xi)(b+h_n) + h_n' + p^n a_n$, где $h_n, h_n' \in H, a_n \in A$. Пусть $a = b' + g', h_n = \eta_n(b+g), h_n' = \eta_n'(b+g), a_n = b_n + g_n, b', b_n \in B, g', g_n \in G, \eta, \eta_n' \in J_p$. Если $k \in h_p^A(b)$, то $p^k b' = \eta' b, g' = \eta' g$ для некоторых $\eta', \eta' \in J_p$. Тогда $p^k b' = p^k s_n(\xi)(b + \eta_n b) + p^k \eta_n' b + p^{n+k} b_n, g' - s_n(\xi) \eta_n g + \eta_n' g + p^n g$. Отсюда $\eta' = p^k s_n(\xi) + p^k s_n(\xi) \eta_n + p^k \eta_n' + p^n \eta_n'', \eta'' = s_n(\xi) \eta_n + \eta_n' + p^n \eta_n''$, где $\eta_n', \eta_n'' \in J_p$, значит, $\eta' - p^k \eta'' = s_n(\xi) p^k + p^n (\eta_n'' - p^k \eta_n'')$. Следовательно, $\eta' - p^k \eta''$ является пределом последовательности $p^k s_n(\xi)$ в группе $H_p(b) + H_p(g)$, т. е. $\xi \in \langle H_p(b) + H_p(g) \rangle_p$.

Теорема 2.11. Группа $A \in R_p$ конечного p -ранга, имеющая связную подгруппу $G = \langle a \rangle^{\wedge} (0 \neq a \in A)$ с наследственным кольцом $E(G)$, является CS -группой тогда и только тогда

да, когда она представима в виде $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$, где A_i — связанные группы со следующими свойствами:

1) для любых $i, j \in \overline{1, n}$ и $\tau_i \in T_p(A_i)$, $\tau_j \in T_p(A_j)$ $\tau_i \cdot \tau_j \rightarrow \tau_i$, $\tau_j \rightarrow \tau_i \cap \tau_j \cap \dots \cap \tau_n$;

2) существуют такие ненулевые гомоморфизмы $A \rightarrow G \rightarrow A_1$ что отображение $\varphi \mapsto \varphi|_{A(G)}$ осуществляет вложение $E(A) \hookrightarrow E(A(G))$, при котором $E(A)$ содержит хотя бы один идемпотент из каждого класса эквивалентных идемпотентов $E(A(G))$, где $A(G)$ — одна из следующих групп $A(H)$, $A(\tau)$,

$A' < A(\tau) \mid \tau \in T_p(G)$ *; H_0 , τ — некоторые (p в сильно любые) p -характеристики, соответственно p и $p \nmid$, $H_p(G)$, соответственно из $T_p(G)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$, $p \nmid A_i$. Имеем $A \rightarrow G \rightarrow B$, где $G = p^{a_1} + \dots + p^{a_n}$. Тогда $B \cap A_1 = 0$. В противном случае $A_1 \trianglelefteq B$, $A_1 \left(\bigoplus_{i=2}^n A_i, B, p + \dots + p^{a_n} \right) \in G \setminus A$, но $a_2 + \dots + a_n \notin G \setminus A$. Следовательно, если $\pi: G \rightarrow B$ — проекция, то $\pi A_1 \neq 0$. Откуда $\tau_p(a_1) \rightarrow \tau_p(a_1 + pa_2 + \dots + pa_n) = \tau_p(a_1) \cap \tau_p(a_2) \cap \dots \cap \tau_p(a_n)$. Как прямое слагаемое $A_1 \cap A_2$ есть CS-группа, пусть $G = a_1 + \dots + pa_2 > \dots$, $A_i = G \setminus B$. Согласно лемме 2.10 $\tau_p(a_1) \cap \tau_p(a_2) \in T_p(B)$. Для проекции $\pi: \bigoplus_{i=1}^2 A_i \rightarrow A_2$ имеем $\pi B \neq 0$. Откуда $\tau_p(a_1) \cup \tau_p(a_2) \rightarrow \tau_p(a_2)$.

В качестве G возьмем A_1 . Ясно, что кольцо $E(A)$ вкладывается в $E(A(G))$. Пусть теперь, например, $A(H) = E^- \cap N$ и $\pi_1: A(H) \rightarrow E^-$ — проекция. Тогда замыкание E в p -адической топологии p -сервантной подгруппы E является сервантной подгруппой в A , поэтому $A = E^- \setminus F$ для некоторой подгруппы $F \subset A$. Имеем $A(H) = E^-(H) \setminus F(H)$, где $E^-(H) = E$. Проекция $\pi: A \rightarrow E^-$ есть искомый идемпотент кольца $E(A)$, эквивалентный идемпотенту π_1 .

Достаточность. Рассмотрим сначала случай $n=2$: $A = A_1 \oplus A_2$ и пусть B — замкнутая в p -адической топологии сервантная подгруппа группы A такая, что $B \cap A_1 = B \cap A_2 = 0$. Зафиксируем элемент $g \in G \setminus pG$ и рассмотрим подгруппу $A(H) = A_1(H) + A_2(H)$, где $H = H_p^g(g)$. Из условий на G следует, что $A_1(H), A_2(H) \neq 0$. По лемме 1.2 $G(H)$ можно рас-

сма тривать как циклический R -модуль над некоторым кольцом R , изоморфным подкольцу кольца Q_p^* . На $A(H)$ также можно определить структуру R -модуля. $A_i(H)$, как p -сервантные подгруппы в A_i , имеют p -ранг $=1$ ($i=1, 2$). Поэтому $A(H)/B(H)$ является группой p -ранга 1 такой, что согласно лемме 2.10 существует мономорфизм $A(H)/B(H) \rightarrow G(H)$. Следовательно, R модуль $A(H)/B(H)$ можно вложить в циклический R модуль $FB(H)$. Откуда $F=B(H)$ F_1 и $A(H)=-B(H)$ $F_1 \cap A(H)=B(H)$ E .

Пусть π, θ проекции группы $A(H)$ в разложении $A(H)=B(H)$ E . Если $E(A) \ni \pi_1$ — эквивалентный π идемпотент ($E(A) \subset E(A(H))$), то $A = \pi_1 A + (1-\pi_1)A$, где $(\pi_1 A) \cap A(H) = B(H)$ и, значит, $\pi_1 A = B$.

Покажем, что прямое разложение $A(H)=B(H)$ E можно продолжить до прямых разложений $A(\tau) = B(\tau) \cup G_1(\tau) \cup \tau_p^0(g)$, $A = B' \cup G_2$, где $B' = B(\tau) \mid \tau \in T_p(G)$ *. Тогда, так же как и выше, будет следовать, что B — прямое слагаемое в A . Имеем $A(\tau) = A(H)$ *, где $\tau = \tau_p^0(g)$. Покажем, что $A(\tau) = B(H)$ $E >_* = D$. Пусть $qa \in A(H)$, $qa = a_1 + a_2$, $a_1 \in B(H)$, $a_2 \in E$, q — простое число. Тогда $H_p^0(g) \subseteq H_p^0(qa)$ и существует гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow A$ со свойством $\varphi(g) = qa$.

Потому $H_q^0(g) \subseteq H_q^0(qa)$ и $h_q^0(g) \in h_q^0(qa)$ (предполагаем, что $A \in R_q$, так как в противном случае $qA = A$ и $a \in A(H)$). Поскольку $H_q^0(g) \subseteq H_q^0(a)$, то, если $h_q^0(g) \in h_q^0(a)$, существует гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow A$ со свойством $\varphi(g) = a$, откуда $a \in A(H)$. Если же $h_q(g) \notin h_q(q\tau)$, то, так как g переводится некоторыми гомоморфизмами в a_1 и в a_2 , $h_q^0(a_1)$ и $h_q^0(a_2) \geq 1$, откуда $a \in D$. Итак, $A(\tau) = D$.

Пусть теперь $g_1 \in G$ pG и $H_1 = H_p^0(g_1)$. Тогда, так же как и выше, $A(H_1) = B(H_1)$ E_1 . Используя условия на A_1, A_2, G , легко показать, что существует $b \in G$ pG такой, что $H, H_1 \subseteq H_2 = H_p^0(b)$. Тогда $A(H_2) = B(H_2) \oplus E_2 \subseteq A(H), A(H_1)$. Покажем, что для любых $x, y \in A(H_2)$ $H_p^{A(H_2)}(x) \subseteq H_p^{A(H_2)}(y) \Leftrightarrow \langle x \rangle H_p^{A(H)}(x) \subseteq H_p^{A(H)}(y)$. Ясно, что из $H_p^{A(H)}(x) \subseteq H_p^{A(H)}(y) \Rightarrow \langle x \rangle H_p^{A(H)}(x) \subseteq H_p^{A(H)}(y)$. Пусть $H_p^{A(H_2)}(x) \subseteq H_p^{A(H_2)}(y)$ и $\eta x \in A(H)$. Имеем $b \in \xi g$ для некоторого $\xi \in J_p$ $pJ_p(b, g \in G$ $pG)$. Откуда $H_2 = H_p(b) = H_p(\xi g) = \xi^{-1} H_p(g) = \xi^{-1} H$. Далее $H = \xi H_2 \subseteq H_p(\eta x)$. Отсюда $H_2 \subseteq H_p^A(\xi \eta x)$ и $H = \xi H_2 \subseteq \xi H_p^A(\xi \eta x) = H_p^A((\xi^{-1} \xi) \eta x) = H_p^A(\eta x)$, т. е. $\eta \in H_p^{A(H)}(y)$, значит, $H_p^{A(H)}(x) \subseteq H_p^{A(H)}(y)$. Пусть теперь $x \in A(H_2)$ и $H_p^{A(H)}(x) \subseteq$

$\subseteq H_p^{A(H)}(y)$, $y \in A(H)$. Покажем, что $y \in A(H_2)$. Действительно, из $H_2 \subseteq H_p^A(x)$ следует, что $H = \xi H_2 \subseteq \xi H_p^A(x) = H_p(\xi^{-1}x)$, значит, $H \subseteq H_p^A(\xi^{-1}y) = \xi H_p^A(y)$. Откуда $\xi^{-1}H \subseteq H_p^A(y)$, т. е. $y \in A(H_2)$. Следовательно, $A(H_2)$ вполне характеристическая подгруппа в $A(H)$.

Имеем $A(H_2) = B(H_2) \cap A(H_2) = B(H_2) \cap E_1 \cap A(H_2)$. Обозначим $E \cap A(H_2) = E'$, $E_1 \cap A(H_2) = E_1'$. Согласно [8, с. 61] существует гомоморфизм $\varphi: E_1' \rightarrow B(H_2)$ такой, что $E' = (\theta - \pi\varphi\theta)A(H_2)$, где π, θ — проекции группы $A(H_2)$ на $B(H_2)$, E_1' соответственно. Так как $H_p^{A(H)}(x) \subseteq H_p^{A(H)}(\varphi(x))$ для любого $x \in E_1'$, то φ можно продолжить до гомоморфизма $\bar{\varphi}: E_1 \rightarrow B(H_1)$. Откуда $A(H_1) = B(H_1) \cap A(H_1) = (\theta_1 - \pi_1\bar{\varphi}\theta_1)A(H_1)$, где π_1, θ_1 — проекции $A(H_1)$ на $B(H_1)$, E_1 , и $E' \subseteq (\theta_1 - \pi_1\bar{\varphi}\theta_1)A(H_1) = E_3$. Но тогда $E_3 \subseteq (E') = E$ и $E_3 = (E)(H_1)$, т. е. $A(H_1) = B(H_1) \oplus (E^-)(H_1)$ для любой p -характеристики $H_1 \in H_p(G)$. Имеем $A(\tau_1) = B(\tau_1) + E(\tau_1)$, $\tau_1 = \tau_1^G(g_1)$. Далее, $B(\tau)$ и $E(\tau)$ — связные группы и $B(\tau_1) \cap B(\tau), E(\tau_1) \cap E(\tau) \neq 0$. Поэтому $B(\tau_1) \subseteq B(\tau), E(\tau_1) \subseteq (E(\tau)) = \langle E^* \rangle$, где F — замыкание в Z -адической топологии подгруппы F группы A .

Нетрудно проверить, что если $D = D_1 + D_2$ — прямое разложение сервантной подгруппы D группы A , то $D_1 = D_2^\wedge$ — сервантная подгруппа в A . Поэтому $B(\tau) = \langle E^* \rangle$ — сервантная подгруппа A . По доказанному выше для любого $\tau_1 \in T_p(G) \cap A(\tau_1) = B(\tau_1) \oplus E^-(\tau_1)$, где $B(\tau_1) \subseteq B(\tau); E^-(\tau_1) \subseteq \langle E^* \rangle$. Откуда $A' = \langle B(\tau) \mid \tau \in T_p(G) \rangle = \langle E^-(\tau) \mid \tau \in T_p(G) \rangle^*$.

Пусть $n \geq 2$. Если прямое слагаемое группы A является прямой суммой связных групп $B_i (i=1, \overline{m}; m \leq n)$, то группы B_i также удовлетворяют условиям, накладываемым на A_i . Действительно, пусть $b_i \in B_i, b_i = a_{1,i} + \dots + a_{n,i}, i=1, \overline{m}, a_{j,i} \in A_j, j=1, \overline{n}$. Тогда $\tau_p(b_1) \cup \tau_p(b_2) = \tau_p(a_{1,1} + a_{1,2}) \rightarrow \tau_p(b_1)$. Далее, $\tau_p(b_1) \cap \dots \cap \tau_p(b_m) = \tau_p(b_1 + \dots + b_m) = \tau_p(a_{1,1} + \dots + a_{1,m} + \dots + a_{n,1} + \dots + a_{n,m}) = \tau_p(a_{1,1} + \dots + a_{1,m}) \cap \dots \cap \tau_p(a_{n,1} + \dots + a_{n,m}) \leftarrow \tau_p(a_1) \leftarrow \tau_p(b_1)$.

Покажем теперь, что всякая замкнутая в p -адической топологии сервантная подгруппа B группы A выделяется в A прямым слагаемым. Доказательство будем вести индукцией по n . Случай 1. $B_1 = B \cap A_1 \neq 0$. Тогда $A_1 = B_1 \oplus F, A = B_1 \oplus F \oplus A_n, B = B_1 \oplus (F \cap A_n) \cap B$, где $(F + A_n) \cap B =$

сервантная подгруппа группы $F = A_n$ замкнутая в ее p -адической топологии. F как прямое слагаемое в $\bigoplus_{i=1}^n A_i$ является прямой суммой связанных групп и $r_p(F = A_n) = n-1$. Случай 2. Для любого набора $j_1, \dots, j_{n-1}$, где $j_k = i$ для некоторого $i = 1, n$, $B \cap \bigoplus_{k=1}^{n-1} A_{j_k} = 0$. Тогда, если $g \in G - pG$, то $g = \dots + a_n \cdot 0 \neq 1 \in A_i$ и $g > -B$. Пусть $F = a_1 + a_2 >_*$. Иначе $A_1 = A - F \cap B_1 \cap B = (F \cap \bigoplus_{i=3}^n A_i) \neq 0$. Откуда $F \cap \bigoplus_{i=3}^n A_i = B_1 \cap E$, где E можно представить в виде прямой суммы связанных групп. Далее $B \cap B = B \cap (E \cap N)$, где $B \cap \bigcap_{i=1}^n (A_i) =$ замкнутая сервантная подгруппа в $E \cap N$, и $r_p(E \cap N) = n-1$.

Если B замкнута в Z -адической топологии сервантная подгруппа группы A , $0 \neq b \in B$, то $A = \langle b \rangle \oplus E$, где $\langle b \rangle$ — связанная группа и, значит, $\langle b \rangle \subseteq B$. Имеем $B = \langle b \rangle \oplus B \cap E$, а $B \cap E$ — замкнутая сервантная подгруппа в E . Отсюда в силу конечности p -ранга следует, что B — прямое слагаемое в A . Теорема доказана.

Следствие 2.12. Пусть группа $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i \in R_p$, где A_i — связанные группы, причем существуют связанная группа G с наследственным кольцом $E(G)$, ненулевой гомоморфизм $A_1 \rightarrow G$ и $A = \langle A(\tau) \mid \tau \in T_p(G) \rangle$ (такая группа G существует, если, например, A_i — изоморфные группы с наследственными $E(A_i)$). Группа A является CS -группой тогда и только тогда, когда для нее выполнено условие 1) теоремы 2.11.

В [5] рассматривались CS -группы A такие, что всякий гомоморфизм объединения любой счетной возрастающей цепи прямых слагаемых группы A в саму группу продолжается до эндоморфизма группы A . Там такие группы назывались QCS -группами. Всякая p -однородная QCS -группа бесконечного p -ранга является алгебраически компактной [5, теорема 2.1]. Изменяя немного доказательство теоремы 2.2 из [5], получаем следующее утверждение.

Теорема 2.13. Группа A является QCS -группой тогда и только тогда, когда $\bigcap_{p \in \mathbb{P}} A_p \subseteq A \subseteq \bigcap_{p \in \mathbb{P}} A_p$, где A — сервантная

вполне характеристическая подгруппа в PA_p . P — некоторое множество различных простых чисел; $P(A_p) \cap P(A_p) = \emptyset$ при $p_1 \neq p_2$, каждая $A_p \in R_p$ и есть либо связная группа, либо — CS -группа, являющаяся конечной прямой суммой связных групп, либо — алгебраически компактная группа

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Чехлов А Р Абелевы группы, в которых хаусдорфской топологии сервантные подгруппы являются простыми. Материалы 7-го регионального математического семинара по теории алгебры Деп в ВИНТИ 16 марта 1982 № 1197/82. С. 5.
- 2 Чехлов А Р О некоторых классах абелевых групп. В сб. Абелевы группы и модули Томск, 1984, с. 137—152.
- 3 Чехлов А Р Об одном классе абелевых групп. В сб. Томск, 1984—1985, с. 19. — Рукопись, представлена в Деп в ВИНТИ 9 апр 1984, № 2131/84.
- 4 Чехлов А Р Об абелевых CS -группах без кручения. Тезисы докладов IX Всесоюзного симпозиума по теории групп М., 1984, с. 165—166.
- 5 Чехлов А Р Об абелевых группах без кручения, билинейных к квазисервантно инъективным — В сб. Абелевы группы и модули Томск, 1985, вып. 5, с. 117—127.
- 6 Комаров С. И. О некоторых классах CH -групп. Тезисы докладов IX Всесоюзного симпозиума по теории групп М., 1984, с. 144—145.
- 7 Иванов А М Об одном свойстве p -сервантных подгрупп целых p -адических чисел. Мат. заметки, 1980, т. 27, № 6, с. 859—867.
- 8 Фукс Л. Бесконечные абелевы группы — М. Мир, 1974, т. 1 — 335 с.
9. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы М. Мир, 1977, т. 2 — 416 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

А. З. Шляфер

В данной работе изучаются абелевы группы A , группы автоморфизмов $\text{Aut}A$ которых разрешимы. Случай делимой группы A не представляет трудностей (предложение 7). Поэтому (см. лемму 3) остается исследовать случай редуцированной группы A . Периодические абелевы группы T с разрешимыми группами $\text{Aut}T$ описаны в предложении 10. Такие периодические группы — это в точности периодические части смешанных абелевых групп A с разрешимыми группами $\text{Aut}A$ (теорема 12). В предложении 13 охарактеризованы расщепляющиеся абелевы группы A с разрешимыми группами $\text{Aut}A$. Изучаются также абелевы группы A с периодическими разрешимыми группами $\text{Aut}A$: для случая периодической группы A (следствие 11), для расщепляющейся абелевой группы A (теорема 15), для абелевой группы A с конечным числом ненулевых примарных компонент (следствие 16). В следствиях 17 и 18 получена характеристика абелевых групп A с конечными разрешимыми группами $\text{Aut}A$.

Используемые определения и обозначения в основном стандартны [1—2]: P — множество всех простых чисел, tA — периодическая часть абелевой группы A . Фактор-группу A/tA называем частью без кручения абелевой группы A . В дальнейшем потребуются несколько лемм, носящих технический характер.

Л е м м а 1 [2, с. 295]. Пусть $A = B \rtimes C$, где B — вполне характеристическая подгруппа группы A . Тогда $\text{Aut}A$ — полупрямое произведение стабилизатора $S \cong \text{Hom}(C, B)$ цепочки $0 \leq B \leq A$ и подгруппы $\text{Aut}B \times \text{Aut}C$. (Здесь автоморфизмы группы B (группы C) отождествляются с их продолжениями до автоморфизмов группы A , доопределенными тождественным действием на подгруппе C (соответственно B) группы A).

Л е м м а 2. Пусть B — характеристическое прямое слагаемое абелевой группы A , $A = B \rtimes C$. Тогда группа $\text{Aut}A$ разре-

шима тогда и только тогда, когда разрешимы группы $\text{Aut} B$ и $\text{Aut} C$.

Действительно, по лемме 1 группа $\text{Aut} A$ является расширением группы $S \cong \text{Hom}(C, B)$ с помощью группы $\text{Aut} B \times \text{Aut} C$. Так как группа $\text{Hom}(C, B)$ абелева, то разрешимость группы $\text{Aut} A$ равносильна разрешимости группы $\text{Aut} B \times \text{Aut} C$, что в свою очередь равносильно разрешимости групп $\text{Aut} B$ и $\text{Aut} C$. Следующие два факта непосредственно следуют из леммы 2.

Лемма 3. Группа автоморфизмов абелевой группы разрешима тогда и только тогда, когда разрешимы группы автоморфизмов ее редуцированной и делимой частей.

Лемма 4. Группа автоморфизмов расщепляющейся абелевой группы разрешима тогда и только тогда, когда разрешимы группы автоморфизмов ее периодической части и части без кручения.

Лемма 5. Пусть p -простое число, $A = A_0 \dots A_m$, где $A_i \cong Z(p^{k_i})$, $i = 0, 1, \dots, m$; $0 \leq k_0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_m$; $m \geq 2^n$; $n \geq 0$. Тогда n -й член ряда коммутантов группы $\text{Aut} A$ нетривиален.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{2^n-1}$ — элементы некоторой группы G . Обозначим $\delta_0(x_1) = x_1$ и $\delta_{n-1}(x_1, \dots, x_{2^n-1}) = [\delta_n(x_1, \dots, x_{2^n-1}), \delta_n(x_{2^n-1}, \dots, x_{2^n-1})]$ для $n \geq 0$. В этих обозначениях для доказательства леммы требуется найти такие $x_1, \dots, x_m$, что $\delta_n(x_1, \dots, x_m) \neq 1$. Пусть $A_i \cong \langle a_i \rangle$, $i = 0, 1, \dots, m$. Для $0 \leq j < i \leq m$ обозначим через ϵ_{ij} гомоморфизм группы A_i действующий тождественно на группах A_s , $s \neq j$, и переводящий a_j в a_i . Положим $t_{ij} = \epsilon + \epsilon_{ij} \in \text{Aut} A$ (здесь ϵ — тождественный автоморфизм группы A). Непосредственная проверка показывает, что $[t_{ij}, t_{jk}] = t_{ik}$ для $0 \leq k < j < i \leq m$. Поэтому, положив $x_1 = t_{01}$, $x_2 = t_{12}$, ..., $x_m = t_{m-1,m}$, имеем $\delta_n(x_1, \dots, x_m) = t_{0m} \neq \epsilon$. Лемма доказана.

В дальнейшем потребуются следующая простая лемма.

Лемма 6. Если группа автоморфизмов $\text{Aut} A$ абелевой группы A периодическая, то A — группа редуцированная.

Предложение 7. Группа автоморфизмов $\text{Aut} A$ делимой абелевой группы A разрешима тогда и только тогда, когда $r_0(A) \leq 1$ и $r_p(A) \leq 1$ при любом простом числе p . (Здесь $r_0(A)$ — ранг части без кручения группы A ; $r_p(A)$ — ранг ее p -компоненты, $p \in \mathbb{P}$).

Доказательство. Пусть $A = A_0 \bigoplus_p A_p$, где $A_0 \cong \bigoplus_{r(A)} Q$, $A_p \cong \bigoplus_{r_p(A)} Z(p^\infty)$. По лемме 4 группа $\text{Aut} A$ разрешима тогда

1 только тогда, когда разрешимы группы $\text{Aut } A_0$ и $\text{Aut} \left(\prod_p A_p \right)$ для всех простых чисел p . Кроме того, $\text{Aut} \left(\prod_p A_p \right) \sim \prod_p \text{Aut } A_p$.

Если группа $\text{Aut } A$ разрешима, то группы $\text{Aut } A_i$ разрешимы ($i = 0, 2, 3, 5, \dots$). Но это возможно лишь при $r(A_i) \leq 1$. Действительно, $\text{Aut } A_0 \sim GL(r(A_0), \mathbb{Q})$, $\text{Aut } A_p \sim GL(r_p(A), \mathbb{Q})$ ($p = 2, 3, 5, \dots$). Но группа $GL(n, R)$, где R — кольцо, при $n \geq 2$ содержит подгруппу $E(n, R)$, порожденную всеми элементарными матрицами, которая совпадает со своим коммутантом. Значит, группа $GL(n, R)$ неразрешима при $n \geq 2$.

Обратно, если $r_0(A) \leq 1$ и $r_p(A) \leq 1$, $p \in P$, то группы $\text{Aut } A$ и $\text{Aut} \left(\prod_p A_p \right) \sim \prod_p \text{Aut } A_p$ коммутативны и, значит, разрешимы. Остается применить лемму 4. Предложение доказано.

Ввиду предложения 7 и леммы 3, изучение абелевых групп A с разрешимыми группами автоморфизмов $\text{Aut } A$ сводится к случаю редуцированной группы A .

Определение 8. B -группой называем для краткости абелеву группу, изоморфную группе $\prod_p A_p$, где для некоторого целого $N > 0$ (не зависящего от p) $A_p \sim \bigoplus_{i=1}^N Z(p^{k_{ip}})$, причем $0 < k_{1p} < k_{2p} < \dots < k_{Np}$ при любом простом p и $m_{ip} = 0, 1$ или 2 при $p = 2, 3$, $m_{ip} = 0$ или при $p \geq 5$.

Предложение 9. Пусть A — редуцированная абелева группа и $\text{Aut } A$ — разрешимая группа. Тогда периодическая часть tA группы A является B -группой.

Доказательство. Фиксируем простое число p . Если группа A имеет прямое слагаемое порядка p , то $A = B_1^{(1)} \oplus C_1^{(1)}$, где $B_1^{(1)} \cong Z(p)$. Выделяя (если это возможно) прямое слагаемое порядка p в группе $C_1^{(1)}$, получаем $C_1^{(1)} = B_2^{(1)} \oplus C_2^{(1)}$, $B_2^{(1)} \cong \sim Z(p)$, то есть $A = B_1^{(1)} \oplus B_2^{(1)} \oplus C_2^{(1)}$. Продолжая этот процесс, насколько это возможно, получаем на i -м шаге $A = B_1^{(1)} \oplus \dots \oplus B_i^{(1)} \oplus C_i^{(1)}$, где $B_1^{(1)} \cong \dots \cong B_i^{(1)} \cong Z(p)$. Покажем, что этот процесс обрывается не позднее чем на третьем шаге. Действительно, если $i \geq 3$, то группа $\text{Aut } A$ содержит подгруппу, изоморфную группе $\text{Aut}(B_1^{(1)} \oplus \dots \oplus B_i^{(1)}) \sim GL(i, p)$, которая при $i \geq 3$ не является разрешимой. Поэтому $A = B_1^{(1)} \oplus \dots \oplus B_i^{(1)} \oplus C_i^{(1)}$, где $B_i^{(1)}$ — конечная элементарная p -группа, а группа $C_i^{(1)}$ не содержит прямых слагаемых порядка p . Аналогично

выделение в группе $C^{(1)}$ прямых слагаемых, изоморфных $Z(p^2)$, приводит к прямому разложению $A = B^{(2)} C^{(1)}$, где $B^{(2)}$ — конечная прямая сумма циклических групп порядков p и p^2 , а группа $C^{(2)}$ не имеет p -примарных прямых слагаемых порядков, меньших p^3 . Итерация этого процесса на j -м шаге приводит к разложению $A = B^{(j)} C^{(j)}$, где $B^{(j)}$ — конечная p -группа, а $C^{(j)}$ не имеет циклических прямых слагаемых порядков, меньших p^j . Пусть ступень разрешимости $\text{Aut} A$ равна n . Тогда по лемме 5 указанный процесс обрывается не позднее чем на N -м шаге, где $N \geq n$, так что $A = B C$, где B — конечная p -группа, а C не содержит циклических p -примарных слагаемых. Ввиду редуцированности группы A имеем $C_p = 0$. Действительно, если в p -группе всякий элемент порядка p имеет бесконечную высоту, то эта группа делимая [1, с. 118], но всякий элемент порядка p и конечной высоты можно вложить в циклическое прямое слагаемое группы [1, с. 139]. Итак, $A_p = B_p$ — конечная p -группа, то есть $A_p \sim_{i=1}^N Z(p^{k_i})$, причем $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_N$,

по лемме 5 $N \leq 2^n$, где n — ступень разрешимости группы $\text{Aut} A$, $m_i = 0$ — целые числа. В частности, A_p выделяется в A прямым слагаемым [1, с. 140]. Поэтому группа $\text{Aut} A_p$ изоморфно вкладывается в группу $\text{Aut} A$ и, следовательно, группа $\text{Aut} A_p$ разрешима.

Рассмотрим следующую цепочку подгрупп группы $A_p \cdot P \cong \cong P_1 \cong \dots \cong P_N = 0$, где $P_i = p^i A_p [p]$ $i = 0, 1, \dots, N$. Для каждого $i = 1, \dots, N$ группа $\text{Aut}(P_{i-1}/P_i)$ — гомоморфный образ группы $\text{Aut} A_p$ [2, с. 301] и $\text{Aut}(P_{i-1}/P_i)$ изоморфна полной линейной группе $GL(m_i, p)$ степени m_i над полем порядка p . Но известно, что группа $GL(m, p)$ разрешима тогда и только тогда, когда либо $m = 0, 1$ или 2 при $p = 2, 3$, либо $m = 0$ или 1 при $p \geq 5$. Итак, $tA = A_p$ является B -группой.

Лемма доказана.

Предложение 10. Редуцированная периодическая абелева группа A имеет разрешимую группу автоморфизмов $\text{Aut} A$ тогда и только тогда, когда A является B -группой.

Доказательство. Необходимость следует из предложения 9. Докажем достаточность. Пусть A является B -группой, то есть $A = A_p$ и существует такое целое число $N > 0$, что для каждого простого числа p p -компонента A_p группы

А изоморфна $\prod_{i=1}^N Z(p^{k_{ip}})$, причем $0 < k_{1p} < k_{2p} < \dots < k_{Np}$ и $m_{ip} = 0, 1$ или 2 при $p=2, 3$, $m_{ip}=0$ или 1 при $p \geq 5$. Рассмотрим снова цепочку подгрупп группы A_p : $P_0 \supseteq P_1 \supseteq \dots \supseteq P_N = 0$, где $P_i = p^i A_p[p]$ $i = 0, 1, \dots, N$. Группа $\text{Aut} A_p$ является расширением стабилизатора C_p этой цепочки с мощностью группы $G_p \sim \prod_{i=1}^N \text{Aut}(P_{i-1}/P_i)[2, \text{с. } 301]$. Так как

$\text{Aut}(P_{i-1}/P_i) \sim GL(m_{ip}, p)$, ограничения на m_{ip} в определении В-группы показывают, что G_p разрешимые группы с ограниченными в совокупности (по p) степенями разрешимости.

Из [2, с. 304] можно вывести, что группы C_p также разрешимы и их степени разрешимости также ограничены в совокупности (по p) числом, зависящим только от N . Поэтому $\text{Aut} A_p$ разрешимые группы с ограниченными в совокупности степенями разрешимости. Следовательно, группа $\text{Aut} A \cong \sim \prod_p \text{Aut} A_p$ разрешима. Предложение доказано.

Следствие 11. Для периодической абелевой группы A следующие условия эквивалентны:

- (1) $\text{Aut} A$ — разрешимая периодическая группа;
- (2) $\text{Aut} A$ — разрешимая конечная группа;
- (3) A — конечная В-группа.

Доказательство проводится по схеме $(1) \rightarrow (3) \rightarrow (2) \rightarrow (1)$, причем импликация $(2) \rightarrow (1)$ очевидна, $(3) \rightarrow (2)$ проверяется непосредственно, а $(1) \rightarrow (3)$ следует из предложения 10 и леммы 6.

Теорема 12. Для редуцированной периодической абелевой группы следующие условия эквивалентны:

- (1) группа $\text{Aut} T$ разрешима;
- (2) T является периодической частью редуцированной смешанной абелевой группы A с разрешимой группой автоморфизмов $\text{Aut} A$;
- (3) T является В-группой.

Доказательство. Эквивалентность $(1) \leftrightarrow (3)$ — это в точности предложение 10. Ввиду предложения 9 (2) влечет (3). Докажем, что из (3) следует (2). Пусть T является бесконечной В-группой, то есть $T = \bigoplus_p T_p$, где для некоторого целого $N > 0$

$T_p \cong \prod_{i=1}^N Z(p^{k_{ip}})$, где $0 < k_{1p} < k_{2p} < \dots < k_{Np}$

при любом p , и $m_{ip} = 0, 1$ или 2 при $p=2, 3$, $m_{ip}=0$ или 1 при $p \geq 5$. Рассмотрим группу $A = \prod_p T_p$. Непосредственно про-

веряется, что $\text{Aut} A \cong \text{Aut} T$. Так как группы $\text{Aut} T_p$ являются разрешимыми группами с ограниченными в совокупности степенями разрешимости, то группа $\text{Aut} A$ разрешима. Очевидно, что A является редуцированной нерасщепляющейся смешанной абелевой группой, причем $tA = T$. Если теперь T конечная группа, то, очевидно, всякая группа с $tA \sim T$ расщепляется. Тем не менее для любой B -группы T группа $A \not\sim T$ удовлетворяет условию (2), если в качестве F выбрана редуцированная абелева группа без кручения с разрешимой группой автоморфизмов, например $F \simeq Z$ (это следует из леммы 4).

Замечание 1. Как следует из доказательства теоремы если группа T бесконечна, то группу A в условии (2) можно выбрать нерасщепляющейся с $\text{Aut} A = \text{Aut} T$. Обратно, если группа A в условии (2) нерасщепляющаяся, то группа T бесконечна.

Замечание 2. Конструкция, использованная в доказательстве теоремы 12 для случая бесконечной B -группы T , показывает, что группа автоморфизмов части без кручения $F = A/tA$ абелевой группы A с разрешимой группой автоморфизмов не обязательно разрешима. Действительно, в рассматриваемой конструкции $F = A/tA$ — делимая группа бесконечного ранга и по предложению 7 группа $\text{Aut} F$ не является разрешимой.

Следующее предложение непосредственно вытекает из леммы 2 и предложения 10.

Предложение 13. Расщепляющаяся редуцированная абелева группа A имеет разрешимую группу автоморфизмов $\text{Aut} A$ тогда и только тогда, когда ее периодическая часть является B -группой, а часть без кручения F имеет разрешимую группу автоморфизмов $\text{Aut} F$.

Следствие 14. Пусть A — редуцированная абелева группа и множество $\pi(A) = \{p \in P \mid t_p(A) \neq 0\}$ конечно. Группа $\text{Aut} A$ разрешима тогда и только тогда, когда периодическая часть tA группы A является (конечной) B -группой, а часть без кручения $F = A/tA$ имеет разрешимую группу автоморфизмов $\text{Aut} F$.

Действительно, достаточно заметить, что в рассматриваемом случае периодическая часть tA группы A конечна, так как согласно предложению 9 tA — B -группа и множество $\pi(A)$ конечно. Поэтому A — расщепляющаяся абелева группа и применимо предложение 13.

Теорема 15. Пусть A — расщепляющаяся абелева группа с периодической группой автоморфизмов $\text{Aut} A$. Группа $\text{Aut} A$ разрешима тогда и только тогда, когда периодическая часть tA группы A является (конечной) B -группой.

Доказательство. Ввиду леммы 6, группа A редуцируемая. По предложению 13 группа $\text{Aut} A$ разрешима тогда и только тогда, когда ее периодическая часть tA есть B -группа, а часть без кручения F группы A имеет разрешимую группу автоморфизмов $\text{Aut} F$. Так как группа $\text{Aut} A$ — периодическая, то и ее подгруппа (при очевидном отождествлении) $\text{Aut} F$ периодическая. Из свойств периодических групп автоморфизмов абелевых групп без кручения, установленных в [1], и в [2, § 116], следует, что группа $\text{Aut} F$ локально конечна (И. Х. Беккер) и что любая конечная подгруппа группы $\text{Aut} F$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп следующих типов: циклические группы $Z(2)$, $Z(4)$, $Z(6)$ порядков 2, 4, 6, группа кватернионов $Q_8 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 \rangle$, дициклическая группа $DC_{12} = \langle a, b \mid a^3 = b^2, (b)^2 \rangle$, бинарная группа тетраэдра $BT_{24} = \langle a, b \mid a^3 = b^2, (b)^2 \rangle$. Так как все эти группы разрешимы со ступенью разрешимости, не превосходящей 3, то и сама группа $\text{Aut} F$ разрешима. Таким образом, периодическая группа автоморфизмов $\text{Aut} F$ абелевой группы без кручения разрешима. Очевидно, что бесконечная B -группа имеет автоморфизмы бесконечного порядка. Поэтому группа tA конечна. Теорема доказана.

Следствие 16. Пусть A — абелева группа и множество $\pi(A) - p$ $P t(A)$ 0 конечно. Группа $\text{Aut} A$ является периодической разрешимой группой тогда и только тогда, когда периодическая часть tA группы A является (конечной) B -группой, а группа $\text{Aut} F$ ($F = A/tA$ — часть без кручения группы A) периодическая.

Действительно, группа tA конечна и выделяется в группе A прямым слагаемым, $A = tA \oplus F$. Так как из леммы 1 вытекает, что в данном случае периодичность $\text{Aut} A$ эквивалентна периодичности группы $\text{Aut} F$, то остается применить теорему 15.

Так как абелева группа A с конечной группой автоморфизмов расщепляется, то с помощью леммы 1 получаем также следующие следствия.

Следствие 17. Группа автоморфизмов $\text{Aut} A$ абелевой группы A является конечной разрешимой группой тогда и только тогда, когда периодическая часть tA группы A — ко-

нечная B -группа, а группы $\text{Aut } F$ и $\text{Hom}(F, tA)$ конечны (здесь $F \cong A/tA$ — часть без кручения группы A).

Следствие 18. Пусть A — абелева группа с конечной группой автоморфизмов $\text{Aut } A$. Группа $\text{Aut } A$ разрешима тогда и только тогда, когда tA — конечная B -группа.

Автор благодарит И. Х. Беккера за внимание к работе

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. т. 1 — 335 с.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. т. 2 — 416 с.

СОДЕРЖАНИЕ

И У Беккер, В. А. Никифоров. Когомологическая характеристика абелевых FN -групп без кручения	3
Е М Вечтомов. Определяемость E -компактных пространств чатично упорядоченными множествами идеалов колец непрерывных функций	20
А И Генералов. Индуктивные чистоты над кольцами конечного типа представлений	31
С И Комаров. Функтор HF в категории абелевых групп	42
Е И Компанцева. О кольцах на абелевых группах без кручения	64
П А Крылов. Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения	81
С Ю Максимов. Об изоморфных квазипродолжениях прямых разложении абелевой группы	100
С К Росошек, М. А. Турманов. Периодические абелевы группы, чисто простые как модули над своими кольцами эндоморфизмов	106
С В Рычков. Абелевы k -сепарабельные группы	110
Е В Тараканов. О классах абелевых групп с некоторым своим твом эндоморфизмов	121
А А Туганбаев. О моноидных кольцах	124
А Р Чехлов. Абелевы CS -группы без кручения	131
А З Шляфер. О разрешимости групп автоморфизмов абелевых групп	148

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

Редактор Е. С. Юзefович
Технический редактор Р. А. Прошенкина
Корректор В. Г. Лихачева

ИБ 1907 Сдано в набор 02.06.86 г. Подписано к печати 01.02.88 г. КЗ 06082.
Формат 60×84¹/₁₆ Бумага типографская № 3. Литературная гарнитура.
Высокая печать Печ. л. 10 Усл. печ. л. 9,3. Уч.-изд. л. 9,2.
Тираж 500 экз. Заказ 4223. Цена 1 р. 40 к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4.
Типография изд-ва «Омская правда», г. Омск, пр. Маркса, 39.

РЕФЕРАТЫ НА ОПУБЛИКОВАННЫЕ СТАТЬИ

УДК 512.541

Беккер И. Х., Никифоров В. А. Когомологическая характеристика абелевых FN -групп без кручения.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, вып. 7, с. 3—19.

Абелева группа без ненулевых нильпотентных эндоморфизмов называется FN -группой. Установлены как необходимые, так и достаточные условия равенства нулю групп $H^1(\Phi, G)$, где G — не 2-делимая FN -группа без кручения; Φ — конечная группа автоморфизмов группы G , $\Phi \leq \text{Aut } G$ или Φ — периодическая группа без бесконечных 2-групп, а G имеет квазиразложение с сервантными и сильно неразложимыми квазистагаемыми. Если Φ содержит бесконечные 2-группы, то вычисление $H^1(\Phi, G)$, сводится к случаю $H^1(\Phi', G)$, где $\Phi \cong Z(2^\infty)$ или $\Phi \simeq Q_2^\infty$ — бесконечная обобщенная группа кватернионов. Существуют такие FN -группы G без кручения, для которых группы $H^1(\Phi', G)$ как равны нулю, так и отличны от нуля.

Библ. 5.

УДК 512.55

Вечтомов Е. М. Определяемость E -компактных пространств частично упорядоченными множествами идеалов колец непрерывных функций.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, вып. 7, с. 20—30.

Для широкого класса топологических тел E , включающего непрерывные по Понтрягину тела, подполя топологического поля действительных чисел и конечные поля, доказано, что каждое E -компактное пространство X , т. е. произвольное подпространство некоторой тихоновской степени пространства E , однозначно с точностью до гомеоморфизма определяется любым из следующих частично упорядоченных множеств идеалов кольца $C(X, E)$ всех непрерывных E -значных функций на X : частично упорядоченным множеством всех главных (главных правых) идеалов, полурешеткой всех конечно-порожденных (правых) идеалов, решеткой всех (правых) идеалов. Отсюда следует, что для любых пространств X и Y изоморфизм предпорядоченных множеств делимости (значит, и полугрупп $C(X, E)$ и $C(Y, E)$), а также Морита-эквивалентность колец $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ влекут изоморфизм самих этих колец. Получены другие приложения.

Библ. 15.

УДК 512.55.

Генералов А. И. Индуктивные чистоты над кольцами конечного типа представлений.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, вып. 7, с. 31—41.

Пусть R — кольцо конечного типа представлений. Устанавливается взаимно однозначное соответствие между индуктивными чистотами в категории $\text{Mod } R$ правых унитарных R -модулей и подмножествами множества всех почти расщепляемых последовательностей. Доказано, что любая индуктивная чистота в $\text{Mod } R$: а) инъективно порождена; б) проективно порождена; в) плоско порождена.

Библ. 18.

Комаров С. И. Функтор HF в категории абелевых групп.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, вып. 7, с. 42—63.

Рассматривается функтор HF из категории $A \times A$ в категорию A всех абелевых групп, который возникает при рассматривании всех гомоморфизмов $\varphi: A \rightarrow B$ абелевых групп, которые можно провести через любое накрывающее $G \rightarrow B \rightarrow O$. Изучаются свойства этого функтора. Затем вводится функтор NHF , где $\text{NHF}(A, B) = \text{Hom}(A, B) / \text{HF}(A, B)$, также обладающий многими хорошими свойствами. Доказывается, что абелева группа без кручения A является узкой тогда и только тогда, когда $\text{NHF}(P, A) = O$, где P — произвольная абелева группа, а O — L -проективна тогда и только тогда, когда

$\text{NHF}(A, L) = O$ для любой группы $L \in L$.

Библ. 7.

УДК 512.541

Компанцева Е. И. О кольцах на абелевых группах без кручения.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, вып. 7, с. 64—80.

Показано описание абсолютного радикала Джекобсона и абсолютного нильпотента для двух классов абелевых групп без кручения: вполне разложимых групп и векторных сепарабельных групп.

Библ. 3.

УДК 512.541

Крылов П. А. Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, вып. 7, с. 81—99.

Псевдошюклем абелевой группы G без кручения называется сервантная подгруппа, порожденная в G всеми ее минимальными сервантными вполне характеристическими подгруппами (обозначение — $\text{Soc } G$). Доказана теорема: Пусть G — редуцированная группа без кручения с циклическими p -базисными подгруппами и $G = \text{Soc } G$. Тогда $G = \sum_{i \in I} G_i$, где кольца

эндоморфизмов всех групп G_i сильно однородны. Строится связная квазисервантно инъективная группа без кручения, множество типов всех ненулевых элементов которой не содержит максимальных элементов. Существование таких групп ранее не было известно. Затем показывается, что суперразложимая группа, построенная автором в РЖМАТ, 1977, 4А156, является вполне транзитивной и транзитивной. Отмечаются и другие свойства этой группы. Например, замыкание в $\mathbb{Z}$ -адической топологии всякой сервантной подгруппы конечного ранга этой группы выделяется прямым слагаемым.

Библ. 25.

УДК 512.541.32

Максимов С. Ю. Об изоморфных квазипротяжениях прямых разложений абелевой группы.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, вып. 7, с. 100—105.

Рассматривается вопрос о существовании и оморфных продолжений и квазипродолжении прямых разложений абелевой группы

Пусть K — произвольный класс абелевых групп. Абелева группа G называется K -малой, если для любого гомоморфизма $\varphi: G \rightarrow G_K$, где $G_K \in K$, существует подмодуль $L \subseteq K$ такой, что $|L|$ — m и $G \subseteq \varphi^{-1}(\bigoplus_{k \in L} G_k)$. Для любого класса редуцированных

абелевых групп K строится α -смешанных m - K -модулей $A(m, K)$ и доказывается, что если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i, A_i \in A(m, K), K$ — класс редуцированных абелевых групп, периодические члени которых являются прямыми суммами периодически полных групп, то быстрая группа A в прямую сумму групп (что) ω с ои то м н ч ульмовскими инвариантами обладают изоморфными (квази) прооменими. Кроме того, показано, что и оморфизмы квазиразложениями обладают любые разложения абелевой группы в прямую сумму групп конечного ранга

Библ 12

УДК 512.541 + 512.553

Россошек С. К., Турма в М. А. Периодические абелевы группы, чисто простые как модули над своими кольцами эндоморфизмов. Вн. Абелевы группы и модули Т. И. Т. м. 1988, 7, с. 106–109

Описаны периодические абелевы группы, которые являются простыми модулями над своим кольцом эндоморфизмов, а понимает в смысле П. Кона)

Библ 3

УДК 512.541

Рычков С. В. Абелевы k -сепарабельные группы. В кн. Абелевы группы и модули Т. И. Т. м. ун-та, 1988, 7, с. 110–120

Для любого несчетно не слабо компактного кардинала k вводится и изучается (в предположении аксиомы конструктивности) понятие k -малого эндоморфизма сепарабельных абелевых групп без кручения. Основным результатом (для вышеуказанных кардиналов) является доказательство существования k -эндожесткого семейства, состоящего из $2^k \cdot k$ -сепарабельных абелевых групп без кручения мощности k . В качестве следствий получено отрицательное решение тестовой проблемы Капланского в классе k -сепарабельных групп без кручения и существование квазинеразложимых k -сепарабельных групп.

Библ 12

УДК 512.541

Тараканов Е. В. О классах абелевых групп с некоторым свойством эндоморфизмов. — В кн. Абелевы группы и модули. Томск. Изд-во Том. ун-та, 1988, вып. 7, с. 121–123.

Абелева группа G называется локально разрешаемой над своим кольцом эндоморфизмов $E(G)$, если для любых $g_1, g_2, \dots, g_n$ из G существует $a \in G$ и $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in E(G)$ такие, что $g_i \varphi_i = a_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Показано, что всякая периодическая абелева группа G локально разрешаема над

2(G) Для случая групп без кручения справедливы следующие утверждения

1) в якая вполне разложимая группа A локально разрешаема над $E(A)$,

2) я ая сепарабельная группа без кручения B локально разрешаема на $E(B)$,

3) д я любого натурального $n \geq 2$, существует группа без кручения r га n е являющаяся локально разрешаемой над своим кольцом эндоморфизмов

Библи 3

УДК 512.55

Ту нбаев А. А. О моноидных кольцах. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, вып. 7, с. 124—130.

Н у условия на коммутативное кольцо A и моноид с сокращениями T р ильные тому, что моноидное кольцо $A[T]$ обладает дистрибутивной структурой правых идеалов.

Библи 6

УДК 512.541

Чехлов А. Р. Абелевы CS -группы без кручения. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, вып. 7, с. 131—147.

И ч ются абелевы редуцированные группы без кручения (названные CS -группами), в которых все замкнутые в $\mathbb{Z}$ -адической топологии сервантны л дгруппы выделяются прямыми слагаемыми. Всякая такая группа пр ставима в виде сервантной межпрямой суммы некоторого семейства однозначно определяемых квазиоднородных групп. Квазиоднородная GS -групп является или конечной прямой суммой связанных групп, или модулем д кольцом целых p -адических чисел, а при p -ранге не меньше мощ континуума — алгебраически компактной группой.

Библи 9

УДК 512.541

Шляфер А. З. О разрешимости групп автоморфизмов абелевых групп. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, в п 7, с. 148—155.

И учаются абелевы группы A , группы автоморфизмов $\text{Aut } A$ которых разрешимы. Описаны периодические абелевы группы T с разрешимыми группами $\text{Aut } T$. Показано, что такие периодические группы — это в точности периодические части смешанных абелевых групп A с разрешимыми группами $\text{Aut } A$. Охарактеризованы расщепляющиеся абелевы группы с разрешимыми группами автоморфизмов. Изучаются также абелевы группы с периодическими разрешимыми группами автоморфизмов. В качестве следствия получается характеристика абелевых групп A с конечными разрешимыми группами автоморфизмов $\text{Aut } A$.

Библи. 2.