

Л. Е. РАДЮК, А. Ф. ТЕРПУГОВ, Ф. А. ШАПИРО

---

**ПОИСК СИГНАЛА  
В МНОГОКАНАЛЬНОЙ  
СИСТЕМЕ**

---



МЕЖДУНАРОДНЫЙ ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ ГОД  
ANNEE GEOPHYSIQUE INTERNATIONALE

---

# ГЛЯЦИОЛОГИЯ АЛТАЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Томск — 1976

УДК 621.396:519.27

Радюк Л. Е., Терпугов А. Ф., Шапиро Ф. А. Поиск сигнала многоканальной системе.— Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1981. — 4,9 с ил.— Цена 75 к., экз. 1000.

В монографии освещаются вопросы оптимального и двухэтапного поиска сигнала в многоканальной системе. С этой задачей встречаются при поиске источников радиоизлучения, поиске сигнала неизвестной частоты, поиске неисправностей в сложной аппаратуре и т. д.

Монография может быть полезна научным работникам и аспирантам, работающим в области технической кибернетики.

Рецензент — д. т. н. К. Ш. Зигангиров

Редактор — В. С. Трусков

Р  $\frac{30314}{177(012)-81}$  47—81

© Издательство Томского университета, 1981 г.

## ВВЕДЕНИЕ

### § 1. Задачи теории поиска сигнала в многоканальной системе

Проблема поиска сигнала в многоканальной системе формально выглядит следующим образом: имеется  $N$  каналов, на выходе каждого из которых идет последовательность независимых случайных величин  $\eta_1^{(i)}, \eta_2^{(i)}, \dots, \eta_t^{(i)}, \dots$ , где  $i$ —номер канала, а  $t$  имеет смысл времени. Плотность вероятностей величин  $\eta_t^{(i)}$  имеет либо вид  $p(\eta_t^{(i)}|H_0)$ , и в этом случае говорят, что в канале имеется только „шум“, либо вид  $p(\eta_t^{(i)}|H_1)$ , и в этом случае говорят, что в канале имеется „сигнал“.

В нашем распоряжении имеется одно поисковое устройство, которое может подсоединяться к выходу одного канала или группы каналов (в последнем случае выходы отдельных каналов каким-то образом объединяются между собой). Необходимо найти такой алгоритм подключения поискового устройства к выходам каналов, чтобы возможно скорее найти те каналы, в которых имеется «сигнал». При этом требуется, чтобы вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала не превосходили заранее заданных величин.

Приведем примеры практических задач, которые сводятся к указанной выше постановке.

#### 1. Поиск источников радиоизлучения [14, 15, 18]

Пусть в некотором секторе пространства имеются один или несколько источников радиоизлучения. Зная размеры сектора и необходимую точность в оценке угловых координат источников, можно разбить сектор на элементарные участки (ячейки, каналы). Предполо-

жим далее, что источник может присутствовать только в одном из каналов. Априори нахождение источника равновероятно по всем каналам. Задача заключается в построении такой процедуры проверки каждого канала на наличие или отсутствие в нем источника радионизлучения, чтобы, например, при заданных вероятностях ошибок ложной тревоги и пропуска источника найти канал с источником за минимально возможное время. При этом можно подбирать время, необходимое для просмотра отдельного канала, объединять каналы в группы и т. п.

## 2. Поиск неисправностей в сложной аппаратуре [13, 16]

Пусть имеется некоторое устройство, состоящее из  $n$  различных блоков. Устройство считается вышедшим из строя, если выйдет из строя хотя бы один из блоков. Чтобы ввести устройство в строй действующих, необходимо найти неисправный блок, точнее разработать такую методику проверки блоков, чтобы за минимально возможное время найти блок, содержащий неисправность. При этом одновременно могут проверяться на исправность один или несколько блоков.

## 3. Поиск разладки технологического процесса [19]

Пусть имеется несколько объектов управления и один регулятор, задачей которого является поддержание технологического процесса в каждом из объектов в определенных пределах. Если технологический процесс выйдет за эти пределы (произойдет так называемая разладка), то регулятор должен, обнаружив эту разладку, ввести процесс в необходимые пределы. Очевидно, что чем быстрее обнаруживается разладка, тем лучшим будет качество управления. Поэтому одной из возникающих здесь задач является поиск такой процедуры подключения регулятора к объектам, которая позволила бы обнаружить разладку возможно скорее.

#### 4. Поиск в геологических задачах [8]

При разведке полезных ископаемых вновь встречается проблема поиска объекта, причем, поскольку число поисковых приборов обычно ограничено, возникает задача нахождения оптимальной или близкой к ней процедуры перемещения этих приборов по обследуемому району.

#### 5. Поиск сигнала неизвестной частоты [2]

В некоторых ситуациях техники связи возникает необходимость обнаружения передатчика системы связи, работающего на неизвестной несущей частоте. В этом случае необходимо разработать такую процедуру просмотра заданного диапазона частот одним или несколькими приемными устройствами, которая позволила бы за минимально возможное время обнаружить систему связи и определить ее несущую частоту.

### § 2. Последовательный просмотр каналов

Простейшим, хотя все еще часто применяемым алгоритмом поиска сигнала в многоканальной системе является последовательный просмотр каналов. В этом случае поисковое устройство подключается последовательно к выходу каждого из каналов и исследование (просмотр) каждого канала ведется до тех пор, пока не будет вынесено решение о наличии или отсутствии в нем сигнала.

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — допустимые вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала в одном канале. Будем считать, что наблюдаемые величины  $\gamma_i^{(i)}$  пересчитываются в логарифм отношения правдоподобия

$$z_i^{(i)} = \ln[p(\gamma_i^{(i)} | H_1) / p(\gamma_i^{(i)} | H_0)].$$

Как известно, при фиксированных  $\alpha$  и  $\beta$  минимальное среднее время изучения одного канала получается при использовании последовательного анализа Вальда [3]. При этом среднее время просмотра канала без сигнала  $t_0$  и канала с сигналом  $t_1$  приблизительно равно

$$t_0 = -\ln \frac{1}{\beta} M\{z_i^{(i)} | H_0\}; \quad t_1 = 1.1 \frac{1}{\alpha} M\{z_i^{(i)} | H_1\}.$$

В дальнейшем все исследование будет проводиться в так называемом случае близких гипотез [22], когда

$$M\{z_i^{(i)} | H_1\} = -M\{z_i^{(i)} | H_0\} = \mu;$$

$$D\{z_i^{(i)} | H_1\} = D\{z_i^{(i)} | H_0\} = 2\mu,$$

в этом случае

$$t_0 \approx \frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{\beta}, \quad t_1 \approx \frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{\alpha}.$$

Пусть имеется всего  $N$  каналов и в  $k$  из них присутствует сигнал. Тогда время, проходящее между началом просмотра и обнаружением  $s$ -го канала с сигналом (время обнаружения  $s$ -го сигнала) при  $\alpha, \beta < 1$ , равно

$$T_s = (i_s - s)t_0 + st_1,$$

где  $i_s$  — номер канала, в котором находится  $s$ -й сигнал.

Считая, что априорное распределение сигналов по каналам равномерное, легко получить, что  $M\{i_s - s\} = \frac{s(N-s)}{k+1}$  и среднее время обнаружения  $s$ -го сигнала  $M\{T_s\}$  есть

$$M\{T_s\} = \frac{s(N-s)}{k+1} t_0 + st_1.$$

В наиболее обычном случае  $N \gg 1$  имеем

$$\tau_s = \frac{\mu M\{T_s\}}{N} \approx \frac{s}{k+1} \mu t_0 = \frac{s}{k+1} \ln \frac{1}{\beta}. \quad (0.2.1)$$

Эта формула становится точной при  $N \rightarrow \infty$  и в дальнейшем нам будет нужна для сравнения.

Очевидно, что алгоритм последовательного просмотра каналов далек от оптимального. Имеется много путей улучшения его характеристик. Укажем главные из них.

1. В последовательном просмотре каналов перехо-



к исследованию следующего канала происходит лишь тогда, когда вынесено решение о наличии или отсутствии сигнала в предыдущем канале. Наиболее радикальным средством ускорения поиска канала с сигналом является переход к исследованию других каналов еще до вынесения решения о наличии или отсутствии сигнала в канале. Основная идея этого перехода — выявить наиболее «подозрительные» на наличие сигнала каналы и затем исследовать их. Оптимальным образом эта идея реализуется в алгоритме поиска, предложенном К. Ш. Зигангировым [9] (см. гл. I), менее оптимально — в многоэтапных алгоритмах поиска.

2. Группировка каналов в группы. Основная идея заключается в том, чтобы сначала грубо установить положение сигнала (найти группу каналов с сигналом), а затем уже найти канал с сигналом более точно. Часто поиск группы каналов с сигналом занимает меньше времени, чем поиск одиночного канала.

3. Управление поисковыми усилиями. Часто можно говорить о поисковых усилиях, увеличение которых может ускорить процесс поиска сигнала. Так, в радиолокации в качестве поисковых усилий выступает энергия зондирующего импульса, ибо с увеличением энергии растет отношение сигнала к шуму и ускоряется вынесение решения о наличии или отсутствии сигнала в канале. Рациональным образом, перераспределяя поисковые усилия в процессе поиска сигнала, можно существенно сократить время его обнаружения.

К настоящему времени опубликовано много работ по алгоритмам поиска сигнала в многоканальной системе. Изложение всех этих алгоритмов потребовало бы монографии существенно большего объема. Поэтому в данной книге авторы ограничились изложением тех алгоритмов, в разработке или исследовании которых они принимали участие.

## ГЛАВА I

### АЛГОРИТМ К. Ш. ЗИГАНГИРОВА

#### § 1. Среднее время поиска сигнала по алгоритму К. Ш. Зигангирова

Оптимальным в смысле минимума среднего времени обнаружения сигнала является алгоритм, предложенный и исследованный К. Ш. Зигангировым [9, 10, 11]. Коротко он может быть сформулирован следующим образом: в каждый момент времени поисковый прибор должен быть подключен к тому каналу, где наличие сигнала наиболее вероятно.

Пусть  $z_1, \dots, z_N$  — накопленные к некоторому моменту времени значения логарифмов отношения правдоподобия в каждом из каналов. В случае близких гипотез в которых и будут проводиться все дальнейшие исследования, приращение  $\Delta z$  логарифма отношения правдоподобия при исследовании  $i$ -го канала за время  $\Delta t$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\Delta z_i| \leq \delta} p(\Delta z_i, \Delta t) d\Delta z_i &= 0; \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\Delta z_i| \leq \delta} \Delta z_i p(\Delta z_i, \Delta t) d\Delta z_i &= \mu_i; \quad (1.1.1) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\Delta z_i| \leq \delta} \Delta z_i^2 p(\Delta z_i, \Delta t) d\Delta z_i &= \sigma_i^2; \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\Delta z_i| \leq \delta} \Delta z_i^k p(\Delta z_i, \Delta t) d\Delta z_i &= 0, \quad k \geq 3, \end{aligned}$$

т. е.  $z_i(t)$  является диффузионным случайным процессом с коэффициентом сноса  $\mu_i$  и коэффициентом диффузии  $\sigma_i^2$ . Оказывается, что если в канале отсутствует сигнал, то  $\mu_i = -\mu$ ,  $\sigma_i^2 = 2\mu$ , если же в канале сигнал присутствует, то  $\mu_i = +\mu$ ,  $\sigma_i^2 = 2\mu$  и  $\Delta z_j$  можно считать

нормальной случайной величиной. Пусть в каналах имеется лишь один сигнал и его априорное положение равновероятно по всем каналам, т. е. априорная вероятность того, что сигнал находится в  $i$ -м канале, равна  $p_i = \frac{1}{N}$ . Если к моменту времени  $t$   $j$ -й канал изучался в течение времени  $t_j$ , то  $z_j$  есть нормальная случайная величина с дисперсией  $2\mu t_j$  и средним значением  $-\mu t_j$ , если в канале сигнал отсутствует, и  $+\mu t_j$ , если в канале сигнал присутствует. Тогда

$$p(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_r}} e^{-\frac{(z_r - \mu t_r)^2}{4\pi\mu t_r}} \prod_{j \neq r} \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_j}} e^{-\frac{(z_j + \mu t_j)^2}{4\pi\mu t_j}}.$$

Пользуясь формулой Байеса, легко найти апостериорную вероятность нахождения сигнала в  $i$ -м канале

$$p(i, z_1, \dots, z_N) = e^{z_i} \sum_{r=1}^N e^{z_r}. \quad (1.1.2)$$

Отсюда видно, что максимум апостериорной вероятности приходится на канал с максимальным  $z_i$  и окончательно алгоритм К. Ш. Зигангирова формулируется следующим образом:

1. В каждый момент времени поисковый прибор должен быть подключен к тому каналу, где накопленное значение логарифма отношения правдоподобия максимально.

2. Если максимальное значение достигается одновременно в нескольких каналах, то поисковый прибор с равной вероятностью подключается к любому из них.

3. Просмотр начинается со значений  $z_1 = z_2 = \dots = z_N = 0$ .

4. Если  $z_i$  станет меньше  $B$ , то выносится решение об отсутствии сигнала в канале, если же  $z_i$  станет больше  $A$ , то выносится решение о наличии сигнала в  $i$ -м канале.

К. Ш. Зигангировым была доказана оптимальность этого алгоритма [10] в смысле минимизации среднего времени обнаружения сигнала.

Получим основные характеристики этого алгоритма, следуя работам его автора [9, 11].

Обозначим через  $L(z_1, \dots, z_N)$  вероятность того, что

процесс поиска закончится достижением нижнего порога во всех каналах при условии, что в начальный момент времени в  $i$ -м канале накопленное значение логарифма отношения правдоподобия было  $z_i$ .

Будем предполагать, что  $L(z_1, \dots, z_N)$  непрерывна и имеет непрерывные производные  $\frac{\partial L}{\partial z_i}, \frac{\partial^2 L}{\partial z_i^2}$ . Тогда для области  $z_i > z_s$  ( $s=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N$ ) имеем

$$L(z_1, \dots, z_i, \dots, z_N) = M_{\Delta z} \{L(z_1, \dots, z_i + \Delta z, \dots, z_N)\}.$$

Разлагая правую часть в ряд Тейлора по  $\Delta z$  и переходя к пределу при  $\Delta z \rightarrow 0$  с учетом (1.1.1), получим

$$\frac{\sigma_i^2}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial z_i^2} + \mu_i \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0 \quad (1.1.3)$$

с граничными условиями

$$L(z_1, \dots, z_N) |_{z_i = A} = 0. \quad (1.1.4)$$

$$L(z_1, \dots, z_N) |_{z_1 = z_2 = \dots = z_N = B} = 1.$$

Решение системы (1.1.3) с граничными условиями (1.1.4) имеет вид

$$L(z_1, \dots, z_N) = \prod_{s=1}^N \frac{e^{h_s A} - e^{h_s z_s}}{e^{h_s A} - e^{h_s B}}, \quad h_s = -\frac{2 \mu_s}{\sigma_s^2}. \quad (1.1.5)$$

Если в начальный момент  $z_1 = z_2 = \dots = z_N = 0$ , то получаем оперативную характеристику системы

$$L(0, \dots, 0) = \prod_{s=1}^N \frac{e^{h_s A} - 1}{e^{h_s A} - e^{h_s B}}. \quad (1.1.6)$$

Зная оперативную характеристику, нетрудно записать выражение для вероятностей ошибок. Так, если во всех каналах присутствуют только шумы,  $h_s = 1 \quad \forall s$ , то

$$\alpha = 1 - L(0, \dots, 0) = 1 - \left( \frac{e^A - 1}{e^A - e^B} \right)^N. \quad (1.1.7)$$

Аналогично вероятность ошибки пропуска сигнала  $\beta$  получим из (1.1.6) с учетом, что  $h_i = -1$  и  $h_s = 1$  для  $s \neq i$ .

$$\beta = L(0, 0, \dots, 0) = e^B \left( \frac{e^A - 1}{e^A - e^B} \right)^N. \quad (1.1.8)$$

Найдем теперь среднюю длительность поиска сигнала  $T(z_1, \dots, z_N)$  при условии, что в начальный момент состояния каналов определялись значениями логарифма отношений правдоподобия  $z_1, \dots, z_N$ . Пусть сигнал, для определенности, присутствует в  $i$ -м канале, тогда, если  $z_i > z_s$  ( $s=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N$ ), то для  $T(z_1, \dots, z_N)$  имеем

$$T(z_1, \dots, z_N) = \Delta t + M_{\Delta z} \{T(z_1, \dots, z_i + \Delta z, \dots, z_N)\},$$

и в предположении существования и непрерывности функции  $T(z_1, \dots, z_N)$  и производных  $\frac{\partial T}{\partial z_i}$  и  $\frac{\partial^2 T}{\partial z_i^2}$  получим уравнение

$$\frac{\sigma_i^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z_i^2} + \mu_i \frac{\partial T}{\partial z_i} = -1 \quad (1.1.9)$$

с граничными условиями

$$T(A, z_2, \dots, z_N) = 0; \quad (1.1.10)$$

$$T(B, B, \dots, B) = 0. \quad (1.1.11)$$

Если сигнал отсутствует во всех каналах, уравнение (1.1.9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z_i^2} - \frac{\partial T}{\partial z_i} = -\frac{1}{\mu},$$

решение которого можно найти в [9]. Здесь же приведен только окончательный результат

$$\begin{aligned} T(0, \dots, 0) = & -\frac{\alpha B + (1-\alpha)A}{\mu} - \frac{N-1}{\mu} (1-e^{-A})^N \ln(1-d) + \\ & + \frac{N-1}{\mu} (1-e^{-A})^N \sum_{k=1}^N \frac{e^{kA} (e^A - e^B)^k - (e^A - 1)^k}{k(e^A - e^B)^k (e^A - 1)^k}. \end{aligned}$$

Если  $\alpha \ll 1$ , то

$$T(0, \dots, 0) = T_0 = -\frac{NB}{\mu}. \quad (1.1.12)$$

В случае, когда сигнал присутствует в одном из каналов:

$$T(0, \dots, 0) = - \left(1 - \frac{2}{N}\right) \frac{\beta B + (1 - \beta) A}{\mu} + \\ + \left(1 - \frac{2}{N}\right) \frac{e^A - 1}{\mu} [1 - (1 - f)^{N-1}] + \\ + \frac{2(e^A - 1)}{\mu N} [A + (B - A)(1 - f)^{N-1}] + \frac{2e^A}{\mu N} (1 - e^{-A})^N \times \\ \times \left[ \sum_{k=1}^{N-2} \frac{e^{kA}(e^A - e^B)^k - (e^A - 1)^k}{(e^A - e^B)^k (e^A - 1)} - B - \ln(1 - f) \right].$$

При  $\alpha \ll 1$

$$T(0, \dots, 0) - T_1 = \frac{dB + (1 - d)A}{\mu} + \frac{N - 1}{\mu} (1 - d). \quad (1.1.13)$$

Здесь и выше  $f$  и  $d$  — вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала для одного канала. При большом числе каналов ( $N \gg 1$ ) первым слагаемым в (1.1.13) имеющим смысл среднего времени изучения канала с сигналом, можно пренебречь, и среднее время обнаружения сигнала примет вид (при  $d \ll 1$ )

$$T_1 \approx \frac{N}{\mu}.$$

Сравнивая это выражение с формулой (0.2.1), получаем, что применение алгоритма К. Ш. Зигангирова позволяет сократить время обнаружения одиночного сигнала в  $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{\beta}$  раза по сравнению с простейшим алгоритмом последовательного просмотра каналов.

Это сокращение времени достаточно велико, его порядок виден из приведенной табл. 1.1.1.

Таблица 1.1.

| $\beta$                           | $10^{-1}$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | $10^{-7}$ |
|-----------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{\beta}$ | 1,151     | 2,303     | 3,454     | 4,606     | 5,757     | 6,909     | 8,060     |

## § 2. Функция распределения времени поиска по алгоритму К. Ш. Зигангирова

Знание среднего времени поиска сигнала в многоканальной системе не всегда достаточно для оценки преимуществ того или иного алгоритма. Так, известно, что последовательная процедура Вальда обеспечивает минимальное среднее время вынесения решения, но фактические значения времени наблюдения могут сильно отличаться от среднего (так называемый эффект затягивания времени наблюдения). Поэтому несомненный интерес представляет получение полной временной характеристики настраивающейся схемы поиска — функции распределения времени поиска сигнала.

Пусть  $t(z_1, \dots, z_N)$  — время, проходящее между появлением сигнала и его обнаружением при условии, что в момент появления сигнала система характеризовалась следующими значениями логарифма отношения правдоподобия  $z_1, z_2, \dots, z_N$ . Через  $g_l(s, z_1, \dots, z_N)$  обозначим характеристическую функцию величины  $t(z_1, z_2, \dots, z_N)$

$$g_l(s, z_1, \dots, z_N) = M\{e^{-st(z_1, \dots, z_N)}\}.$$

Пусть в некоторый момент времени  $z_l > z_k$  ( $k=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, N$ ), тогда для  $g_l(s, z_1, \dots, z_N)$  имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 g_l}{\partial z_l^2} + h_l \frac{\partial g_l}{\partial z_l} - \frac{s}{\mu} g_l = 0 \quad (1.2.1)$$

с граничными условиями

$$g_l(s_1 z_1, \dots, z_{l-1}, A, z_{l+1}, \dots, z_N) = 1; \quad (1.2.2)$$

$$g_l(s, B, \dots, B) = 1. \quad (1.2.3)$$

Чтобы найти  $g_l(s, z_1, \dots, z_N)$ , решим отдельно уравнения для случаев, когда в  $l$ -м канале находится сигнал и когда в нем нет сигнала.

Пусть для определенности сигнал находится в первом канале и  $z_1 > z_k$  ( $k=2, \dots, N$ ), тогда уравнение (1.2.1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 g_l}{\partial z_1^2} + \frac{\partial g_l}{\partial z_1} - \frac{s}{\mu} g_l = 0. \quad (1.2.4)$$

Решение этого уравнения с учетом граничного условия (1.2.2) есть

$$g_l(s, z_1, \dots, z_N) = e^{\lambda_1(A-z_1)} + (e^{-\lambda_1 z_1} - e^{-\lambda_2 A}) D(s, z_2, \dots, z_N), \quad (1.2.5)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни соответствующего характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{s}{\mu}} \leq 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{s}{\mu}} \geq 1, \quad (1.2.6)$$

а  $D(s, z_2, \dots, z_N)$  — пока неизвестная функция.

Пусть теперь сигнал по-прежнему находится в первом канале и  $z_l > z_1 \geq z_k$  ( $k=2, 3, \dots, l-1, l+1, \dots, N$ ), тогда уравнение (1.2.1) запишется как

$$\frac{\partial^2 g_l}{\partial z_l^2} - \frac{\partial g_l}{\partial z_l} - \frac{s}{\mu} g_l = 0, \quad (1.2.7)$$

и решением его будет функция

$$\begin{aligned} \tilde{g}_l(s, z_1, \dots, z_N) = & C(s, z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+1}, \dots, z_N) e^{\lambda_1 z_l} + \\ & + C_1(s, z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+1}, \dots, z_N) e^{\lambda_2 z_l}. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Если считать вероятность ложной тревоги величиной малой, что эквивалентно  $A \rightarrow \infty$ , то вторым слагаемым в скобке (1.2.5) можно пренебречь и в (1.2.8) произвольную функцию  $C_1(s, z_1, \dots, z_N)$  следует положить равной нулю, так как в противном случае это слагаемое экспоненциально возрастет с увеличением  $z_l$  до  $A$ , что противоречит физическому смыслу. Оставшиеся, таким образом, две произвольные функции  $D(\cdot)$  и  $C(\cdot)$  можно определить из условий сшивания решений (1.2.5) и (1.2.8) на границе  $z_1 = z_2 = \dots = z_l$ , которые имеют вид

$$g_l(s, z, z, \dots, z, z_{l+1}, \dots, z_N) = \tilde{g}_l(s, z, \dots, z, z_{l+1}, \dots, z_N); \quad (1.2.9)$$

$$\frac{l-1}{l} \left( \frac{\partial \tilde{g}_l}{\partial z_l} - \frac{\partial g_l}{\partial z_l} \right) + \frac{1}{l} \left( \frac{\partial g_l}{\partial z_1} - \frac{\partial z_1}{\partial \tilde{g}_l} \right) = 0. \quad (1.2.10)$$

Первое из этих условий позволяет записать решение (1.2.8) с учетом равноправия каналов без сигнала, в виде

$$\tilde{g}_l(s, z_1, \dots, z_N) = e^{\lambda_1 \sum_{j=2}^l (z_j - z_1)} g_l(s, z_1, \dots, z_1, z_{l+1}, \dots, z_N).$$



С учетом последнего, решение уравнения (1.2.10) представим как

$$g_l(s, z_1, \dots, z_N) = e^{\lambda_1(B-z_1)} + e^{-\lambda_2 z_j} \left[ \sum_{k=2}^N \psi_k(z_k) e^{\lambda_1 \sum_{j=2}^k z_j} + \right. \\ \left. + \psi_0 e^{\lambda_1 \sum_{j=1}^N z_j} \right].$$

Здесь функции  $\Psi_k(z)$  удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \psi_l}{\partial z} e^{-\lambda_2 z + (l-1)\lambda_1 z} = \frac{2\lambda_1}{l} e^{\lambda_1(B-z)} + \\ + e^{-\lambda_2 z} \left[ 2\lambda_1 \frac{l-1}{l} \sum_{k=2}^{l-1} \frac{\partial \psi_k}{\partial z} e^{\lambda_1 z(k-1)} - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_1}{l} \sum_{k=2}^{l-1} \psi_k(z)(k-1) e^{\lambda_1 z(k-1)} \right],$$

решение которого ищем в виде

$$\psi_l(z) = a_l(s) e^{\lambda_1(B-z) + \lambda_2 z - (l-1)\lambda_1 z},$$

где коэффициенты  $a_l(s)$  определяются рекуррентным соотношением

$$a_l(s)(\lambda_2 - l\lambda_1) = 2\lambda_1 \frac{l-1}{l} + \left( 2\lambda_1 \frac{l-1}{l} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{l} \right) \sum_{k=2}^{l-1} a_k(s). \quad (1.2.11)$$

Таким образом, характеристическая функция случайной величины  $t(z_1, \dots, z_N)$  определена нами с точностью до произвольной постоянной  $\psi_0$  и имеет вид

$$g_l(s, z_1, \dots, z_N) = e^{\lambda_1 \sum_{j=2}^l (z_j - z_1)} \left\{ e^{\lambda_1(B-z_1)} + e^{\lambda_1(B-z_1)} \sum_{k=2}^l a_k(s) + \right. \\ \left. + e^{-\lambda_2 z_1 + (l-1)\lambda_1 z_1} \sum_{k=l+1}^N a_k(s) + \right.$$

$$+ e^{\lambda_1 \sum_{j=k+1}^l z_j + \lambda_2 z_l + \lambda_1 (B - z_1) + (l-1)\lambda_1 z_l - \lambda_2 z_1 + (l-1)\lambda_1 z_1 + \lambda_1 \sum_{j=l+1}^N z_j} \} + \psi_0 e^{\dots} \quad (1.2.12)$$

Постоянную величину  $\psi_0$  определим из граничного условия (1.2.3)

$$\psi_0 = e^{\lambda_2 A - \lambda_1 A(N-1)} - \left(1 - \sum_{l=2}^N a_l(s)\right) e^{\lambda_1(B-AN) + \lambda_2 A}.$$

Полагая, что поиск сигнала начинается из состояния  $z_1 = z_2 = \dots z_N = 0$ , получаем

$$g_l(s) = e^{\lambda_1 B} \left(1 + \sum_{k=2}^N a_k(s)\right) + \left[1 - e^{-\lambda_1(B-A)} \left(1 + \sum_{k=2}^N a_k(s)\right)\right] e^{\lambda_2 A - (N-1)\lambda_1 A}. \quad (1.2.13)$$

К сожалению, найти обратное преобразование от этого выражения не представляется возможным, поэтому введем дополнительные предположения. Во-первых, считаем, что вероятности ошибок малы ( $\alpha \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$ ), во-вторых, число канала достаточно велико, в пределе  $N \rightarrow \infty$ . В этих предположениях второе слагаемое в выражении (1.2.13) имеет порядок  $\beta$ -вероятности пропуска сигнала, следовательно, им можно пренебречь. Сделаем еще одно упрощение, перейдем к новой ве-

личине  $\tau(z_1, \dots, z_N) = \frac{\mu}{N} t(z_1, \dots, z_N)$ , при этом характеристическая функция  $g_\tau(s)$  может быть выражена как

$$g_\tau(s) = g_l\left(\frac{s \mu}{N}\right). \quad (1.2.14)$$

Отметим, что при  $N \rightarrow \infty$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{s}{N}} \sim -\frac{s}{N} \rightarrow 0; \quad (1.2.15)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{s}{N}} \sim 1,$$

тогда сомножителем  $e^{\lambda B}$  в выражении (1.2.13) можно пренебречь.

Остается вычислить  $\sum_{k=2}^N a_k \left( \frac{s\mu}{N} \right)$ . Рассмотрим  $\sum_{l=2}^k a_l$ , причем  $N$  устремим в бесконечность так, чтобы отношение  $\frac{k}{N} = x$  оставалось постоянным. Обозначим

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \frac{k}{N} = x}} \sum_{l=2}^k a_l \left( \frac{s\mu}{N} \right) = y(s, x).$$

Представив коэффициент  $a_k$  как

$$a_k = \frac{\sum_{l=2}^k a_l - \sum_{l=2}^{k-1} a_l}{k - (k-1)} \approx \frac{1}{N} \cdot \frac{\partial y}{\partial x},$$

рекуррентное соотношение (1.2.11) примет вид

$$\frac{\partial y}{\partial x} (1 + xs) = -2s - \left( 2s + \frac{1}{x} \right) y,$$

при этом граничное условие имеет вид  $y(0, x) = 0$ . Отсюда легко найти, что

$$y(s, x) = -\frac{sx}{1 + sx}. \quad (1.2.16)$$

Теперь с учетом сделанных предположений, формул (1.2.14) и (1.2.16) характеристическая функция (1.2.13) принимает простой вид

$$g_\tau(s) = \frac{1}{s+1}.$$

и обратное преобразование есть

$$p(\tau) = e^{-\tau}. \quad (1.2.17)$$

Полученный довольно простой результат имеет наглядное представление. При сделанном предположении о большом числе каналов  $N \gg 1$  появление сигнала в одном из них можно считать событием редким, следо-

вательно, факт обнаружения сигнала — тоже событие редкое. Так как появления сигналов независимы, то к этим событиям применима модель независимых испытаний, для которой время между событиями распределено по экспоненциальному закону. Таким образом, при  $N \rightarrow \infty$  для исследования многоканальной системы может быть применен хорошо разработанный аппарат теории пуассоновских потоков. В частности, это позволяет найти распределения вероятностей и среднее время обнаружения  $m$  сигналов, если  $m \ll N$ .

Не менее интересный результат получается для времени наблюдения в случае отсутствия сигнала. Очевидно, что  $g_i(s, z_1, \dots, z_N)$  удовлетворяет уравнению (1.2.7) для  $i=1, 2, \dots, N$  с граничными условиями (1.2.2, 1.2.3). Используя условия сшивания решений (1.2.9 и 1.2.10), нетрудно получить, что

$$g_i(s, z_1, \dots, z_N) = e^{-\lambda_i \sum_{i=1}^N (z_i - B)},$$

в предположении, что  $z_1 = z_2 = \dots = z_N = 0$ , имеем

$$g_i(s) = e^{-\lambda_i NB}. \quad (1.2.18)$$

При переходе к  $\tau = \frac{t\mu}{N}$  с учетом соотношений (1.2.15) получим при  $N \rightarrow \infty$

$$g_i(s) = e^{Bs},$$

причем обратное преобразование Лапласа имеет вид

$$\mu(\tau) = \delta(\tau - B). \quad (1.2.19)$$

Таким образом, при  $N \rightarrow \infty$  функция распределения длительности наблюдения в отсутствии сигнала сходится к  $\delta$ -функции. Так как  $\delta$ -функция является предельной для целого класса функций, то интересно проследить более тонкую структуру сходимости к предельному распределению (1.2.19). Для этого введем новую

переменную  $\tau = \frac{t\mu - NB}{\sqrt{2NB}}$  в выражение (1.2.18), тогда

$$g(s) = \exp \left\{ s \sqrt{\frac{NB}{2}} + NB \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{s}{\sqrt{2NB}}} \right) \right\}.$$

В пределе  $N \rightarrow \infty$  имеем

$$g_-(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}.$$

Отсюда следует, что при  $N \gg 1$  длительность эксперимента при отсутствии сигнала подчиняется нормальному закону с параметрами

$$M\{t\} = \frac{NB}{\mu}, \quad D\{t\} = 2 \frac{NB}{\mu^2}.$$

Этот результат тоже вполне объясним физически, если вспомнить постановку задачи. Процесс наблюдения заканчивается принятием решения об отсутствии сигнала в том и только том случае, если во всех каналах накопленное значение логарифма отношения правдоподобия станет меньше нижнего порога  $B$ , то есть время наблюдения в этом случае складывается из большого числа слагаемых, каждое из которых определяет время наблюдения в одном канале. Отсюда, естественно, вытекает, что интересующая нас величина — длительность наблюдения в отсутствии сигнала — распределена асимптотически нормально.

### § 3. Реализация алгоритма К. Ш. Зигангирова на дискретных линейных накопителях

До сих пор мы предполагали, что статистика  $z_i(t)$  — логарифм отношения правдоподобия — накапливается по каждому каналу  $i (i=1, N)$  как непрерывная случайная функция. Простота технической реализации дискретных накопителей наталкивает на мысль о замене ими непрерывных накопителей, необходимых для реализации выбранного нами алгоритма поиска и обнаружения сигнала. Незначительные потери, связанные с переходом к дискретным накопителям, компенсируются возможностью непосредственной реализации алгоритма на цифровых ЭВМ.

Выход каждого канала стыкуется с дискретным накопителем, суть которого в следующем. Представим себе систему, имеющую  $d+1$  состояние. Пусть в некоторый момент времени на вход этой системы, соответ-

ствующей просматриваемому каналу, поступает  $\Delta z$  — приращение логарифма отношения правдоподобия, и пусть в этот момент система находилась в состоянии с номером  $i (i = \overline{0, d})$ . Это приращение  $\Delta z$  квантуется двумя порогами  $A_i, B_i (A_i \leq B_i)$  на три значения, причем если  $\Delta z > B_i$ , то номер состояния дискретного накопителя увеличивается на единицу, то есть система переходит в состояние  $i+1$ , если  $\Delta z < A_i$ , то система переходит в состояние  $i-1$ , и если, наконец,  $A_i \leq \Delta z \leq B_i$ , то номер состояния накопителя не изменяется (пороги квантования  $A_i, B_i$  фиксированы). Достижения системой состояния с номером  $d$  соответствуют тому, что в данном канале присутствует сигнал, и состояние с нулевым номером соответствует случаю отсутствия сигнала в данном канале.

Рассмотрим симметричный случай, когда  $B_i = -A_i = C$ , и будем считать, что вероятности переходов из одного состояния в другое не зависят от номера состояния и нам известны

$$\begin{aligned} p &= P\{\Delta z > C | H_1\} = P\{\Delta z < -C | H_0\}; \\ q &= P\{\Delta z < -C | H_1\} = P\{\Delta z > C | H_0\}; \\ r &= 1 - p - q, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

где  $H_1$  и  $H_0$  — гипотезы о наличии и отсутствии сигнала соответственно. Состояние системы обнаружения будем описывать совокупностью номеров состояний каждого накопителя  $i = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$ . Исходным состоянием каждого накопителя является некоторое состояние  $i_0$ .

Рассмотрим вероятностные и временные характеристики такой системы поиска, считая, по-прежнему, что в каждый момент времени анализируется канал, которому соответствует накопитель с максимальным номером состояния.

Пусть сигнал отсутствует. Через  $L(i_1, \dots, i_N)$  обозначим вероятность перехода всех накопителей в нулевое состояние, если первый начал свое движение из состояния  $i_1$ , второй — из  $i_2$  и т. д.,  $N$ -й — из состояния  $i_N$ . Если в некоторый момент времени  $i_l > i_k$  ( $k = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, N$ ), то  $L(i_1, \dots, i_N)$  удовлетворяет уравнению

$$L(i_1, \dots, i_N) = r L(i_1, \dots, i_{l-1}, i_l - 1, i_{l+1}, \dots, i_N) +$$

$$+r \cdot L(i_1, \dots, i_N) + qL(i_1, \dots, i_{l-1}, i_l + 1, i_{l+1}, \dots, i_N) \quad (1.3.2)$$

с граничными условиями

$$L(0, 0, \dots, 0) = 1; \quad (1.3.3)$$

$$L(i_1, \dots, i_{l-1}, d, i_{l+1}, \dots, i_N) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$L(i_1, \dots, i_N) = \prod_{l=1}^N \frac{\lambda^d - \lambda^{i_l}}{\lambda^d - 1}, \quad \lambda = \frac{p}{q} > 1. \quad (1.3.4)$$

При этом вероятность ошибки ложной тревоги может быть вычислена по формуле

$$\alpha = 1 - L(i_0, i_0, \dots, i_0) = 1 - \left( \frac{\lambda^d - \lambda^{i_0}}{\lambda^d - 1} \right)^N, \quad (1.3.5)$$

Если обозначить  $\alpha_0 = \frac{\lambda^d - 1}{\lambda^d - 1}$  — вероятность ошибки ложной тревоги в одном канале, то  $\alpha = 1 - (1 - \alpha_0)^N$ .

Пусть теперь сигнал присутствует в одном из каналов, например в  $k$ -м. Если в данный момент номер состояния накопителя, соответствующего каналу, содержащему сигнал, окажется наибольшим, то есть  $i_k > i_l$  ( $l = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, N$ ), то  $L(i_1, \dots, i_N)$  удовлетворяет уравнению

$$L(i_1, \dots, i_N) = pL(i_1, \dots, i_k + 1, \dots, i_N) + rL(i_1, \dots, i_N) + qL(i_1, \dots, i_k - 1, \dots, i_N) \quad (1.3.6)$$

с теми же граничными условиями (1.3.3). Общее решение, с учетом первого из граничных условий, имеет вид

$$L(i_1, \dots, i_N) = \psi(i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_N) (\lambda^{-i_k} - \lambda^{-d}), \quad (1.3.7)$$

где  $\psi(\cdot)$  — пока произвольная функция, а  $\lambda = p/q$ .

Если в данный момент времени максимальным будет номер накопителя, соответствующего каналу без сигнала  $i_l > i_j$ ,  $j \neq l$ , то  $L(i_1, \dots, i_N)$  удовлетворяет уравнению (1.3.2) с теми же граничными условиями. В этом случае общее решение запишем в виде

$$L(i_1, \dots, i_N) = \varphi(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_N) (\lambda^d - \lambda^{i_l}). \quad (1.3.8)$$

На границе  $i_k = i_l$  решения (1.3.7) и (1.3.8) должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} L(i_1, \dots, i_N)_{|i_k = i_l} &= \mathcal{L}(i_1, \dots, i_N)_{|i_k = i_l}; \\ L(i_1, \dots, i_N)_{|i_k = i_l} &= \frac{1}{2}(pL(\dots, i_k + 1, \dots) + \\ & qL(\dots, i_k - 1, \dots))_{|i_k = i_l} + \frac{1}{2}(q\mathcal{L}(\dots, i_l + 1, \dots) + \\ & + p\mathcal{L}(\dots, i_l - 1, \dots))_{|i_k = i_l} + rL(i_1, \dots, i_N). \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом условия на границе  $i_1 = i_2 = \dots = i_N = 0$ , получим

$$L(i_1, \dots, i_N) = \lambda^{-i_k} \prod_{l=1}^N \frac{\lambda^d - \lambda^{i_l}}{\lambda^d - 1}.$$

При этом вероятность ошибки пропуска сигнала  $\beta$  имеет вид

$$\beta = L(i_0, \dots, i_0 = \lambda)^{-i_0} \left( \frac{\lambda^d - \lambda^{i_0}}{\lambda^d - 1} \right)^N. \quad (1.3.9)$$

В последовательной процедуре Вальда, которая используется нами для принятия решения о наличии или отсутствии сигнала в одном канале, задание вероятностей ошибок  $\alpha$  и  $\beta$  однозначно определяет значение порогов решающей схемы. В нашем случае при фиксированных  $\alpha$  и  $\beta$  можно вычислить тоже два параметра, характеризующие дискретный вариант последовательного анализа,  $d$  и  $i_0$ . Так, из соотношений (1.3.5) и (1.3.9) нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{1}{\ln \lambda} \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}; \\ d &= \frac{1}{\ln \lambda} \ln \frac{N}{\alpha} \left[ \ln \frac{1 - \alpha}{\beta} - \frac{1}{N} \ln(1 - \alpha) \right]. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Остановимся теперь на временных характеристиках настраиваемой схемы поиска с использованием дискретных накопителей.

Пусть  $T(i_1, \dots, i_N)$  — средняя длительность наблюдения,



если в начале первый канал характеризовался состоянием  $i_1$ , второй —  $i_2$  и т. д.,  $N$ -й — состоянием  $i_N$ . Если сигнал отсутствует, для области значений  $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_N$   $T(i_1, \dots, i_N)$  удовлетворяет уравнению

$$T(i_1, \dots, i_N) = pT(i_1 - 1, i_2, \dots, i_N) + rT(i_1, \dots, i_N) + qT(i_1 + 1, i_2, \dots, i_N) + 1 \quad (1.3.11)$$

с граничными условиями

$$T(d, i_2, \dots, i_N) = 0, \quad T(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T(i_1, \dots, i_N) = \frac{i_1 - d}{p - q} + (\lambda^d - \lambda^{i_1})[\psi_2(i_2) + (\lambda^d - \lambda^{i_2})[\psi_3(i_3) + \dots + (\lambda^d - \lambda^{i_{N-1}})[\psi_N(i_N) + (\lambda^d - \lambda^{i_N})\psi_0] \dots]], \quad (1.3.12)$$

где функции  $\psi_k(i)$  удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\psi_k(i) = \frac{\lambda^d - \lambda^i}{p - q} \sum_{v=1}^i \frac{1}{(\lambda^d - \lambda^{v-1})(\lambda^d - \lambda^v)^{k-1}} - (\lambda - 1)(\lambda^d - \lambda^i) \sum_{j \neq k} \theta(j); \quad (1.3.13)$$

$$\theta(j) = \sum_{v=1}^i \frac{\psi_j(v) \lambda^{v-1}}{(\lambda^d - \lambda^{v-1})(\lambda^d - \lambda^v)^{k-j+1}}; \quad \psi_0 = \frac{d}{(p - q)(\lambda^d - 1)^N}.$$

Нас интересует средняя длительность обнаружения сигнала, при условии, что начальным состоянием накопителей является состояние  $i_0$ , следовательно, в формуле (1.3.13) аргументы функций  $\psi_k(i)$  не превосходят величины  $i_0$ . Посмотрим, как ведут себя эти функции с учетом того, что  $i_i \leq i_0$ . При малых вероятностях ложной тревоги  $\alpha$  можно считать, что  $\lambda^d \gg \lambda^{i_0}$ , тогда  $\psi_2(i_0) \approx \frac{i_0 \lambda^{-d}}{p - q}$ . В этом случае очевидно, что слагаемые типа  $\theta(j)$  меньше остальных слагаемых, по крайней мере на величину  $\lambda^{-d}$ . Пренебрегая этими членами, получим

$$\Psi_k(i_0) \approx \frac{i_0^{\lambda - dk}}{p - q}.$$

Средняя длительность эксперимента при отсутствии сигнала, с точностью до членов порядка  $\alpha$ , имеет вид

$$T(i_0, \dots, i_0) = \frac{N i_0}{p - q}. \quad (1.3.14)$$

Эта формула имеет простой физический смысл: в числителе стоит как бы путь, который должна пройти система при отсутствии сигнала из состояния  $(i_0, \dots, i_0)$  в нулевое состояние, а знаменатель можно рассматривать как скорость этого движения, ведь по определению  $p$  есть вероятность перехода в состояние с номером на единицу меньше, а  $q$  — вероятность увеличить номер состояния на единицу в случае отсутствия сигнала.

Найдем теперь среднюю длительность наблюдения в случае, когда сигнал присутствует в одном из каналов. Как и раньше, каналы перенумеруем в порядке убывания номеров состояний накопителей за исключением канала, содержащего сигнал, которому для простоты присвоим номер 1. Пусть каналу с сигналом соответствует максимальный номер состояния накопителя, то есть  $i_1 > i_2 > \dots > i_N$ , тогда  $T(i_1, \dots, i_N)$  удовлетворяет уравнению

$$T(i_1, \dots, i_N) = pT(i_1 + 1, i_2, \dots, i_N) + rT(i_1, \dots, i_N) + qT(i_1 - 1, i_2, \dots, i_N) + 1. \quad (1.3.15)$$

с граничными условиями.

$$T(d, i_2, \dots, i_N) = 0, \quad T(0, 0, \dots, 0) = 0. \quad (1.3.16)$$

Если же максимальный номер состояния накопителя соответствует каналу без сигнала  $i_1 > i_2 > \dots > i_N$ , то  $T(i_1, i_2, \dots, i_N)$  удовлетворяет уравнению (1.3.11) с теми же граничными условиями. Решения этих уравнений должны совпадать на границе  $i_1 = i_1$  и удовлетворять уравнению

$$T(i_1, \dots, i_N) = \frac{1}{2} [pT(i_1, \dots, i_1 - 1, \dots, i_N) + qT(i_1, \dots, i_1 +$$

$$+1, \dots, i_N)]_{|i_1-i_l} + \frac{1}{2} [pT(i_1+1, \dots, i_N) + qT(i_1-1, \dots, i_N)]_{|i_1=i_l} + \\ + rT(i_1, \dots, i_N)_{|i_1=i_l} + 1.$$

Опять учитываем, что все накопители находились в состоянии  $i_0$  в начальный момент времени, средняя длительность обнаружения сигнала тогда есть

$$T(i_0, \dots, i_0) = \frac{d-i_0}{p-q} + \frac{(N-1)(\lambda+1)}{2q(\lambda-1)^2}. \quad (1.3.17)$$

Первое слагаемое представляет собой ничто иное, как среднее время просмотра канала с сигналом, второе же — среднее время, потраченное на просмотр каналов без сигнала. Очевидно, что при достаточно большом  $N$  первым слагаемым можно пренебречь по сравнению со вторым, поэтому можно записать

$$T(i_0, \dots, i_0) = \frac{(N-1)(\lambda+1)}{2q(\lambda-1)^2}. \quad (1.3.18)$$

Оценим проигрыш, который приходится платить за простоту технической реализации дискретного накопителя по сравнению с системой непрерывного накопления. Как показано в § 1 данной главы, среднее время обнаружения сигнала в многоканальной системе с непрерывным накопителем определяется выражением

$$T \approx \frac{N-1}{\mu}.$$

Следовательно, ожидаемый проигрыш при переходе к дискретной системе обнаружения есть

$$\Delta = \frac{T_m(i_0, \dots, i_0)}{T} = \frac{\mu(\lambda+1)}{2q(\lambda-1)^2}.$$

Здесь  $T_m(i_0, \dots, i_0)$  — выражение (1.3.18) при условии, что порог квантования  $C$ , определяющий вероятности перехода  $p$  и  $q$ , выбран из условия

$$\frac{\lambda+1}{q(\lambda-1)^2} \Rightarrow \min_c.$$

На рис. 1.3.1 приведена зависимость  $\Delta$  от параметра  $\mu$ , который можно рассматривать как отношение сигнал шум. Из графика видно, что дискретный накопитель более эффективен при малых отношениях сигнала к шуму и проигрыш составляет 25–40%.

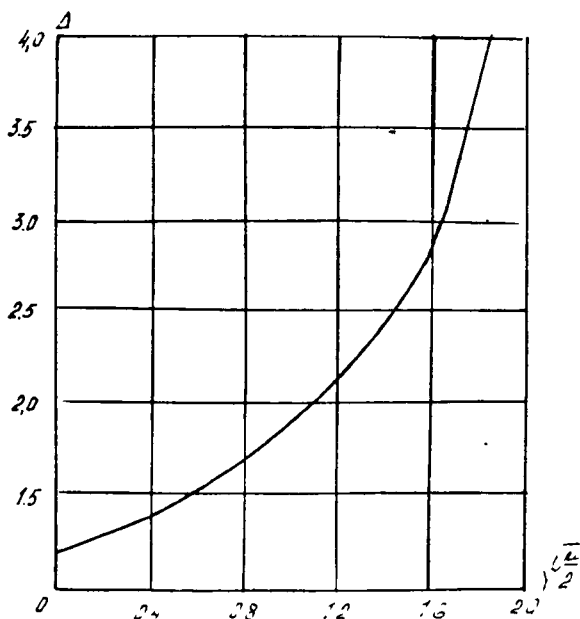


Рис. 1.3.1

Рассмотрим теперь функцию распределения длительности наблюдения при использовании дискретных накопителей. Чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело с дискретным накопителем, время перехода из некоторого начального состояния  $(i_1, i_2, \dots, i_N)$  в состояние с номером 0 или  $d$  будем измерять в шагах или тактах и обозначим его через  $n(i_1, \dots, i_N)$ . Пусть сигнал отсутствует во всех каналах, которые упорядочены в порядке убывания номера состояния соответствующего накопителя, то есть  $i_1 > i_2 > \dots > i_N$ , тогда для функции распределения числа шагов имеем следующее уравнение:

$$P\{n(i_1, \dots, i_N)\} = pP\{n(i_1-1, i_2, \dots, i_N)-1\} + \\ + rP\{n(i_1, \dots, i_N)-1\} + qP\{n_1(i_1+1, i_2, \dots, i_N)-1\}. \quad (1.3.19)$$

Очевидно, это уравнение можно рассматривать как уравнение в конечных разностях, зависящее от двух переменных  $n$  и  $i_1$ , считая остальные переменные  $i_2, \dots, i_N$  — параметрами. Граничные условия для этого уравнения имеют вид

$$P\{0\} = 0; \quad (1.3.20)$$

$$P\{n(d, i_2, \dots, i_N)\}|_{n=0} = 1, \quad P\{n(0, 0, \dots, 0)\}|_{n=0} = 1. \quad (1.3.21)$$

Непосредственное решение последнего уравнения весьма трудоемко, поэтому воспользуемся дискретным преобразованием Лапласа

$$g(u, i_1, \dots, i_N) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-un(i_1, \dots, i_N)} P\{n(i_1, \dots, i_N)\}.$$

Умножая выражение (1.3.19) на  $e^{-u(n-1)}$  и суммируя по  $n$ , получим

$$e^u g(u, i_1, \dots, i_N) = pg(u, i_1-1, i_2, \dots, i_N) + \\ + rg(u, i_1, \dots, i_N) + qg(u, i_1-1, i_2, \dots, i_N).$$

Учитывая связь между дискретным преобразованием Лапласа и  $z$ -преобразованием, последнее уравнение можно представить как

$$zg(z, i_1, \dots, i_N) = pg(z, i_1-1, i_2, \dots, i_N) + \\ + rg(z, i_1, \dots, i_N) + qg(z, i_1+1, \dots, i_N), \quad (1.3.22)$$

граничными условиями для которого будут

$$g(z, d_1, i_2, \dots, i_N) = 1, \quad g(z, 0, 0, \dots, 0) = 1.$$

Общее решение имеет вид

$$g(z, i_1, \dots, i_N) = \lambda_3^{i_1} A_1(i_2, \dots, i_N) + \lambda_4^{i_1} A_2(i_2, \dots, i_N),$$

где  $\lambda_3, \lambda_4$  — корни характеристического уравнения

$$q\lambda^2 + r\lambda + p = z\lambda, \quad (1.3.23)$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{z - r \pm \sqrt{(z-r)^2 - 4pq}}{2q}.$$

Используя первое граничное условие, получим

$$g(z, i_1, \dots, i_N) \mid A_1 \lambda_3^{i_1} + \lambda_3^{i_1-d} (1 - A_1 \lambda_3^d).$$

Если пренебречь вероятностью достижения крайнего верхнего состояния  $d$  в каналах без сигнала, что равносильно переходу к пределу  $d \rightarrow \infty$ , то вторым слагаемым в выражении  $g(z, i_1, \dots, i_N)$  можно пренебречь. Делая это приближение, мы тем самым допускаем относительную ошибку не более чем  $\alpha$  (вероятность ложной тревоги). Учитывая равноправие каналов без сигнала, нетрудно получить, что

$$g(z, i_1, \dots, i_N) = A_0 \cdot \lambda_3^{\sum_{k=1}^N i_k},$$

причем  $A_0 = 1$ . Таким образом,  $z$  — преобразование функции распределения числа шагов в случае, когда система начинает свое движение из состояния  $\{i_0, i_0, \dots, i_0\}$ , выразится как

$$g(z, i_0, \dots, i_0) = \lambda_3^{N i_0}. \quad (1.3.24)$$

Здесь от  $z$  зависит только  $\lambda_3$ , причем найти обратное преобразование при такой зависимости не представляется возможным. Поэтому перейдем к величине

$$\tau = \frac{n(p-q) - N i_0}{1 - N i_0}$$

и рассмотрим предельный случай  $N \rightarrow \infty$ . Как мы помним,  $z = e^u$  или

$$z = e^{\frac{u(p-q)}{1 - N i_0}} \approx 1 + \frac{u(p-q)}{1 - N i_0} + \frac{u^2(p-q)^2}{2 N i_0} + \dots = 1 + \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 u^2 + \dots$$

Чтобы найти поведение  $\lambda_3$  при  $N \rightarrow \infty$ , представим этот корень в виде  $\lambda_3 = 1 + \delta_1 u + \delta_2 u^2 + \dots$ , где  $\delta_1, \delta_2, \dots$  — неопределенные коэффициенты; теперь воспользуемся уравнением (1.3.23)

$$q(1 + \delta_1 u + \delta_2 u^2 + \dots)^2 + r(1 + \delta_1 u + \delta_2 u^2 + \dots) + p(1 + \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 u^2 + \dots)(1 + \delta_1 u + \delta_2 u^2 + \dots).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $u$ , получим

$$\delta_1 = -\frac{1}{\sqrt{Ni_0}}, \quad \delta_2 = \frac{\sigma^2 - 1}{2Ni_0} \quad \sigma^2 = 1 - p + q + \frac{2p}{p-q},$$

то есть  $\lambda_3 = 1 - \frac{u}{\sqrt{Ni_0}} + u^2 \frac{\sigma^2 - 1}{2Ni_0} + \dots$ . Следовательно, при достаточно больших  $N$  можно записать

$$g_-(u) = \left( 1 - \frac{u}{\sqrt{Ni_0}} + u^2 \frac{\sigma^2 - 1}{2Ni_0} + \dots \right)^{Ni_0} e^{u\sqrt{Ni_0}}.$$

Логарифмируя обе части равенства и используя формулу

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots,$$

имеем

$$\ln g_-(u) = u\sqrt{Ni_0} - \frac{u^2(\sigma^2 - 1)}{2} - u\sqrt{Ni_0} - \frac{u^2}{2} - \dots$$

или окончательно имеем

$$g_-(u) = \exp \left( -\frac{\sigma^2 u^2}{2} \right). \quad (1.3.25)$$

В этой формуле нетрудно узнать преобразование Лапласа от нормального распределения с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ .

Таким образом, длительность эксперимента при отсутствии сигнала и  $N \gg 1$  подчиняется нормальному закону распределения со средним значением  $\frac{Ni_0}{p-q}$  и

дисперсией  $\frac{Ni_0 \sigma^2}{(p-q)^2}$ . Аналогичный результат был и в случае непрерывных накопителей.

Пусть теперь сигнал присутствует в одном канале. Через  $g(z, i_1, \dots, i_N)$  обозначим дискретное  $z$  — преобразование от функции распределения длительности эксперимента при условии, что система обнаружения начала движения из состояния  $\{i_1, i_2, \dots, i_N\}$ . Для простоты будем опять считать, что каналу с максимальным номером состояния присвоен номер 1, т. е.  $i_1 > i_2, \dots, i_N$ . Пусть канал с номером 1 содержит сигнал, тогда для  $g(z, i_1, \dots, i_N)$  имеем следующее уравнение:

$$zg(z, i_1, \dots, i_N) = pg(z, i_1 + 1, i_2, \dots, i_N) + \\ + rg(z, i_1, \dots, i_N) + qg(z, i_1 - 1, \dots, i_N)$$

с условием на границе  $g(z, d, i_2, \dots, i_N) = 1$ . Решением этого уравнения будет функция

$$g(z, i_1, \dots, i_N) = A(i_2, \dots, i_N) \lambda_1^{i_1} + B(i_2, \dots, i_N) \lambda_2^{i_1},$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни характеристического уравнения

$$z\lambda = p\lambda^2 + r\lambda + q, \\ \lambda_{1,2} = \frac{z-r \pm \sqrt{(z-r)^2 - 4pq}}{2p}. \quad (1.3.26)$$

Учитывая условие на границе  $i_1 = d$ , решение запишем в виде

$$g_1(z, i_1, \dots, i_N) = \lambda_1^{i_1-d} + B(i_2, \dots, i_N) (\lambda_2^{i_1} - \lambda_2^d - \lambda_1^{i_1-d}).$$

Последним слагаемым в этой формуле можно пренебречь, так как  $\lambda_2 < 1$ , следовательно  $\lambda_2^d \ll 1$ . Тогда окончательно

$$g_1(z, i_1, \dots, i_N) = \lambda_1^{i_1-d} + B(i_2, \dots, i_N) \lambda_2^{i_1}. \quad (1.3.27)$$

Если на первом месте оказался канал без сигнала, то  $g_2(z, i_1, \dots, i_N)$  удовлетворяет уравнению (1.3.22) с соответствующими граничными условиями, при этом

$$g_2(z, i_1, \dots, i_N) = D(i_2, \dots, i_N) \lambda_3^{i_1}. \quad (1.3.28)$$

По аналогии с формулой для среднего времени обнаружения сигнала, для области  $i_1 > i_2 > \dots > i_N$ , в предположении, что сигнал в первом канале, можно записать

$$g_1(z, i_1, \dots, i_N) = \lambda_1^{i_1-d} + \lambda_2^{i_1} [\psi_2(i_2) + \\ + a_2^{i_2} [\psi_3(i_3) + a_3^{i_3} [\dots + a_N^{i_N} \psi_0] \dots]]. \quad (1.3.29)$$

В случае, когда при упорядочивании каналов в порядке убывания номера состояния канал с сигналом окажется на  $k$ -м месте, то  $g_k(z, i_1, \dots, i_N)$  определяется выражением

$$g_k(z, i_1, \dots, i_N) = \lambda_3^{\sum_{j=1}^{k-1} (i_j - i_1)} g_1(z, i_1, \dots, i_N) \Big|_{i_1=i_2=\dots=i_{k-1}=i_k}.$$



Неопределенные коэффициенты  $a_l$  и функции  $\psi_l(i)$  находим из уравнения на границе  $i_1=i_2=\dots=i_k$

$$\begin{aligned} z g_1(z_1 i_1, \dots, i_N) |_{i_1=\dots=i_k} &= \frac{1}{k} [p g_1(z_1 i_1+1, \dots, i_N) + \\ &+ q g_1(z_1 i_1-1, \dots, i_N)] |_{i_1=\dots=i_k} + \\ &+ \frac{k-1}{k} [p g_2(z_1 i_1-1, \dots, i_N) + q g_2(z_1 i_1+1, \dots, i_N)] |_{i_1=\dots=i_k} + \\ &+ r g_1(i_1, i_1, \dots, i_1, i_{k+1}, \dots, i_N). \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

Откуда получаем рекуррентное соотношение для  $a_l$ :

$$\lambda_2 \prod_{l=2}^{k-1} a_l (z-r-p\lambda_2) = \frac{k-1}{k} p \lambda_2 \prod_{l=2}^{k-2} a_l + \frac{q}{k} \lambda_3^{k-1}. \quad (1.3.31)$$

Неизвестные функции  $\psi_l(i)$  будем искать в виде

$$\psi_k(i) = \gamma_k \lambda_1^{i-d} \left( \lambda_2 \prod_{l=2}^{k-2} a_l \right)^i,$$

где  $\gamma_k$  — неопределенные постоянные. Подставляя  $\psi_k(i)$  в (1.3.30) и используя обозначение  $\sum_{l=1}^{k-1} \gamma_l = Y_k$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} [p \lambda_1 + p \lambda_2 Y_{k-1} + p \lambda_2 \gamma_k + q \lambda_3^{k-1} \lambda_1^{-1} + q \lambda_3 Y_{k-1} + \\ + q \lambda_3 \gamma_k] + \frac{k-1}{k} [q \lambda_3 + q \lambda_3 Y_{k-1} + q \lambda_3 \gamma_k + p + p Y_{k-1} + \\ + p \lambda_2 \lambda_1^{-1} \prod_{l=2}^{k-2} a_l] = (z-r)(1+Y_k+\gamma_k). \end{aligned} \quad (1.3.32)$$

Так как начальным состоянием системы обнаружения мы условились считать состояние  $\{i_0, i_0, \dots, i_0\}$ , то

$$g(z, i_0, \dots, i_0) = \lambda_1^{i_0-d} \left[ 1 + \sum_{l=2}^N \gamma_l + \psi_0 \lambda_2^{i_0} \lambda_1^{d-i_0} \prod_{l=2}^N a_l^{i_0} \right], \quad (1.3.33)$$

где  $\psi_0 = 1 - \lambda_1^{-d} (1 + \sum_{l=2}^N \gamma_l)$ , при этом последнее слагаемое в скобке формулы (1.3.33) имеет порядок вели-

чины  $\beta$  — вероятность пропуска сигнала при  $z \rightarrow 1$ . Пренебрегая этим слагаемым, получим

$$g(z, i_0, \dots, i_0) = \lambda_1^{i_0-d} \left[ 1 + \sum_{l=2}^N \gamma_l \right],$$

здесь  $1 + \sum_{l=2}^N \gamma_l$  можно рассматривать, как  $z$ -преобразование функции распределения длительности поиска канала с сигналами, а  $\lambda_1^{i_0-d}$  соответствует функции распределения времени обнаружения сигнала в одном канале. Эту аналогию можно усмотреть, если вспомнить формулу (1.3.17), определяющую среднее время обнаружения сигнала. Так как время, затраченное на поиск канала с сигналом, намного больше времени обнаружения, то функцию, соответствующую  $\lambda_1^{i_0-d}$ , можно положить равной 1.

Итак, получим следующее выражение для  $z$ -преобразования от функции распределения времени обнаружения сигнала в многоканальной системе

$$g(z) = 1 + \sum_{l=2}^N \gamma_l = 1 + Y_N. \quad (1.3.34)$$

Выразим теперь  $Y_N$  в явном виде. Опять перейдем к переменной  $\tau = \frac{p-q}{N} n$  и рассмотрим поведение  $Y_N$  при  $N \rightarrow \infty$ . В уравнении (1.3.32) от  $\bar{u} = \frac{u(p-q)}{N}$  зависят коэффициенты  $\lambda_3$  и  $\lambda_2 \prod_{l=2}^k a_l$ , посмотрим, как они ведут себя при  $N \rightarrow \infty$ .

Обозначим

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \frac{k}{N} = x}} \lambda_2 \left( \frac{u(p-q)}{N} \right) \prod_{l=2}^{k-1} a_l \left( \frac{u(p-q)}{N} \right) = y(u, x). \quad (1.3.35)$$

Вычтем из левой и правой части уравнения (1.3.31) член вида

$$\lambda_2 \prod_{l=2}^k a_l (z - r - p\lambda_2):$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 \prod_{l=2}^{k-1} a_l(z-r-p\lambda_2) - \lambda_2 \prod_{l=2}^{k-2} a_l(z-r-p\lambda_2) = \\ = \lambda_2 \prod_{l=2}^{k-2} a_l \left[ \frac{k-1}{k} - (z-r) + p\lambda_2 \right] + \frac{q\lambda_3}{k}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу  $N \rightarrow \infty$ , левую часть равенства можно представить как

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \frac{k}{N} = x}} N \cdot \frac{\lambda_2 \prod_{l=2}^{k-1} a_l - \lambda_2 \prod_{l=2}^{k-2} a_l}{k - (k-1)} = \frac{\partial y(u, x)}{\partial x}. \quad (1.3.36)$$

Так как  $\lambda_3 \sim 1 - \frac{u}{N}$  и аналогично можно показать, что  $\lambda_2 \sim \frac{q}{p} \left(1 - \frac{u}{N}\right)$ , то из этого следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (z-r-p\lambda_2) = p, \quad (1.3.37)$$

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \frac{k}{N} = x}} \left( \frac{k-1}{k} p - (z-r) + p\lambda_2 \right) N = -p \left( \frac{1}{x} + u \right).$$

С учетом последних формул уравнение (1.3.31) запишем в виде

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{e^{-ux}}{\lambda x} - \left( \frac{1}{x} - u \right) y(u, x)$$

с граничными условиями  $y(u, 0) = \frac{1}{\lambda}$ . Отсюда

$$y(u, x) = \frac{1}{\lambda} e^{-ux}. \quad (1.3.38)$$

Возвращаемся к уравнению (1.3.32). Обозначим

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \frac{k}{N} = x}} Y_k \left( \frac{u(p-q)}{N} \right) = v(u, x)$$

и коэффициент  $\gamma_k$  представим как

$$\gamma_k = \frac{Y_k - Y_{k-1}}{k - (k-1)} \sim \frac{1}{N} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Уравнение (1.3.32) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{k-1}{k} \left[ q\lambda_3 + q\lambda_3 v(u, x) + \frac{q\lambda_2}{N} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + p v(u, x) + \right. \\ \left. + p \frac{y(u, x)}{N\lambda} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{1}{k} \left[ p\lambda_1 + p\lambda_2 v(u, x) + \right. \\ \left. + p \frac{\lambda_2}{N} \frac{\partial v}{\partial x} + q\lambda_3^{N-1} \lambda_1^{-1} + q\lambda_3^{k-1} v(u, x) + \right. \\ \left. + \frac{q\lambda_3^{k-1}}{N} \frac{\partial v}{\partial x} \right] = (z-r) \left[ 1 + v(u, x) + \frac{1}{N} \frac{\partial v}{\partial x} \right]. \quad (1.3.39) \end{aligned}$$

Приводя подобные и переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$  получим с учетом (1.3.38)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{e^{-ux}}{\lambda} - 1 \right) + v \left( \frac{e^{-ux}}{\lambda x} - u - \frac{1}{x} \right) + \\ + \left( \frac{e^{-ux}}{\lambda x} - u - \frac{1}{\lambda x} \right) = 0 \quad (1.3.40) \end{aligned}$$

с граничным условием  $v(u, 0) = 1$ . Решением этого уравнения будет функция

$$v(u, x) = \frac{\lambda}{\theta(x)} \int_0^x \frac{\left( u + \frac{1}{\lambda z} - \frac{e^{-uz}}{\lambda z} \right) z \theta(z)}{e^{-\lambda z} - \lambda} dz,$$

где  $\theta(x) = (\lambda e^{ux} - 1) / (\lambda - 1)$ . Окончательно имеем

$$v(u, x) = \frac{ux + \lambda[(ux - 1)e^{ux} + 1] - (e^{ux} - 1)}{ux(\lambda e^{ux} - 1)}.$$

Искомое выражение  $Y_N = \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i = v(u, 1)$ . Следовательно, после несложных преобразований интересующее нас выражение  $g_{\tau}(u)$  принимает вид

$$g_{\tau}(u) = 1 + v(u, 1) = \frac{\lambda - 1}{\lambda u} - \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2 u \left( e^u - \frac{1}{\lambda} \right)}.$$

Находя обратное преобразование [23], плотность вероятностей величины  $\tau$  получим в следующем виде:

$$p(\tau) = \frac{\lambda-1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^n}, \quad n \leq \tau < n+1.$$

Полученный закон распределения можно рассматривать как некоторый аналог экспоненциального распределения в дискретном варианте.

#### § 4. Обнаружение нескольких сигналов в многоканальной системе

Ранее рассматривалась задача поиска одного сигнала в многоканальной системе одним поисковым прибором. При этом было получено, что время обнаружения сигнала при достаточно большом числе каналов  $N$  подчиняется экспоненциальному закону. Естественным продолжением этой задачи является случай, когда число сигналов, появившихся в системе, произвольно, например  $k$ , хотя поисковый прибор один и алгоритм просмотра каналов прежний.

Пусть  $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$  есть совокупность накопленных значений логарифма отношения правдоподобия в  $N$  каналах и  $t(z_1, \dots, z_N)$  — время, проходящее с момента появления группы из  $k$  сигналов до обнаружения первого из них. Найдем функцию распределения этого времени. Через  $g_t(s, z_1, \dots, z_N)$  обозначим характеристическую функцию времени обнаружения первого из  $k$  сигналов при условии, что в момент появления сигналов система обнаружения находилась в состоянии  $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ . Без уменьшения общности будем считать, что канал с максимальным значением  $z$  имеет номер 1. Из очевидного соотношения при  $z_1 > z_2, \dots, z_N$

$$g_t(s, z_1, \dots, z_N) = M\{e^{-s\Delta t - st(z_1 + \Delta z, z_2, \dots, z_N)}\},$$

с учетом соотношений (1.1.2) получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 g_t}{\partial z_1^2} \pm \frac{\partial g_t}{\partial z_1} - \frac{s}{\mu} g_t = 0, \quad (1.4.1)$$

причем знак плюс соответствует случаю присутствия сигнала в первом канале, знак минус — его отсутствию. Граничные условия имеют вид

$$g_t(s, B, z_2, \dots, z_N) = 1; \quad (1.4.2)$$

$$g_t(s, A, A, \dots, A) = 1. \quad (1.4.3)$$

Пусть в некоторый момент времени канал с максимальным значением  $z$  содержит сигнал, тогда уравнению

$$\frac{\partial^2 g_t}{\partial z_1^2} + \frac{\partial g_t}{\partial z_1} - \frac{s}{\mu} g_t = 0$$

и граничному условию (1.4.2) удовлетворяет функция

$$g_t(s, z_1, \dots, z_N) = e^{\lambda_1(B-z_1)} + e^{-\lambda_2 z_1} D(s, z_2, \dots, z_N), \quad (1.4.4)$$

где, как и раньше:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{s}{\mu}}$$

и  $D(\cdot)$  — произвольная функция.

Теперь пусть просматривается канал без сигнала, тогда уравнению

$$\frac{\partial^2 g_t}{\partial z_1^2} - \frac{\partial g_t}{\partial z_1} - \frac{s}{\mu} g_t = 0$$

и тому же граничному условию удовлетворяет функция

$$g_t(s, z_1, \dots, z_N) = e^{\lambda_1 z_1} A(s, z_2, \dots, z_N); \quad (1.4.5)$$

это решение записано с точностью до вероятности ошибки ложной тревоги  $\alpha$ .

Как и прежде, нас интересует случай, когда все значения  $z_i$  равны между собой —  $z_1 = z_2 = \dots = z_N = z$ . Обозначим все равные между собой значения переменных в каналах с сигналами через  $x$ , а в каналах без сигналов — через  $y$ . Кроме того, обозначим

$$D(s, \underbrace{x, \dots, x}_{k-1}, \underbrace{y, \dots, y}_{N-k}) = C(x, y);$$

$$A(s, \underbrace{x, \dots, x}_k, \underbrace{y, \dots, y}_{N-k-1}) = B(x, y).$$

Тогда в области  $x \geq y$  решение (1.4.4) принимает вид

$$g_1(s, x, y) = e^{\lambda_1(B-x)} + e^{-\lambda_2 x} C(x, y), \quad (1.4.6)$$

области  $y > x$  решение (1.4.5) будет

$$g_2(s, x, y) = e^{\lambda_1 y} B(x, y). \quad (1.4.7)$$

Для этих решений на границе  $x = y$  должны быть выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} g_1(s, x, x) &= g_2(s, x, x); \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} &= \frac{\partial g_2}{\partial x} \Big|_{x=y}; \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial y} \Big|_{x=y}; \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_i} &= \frac{\partial g_1}{\partial x_j} \Big|_{x_i=x_j=x}; \quad \frac{\partial g_2}{\partial y_i} = \frac{\partial g_2}{\partial y_j} \Big|_{y_i=y_j=y}. \end{aligned}$$

В явном виде эта же система может быть записана как

$$\begin{aligned} B(x, x) e^{\lambda_1 x} &= e^{\lambda_1(B-x)} + e^{-\lambda_2 x} C(x, x); \\ \frac{1}{k-1} e^{-\lambda_2 x} \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=y} &= -\lambda_1 e^{\lambda_1(B-x)} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} C(x, x); \\ \frac{1}{k} e^{\lambda_1 x} \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{x=y} &= -\lambda_1 e^{\lambda_1(B-x)} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} C(x, x); \\ \frac{1}{N-k-1} e^{\lambda_1 x} \frac{\partial B}{\partial y} \Big|_{x=y} &= -\lambda_1 e^{\lambda_1 x} B(x, x); \\ \frac{1}{N-k} e^{-\lambda_2 x} \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{x=y} &= \lambda_1 e^{\lambda_1 x} B(x, x). \end{aligned}$$

Обозначим  $C(x, x) = F(x)$  и  $B(x, x) = H(x)$ , тогда для  $F(x)$  получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} F'(x) + F(x) [(k-1)\lambda_2 - (N-k)\lambda_1] &= \\ &= \lambda_1 (N-2k+1) e^{\lambda_1(B-x) + \lambda_2 x}, \end{aligned}$$

которому удовлетворяет функция

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\lambda_1 (N-2k+1)}{\lambda_2 k - \lambda_1 (N-k+1)} e^{\lambda_1(B-x) - (k-1)\lambda_2 x} + \\ &+ \varphi_0 e^{(N-k)\lambda_1 x - (k-1)\lambda_2 x}, \end{aligned}$$

где  $\varphi_0$  — постоянная. С учетом этого и считая, что

момент появления сигналов характеризовался одинаковыми значениями логарифмов отношения правдоподобия во всех каналах  $z_1 = z_2 = \dots = z_N = x$ , решение (1.4.6) принимает вид

$$g(s, x) = e^{\lambda_1(B-x)} \left( 1 + \frac{\lambda_1(N-2k+1)}{\lambda_2 k - \lambda_1(N-k+1)} e^{-(k-1)\lambda_2 x} \right) + \varphi_0 e^{(N-k)\lambda_1 x - (k-1)\lambda_2 x}.$$

Произвольная постоянная  $\varphi_0$  должна удовлетворять условию (1.4.3)

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & e^{-(N-k)\lambda_1 A + (k-1)\lambda_2 A} - \\ & - e^{\lambda_1(B-A) - (N-k)\lambda_1 A + (k-1)\lambda_2 A} \left( 1 + \frac{\lambda_1(N-2k+1)}{\lambda_2 k - \lambda_1(N-k+1)} \cdot e^{-(k-1)\lambda_2 A} \right). \end{aligned}$$

Если начальное состояние системы обнаружения  $z_1 = z_2 = \dots = z_N = 0$ , то интересующая нас функция  $g_i(s, 0)$  имеет вид

$$\begin{aligned} g_i(s, 0) = & e^{\lambda_1 B} \frac{\lambda_2 k - \lambda_1(k+1)}{\lambda_2 k - \lambda_1(N-k+1)} + e^{-(N-k)\lambda_1 A + (k-1)\lambda_2 A} - \\ & - e^{\lambda_1(B-A) - (N-k)\lambda_1 A + (k-1)\lambda_2 A} \cdot \\ & \cdot \left( 1 + \frac{\lambda_1(N-2k+1)}{\lambda_2 k - \lambda_1(N-k+1)} e^{-(k-1)\lambda_2 A} \right). \end{aligned}$$

Опять перейдем к переменной  $\tau = \mu t/N$  и рассмотрим случай  $N \rightarrow \infty$ . Используя те же самые приближения что и в § 2, нетрудно получить, что

$$g_i(s) = \frac{k}{k+s}.$$

Следовательно, плотность распределения времени обнаружения первого из  $k$  сигналов есть

$$p(\tau) = k e^{-k\tau},$$

то есть опять пришли к экспоненциальному закону однако среднее время обнаружения первого из  $k$  сигналов  $T_{1,k}$  теперь равно



$$T_{1,k} = \frac{N}{k\mu}.$$

В общем случае, когда ищется плотность вероятностей для времени обнаружения  $r$ -го из  $k$  имеющихся в наличии сигналов, характеристическая функция для величины  $\tau_{r,k} = \frac{\mu t_{r,k}}{N}$  имеет вид

$$g_{r,k}(s) = \frac{k(k-1) \dots (k-r+1)}{(k+s)(k-1+s) \dots (k-r+1+s)},$$

плотность вероятностей  $p_{rk}(\tau)$  величины  $\tau_{rk}$  —

$$p_{rk}(\tau) = r C_k^r e^{-(k-r+1)\tau} (1-e^{-\tau})^{k-1}.$$

В частности

$$M\{\tau_{rk}\} = \sum_{s=0}^{r-1} \frac{1}{k-s};$$

$$T_{r,k} = \frac{N}{\mu} \sum_{s=0}^{r-1} \frac{1}{k-s},$$

При последовательном просмотре каналов среднее время обнаружения  $r$ -го из  $k$  сигналов равно (см. (0.2.1))

$$T_{r,k} = \frac{N}{\mu} \cdot \frac{r}{k+1} \ln \frac{1}{\beta}$$

и поэтому выигрыш в среднем времени обнаружения, даваемый алгоритмом К. Ш. Зигангирова, равен

$$\Delta_{r,k} = \ln \frac{1}{\beta} \frac{r}{k+1} / \sum_{s=0}^{r-1} \frac{1}{k-s}.$$

Коэффициент  $\frac{r}{k+1} / \sum_{s=0}^{r-1} \frac{1}{k-s}$  для  $k = \overline{1,10}$ ,  $r = \overline{1,k}$  приводится в табл. 1.4.2. Из нее видно, что при фиксированном  $r$  выигрыш возрастает с ростом числа сигналов, но при фиксированном числе сигналов выигрыш уменьшается с ростом номера сигнала.



## ДВУХЭТАПНЫЙ ПОИСК СИГНАЛА В МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С УПОРЯДОЧИВАНИЕМ КАНАЛОВ

### § 1. Поиск и обнаружение сигнала в многоканальной системе

В этой главе будет рассмотрена задача поиска сигнала в системе из  $N$  каналов, по каждому из которых также поступает последовательность независимых случайных величин  $\eta_1^{(i)}, \eta_2^{(i)}, \dots, \eta_v^{(i)}, \dots$  ( $i$  — номер канала). В зависимости от того, присутствует ли сигнал в  $i$ -м канале (гипотеза  $H_1$ ) или его там нет (гипотеза  $H_0$ ), каждая из величин  $\eta_v^{(i)}$  распределена с плотностью  $p(x|H_1)$ ,  $p(x|H_0)$  соответственно.

Наблюдатель с помощью поискового прибора, который в каждый момент времени анализирует выходные величины только одного из каналов, должен в кратчайший срок различить гипотезы  $H_0$  и  $H_1$ , причем принятие второй гипотезы сопровождается указанием того канала, в котором присутствует сигнал. В процессе поиска наблюдатель может менять анализируемый канал. Будем всюду полагать, что поисковый прибор преобразует результаты измерений в логарифм отношения правдоподобия  $\ln(p(\eta_j^{(i)}|H_1)/p(\eta_j^{(i)}|H_0))$ .

Алгоритм рассматриваемого в этой главе двухэтапного поиска сигнала в многоканальной системе с упорядочиванием каналов заключается в следующем.

1. На первом этапе каждый канал просматривается последовательно один за другим в течение некоторого времени  $T$ . В каждом канале вычисляется логарифм отношения правдоподобия

$$z = \ln \frac{p(\eta_T | H_1)}{p(\eta_T | H_0)},$$

где  $\eta_T$  — сигнал, принятый за время  $T$ .

2. Все каналы упорядочиваются в порядке убывания их логарифма отношения правдоподобия, то есть канал с максимальным отношением правдоподобия получает номер 1, канал с несколько меньшим отношением правдоподобия — номер 2 и т. д. Канал с минимальным отношением правдоподобия получает максимальный номер  $N$ .

Смысл этой процедуры состоит в том, что проводятся предварительное исследование каналов и выделяются наиболее „подозрительные“ на наличие сигнала каналы, так как очевидно, что канал с сигналом будет иметь в среднем меньший номер, чем канал без сигнала.

3. На втором этапе производится окончательное исследование каналов на наличие или отсутствие в них сигнала в порядке возрастания их номеров, то есть все каналы изучаются в порядке убывания их „подозрительности“. При этом изучение каждого канала происходит с использованием процедуры последовательного анализа при фиксированных вероятностях ошибок ложной тревоги  $\alpha$  и пропуска сигнала  $\beta$ .

При этом информация, полученная на первом этапе в виде логарифма отношения правдоподобия, не забывается, а на втором этапе поиска сигнала накопление логарифма отношения правдоподобия начинается с того значения логарифма отношения правдоподобия, которое было получено на первом этапе.

Здесь и далее исследование алгоритмов поиска будем проводить в предельном случае близких гипотез, когда логарифм отношения правдоподобия в каждом канале изменяется в моменты анализа данного канала как непрерывный нормальный случайный процесс с независимыми приращениями [9], причем само приращение  $\Delta z$  является нормальной случайной величиной с характеристиками [1, 22]:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} M \left\{ \frac{\Delta z}{\Delta t} | H_0 \right\} &= -\mu; \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M \left\{ \frac{\Delta z}{\Delta t} | H_1 \right\} &= +\mu; \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M \left\{ \frac{(\Delta z)^2}{\Delta t} | H_0 \right\} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M \left\{ \frac{(\Delta z)^2}{\Delta t} | H_1 \right\} = 2\mu; \quad (2.1.1)\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} M \left\{ \frac{(\Delta z)^k}{\Delta t} | H_0 \right\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M \left\{ \frac{(\Delta z)^k}{\Delta t} | H_1 \right\} = 0, \quad k > 2.$$

В (2.1.1) величина  $\mu$  имеет смысл отношения сигнала к шуму, то есть  $\mu = E/2W$ , где  $E$  — средняя мощность принимаемого сигнала, а  $W$  — мощность шума, проходящегося на единицу полосы частот. Отметим, что при этих же условиях (2.1.1) процесс  $z(t)$  является диффузионным [6].

Перейдем к исследованию характеристик алгоритма двухэтапного поиска сигнала в многоканальной системе с упорядочиванием каналов и сравним его как с классической процедурой последовательного просмотра каналов, так и с оптимальным алгоритмом поиска К. Ш. Зигангирова [9, 10]. Введем необходимые обозначения. Будем считать, что всего имеется  $N$  каналов ( $N \gg 1$ ), и сигнал может присутствовать только в одном из них. Считаем, что поисковый прибор у нас также один.

Одной из важнейших характеристик системы обнаружения является время, проходящее между началом поиска и обнаружением канала с сигналом (время обнаружения сигнала). Обозначим через  $z$  накопленное за время  $T$  значение логарифма отношения правдоподобия в канале с сигналом, а через  $u_i$  — в  $i$ -м канале без сигнала. В силу сделанного предположения о близости гипотез, величины  $z$  и  $u_i$  будут нормальными случайными величинами [22] с математическим ожиданием соответственно  $+\mu T$  и  $-\mu T$  и дисперсией  $2\mu T$ :

$$p(z) = (4\pi\mu T)^{-\frac{1}{2}} \exp[-(z - \mu T)^2 / 4\mu T],$$

$$p(u_i) = (4\pi\mu T)^{-\frac{1}{2}} \exp[-(u_i + \mu T)^2 / 4\mu T].$$

Тогда среднее время, необходимое для обнаружения канала с сигналом изучаемым алгоритмом, равно

$$\bar{t} = NT + \frac{1}{\mu} M_{z, u_i} \left\{ \sum_{u_i, z} (\ln \beta^{-1} + u_i) \right\} + \frac{1}{\mu} M_z \{ \ln \alpha^{-1} - z \}. \quad (2.1.2)$$

В (2.1.2) первое слагаемое есть время предварительного просмотра каналов. Второе слагаемое есть время,

затраченное на изучение тех каналов без сигнала, которые после упорядочивания получили номер меньший, чем номер канала с сигналом. При отсутствии предварительного просмотра среднее время изучения канала без сигнала равно [3]  $\frac{1}{\mu} \ln \beta^{-1}$ . Но так как после этапа предварительного просмотра логарифм отношения правдоподобия в  $i$ -м канале без сигнала достигает некоторого значения  $u_i$ , то условное среднее время (при условии, что досмотр на втором этапе начинается с величины  $u_i$ ) достижения нижнего порога вальдовской процедурой равно [3]

$$\frac{\ln \beta^{-1} + u_i}{-M\left\{\frac{u_i}{T}\right\}} = \frac{1}{\mu} (\ln \beta^{-1} + u_i).$$

Аналогично, поскольку после первого этапа значение логарифма отношения правдоподобия в канале с сигналом достигает некоторой величины  $z$ , то условное среднее время (при условии, что досмотр на втором этапе начинается с величины  $z$ ) достижения верхнего порога вальдовской процедурой равно [3]

$$\frac{\ln \alpha^{-1} - z}{M\left\{\frac{z}{T}\right\}} = \frac{1}{\mu} (\ln \alpha^{-1} - z).$$

Заметим, что это выражение после усреднения его по  $z$  есть не что иное, как последнее слагаемое в (2.1.2). Иными словами, последнее слагаемое в (2.1.2) есть время, которое на втором этапе уходит на изучение канала с сигналом. В (2.1.1), (2.1.2) и всюду далее символом  $M$  обозначен оператор вычисления математического ожидания по величинам  $u_i$  и  $z$ . Вычислим теперь  $M_{z, u_i}\left\{\sum_{i=1}^N (\ln \beta^{-1} + u_i)\right\}$  из (2.1.2):

$$\begin{aligned} & M_{z, u_i}\left\{\sum_{i=1}^N (\ln \beta^{-1} + u_i)\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(u_i) p(z) \theta(u_i - z) \sum_{i=1}^{N-1} (\ln \beta^{-1} + u_i) du_i dz = \\ &= (N-1) \ln \beta^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz \int_z^{\infty} p(u) du + \end{aligned}$$

$$+ (N-1) \int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz \int_z^{\infty} u p(u) du = \quad (2.1.3)$$

$$= (N-1) \{ (\ln \beta^{-1} - \mu T) [1 - \Phi(\sqrt{\mu T})] + \sqrt{\mu T} \varphi(\sqrt{\mu T}) \},$$

где

$$\theta(u_i - z) = \begin{cases} 1, & u_i > z, \\ 0, & u_i \leq z, \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad \varphi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Подставляя выражение (2.1.3) в (2.1.2) и вводя в рассмотрение величину  $\mu \bar{t}/N$ , перейдем к пределу, когда  $N \rightarrow \infty$ . При этом получим

$$\bar{\tau} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu \bar{t}}{N} = \ln \beta^{-1} - \Phi(\sqrt{a}) (\ln \beta^{-1} - a) + \sqrt{a} \varphi(\sqrt{a}), \quad (2.1.4)$$

где  $a = \mu T$ .

Перейдем теперь к минимизации среднего времени обнаружения канала с сигналом. Величина  $\bar{\tau}$  в (2.1.4), рассматриваемая как функция параметра  $a$ , имеет минимум, положение которого определяется уравнением

$$\ln \beta^{-1} = \frac{2\sqrt{a} \Phi(\sqrt{a})}{\varphi(\sqrt{a})} + 1. \quad (2.1.5)$$

Покажем, что это так. Действительно, решение уравнения  $\bar{\tau}'(a) = 0$  или, что то же, решение уравнения (2.1.5) дают точки, подозрительные на экстремум. Чтобы экстремум был единственным, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2.1.5) имело единственный корень. Последнее условие выполняется, так как функция

$$f(x) = \frac{2x \Phi(x)}{\varphi(x)}$$

является строго монотонно возрастающей функцией своего аргумента. В самом деле

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{2x \Phi(x)}{\varphi(x)} \right) = \frac{\Phi(x) + x\varphi(x) + x^2 \Phi(x)}{x \varphi(x)} > 0$$

и поэтому  $f(x)$

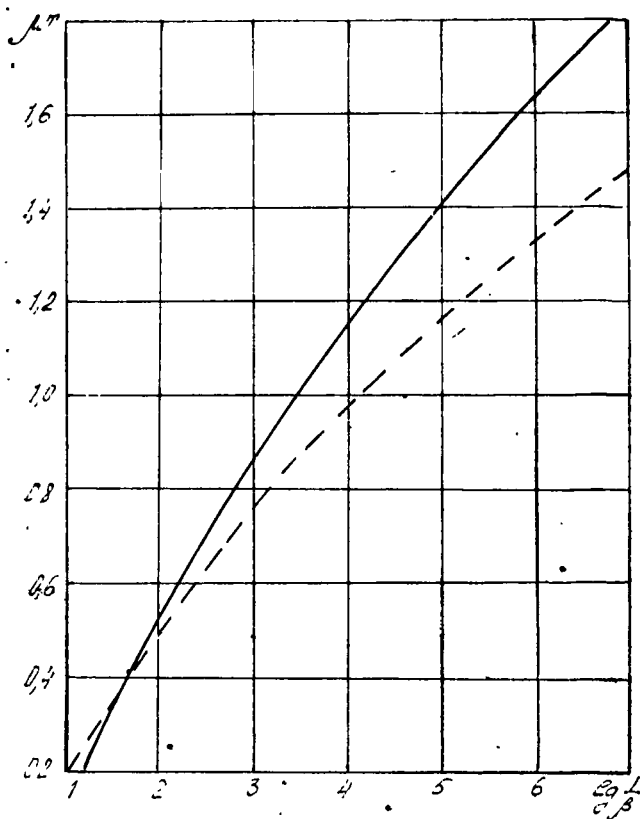


Рис. 2.1.1

является строго монотонно возрастающей функцией. А поскольку

$$\bar{\tau}''(a) = \frac{\varphi(V\bar{a})}{2V\bar{a}} + \frac{a+1}{2a} \Phi(V\bar{a}) > 0,$$

то функция  $\bar{\tau}(a)$  действительно имеет минимум, положение которого определяется уравнением (2.1.5). На рис. 2.1.1 (сплошная линия) приведен график зависимости  $a$  от  $\lg \beta^{-1}$ , откуда следует, что предварительный просмотр занимает приблизительно 10—15% от среднего времени, отводимого на просмотр отдельного канала последовательной процедурой Вальда.



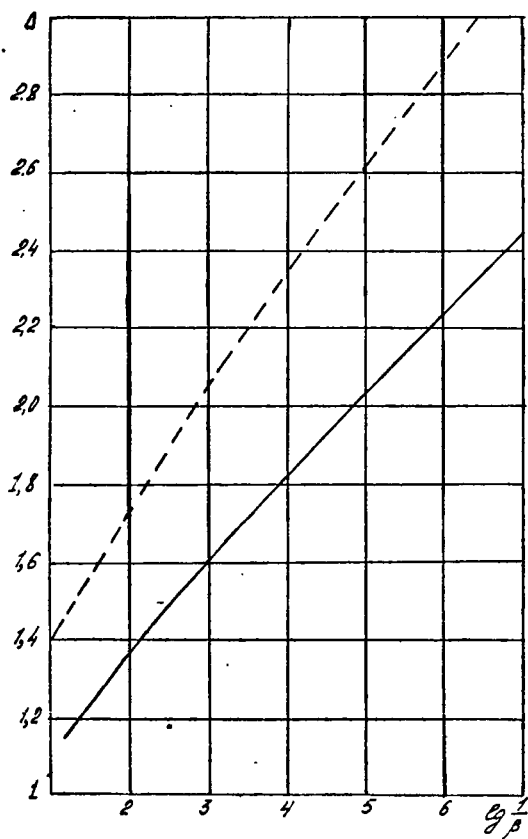


Рис. 2.1.2

Классический последовательный просмотр каналов получается из (2.1.4) при  $a=0$ , при этом среднее время обнаружения канала с сигналом, как нетрудно видеть, равно  $\bar{\tau}_0 = \frac{1}{2} \ln \beta^{-1}$ . Поэтому выигрыш в среднем времени обнаружения канала с сигналом от введения предварительного просмотра каналов и последующего их упорядочивания по сравнению с классической процедурой последовательного просмотра каналов равен

$$\Delta = \frac{\frac{1}{2} \ln \beta^{-1}}{\ln \beta^{-1} - (\ln \beta^{-1} - a) \Phi(\sqrt{a}) + \sqrt{a} \varphi(\sqrt{a})}.$$

График зависимости  $\Delta$  от  $\lg \beta^{-1}$  при оптимальном значении  $a$  (имеется в виду то значение параметра  $a$ , которое является решением уравнения (2.1.5) и, следовательно, доставляет минимум  $\bar{\tau}(a)$  из (2.1.4)) приведен на рис. 2.1.2 (сплошная линия), откуда следует, что введение предварительного просмотра каналов и последующее их упорядочивание по сравнению с последовательным просмотром позволяет в 1,5—2,5 раза уменьшить время, проходящее между началом поиска и обнаружением канала с сигналом, причем выигрыш во времени растет с уменьшением  $\beta$ . Оптимальным в смысле минимума среднего времени обнаружения при фиксированных вероятностях ошибок ложной тревоги  $\alpha$  и пропуска цели  $\beta$  является алгоритм К. Ш. Зигангирова [9, 10]. Сравним изучаемый алгоритм с алгоритмом [9]. Среднее время обнаружения канала с сигналом алгоритмом [9] приближенно равно  $\bar{t}_3 = \frac{N}{\mu}$ .

Введя в рассмотрение величину  $\mu \bar{t}_3 / N$ , перейдем к пределу, когда  $N \rightarrow \infty$ . При этом получим, что

$$\bar{\tau}_3 = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu \bar{t}_3 / N = 1.$$

Проигрыш изучаемого алгоритма оптимальной процедуре К. Ш. Зигангирова обозначим через  $\Delta_3$ . Тогда

$$\Delta_3 = \frac{\bar{\tau}_3}{\bar{\tau}} = \frac{\bar{\tau}_3}{\bar{\tau}_0} \cdot \frac{\bar{\tau}_0}{\bar{\tau}} = \frac{2\Delta}{\ln \beta^{-1}}.$$

На рис. 2.1.3 приведена зависимость  $\Delta_3$  от  $\lg \beta^{-1}$ , откуда видно, что изучаемый алгоритм проигрывает в среднем времени обнаружения канала с сигналом оптимальной процедуре К. Ш. Зигангирова в 2,5—3,5 раза.

Отметим, что полученная формула (2.1.4) для  $\bar{\tau}$ , представляющая собой среднее время обнаружения сигнала, приходящееся на один канал, является приближенной. Укажем на основные ее неточности и

оценим их величину. Решение о наличии или отсутствии сигнала в канале в силу нормальности случайной величины  $u$  может быть вынесено уже на этапе предварительного просмотра. Вероятность этого события равна

$$p_1 = 1 - \int_{-\ln \beta^{-1}}^{\ln \alpha^{-1}} \exp \left[ -\frac{(u \pm \mu T)^2}{4 \mu T} \right] \frac{du}{\sqrt{4 \pi \mu T}} =$$

$$= 1 - \Phi \left( \frac{\ln \alpha^{-1} \pm \mu T}{\sqrt{2 \mu T}} \right) + \Phi \left( \frac{-\ln \beta^{-1} \pm \mu T}{\sqrt{2 \mu T}} \right).$$

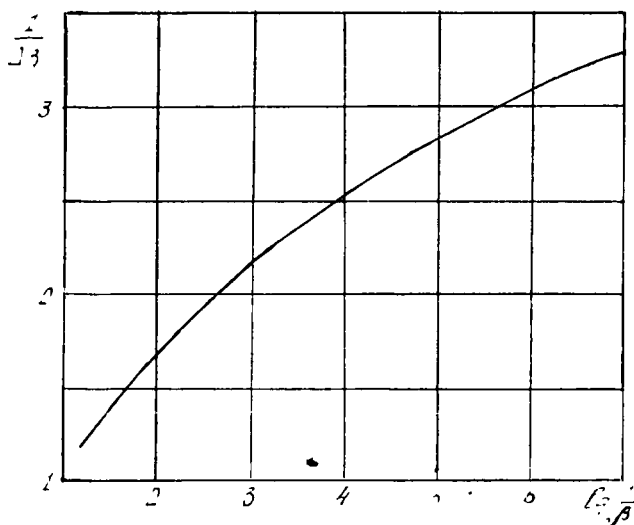


Рис. 2.1.3

В силу того, что на предварительный просмотр уходит примерно  $1/4$  времени, необходимого для поиска сигнала без упорядочивания,  $\mu T \approx \frac{1}{8} \ln \beta^{-1}$ . Поэтому, например, при  $\alpha = \beta = 10^{-2}$  получаем, что  $p_1 \approx 10^{-4}$ , а с уменьшением  $\alpha$  и  $\beta$  вероятность  $p_1$  будет еще меньше. Отсюда видно, что вероятность вынесения решения о наличии или отсутствии сигнала в канале на этапе предварительного просмотра столь мала, что ею можно пренебречь.

Другая неточность связана с тем, что в формулах для среднего времени вместо  $\ln \beta^{-1}$  должно быть выражение [3]

$$(1-\alpha) \ln \frac{1-\alpha}{\beta} + \alpha \ln \frac{\alpha}{1-\beta}.$$

Однако такая замена также приводит к небольшой погрешности. Так, отношение

$$\left[ (1-\alpha) \ln \frac{1-\alpha}{\beta} + \alpha \ln \frac{\alpha}{1-\beta} \right] / \ln \frac{1}{\beta}$$

при  $\alpha=\beta=10^{-2}$  равно 0,978, при  $\alpha=\beta=10^{-3}$  — 0,998, то есть относительная погрешность нашего приближения имеет порядок  $\alpha+\beta$ .

Еще одна неточность в формуле для среднего времени обнаружения канала с сигналом связана с тем, что в результате предварительного просмотра и упорядочивания каналов на первом этапе с последующим досмотром их на втором этапах существует отличная от нуля вероятность того, что сигнал все же будет пропущен. Действительно, вероятность того, что сигнал не будет пропущен, очевидно, равна  $1-\beta$ , при этом среднее время обнаружения канала с сигналом равно  $\bar{\tau}$ . Но может оказаться, что на первом цикле просмотра (под циклом просмотра будем понимать предварительный просмотр всех каналов, их упорядочивание и последующий досмотр всех каналов) сигнал пропущен и будет обнаружен на втором цикле просмотра. Такое событие реализуется с вероятностью  $\beta(1-\beta)$ , а среднее время обнаружения канала с сигналом при этом равно  $\bar{\tau}+T^0$ , где  $T^0$  — время цикла просмотра. Продолжая наши рассуждения, получим, что с вероятностью  $\beta^n \cdot (1-\beta)$  сигнал может быть пропущен в течение  $n$  циклов просмотра и обнаружен на  $n+1$ -м цикле, а время обнаружения канала с сигналом в этом случае равно  $\bar{\tau}+nT^0$ . Следовательно, истинное время обнаружения канала с сигналом запишется в виде

$$\bar{\tau}_{\text{ист}} = \bar{\tau} + T^0 (1-\beta) \sum_{n=0}^{\infty} n \beta^n = \bar{\tau} + \frac{\beta T^0}{1-\beta}.$$

В силу малости  $\beta$  вторым слагаемым можно также пренебречь.

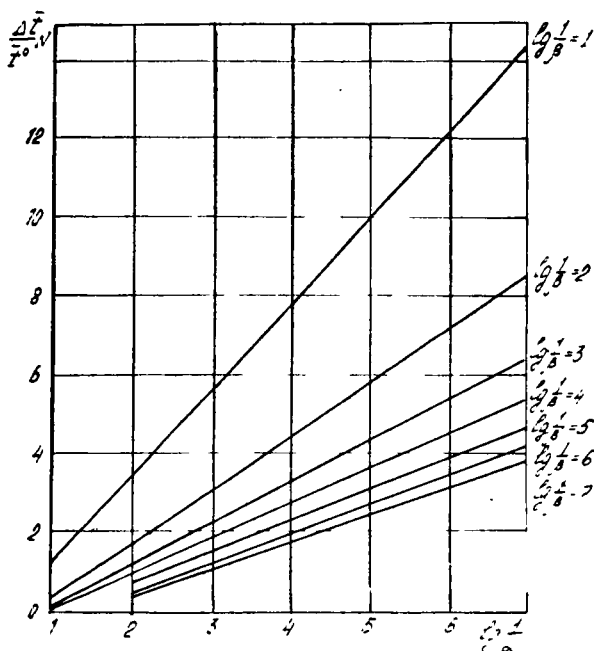


Рис. 2.1.4

Отметим еще, что все расчеты и выводы проводились нами для случая, когда число каналов  $N \rightarrow \infty$ . Оценим погрешность наших выводов для случая конечных  $N$ . Подставляя выражение (2.1.3) в (2.1.2), получим

$$\bar{t} = NT + \frac{N-1}{\mu} \{ (\ln \beta^{-1} - a) [1 - \Phi(\sqrt{a})] + \\ + \sqrt{a} \varphi(\sqrt{a}) \} + \frac{1}{\mu} (\ln \alpha^{-1} - a).$$

С другой стороны, введем величину  $\bar{t}_0$  в виде

$$\bar{t}_0 = NT + \frac{N}{\mu} \{ (\ln \beta^{-1} - a) [1 - \Phi(\sqrt{a})] + \sqrt{a} \varphi(\sqrt{a}) \}.$$

В этом случае  $\bar{t} = \mu \bar{t}_0 / N$  для любых значений  $N$ , а не только для  $N \rightarrow \infty$ . Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta \bar{t}}{\bar{t}_0} = \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{\bar{t}_0} = \frac{1}{N} \cdot \frac{(\ln \alpha^{-1} - a) - \{(\ln \beta^{-1} - a)[1 - \Phi(\sqrt{a})] + \sqrt{a} \varphi(\sqrt{a})\}}{a + \{(\ln \beta^{-1} - a)[1 - \Phi(\sqrt{a})] + \sqrt{a} \varphi(\sqrt{a})\}}.$$

На рис. 2.1.4 приведены примеры зависимости выражения  $\frac{\Delta \bar{t}}{\bar{t}_0} N$  от  $\lg \alpha^{-1}$  для различных значений  $\lg \beta^{-1}$ , откуда видно, что при больших значениях  $N$  погрешность в нахождении среднего времени обнаружения канала с сигналом мала. Например, при  $\beta = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 10^{-5}$ ,  $N = 100$  погрешность  $\frac{\Delta \bar{t}}{\bar{t}_0} = 0,042$ , а при больших  $N$  погрешность  $\frac{\Delta \bar{t}}{\bar{t}_0}$  еще меньше.

Все последующие формулы и выводы, как в этой, так и в последующих главах, содержат погрешности указанных типов, которые имеют тот же порядок малости. Поэтому соответствующие оценки не приводятся.

## § 2. Характеристики двухэтапного алгоритма поиска сигнала

Среднее время, проходящее между началом поиска и обнаружением канала с сигналом, является важнейшей характеристикой системы поиска, но в ряде случаев необходимо знать и другие характеристики. Вычислим поэтому плотность вероятностей времени обнаружения канала с сигналом в асимптотическом случае, когда число каналов  $N \rightarrow \infty$ . Время обнаружения канала с сигналом, изучаемым алгоритмом, равно

$$t = NT + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{N-1} (\ln \beta^{-1} + u_i) \theta(u_i - z) + \frac{1}{\mu} (\ln \alpha^{-1} - z). \quad (2.2.1)$$

Здесь

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение величины  $\tau = \mu t/N$  и  $b = -\ln \beta^{-1}$ , тогда (2.2.1) примет вид

$$\tau = a + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} (b+u_i) \theta(u_i - z) + \frac{1}{N} (\ln \alpha^{-1} - z). \quad (2.2.2)$$

Пусть  $g(s)$  — характеристическая функция величины  $\tau$ , когда  $N \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\begin{aligned} g(s) &= \lim_{N \rightarrow \infty} M_{z, u_i} \{e^{-s\tau}\} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} M_z \{e^{-sa} (M_u [e^{-\frac{s}{N}(b+u) \theta(u-z)}])^{N-1}\} = \\ &= M_z \{e^{-sa} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} [M_u (e^{-\frac{s}{N}(b+u) \theta(u-z)})]^{N-1}\}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Выражение  $\exp\left(-\frac{s}{N}(b+u) \theta(u-z)\right)$  имеет разложение

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{s}{N}(b+u) \theta(u-z)\right) &= \\ &= 1 - \frac{s}{N}(b+u) \theta(u-z) + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Поэтому из (2.2.3) с учетом (2.2.4) получим

$$\begin{aligned} g(s) &= M_z \left\{ e^{-sa} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{s}{N} M_u [(b+u) \theta(u-z)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right)^{N-1} \right\} = M_z \{ e^{-s(a + M_u [(b+u) \theta(u-z)])} \}, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

где

$$\begin{aligned} M_u [(b+u) \theta(u-z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (b+u) \theta(u-z) p(u) du = \\ &= (b-a) \int_z^{\infty} p(u) du + \int_z^{\infty} (u+a) p(u) du = \\ &= (b-a) \left[ 1 - \Phi\left(\frac{z+a}{\sqrt{2a}}\right) \right] + \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\frac{(z+a)^2}{4a}}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Подставляя (2.2.6) в (2.2.5), получим окончательное выражение для характеристической функции величины  $\tau$

$$g(s) = M_z \left\{ \exp \left[ -s(a + (b-a) \left[ 1 - \Phi \left( \frac{z+a}{\sqrt{2a}} \right) \right] + \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\frac{(z+a)^2}{4a}} \right] \right\}. \quad (2.2.7)$$

Производя обратное преобразование Лапласа, получим искомую плотность вероятностей величины  $\tau$

$$p(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - a - (b-a) \left[ 1 - \Phi \left( \frac{z+a}{\sqrt{2a}} \right) \right] - \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\frac{(z+a)^2}{4a}}) p_z(z) dz = -p_z(F(\tau)) F'(\tau), \quad (2.2.8)$$

где  $\delta(\cdot)$  — дельта-функция Дирака, а  $F(\cdot)$  есть функция, обратная к функции

$$f(z) = a + (b-a) \left[ 1 - \Phi \left( \frac{z+a}{\sqrt{2a}} \right) \right] + \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\frac{(z+a)^2}{4a}}.$$

Значение  $p(\tau)$  позволяет вычислять любые характеристики времени обнаружения канала с сигналом. В частности, дисперсия величины  $\tau$  равна

$$\begin{aligned} D[\tau] &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 p(\tau) d\tau - \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tau p(\tau) d\tau \right)^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - [a + (b-a) \left[ 1 - \Phi \left( \frac{z+a}{\sqrt{2a}} \right) \right] + \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\frac{(z+a)^2}{4a}}]) p(z) dz - \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tau d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \right. \\ &\quad \left. - [a + (b-a) \left[ 1 - \Phi \left( \frac{z+a}{\sqrt{2a}} \right) \right] + \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\frac{(z+a)^2}{4a}}]) p(z) dz \right)^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [a + (b-a) [1 - \Phi(y + \sqrt{2a})] + \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\frac{(y+\sqrt{2a})^2}{2}}]^2 \varphi(y) dy - \left( \int_{-\infty}^{\infty} [a + \right. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$



$$\begin{aligned}
& + (b-a) [1 - \Phi(y + \sqrt{2a}) + \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\frac{(y + \sqrt{2a})^2}{2}}] \varphi(y) dy)^2 = \\
& = (b-a)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(y + \sqrt{2a}) \varphi(y) dy + \frac{a}{\pi \sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}a} - \\
& - (b-a)^2 \Phi^2(\sqrt{a}) - a \varphi^2(\sqrt{a}) + 2\sqrt{a}(b-a) \varphi'(\sqrt{a}) \times \\
& \times [\Phi(\sqrt{a}) - \Phi(\sqrt{\frac{a}{3}})]. \quad (2.2.9)
\end{aligned}$$

При последовательном просмотре, то есть когда  $a=0$ , из (2.2.9) получаем, что

$$D_0 = D\{\tau_0\} = b^2, 12.$$

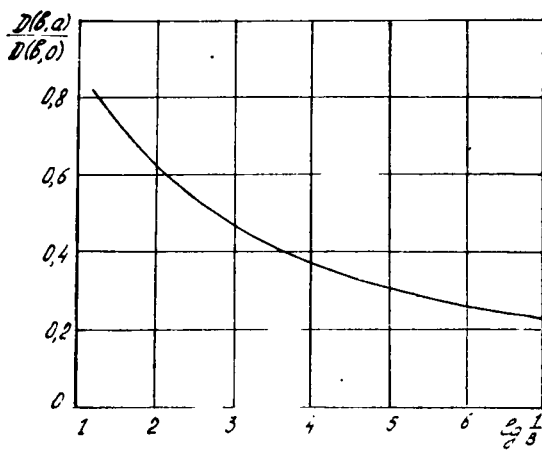


Рис. 2.2.5

На рис. 2.2.5 приведена зависимость  $D/D_0$  от  $\lg \beta^{-1}$ , откуда следует, что введение предварительного просмотра уменьшает не только среднее время обнаружения канала с сигналом, но и дисперсию времени обнаружения.

### § 3. Оптимальное управление энергией при поиске сигнала

Дополнительного сокращения времени обнаружения канала с сигналом можно достигнуть, если при окон-

чательном просмотре каналов, то есть на втором этапе, применить управление параметром  $\mu$ . В случае радиолокационного поиска управление параметром  $\mu$  соответствует управлению энергией зондирующих импульсов [20]. Обозначим через  $\mu_i$  значение коэффициента сноса, достигаемое на втором этапе в  $i$ -м канале, а через  $\mu$  — среднее арифметическое величин  $\mu_i$ , то есть

$$\sum_{i=1}^N \mu_i = N\mu. \quad (2.3.1)$$

Так как величины  $\mu_i$  в радиолокационном случае пропорциональны энергии зондирующего импульса, то соотношение (2.3.1) указывает на сохранение полной энергии, расходуемой на просмотр пространства. До сих пор мы предполагали, что величина  $\mu$  одинакова во всех каналах, то есть все величины  $u_i$  оказывались одинаково распределенными. Нас же интересовало только, сколько каналов без сигнала после упорядочивания окажется впереди канала с сигналом. В этом параграфе все величины  $\mu_i$  предполагаются различными, так что после упорядочивания мы получим следующие случайные величины:

$$u_{(1)} \leq u_{(2)} \leq \dots \leq u_{(k)} \leq \dots \leq u_{(N-1)},$$

то есть получим упорядоченную статистику. Плотность вероятностей  $k$ -й порядковой статистики случайной величины  $u$ , как известно, [4] равна

$$p_k(u_{(k)}) = \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-1-k)!} \times \\ \times F^{N-k-1}(u_{(k)}) [1-F(u_{(k)})]^{k-1} F'(u_{(k)}), \quad (2.3.2)$$

где в силу нормальности случайной величины  $u$

$$F(u) = \Phi\left(\frac{u+a}{\sqrt{2a}}\right); \quad F'(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \exp\left[-\frac{(u+a)^2}{4a}\right].$$

Приведем выражение (2.3.2) к следующему виду:

$$p_k(u_{(k)}) \sim \frac{NF'(u_{(k)})(N-2)!}{(k-1)![ (N-2)-(k-1) ]!} \times \\ \times [1-F(u_{(k)})]^{k-1} F^{(N-2)-(k-1)}(u_{(k)}), \quad (2.3.3)$$

где знак  $\sim$  означает асимптотическое равенство.

По теореме Муавра-Лапласа при  $N \rightarrow \infty$  (2.3.3) асимптотически равно выражению

$$\begin{aligned} & \frac{NF'(u_{(k)})}{\sqrt{2\pi((N-2)F(u_{(k)})[1-F(u_{(k)})]}} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{[k-1-(N-2)(1-F(u_{(k)}))]^2}{2(N-2)F(u_{(k)})[1-F(u_{(k)})]} \right\} = \\ & \sim \frac{F'(u_{(k)})\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi F(u_{(k)})[1-F(u_{(k)})]}} \exp \left\{ -\frac{N[x-(1-F(u_{(k)}))]^2}{2F(u_{(k)})[1-F(u_{(k)})]} \right\}, \\ & \quad x = k'N, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Как показано в [5], при  $N \rightarrow \infty$  (2.3.4) стремится к выражению

$$F'(u_{(k)}) \delta(x - [1 - F(u_{(k)})]).$$

Таким образом,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_k(u_{(k)}) = F'(u_{(k)}) \delta(x - [1 - F(u_{(k)})]). \quad (2.3.5)$$

Среднее время обнаружения канала с сигналом, изучаемым алгоритмом с учетом того, что все  $\mu_i$  различны, равно

$$\begin{aligned} \frac{\bar{t}}{N} = T + \frac{1}{N} M_{z, u_{(k)}} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\mu_k} (b + u_{(k)}) \theta(u_{(k)} - z) \right\} + \\ + \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{\mu_k} (\ln \alpha^{-1} - \bar{z}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Произведем замену переменных  $0 \leq x = \frac{k}{N} \leq 1$ ,  $dx = \frac{k+1}{N} - \frac{k}{N} = \frac{1}{N}$  и перейдем в (2.3.6) к пределу при  $N \rightarrow \infty$ . Заметим при этом, что (2.3.1) примет вид

$$\frac{1}{\mu} \int_0^1 \mu(x) dx = 1. \quad (2.3.7)$$

С учетом (2.3.5), при переходе к пределу в (2.3.6) при  $N \rightarrow \infty$ , получим

$$\bar{\tau} = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{t}/N =$$

$$\begin{aligned}
&= T + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\mu_k} M_{z, u(k)} \{ (b + u(k)) \theta(u(k) - z) \} = \quad (2.3.8) \\
&= T + \int_0^1 \frac{dx}{\mu(x)} \int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz \int_z^{\infty} \delta(x - \\
&\quad - [1 - F(u(k))]) (b + u(k)) p(u(k)) du(k).
\end{aligned}$$

Вычислим все интегралы, входящие в (2.3.8):

$$\begin{aligned}
&\int_z^{\infty} \delta(x - 1 + F(u)) (b + u) p(u) du = \\
&= \int_z^{\infty} \delta(x - 1 + \Phi\left(\frac{u+a}{\sqrt{2a}}\right)) (b + u) p(u) du = \\
&= (b - a + \sqrt{2a} \psi(1-x)) \theta(1-x - \Phi\left(\frac{z+a}{\sqrt{2a}}\right)). \quad (2.3.9)
\end{aligned}$$

Здесь  $\psi(\cdot)$  — функция, обратная функции  $\Phi(\cdot)$ ;

$$\theta(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } y = 0, \\ 1, & \text{если } y > 0. \end{cases}$$

Подставляя (2.3.9) во второе слагаемое в (2.3.8), получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{dx}{\mu(x)} \int_{-\infty}^{\infty} p(z) (b - a + \sqrt{2a} \psi(1-x)) \theta(1 - \Phi\left(\frac{z+a}{\sqrt{2a}}\right) - x) dz = \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{\mu(x)} \Phi(\psi(1-x) - \sqrt{2a}) (b - a + \sqrt{2a} \psi(1-x)). \quad (2.3.10)
\end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (2.3.10) можем переписать (2.3.8) в виде

$$\bar{\tau} = T + \int_0^1 \frac{dx}{\mu(x)} \Phi(\psi(1-x) - \sqrt{2a}) (b - a + \sqrt{2a} \psi(1-x))$$

или окончательно

$$\begin{aligned}
\mu \bar{\tau} &= a + \mu \int_0^1 \frac{dx}{\mu(x)} \Phi(\psi(1-x) - \\
&\quad - \sqrt{2a}) (b - a + \sqrt{2a} \psi(1-x)). \quad (2.3.11)
\end{aligned}$$

Оптимальное управление энергией на втором этапе поиска, другими словами управление параметром  $\mu$ , сводится к отысканию минимума  $\bar{\tau}$  по  $\mu(x)$  при ограничении (2.3.7). Интересующий нас минимум по  $\mu(x)$  будем искать, пользуясь обычными правилами вариационного исчисления. Составим функционал

$$I = \lambda \left( \frac{1}{\mu} \int_0^1 dx \cdot \mu(x) - 1 \right) + a + \mu \int_0^1 \frac{dx}{\mu(x)} [b - a + \psi(1+x)\sqrt{2a}] \Phi(\psi(1-x) - \sqrt{2a}). \quad (2.3.12)$$

Заметим, что функционал имеет вид

$$I = \int F(y(x), x) dx,$$

то есть не зависит от производной  $y'(x)$ , поэтому уравнение Эйлера в нашем случае имеет вид

$$\lambda - \frac{b - a + \sqrt{2a}\psi(1-x)}{\mu^2(x)} \Phi(\psi(1-x) - \sqrt{2a}) = 0,$$

откуда следует, что

$$\mu(x) = \lambda \sqrt{[b - a + \sqrt{2a}\psi(1-x)] \Phi(\psi(1-x) - \sqrt{2a})}.$$

Величину  $\lambda$  находим из ограничения (2.3.7)

$$\lambda = \mu / \int \sqrt{[b - a + \sqrt{2a}\psi(1-x)] \Phi(\psi(1-x) - \sqrt{2a})} dx. \quad (2.3.13)$$

В (2.3.13) под корнем должны стоять положительные величины. Функция  $\Phi(\cdot)$  положительна всегда, а знак выражения  $b - a + \sqrt{2a}\psi(1-x)$  зависит от знака функции  $\psi(\cdot)$ . Выражение  $b - a + \sqrt{2a}\psi(1-x) \geq 0$ , если  $\psi(1-x) \geq \frac{a-b}{\sqrt{2a}}$ . Поэтому окончательно получаем

$$\lambda = \mu / \int_{\frac{a-b}{\sqrt{2a}}}^{\infty} \sqrt{[b - a + y\sqrt{2a}] \Phi(y - \sqrt{2a})} \varphi(y) dy$$

и тогда

$$\mu(x) = \mu \frac{\sqrt{[b-a+\sqrt{2a}\psi(1-x)]\Phi(\psi(1-x)-\sqrt{2a})}}{\int_{\frac{a-b}{\sqrt{2a}}}^{\infty} \sqrt{(b-a+y\sqrt{2a})\Phi(y-\sqrt{2a})}\varphi(y)dy}. \quad (2.3.14)$$

Убедимся теперь, что (2.3.14) действительно доставляет минимум  $\bar{\tau}$  из (2.3.11). Для этого найдем вторую вариацию функционала (2.3.12). и исследуем ее знак. Имеем

$$\delta^2 I = \int \frac{[b-a+\sqrt{2a}\psi(1-x)]\Phi(\psi(1-x)-\sqrt{2a})}{\mu^3(x)} (\delta\mu(x))^2 dx. \quad (2.3.15)$$

Знак (2.3.15) определяется знаком выражения  $b-a+\sqrt{2a}\psi(1-x)$ , которое неотрицательно, когда  $\psi(1-x) \geq \frac{a-b}{\sqrt{2a}}$ .

Таким образом, функция  $\mu(x)$  из (2.3.14) действительно доставляет минимум  $\bar{\tau}$  из (2.3.11). Заметим, что при прлучении всех характеристик изучаемого в этой главе алгоритма мы пренебрегали возможностью того, что уже на этапе предварительного просмотра может быть вынесено решение (либо истинное, либо ложное) о наличии сигнала в канале. Это давало в окончательных формулах относительную ошибку порядка  $\alpha + \beta$ , и, в силу малости  $\alpha$  и  $\beta$ , мы ею пренебрегали. В последних же формулах этот эффект проявляется в том, что выражение  $b-a+y\sqrt{2a}$  может быть меньше нуля при  $y < 0$ . Область интегрирования, как видно из приведенных рассуждений, определяется условием  $y > \frac{b-a}{\sqrt{2a}}$ , а соотношение  $y < \frac{a-b}{\sqrt{2a}}$  как раз и соответствует вынесению решения на этапе предварительного просмотра. При оптимальном распределении энергии по каналам среднее время обнаружения канала с сигналом окончательно равно

$$\mu\bar{\tau} = a + \left( \int_{\frac{a-b}{\sqrt{2a}}}^{\infty} \sqrt{[b-a+y\sqrt{2a}]\Phi(y-\sqrt{2a})}\varphi(y)dy \right)^2.$$

Можно показать, что  $\mu\bar{t}$ , рассматриваемая как функция параметра  $a$ , является одноэкстремальной функцией. Минимум  $\mu\bar{t}$  по  $a$  был найден численно. График зависимости оптимального  $a$  от  $\lg \beta^{-1}$  приведен на рис. 2.1.1 (пунктирная линия), откуда видно, что управление энергией уменьшает время предварительного просмотра каналов. Выигрыш

$$\Delta = \frac{0,5 \ln \beta^{-1}}{a + \left( \int V(b-a+y\sqrt{2a}) \Phi(y-\sqrt{2a}) \varphi(y) dy \right)^2}$$

от управления энергией по сравнению с классической процедурой последовательного просмотра каналов приведен на рис. 2.1.2 (пунктирная линия). Из рис. 2.1.2 следует, что применение двухэтапной процедуры поиска сигнала вместе с управлением энергией на втором этапе позволяет дополнительно уменьшить среднее время обнаружения канала с сигналом на 25—30% по сравнению с двухэтапным поиском без управления энергией.

#### § 4. Двухэтапный поиск сигнала в многоканальной системе с группировкой и упорядочиванием каналов

Выше был изучен двухэтапный алгоритм поиска сигнала в многоканальной системе, позволяющий в 1,5—2,5 раза сократить время поиска канала с сигналом по сравнению с широко применяемой процедурой последовательного просмотра каналов. Однако этот алгоритм требует, чтобы на каждый канал отводилась отдельная ячейка памяти, что при большом числе каналов может привести к значительным техническим трудностям. Сокращения объема запоминающего устройства можно достичь, если применить объединение каналов в группы и на каждую группу отводить одну ячейку памяти. Изучаемый в этом параграфе алгоритм заключается в следующем.

1. Все  $N$  каналов разбиваются на  $N/n$  групп по  $n$  каналов в каждой.

Двухэтапным методом, изложенным выше, ищется группа каналов с сигналом.

3. После того, как группа каналов с сигналом найдена, опять-таки двухэтапным методом внутри группы производится поиск канала с сигналом. Тем самым объем памяти сокращается в  $n$  раз.

Характеристики этой системы поиска будут зависеть от того, как результаты измерений от отдельных каналов внутри группы будут объединяться между собой. Ниже изучается алгоритм двухэтапного поиска сигнала с упорядочиванием и группировкой каналов в предположении, что при объединении  $n$  каналов в группу их логарифмы отношения правдоподобия суммируются.

Найдем приближенно характеристики предлагаемого алгоритма поиска сигнала в многоканальной системе и сравним его с двухэтапной процедурой поиска без группировки. Введем необходимые обозначения. Будем считать, что всего имеется  $N$  каналов ( $N \gg 1$ ), и сигнал может присутствовать только в одном из них. Считаем, что поисковый прибор тоже один.

Пусть  $\xi_{ik}$  есть логарифм отношения правдоподобия  $k$ -го канала в  $i$ -й группе. Тогда характеристикой группы будет выступать величина  $\tilde{\xi}_i = \sum_{k=1}^n \xi_{ik}$ . Как и ранее, будем предполагать, что величины  $\xi_{ik}$  являются диффузионными процессами с коэффициентами сноса  $\pm\mu$  и коэффициентом диффузии  $2\mu$  [9], где  $\mu$  — величина, характеризующая канал и имеющая смысл отношения сигнала к шуму. При таких предположениях процесс  $\tilde{\xi}_i(t)$ , очевидно, также будет диффузионным процессом с коэффициентом диффузии  $2n\mu$  и коэффициентом сноса  $n\mu$ , если в группе нет канала с сигналом, и  $(n-2)\mu$ , если канал с сигналом в группе есть. Рассмотрим логарифм отношения правдоподобия величины  $\tilde{\xi}_i$  для группы каналов с сигналом и без сигнала. Другими словами, рассмотрим величину  $\ln \frac{p(\tilde{\xi}_i \text{ сигнал есть})}{p(\tilde{\xi}_i \text{ сигнала нет})}$ . Будем обозначать через  $\tilde{u}_i$  накопленное за время  $T$  значение логарифма отношения правдоподобия в  $i$ -й группе без сигнала, а через  $\tilde{z}$  — в группе каналов с сигналом. Величины  $\tilde{u}_i$  являются нормальными случайными величинами (как линейное преобразование нормальной случайной величины) с математическим ожи-



данием  $-\mu T/n$  и дисперсией  $2\mu T/n$ , а  $\tilde{z}$  — нормальная случайная величина с дисперсией  $2\mu T/n$  и математическим ожиданием  $\mu T/n$ . Покажем, что это так. Пусть  $\tilde{\xi}_T$  — логарифм отношения правдоподобия, накопленный за время  $T$ . Тогда имеют место следующие равенства:

$$p(\tilde{\xi}_T|H_1) = N(-(n-2)\mu T, 2n\mu T);$$

$$p(\tilde{\xi}_T|H_0) = N(-n\mu T, 2n\mu T);$$

$$\ln \frac{p(\tilde{\xi}_T|H_1)}{p(\tilde{\xi}_T|H_0)} = \frac{\tilde{\xi}_T}{n} + \mu T \frac{n-1}{n};$$

$$M\left\{\ln \frac{p(\tilde{\xi}_T|H_1)}{p(\tilde{\xi}_T|H_0)} \middle| H_1\right\} = \frac{\mu T}{n};$$

$$M\left\{\ln \frac{p(\tilde{\xi}_T|H_1)}{p(\tilde{\xi}_T|H_0)} \middle| H_0\right\} = -\frac{\mu T}{n};$$

$$D\left\{\ln \frac{p(\tilde{\xi}_T|H_1)}{p(\tilde{\xi}_T|H_0)}\right\} = \frac{D\{\tilde{\xi}_T\}}{n^2} = \frac{2\mu T}{n}.$$

Исследование характеристик изучаемого алгоритма ограничим определением среднего времени обнаружения канала с сигналом. Очевидно, оно будет складываться из двух слагаемых: среднего времени обнаружения группы каналов с сигналом и среднего времени обнаружения канала с сигналом внутри группы

$$t = t_{гр.с} + t_{с.гр.} \quad (2.4.1)$$

Подсчитаем каждое из слагаемых, входящих в (2.4.1). Пусть каждая из групп предварительно просматривается в течение некоторого времени  $T_1$ ;  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  — соответственно вероятности ошибок ложной тревоги и пропуска сигнала при поиске группы каналов с сигналом. Тогда среднее время обнаружения группы каналов с сигналом равно

$$\begin{aligned} \bar{t}_{гр.с} = & \frac{NT_1}{n} + \frac{n}{\mu} M_{\tilde{z}, \tilde{u}_i} \left\{ \sum_{\tilde{u}_i \neq \tilde{z}} (\ln \beta_1^{-1} + \tilde{u}_i) \right\} + \\ & + \frac{n}{\mu} M_{\tilde{z}} \{ \ln \alpha_1^{-1} - \tilde{z} \}. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Здесь первое слагаемое — время предварительного просмотра всех групп. Второе слагаемое есть среднее время изучения групп каналов без сигнала, которые после упорядочивания получили меньший номер, чем группа каналов с сигналом. При отсутствии предварительного просмотра среднее время изучения группы каналов без сигнала равно  $[3] \frac{n}{\mu} \ln \beta_1^{-1}$ . Но так как после первого этапа логарифм отношения правдоподобия  $i$ -й группы каналов без сигнала достигает некоторой величины  $\tilde{u}_i$ , то условное среднее время (при условии, что на втором этапе поиска досмотр начнется с величины  $\tilde{u}_i$ ) достижения нижнего порога вальдовской процедурой равно

$$\frac{\ln \beta_1^{-1} + \tilde{u}_i}{-M\left\{\frac{\tilde{u}_i}{T_1}\right\}} = \frac{n}{\mu} (\ln \beta_1^{-1} + \tilde{u}_i).$$

Третье слагаемое в (2.4.2) после усреднения его по  $\tilde{z}$  представляет собой время, которое уходит на изучение группы каналов с сигналом на втором этапе поиска. Вычислим теперь выражение  $M_{\tilde{z}, \tilde{u}_i} \left\{ \sum_{\tilde{u}_i > \tilde{z}} (\ln \beta_1^{-1} + \tilde{u}_i) \right\}$ , входящее в (2.4.2). Введем в рассмотрение функцию

$$\theta(\tilde{u}_i - \tilde{z}) = \begin{cases} 1, & \tilde{u}_i > \tilde{z}, \\ 0, & \tilde{u}_i \leq \tilde{z}. \end{cases}$$

Тогда можем записать

$$\begin{aligned} M_{\tilde{z}, \tilde{u}_i} \left\{ \sum_{\tilde{u}_i > \tilde{z}} (\ln \beta_1^{-1} + \tilde{u}_i) \right\} &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\tilde{u}_i) p(\tilde{z}) \theta(\tilde{u}_i - \tilde{z}) \sum_i (\ln \beta_1^{-1} + \tilde{u}_i) d\tilde{u}_i d\tilde{z}. \end{aligned}$$

Поскольку все группы предварительно просматриваются в течение одного и того же времени  $T_1$ , все  $\tilde{u}_i$  являются одинаково распределенными нормальными случайными величинами. Поэтому перепишем последнее равенство в виде

$$M_{\tilde{z}, \tilde{u}_i} \left\{ \sum_i (\ln \beta_1^{-1} + \tilde{u}_i) \right\} = \left( \frac{N}{n} - 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} p(\tilde{z}) d\tilde{z} \int_{\tilde{z}}^{\infty} (\ln \beta_1^{-1} +$$

$$+ \bar{u}) p(\bar{u}) d\bar{u} = \left( \frac{N}{n} - 1 \right) \left\{ \left( \ln \beta_1^{-1} - \frac{\mu T_1}{n} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{\mu T_1}{n}} \right) \right] + \sqrt{\frac{\mu T_1}{n}} \varphi \left( \sqrt{\frac{\mu T_1}{n}} \right) \right\}.$$

Обозначив  $\mu T_1/n = a_1$ , получим окончательно, что

$$M_{z, \bar{u}_i} \left\{ \sum_{\bar{u}_i} (\ln \beta_1^{-1} + \bar{u}_i) \right\} = \left( \frac{N}{n} - 1 \right) \{ (\ln \beta_1^{-1} - a_1) [1 - \\ - \Phi(\sqrt{a_1})] + \sqrt{a_1} \varphi(\sqrt{a_1}) \}. \quad (2.4.3)$$

С учетом (2.4.3) перепишем (2.4.2) в виде

$$\tau_{\text{гp.c}} = \mu \bar{t}_{\text{гp.c}} = N a_1 + (N - n) \{ (\ln \beta_1^{-1} - a_1) [1 - \\ - \Phi(\sqrt{a_1})] + \sqrt{a_1} \varphi(\sqrt{a_1}) \} + n (\ln \alpha_1^{-1} - a_1). \quad (2.4.4)$$

Пусть теперь  $T_2$  — время, в течение которого изучается каждый канал из найденной группы каналов с сигналом, а  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  — соответственно вероятности ошибок ложной тревоги и пропуска сигнала при поиске канала с сигналом внутри группы. Тогда среднее время обнаружения канала с сигналом внутри группы равно

$$\bar{t}_{\text{с гp}} = n T_2 + \frac{1}{\mu} M_{z, u_i} \left\{ \sum_{u_i} (\ln \beta_2^{-1} + \bar{u}_i) \right\} + \\ + \frac{1}{\mu} M_z (\ln \alpha_2^{-1} - z). \quad (2.4.5)$$

Обозначим  $\mu T_2 = a_2$ , тогда с учетом формулы (2.1.3) перепишем (2.4.5) в виде

$$\tau_{\text{с.гp}} = \mu \bar{t}_{\text{с.гp}} = n a_2 + (n - 1) \{ (\ln \beta_2^{-1} - a_2) [1 - \Phi(\sqrt{a_2})] + \\ + \sqrt{a_2} \varphi(\sqrt{a_2}) \} + (\ln \alpha_2^{-1} - a_2). \quad (2.4.6)$$

Теперь можем записать выражение для среднего времени обнаружения канала с сигналом

$$\tau = \tau_{\text{гp.c}} + \tau_{\text{с.гp}} = \\ = N a_1 + (N - n) \{ (\ln \beta_1^{-1} - a_1) [1 - \Phi(\sqrt{a_1})] + \\ + \sqrt{a_1} \varphi(\sqrt{a_1}) \} + n (\ln \alpha_1^{-1} - a_1) + n a_2 +$$

$$+ (n-1) \{ (\ln \beta_2^{-1} - a_2) [1 - \Phi(\sqrt{a_2})] + \sqrt{a_2} \varphi(\sqrt{a_2}) \} + (\ln \alpha_2^{-1} - a_2). \quad (2.4.7)$$

При построении систем обнаружения задаются общие вероятности ошибок ложной тревоги  $\alpha$  и пропуска сигнала  $\beta$ . Найдем связь между  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , входящими в (2.4.7), с одной стороны, и  $\alpha$  — с другой. Очевидно, что

$$\alpha = \alpha_1 \frac{N}{n} + (1 - \alpha_1)^{N/n} \alpha_2 n.$$

Так как практический интерес представляет случай  $\alpha \ll 1$ , то последнее выражение можно переписать в виде

$$\alpha \approx \alpha_1 \frac{N}{n} + \alpha_2 n. \quad (2.4.8)$$

Пренебрегая членом  $\alpha_1 \alpha_2 N$ , мы допускаем ошибку порядка  $\alpha_1 \alpha_2$ . Аналогичными рассуждениями найдем связь между  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta$ .

$$\beta \approx \beta_1 + \beta_2. \quad (2.4.9)$$

Отметим, что полученная формула для  $\tau$  является приближенной. Основные ее неточности те же, что и рассмотренные в § 1, и они имеют тот же порядок величины.

Перейдем теперь к минимизации среднего времени обнаружения канала с сигналом. Требуется найти минимум выражения (2.4.7) по  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , при ограничениях (2.4.8) и (2.4.9). Для этого воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Введем в рассмотрение функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L = & N a_1 + (N - n) \{ (\ln \beta_1^{-1} - a_1) [1 - \Phi(\sqrt{a_1})] + \\ & + \sqrt{a_1} \varphi(\sqrt{a_1}) \} + n (\ln \alpha_1^{-1} - a_1) + n a_2 + \\ & + (n - 1) \{ (\ln \beta_2^{-1} - a_2) [1 - \Phi(\sqrt{a_2})] + \sqrt{a_2} \varphi(\sqrt{a_2}) \} + \\ & + (\ln \alpha_2^{-1} - a_2) + \lambda_1 \left( \alpha_1 \frac{N}{n} + \alpha_2 n - \alpha \right) + \lambda_2 (\beta_1 + \beta_2 - \beta). \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Дифференцируя (2.4.10) по  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и приравнявая нулю полученные производные, составл

ем систему восьми уравнений с восемью неизвестными. Решение этой системы уравнений дает нам точки, подозрительные на экстремум. Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = -\frac{n}{\alpha_1} + \frac{N}{n} \lambda_1 = 0; \quad (2.4.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_2} = -\frac{1}{\alpha_2} + n \lambda_1 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = \frac{(N-n)[1-\Phi(\sqrt{a_1})]}{\beta_1} + \lambda_2 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_2} = \frac{(n-1)[1-\Phi(\sqrt{a_2})]}{\beta_2} + \lambda_2 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = (N-n) \left[ \Phi(\sqrt{a_1}) - (\ln \beta_1^{-1} - 1) \frac{\varphi(\sqrt{a_1})}{2\sqrt{a_1}} \right] = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = (n-1) \left[ \Phi(\sqrt{a_2}) - (\ln \beta_2^{-1} - 1) \frac{\varphi(\sqrt{a_2})}{2\sqrt{a_2}} \right] = 0;$$

$$\alpha = \alpha_1 \frac{N}{n} + \alpha_2 n; \quad \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Из первого, второго и седьмого уравнений системы (2.4.11) получаем, что

$$\alpha_1 = \frac{\alpha n^2}{N(n+1)}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha}{n(n+1)}. \quad (2.4.12)$$

Аналогично из третьего, четвертого и восьмого уравнений системы (2.4.11) получаем, что

$$\beta_1 = \frac{\beta(N-n)[1-\Phi(\sqrt{a_1})]}{(N-n)[1-\Phi(\sqrt{a_1})] + (n-1)[1-\Phi(\sqrt{a_2})]}; \quad (2.4.13)$$

$$\beta_2 = \frac{\beta(n-1)[1-\Phi(\sqrt{a_2})]}{(N-n)[1-\Phi(\sqrt{a_1})] + (n-1)[1-\Phi(\sqrt{a_2})]}. \quad (2.4.14)$$

Решая пятое уравнение из (2.4.11) с учетом (2.4.13), получаем

$$\ln \beta^{-1} = 1 + \frac{2\sqrt{a_1} \Phi(\sqrt{a_1})}{\varphi(\sqrt{a_1})} -$$

$$-\ln \frac{(N-n)[1-\Phi(\sqrt{a_1})] + (n-1)[1-\Phi(\sqrt{a_2})]}{(N-n)[1-\Phi(\sqrt{a_1})]}. \quad (2.4.15)$$

Точно так же, решая шестое уравнение из (2.4.11), получим с учетом (2.4.14), что

$$\ln \beta^{-1} = 1 + \frac{2\sqrt{a_2} \Phi(\sqrt{a_2})}{\varphi(\sqrt{a_2})} - \ln \frac{(N-n)[1-\Phi(\sqrt{a_1})] + (n-1)[1-\Phi(\sqrt{a_2})]}{(n-1)[1-\Phi(\sqrt{a_2})]}. \quad (2.4.16)$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $N \gg n$ . При  $\frac{N}{n} \rightarrow \infty$  выражение

$$\ln \frac{(N-n)[1-\Phi(\sqrt{a_1})] + (n-1)[1-\Phi(\sqrt{a_2})]}{(N-n)[1-\Phi(\sqrt{a_1})]} \rightarrow 0,$$

а выражение

$$\ln \frac{(N-n)[1-\Phi(\sqrt{a_1})] + (n-1)[1-\Phi(\sqrt{a_2})]}{(n-1)[1-\Phi(\sqrt{a_2})]}$$

асимптотически равно

$$\ln \frac{(N-n)[1-\Phi(\sqrt{a_1})]}{(n-1)[1-\Phi(\sqrt{a_2})]}.$$

Другими словами, при  $N \gg n$  соотношения (2.4.15) и (2.4.16) приобретают соответственно вид

$$\ln \beta^{-1} = 1 + \frac{2\sqrt{a_1} \Phi(\sqrt{a_1})}{\varphi(\sqrt{a_1})}; \quad (2.4.17)$$

$$\ln \beta^{-1} = 1 + \frac{2\sqrt{a_2} \Phi(\sqrt{a_2})}{\varphi(\sqrt{a_2})} - \ln \frac{(N-n)[1-\Phi(\sqrt{a_1})]}{(n-1)[1-\Phi(\sqrt{a_2})]}. \quad (2.4.18)$$

Легко показать, что правая часть (2.4.17) представляет собой строго монотонно возрастающую функцию от  $a_1$ . Аналогично правая часть (2.4.18) — строго монотонная

функция как от  $a_1$ , так и от  $a_2$ . Поэтому, задаваясь  $a_1$ , однозначно находим  $\beta$  из (2.4.17). Затем для фиксированных  $N, n, a_1, \beta$  находим  $a_2$  как корень уравнения (2.4.18), причем, в силу строгой монотонной зависимости (2.4.18) от  $a_2$ , этот корень — единственный. Таким образом, решение системы уравнений (2.4.11) единственно. Прodelывая нетрудные, но громоздкие выкладки, можно показать, что матрица вторых частных производных функции Лагранжа (2.4.10) является положительно определенной матрицей. Вследствие этого найденное решение системы (2.4.11) обеспечивает глобальный минимум функции (2.4.10). Подставляя найденное решение системы (2.4.11) в (2.4.7), находим минимально возможное среднее время обнаружения канала с сигналом, которое равно

$$\begin{aligned} \tau_{\min} = & Na_1 + (N-n) \{ (\ln \beta^{-1} - a_1) [1 - \Phi(\sqrt{a_1})] + \\ & + \sqrt{a_1} \varphi(\sqrt{a_1}) \} + n \left( \ln \frac{N(n+1)}{\alpha n^2} - a_1 \right) + na_2 + \\ & + (n-1) \{ [1 - \Phi(\sqrt{a_2})] \left( \ln \frac{(N-n)! [1 - \Phi(\sqrt{a_1})]}{\beta(n-1) [1 - \Phi(\sqrt{a_2})]} - a_2 \right) + \right. \\ & \left. + \sqrt{a_2} \varphi(\sqrt{a_2}) \} + \ln \frac{n(n+1)}{\alpha} - a_2. \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

С другой стороны, среднее время обнаружения канала с сигналом двухэтапным поиском, когда группировки нет, то есть  $n=1$ , из (2.4.19), очевидно, равно

$$\begin{aligned} \tau = & Na_1 + \ln \frac{N}{\alpha} - a_1 + \\ & + (N-1) \{ (\ln \beta^{-1} - a_1) [1 - \Phi(\sqrt{a_1})] + \sqrt{a_1} \varphi(\sqrt{a_1}) \}, \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

где  $\alpha = \alpha_1 N, \beta = \beta_1$ .

Зависимость  $a_1$  от  $\lg \beta^{-1}$  (2.4.17) приведена на рис. 2.4.6 (сплошная линия). На рис. 2.4.7 изображена зависимость  $\tau_{\min}/\tau$  от  $n$  для различных  $\alpha$  и  $N$ . На рис. 2.4.8 представлена зависимость  $\tau_{\min}/\tau$  от  $n$  для  $N=10^3$ ,  $\alpha=10^{-4}$  и различных  $a_1$ . Из этих графиков можно сделать следующие выводы.

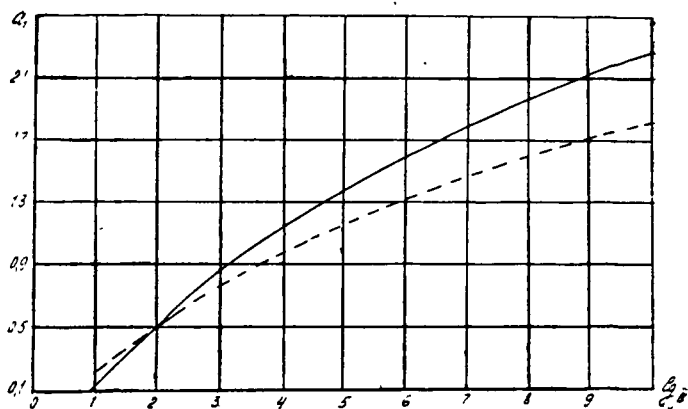


Рис. 2.4.6

1. С ростом  $n$  время обнаружения канала с сигналом монотонно возрастает. Этому можно предложить следующее объяснение. С одной стороны, объединение каналов в группы, образуя меньшее число групп, должно приводить к уменьшению времени обнаружения канала с сигналом. Но, с другой стороны, объединение каналов в группы приводит к уменьшению отношения сигнала к шуму, что должно приводить к увеличению времени обнаружения канала с сигналом. В рассматриваемом случае второй эффект превалирует над первым, и время обнаружения канала с сигналом растет с ростом  $n$ .

2. При больших  $N$  ( $N \gg 10^3$ ) увеличение времени обнаружения за счет объединения каналов в группы невелико и достигает нескольких процентов для  $n=10$ . Так, например, как следует из рис. 2.7, при  $n=10, N=10^3, \alpha=10^{-4}$  и  $a_1=1,1$ , происходит увеличение среднего времени обнаружения канала с сигналом на 5,7%. Поэтому при большом числе каналов их объединение, давая значительный выигрыш в объеме памяти, не приводит в то же самое время к существенным потерям во времени обнаружения.

3. Увеличение времени обнаружения канала с сигналом растет с уменьшением  $\alpha$ , но это возрастание



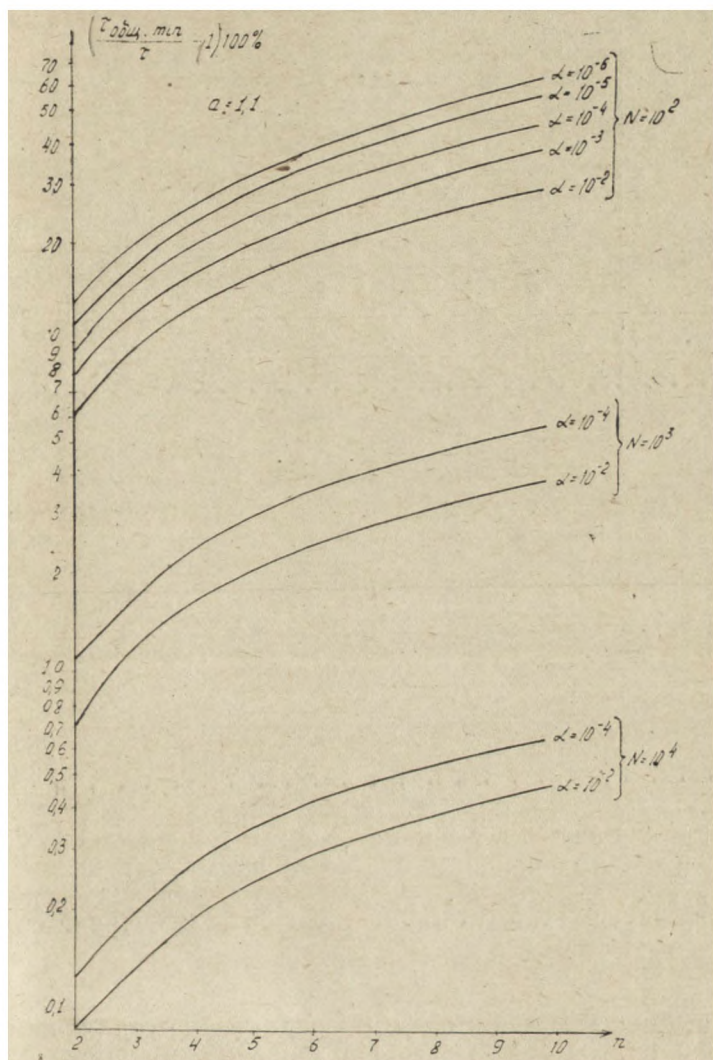


Рис. 2.4.7

существенно и проявляется все меньше с ростом  $N$ .  
 [например, для  $N=10^4$ ,  $n=10$ ,  $\alpha=10^{-4}$ ,  $a_1=1,1$  проис-  
 ходит увеличение среднего времени обнаружения ка-

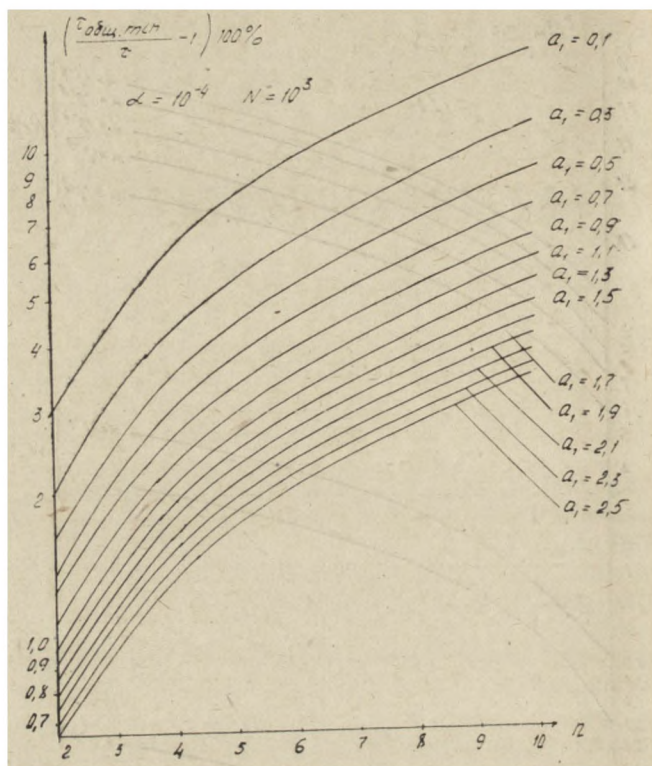


Рис. 2.4.8

нала с сигналом на 0,67%. Для тех же данных  $\alpha = 10^{-6}$  увеличение происходит на 0,85%. Если же  $N = 10^5$ ,  $n = 10$ ,  $a_1 = 1,1$  и  $\alpha = 10^{-6}$ , то увеличение среднего времени обнаружения канала с целью происходит всего на 0,09%.

## § 5. Двухэтапный поиск сигнала в многоканальной системе автоматами с линейной тактикой

В данном параграфе исследуется алгоритм двухэтапного поиска сигнала в многоканальной системе автоматами с линейной тактикой, которые являются дискретными аналогами, реализующими последователь

ную процедуру Вальда [21]. Рассматриваемый алгоритм заключается в следующем.

1. На первом этапе все каналы предварительно просматриваются каждый своим автоматом в течение  $n$  тактов.

2. Все каналы упорядочиваются в порядке убывания номеров состояний своих автоматов так, что номер 1 получает канал, автомат которого находится в состоянии с максимальным номером. Канал, автомат которого находится в состоянии с несколько меньшим номером, получает номер 2 и т. д. Максимальный номер  $N$  получает канал, автомат которого находится в состоянии с наименьшим номером. Если при упорядочивании встречаются каналы, у которых автоматы после предварительного просмотра находятся в состояниях с одинаковыми номерами, то они упорядочиваются произвольно.

3. На втором этапе все каналы досматриваются в порядке убывания номеров состояний своих автоматов или, что то же, в порядке возрастания своих номеров. Достижение автоматом состояния с номером  $d$  соответствует вынесению решения в пользу гипотезы  $H_d$  (сигнал в канале есть). Достижение же автоматом состояния с номером 0 — решению в пользу гипотезы  $H_0$  (сигнала в канале нет).

Исследование рассматриваемого алгоритма поиска сигнала ограничим вычислением среднего времени, проходящего между началом поиска и обнаружением канала с сигналом. При этом будем предполагать, что всего имеется  $N$  каналов ( $N > 1$ ), и сигнал может присутствовать только в одном из них. Каждому каналу сопоставлен описанный автомат, так что теперь канал характеризуется состоянием своего автомата. Прежде чем перейти к нахождению среднего времени обнаружения канала с сигналом, введем необходимые обозначения. Обозначим через  $m_+$  число переходов автомата за  $n$  тактов предварительного просмотра в состояния с большим номером, а через  $m_-$  — число переходов автомата в состояния с меньшим номером, а через  $m_0$  — число тактов, когда автомат не менял своего состояния, так что  $m_+ + m_- + m_0 = n$ . Разность  $m_+ - m_-$  для автомата канала с сигналом обозначим через  $\chi$ , а

для автомата канала без сигнала через  $\gamma$ . Тогда через  $n$  тактов предварительного просмотра автомат канала с сигналом будет находиться в состоянии с номером  $k=i_0+\nu$ , а автомат  $l$ -го канала без сигнала — в состоянии с номером  $j_l=i_0+\gamma_l$ . С учетом введенных обозначений получим, что условное среднее время обнаружения канала с сигналом при условии, что после предварительного просмотра автомат  $l$ -го канала без сигнала оказался в состоянии с номером  $j_l=i_0+\gamma_l$ , а автомат канала с сигналом в состоянии с номером  $k=i_0+\nu$ , равно

$$t = Nn + \sum_{l=1}^{N-1} T(j_l) \theta(\gamma_l - \nu) + n_1, \quad (2.5.1)$$

где  $T(j_l)$  есть среднее число тактов, необходимых для вынесения решения на этапе досмотра, если после предварительного просмотра автомат  $l$ -го канала оказался в состоянии с номером  $j_l$ . В (2.5.1) первое слагаемое — время предварительного просмотра всех каналов. Второе слагаемое есть время, которое затрачивается на втором этапе для изучения тех каналов без сигнала, которые после упорядочивания получили номер, меньший, чем номер канала с сигналом. Третье слагаемое в (2.5.1) представляет время, которое потребуется для дополнительного изучения канала с сигналом на втором этапе поиска. Усредняя по возможным значениям величины  $\nu$  и  $\gamma_l$ , перепишем (2.5.1) в виде

$$\frac{\bar{t}}{N} = n + \frac{1}{N} M_{\nu, \gamma_l} \left\{ \sum_{l=1}^{N-1} T(j_l) \theta(\gamma_l - \nu) \right\} + \frac{M\{n_1\}}{N}. \quad (2.5.2)$$

Для дальнейших расчетов нам необходимо знать распределение вероятностей величин  $\nu$  и  $\gamma$ . Очевидно, вероятность того, что за  $n$  тактов предварительного просмотра автомат канала с сигналом совершит  $m_+$  переходов в состояния с большим номером,  $m_-$  — переходов в состояния с меньшим номером и  $m_0$  перейдет в состояние с тем же номером, равна

$$P(m_+, m_-, m_0) = \frac{n!}{m_+! m_-! m_0!} p^{m_+} q^{m_-} (1-p-q)^{m_0}.$$

Используя известные формулы преобразования случайных величин, нетрудно получить, что распределе-

ние вероятностей для величины  $\nu$  после  $n$  тактов предварительного просмотра имеет вид

$$P_{\nu}(k|n) = \begin{cases} \sum_{\omega=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{n! p^{k+\omega} q^{\omega} (1-p-q)^{n-k-2\omega}}{\omega! (k+\omega)! (n-k-2\omega)!}, & k \geq 0; \\ \sum_{\omega=-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{n! p^{k+\omega} q^{\omega} (1-p-q)^{n-k-2\omega}}{\omega! (k+\omega)! (n-k-2\omega)!}, & k < 0. \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Аналогично у автомата канала без сигнала распределение вероятностей величины  $\gamma$  после  $n$  тактов предварительного просмотра имеет вид

$$P_{\gamma}(k|n) = \begin{cases} \sum_{\omega=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{n! q^{\omega+k} p^{\omega} (1-p-q)^{n-k-2\omega}}{\omega! (\omega+k)! (n-k-2\omega)!}, & k \geq 0; \\ \sum_{\omega=-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{n! q^{\omega+k} p^{\omega} (1-p-q)^{n-k-2\omega}}{\omega! (\omega+k)! (n-k-2\omega)!}, & k < 0. \end{cases} \quad (2.5.4)$$

Перейдем теперь к вычислению выражения  $M\left\{\sum_{i=1}^{N-1} T(j_i) \theta(\gamma_i - \nu)\right\}$  из (2.5.2). Имеем

$$\begin{aligned} & M\left\{\sum_{i=1}^{N-1} T(j_i) \theta(\gamma_i - \nu)\right\} = \\ & = (N-1) \sum_{s=-n}^n P_{\nu}(s|n) \left[ \sum_{k=s+1}^n T(k) P_{\gamma}(k|n) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} T(s) P_{\gamma}(s|n) \right]. \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Заметим, что при фиксированных вероятностях ошибок ложной тревоги  $\alpha$  и пропуска сигнала  $\beta$  однозначно определяются параметры автомата [21]

$$i_0 = \frac{\ln \frac{1-\alpha}{\beta}}{\ln \lambda}, \quad d = \frac{\ln \frac{1-\alpha}{\beta} + \ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{|\ln \lambda|}.$$

Среднее время изучения автоматом, начавшим свое движение из состояния с номером  $i$ , канала без сигнала равно [21]

$$T = \frac{1}{p-q} \left\{ i \left( 1 - \frac{\lambda^i - 1}{\lambda^d - 1} \right) - (d-i) \frac{\lambda^i - 1}{\lambda^d - 1} \right\},$$

где  $\lambda = p/q > 1$ . В интересующем нас случае  $\alpha, \beta = 1$ , что возможно, когда  $\lambda^i < \lambda^d$ , среднее время изучения канала без сигнала автоматом, начавшим свое движение из состояния с номером  $i$ , приближенно равно

$$T \approx \frac{i}{p-q}.$$

Поскольку на втором этапе автомат  $l$ -го канала без сигнала свое движение из состояния с номером  $i + \gamma_l$ , то  $T(j_l) = \frac{i + \gamma_l}{p-q}$ . Подставляя это выражение в (2.5.5), получим

$$\begin{aligned} M \left\{ \sum_{l=1}^{N-1} T(j_l) \theta(\gamma_l - \nu) \right\} &= \\ &= \frac{N-1}{p-q} \left\{ i_0 \sum_{s=-n}^n P_\nu(s|n) \sum_{k=s+1}^n P_\gamma(k|n) + \right. \\ &+ \sum_{s=-n}^n P_\nu(s|n) \sum_{k=s+1}^n k P_\gamma(k|n) + \frac{i_0}{2} \sum_{s=-n}^n P_\nu(s|n) P_\gamma(s|n) + \\ &\left. + \frac{1}{2} \sum_{s=-n}^n s P_\nu(s|n) P_\gamma(s|n) \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Упростим выражение (2.5.6). Для этого найдем характеристические функции случайных величин  $\nu$  и  $\gamma$ . По определению характеристической функции имеем

$$\begin{aligned} g_\nu(t) &= M \{ e^{it(m_+ - m_-)} \} = M \left\{ e^{it \sum_{j=1}^n (m_+^j - (m_-^j))} \right\} = \\ &= (pe^{it} + qe^{-it} + r)^n, \end{aligned}$$

где  $m_+$ ,  $m_-$  — соответственно число переходов автомата в состояния с большими и меньшими номерами за один такт. Поэтому разность  $m_+ - m_-$  — дискретная случайная величина, ряд распределения которой имеет вид

|    |   |    |
|----|---|----|
| -1 | 0 | +1 |
| q  | r | p  |

Аналогично получаем, что

$$g_{\gamma}(t) = (pe^{-it} + qe^{it} + r)^n.$$

Введем в рассмотрение случайную величину  $\rho = \gamma - \nu$ . Заметим, что  $-2n \leq \rho \leq 2n$ , а ее характеристическая функция с учетом характеристических функций величин  $\gamma$  и  $\nu$  имеет вид

$$\begin{aligned} g_{\rho}(t) &= M[e^{it\rho}] = g_{\nu}(-t) g_{\gamma}(t) = \\ &= (pe^{-it} + r + qe^{it})^{2n}. \end{aligned}$$

Зная характеристическую функцию величины  $\rho$ , можем записать и закон распределения вероятностей для нее:

$$P_{\rho}(j|2n) = \begin{cases} \sum_{\omega=0}^{\left[\frac{2n-j}{2}\right]} \frac{(2n)! p^{\omega} q^{j+\omega} (1-p-q)^{2n-k-2\omega}}{\omega! (j+\omega)! (2n-k-2\omega)!}, & j \geq 0; \\ \sum_{\omega=-j}^{\left[\frac{2n-j}{2}\right]} \frac{(2n)! p^{\omega} q^{j+\omega} (1-p-q)^{2n-k-2\omega}}{\omega! (j+\omega)! (2n-k-2\omega)!}, & j < 0. \end{cases} \quad (2.5.7)$$

Используя (2.5.7), получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{s=-n}^n P_{\nu}(s|n) \sum_{k=s+1}^n P_{\gamma}(k|n) &= \sum_{j=1}^{2n} P_{\rho}(j|2n) = \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \sum_{\omega=0}^{\left[\frac{2n-j}{2}\right]} \frac{(2n)! p^{\omega} q^{j+\omega} (1-p-q)^{2n-j-2\omega}}{\omega! (j+\omega)! (2n-j-2\omega)!}. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Как следует из (2.5.3),  $P_{\nu}(s|n) \equiv 0$  для  $s > n$  и для  $s < -n$ . Аналогично, как следует из (2.5.4), для  $k > n$  и  $k < -n$   $P_{\gamma}(k|n) \equiv 0$ . Поэтому суммы во втором слагаемом выражения (2.5.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_{\nu}(s|n) \sum_{k=s+1}^{\infty} k P_{\gamma}(k|n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k P_{\gamma}(k|n) P\{\nu \leq \gamma - 1\} = \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k P_{\rho, \gamma}(j, k). \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

В (2.5.9) нам неизвестно совместное распределение  $P_{\rho, \gamma}(j, k)$ , а  $\rho$  и  $\gamma$  статистически зависимы. Чтобы най-

ти совместное распределение величин  $\rho$  и  $\gamma$ , воспользуемся двусторонним преобразованием Лапласа и связанным с ним  $z$  — преобразованием [23]. Тогда можем записать, что

$$P_{\gamma}(k|n) \leftrightarrow g_{\gamma}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k P_{\gamma}(k|n) = \left( qz + r + \frac{p}{z} \right)^n,$$

$$P_{\rho}(k|n) \leftrightarrow g_{\rho}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k P_{\rho}(k|n) = \left( pz + r + \frac{q}{z} \right)^n.$$

Найдем теперь характеристическую функцию системы двух случайных величин  $(\rho, \gamma)$ , используя двумерное  $z$  — преобразование, которое обозначим через  $D$ :

$$\begin{aligned} D\{P_{\rho\gamma}(j, k)\} &= M\{z_1^j z_2^k\} = \\ &= M\{z_1^{j-\gamma} z_2^{\gamma}\} = M\{z_1 z_2\}^{\gamma} M\left\{\left(\frac{1}{z_1}\right)^{\gamma}\right\} = \\ &+ \left( qz_1 z_2 + r + \frac{p}{z_1 z_2} \right)^n \left( qz_1 + r + \frac{p}{z_1} \right)^n = \\ &= (g_{\rho\gamma}(z_1, z_2)) = \sum_{j=-2n}^{2n} \sum_{k=-n}^n |z_1^j z_2^k P_{\rho\gamma}(j, k)|. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Используя (2.5.10), найдем в явном виде значение внутренней суммы в выражении (2.5.9). Так как внутренняя сумма в (2.5.9) есть не что иное, как  $M\{\gamma|\rho\} P_{\rho}(j)$ , то, пользуясь одним из свойств характеристической функции, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\rho\gamma}(z_1, z_2)}{\partial z_2} \Big|_{z_2=1} &= \sum_{j=-2n}^{2n} z_1^j \sum_{k=-n}^n k z_2^{k-1} P_{\rho\gamma}(j, k) \Big|_{z_2=1} = \\ &= \sum_{j=-2n}^{2n} z_1^j \sum_{k=-n}^n k P_{\rho\gamma}(j, k) = \\ &= \left( qz_1 + r + \frac{p}{z_1} \right)^{2n-1} \left( qz_1 - \frac{p}{z_1} \right) n = \\ &= \sum_{j=-2n}^{2n} z_1^j \bar{a}_j(n). \end{aligned} \quad (2.5.11)$$



Таким образом:

$$\sum_{k=-n}^n k P_{p\gamma}(j, k) = M\{\gamma|p\} = \tilde{a}_j'(n).$$

Представим  $(qz + r + p'z)^{2n-1}$  в виде  $\sum_{j=-2n}^{2n} z^j a_j(2n-1)$  и, отбросив индекс у  $z$ , перепишем (2.5.11) в виде

$$\begin{aligned} nq \sum_{j=-2n}^{2n} z^{j+1} a_j(2n-1) - np \sum_{j=-2n}^{2n} z^{j-1} a_j(2n-1) = \\ = \sum_{j=-2n}^{2n} z^j \tilde{a}_j(n). \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях в (2.5.12), найдем в явном виде значения коэффициентов  $\tilde{a}_j(n)$ :

$$\tilde{a}_j(n) = \begin{cases} nq a_{j-1}(2n-1) - np a_{j+1}(2n-1), & \text{если} \\ & -2n+1 \leq j \leq 2n-1; \\ nq a_{j-1}(2n-1), & \text{если } j=2n; \\ -np a_{j+1}(2n-1), & \text{если } j=-2n. \end{cases} \quad (2.5.13)$$

В (2.5.12) и (2.5.13)

$$a_j(n) = \begin{cases} \sum_{\omega=0}^{\lfloor \frac{n-j}{2} \rfloor} \frac{n! p^\omega q^{j+\omega} (1-p-q)^{n-j-2\omega}}{\omega! (j+\omega)! (n-j-2\omega)!}, & j \geq 0; \\ \sum_{\omega=-j}^{\lfloor \frac{n-j}{2} \rfloor} \frac{n! p^\omega q^{j+\omega} (1-p-q)^{n-j-2\omega}}{\omega! (j+\omega)! (n-j-2\omega)!}, & j < 0. \end{cases} \quad (2.5.14)$$

С учетом (2.5.14) можем записать второе слагаемое из (2.5.6) в окончательном виде

$$\begin{aligned} \sum_{s=-n}^n P_s(s|n) \sum_{k=s+1}^n k P_{p\gamma}(k|n) = \\ = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=-n}^n k P_{p\gamma}(j, k) = \sum_{j=1}^{2n} \tilde{a}_j(n). \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Рассмотрим теперь сумму третьего слагаемого в (2.5.6), которая, как легко видеть, есть не что иное, как

$$\sum_{s=-n}^n P_v(s|n) P_\gamma(s|n) = \sum_{s=-n}^n P_{v\gamma}(s, s) = P_0(0|2n). \quad (2.5.16)$$

Наконец, сумма в последнем слагаемом выражения (2.5.6) всегда равна нулю как нечетная функция, суммируемая по симметричному промежутку. Таким образом, с учетом (2.5.8), (2.5.15), (2.5.16) и последнего замечания окончательно можем записать, что

$$M \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} T(j_i) \theta(\gamma_i - v) \right\} = \frac{N-1}{p-q} \left\{ i_0 \sum_{j=1}^{2n} P_p(j|2n) + \sum_{j=1}^{2n} \tilde{a}_j(n) + \frac{i_0}{2} P_p(0|2n) \right\}. \quad (2.5.17)$$

Подставляя (2.5.17) в (2.5.2), перейдем к пределу при  $N \rightarrow \infty$ . В результате получим искомое среднее время обнаружения канала с сигналом, которое имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\tau}' N = n + \frac{1}{p-q} \left\{ i_0 \sum_{j=1}^{2n} P_p(j|2n) + \sum_{j=1}^{2n} \tilde{a}_j(n) + \frac{i_0}{2} P_p(0|2n) \right\} = \\ &= n + \frac{\ln \beta^{-1}}{(p-q) \ln \lambda} \sum_{j=1}^{2n} P_p(j|2n) + \frac{1}{p-q} \sum_{j=1}^{2n} \tilde{a}_j(n) + \\ &+ \frac{\ln \beta^{-1}}{2(p-q) \ln \lambda} P_p(0|2n) = f(\ln \beta^{-1}, n, p, q, r). \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

Предположим, что мы нашли  $n = n^*$ , оптимальное в смысле минимума среднего времени обнаружения канала с сигналом. В этом случае справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} f(\ln \beta^{-1}, n^*, p, q, r) &= f(\ln \beta^{-1}, n^* + 1, p, q, r); \\ f(\ln \beta^{-1}, n^*, p, q, r) &= f(\ln \beta^{-1}, n^* - 1, p, q, r). \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

Равенство в (2.5.19) достигается только на границе, то есть, например, когда

$$f(\ln \beta^{-1}, n^*, p, q, r) = f(\ln \beta^{-1}, n^* - 1, p, q, r).$$

Расписывая это соотношение, получим уравнение для границы, разделяющей области с  $n = n^*$  и  $n = n^* - 1$ , которое имеет вид

$$\ln \beta^{-1} = \frac{-\ln \lambda \cdot \left[ \sum_{j=1}^{2n^*} \tilde{a}_j(n^*) - \sum_{j=1}^{2n^*-2} \tilde{a}_j(n^*-1) + p - q \right]}{\sum_{j=1}^{2n^*} P_p(j|2n^*) - \sum_{j=1}^{2n^*-2} P_p(j|2n^*-2) + 1} + \frac{1}{2} [P_p(0|2n^*) - P_p(0|2n^*-2)] \quad (2.5.20)$$

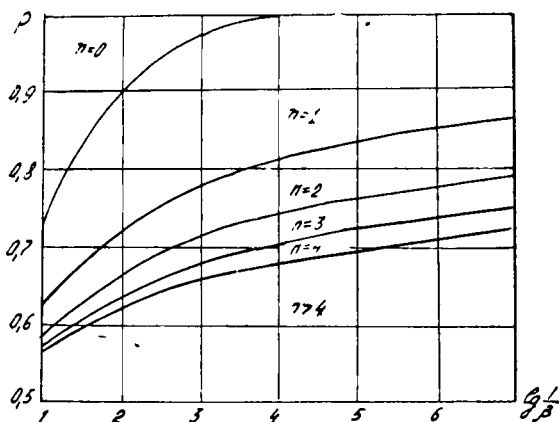


Рис. 2.5.9

Рассмотрим вначале частный случай, когда порог  $S$ , определяющий вероятности переходов автомата, равен нулю, что соответствует ситуации, когда  $r=0$ . На рис. 2.5.9 приведены границы, разделяющие области оптимальности, когда берется то или иное число тактов предварительного просмотра. Из рис. 2.5.9 видно, что кривые, соответствующие различным  $n^*$  в рассматриваемом диапазоне значений  $p$  и  $\beta$ , не пересекаются для  $n^* \geq 1$ . По-видимому, хотя это и не удалось показать аналитически, они не пересекаются и для всех остальных значений  $n$ , поэтому найденный минимум среднего времени обнаружения канала с сигналом скорее всего является глобальным. Оптимальные значения для  $n$  приведены на рис. 2.5.9 для каждой из областей. Из рис. 2.5.9 видим, что при больших значениях вероятности ошибки пропуска сигнала и больших вероятностях правильного шага предварительный просмотр не нужен. При вероятностях правильного шага

порядка 0,6—0,8 предварительный просмотр целесообразен, а число тактов предварительного просмотра невелико ( $n^* \leq 4$ ). Наконец, при вероятностях правильного шага порядка 0,52—0,6, что соответствует малому отношению сигнала к шуму, предварительный просмотр весьма целесообразен, при этом число тактов предварительного просмотра  $n^* > 4$ .

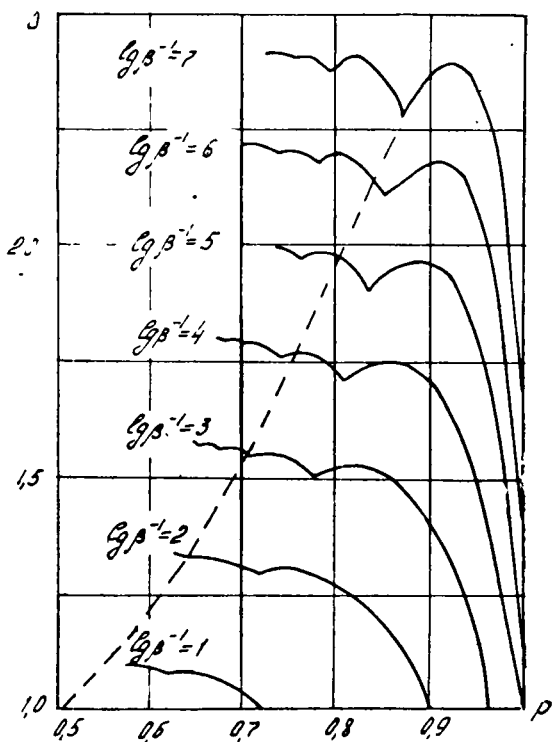


Рис. 2.5.10

Выигрыш от введения предварительного просмотра и последующего упорядочивания каналов по сравнению с алгоритмом последовательного просмотра обозначим через  $\Delta$ . Графики зависимости  $\Delta$  от  $p$  для различных значений  $\lg \beta^{-1}$  приведены на рис. 2.5.10, откуда следует, что существенный выигрыш достигается при

значении  $p \sim 0,95$ . Выигрыш возрастает с ростом  $\lg \beta^{-1}$ . При  $\beta \in [10^{-7}, 10^{-3}]$  введение предварительного просмотра и упорядочивания каналов позволяет в 1,5—2,4 раза уменьшить среднее время обнаружения канала с сигналом по сравнению с последовательным просмотром.

Исследуем теперь ситуацию, когда порог  $C$ , определяющий вероятности переходов автомата, отличен от нуля. Как и до сих пор, рассмотрим предельный случай близких гипотез, что соответствует малому отношению сигнала к шуму. В этом случае логарифм отношения правдоподобия  $\Lambda$  можно считать распределенным по нормальному закону с дисперсией  $\sigma^2 = 2\mu T_0$  (независимо от гипотез  $H_0$  и  $H_1$ ) и средним значением  $+\mu T_0$  или  $-\mu T_0$  при выполнении гипотезы  $H_1$  или  $H_0$ , а величина  $T_0$  — длительность одного такта работы автомата. В этом случае

$$\begin{aligned} p &= P\{\Lambda \geq C | H_1\} = 1 - \Phi\left(\frac{C - \mu T_0}{\sigma}\right); \\ q &= P\{\Lambda \leq -C | H_0\} = 1 - \Phi\left(\frac{C + \mu T_0}{\sigma}\right); \\ r &= 1 - p - q = \Phi\left(\frac{C - \mu T_0}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{C + \mu T_0}{\sigma}\right) - 1. \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

Из (2.5.21) видим, что вероятности переходов автомата зависят не только от параметров наблюдаемого процесса  $\mu$  и  $T_0$ , но и от порога  $C$ . Обозначая  $a =$

$= \sqrt{\frac{\mu T_0}{2}}$ ,  $x = C/\sigma$ , получим

$$\begin{aligned} p &= \Phi(a - x), \quad q = 1 - \Phi(a + x), \\ r &= \Phi(a + x) - \Phi(a - x). \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

Подставляя (2.5.22) в (2.5.18), получим явное выражение для  $\bar{\tau}$ , которое зависит от  $\ln \beta^{-1}$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $x$  и имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= n + \frac{1}{\Phi(a + x) + \Phi(a - x) - 1} \sum_{j=1}^{2n} \bar{a}_j(n) + \\ &+ \frac{\ln \beta^{-1}}{\ln \lambda \cdot [\Phi(a + x) + \Phi(a - x) - 1]} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[ \sum_{j=1}^{2n} P_p(j|2n) + \frac{1}{2} P_p(0|2n) \right] = \\ = f(\ln \beta^{-1}, n, a, x). \quad (2.5.23)$$

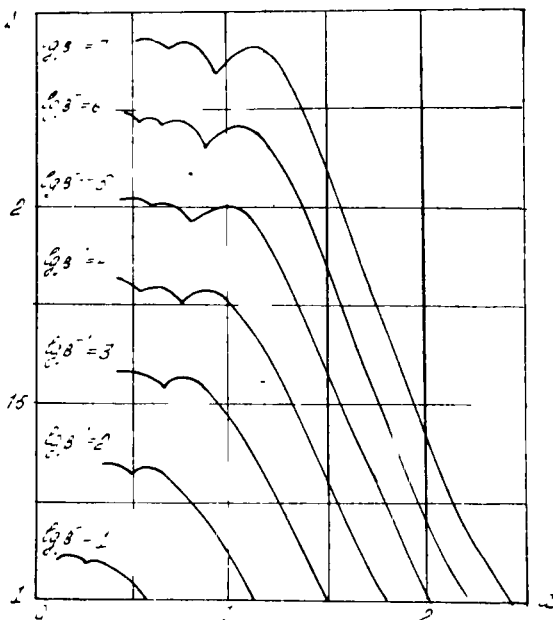


Рис. 2.5.11

Интересующий нас минимум  $\bar{t}$  по  $n$  и  $x$  был найден численно перебором значений  $x$  в интервале  $[0,001, \mu T_0 / 3\pi]$  с шагом  $\Delta x = 10^{-2}$  и  $n$  в интервале  $[0,10]$ . Примеры зависимости  $\Delta$  от  $a$  при различных значениях  $\lg \beta^{-1}$  приведены на рис. 2.5.11, откуда следует, что выигрыш значителен при небольших значениях  $a$ . Выигрыш  $\Delta$  возрастает с ростом  $\lg \beta^{-1}$ . Из рис. 2.5.12 видим, что предварительный просмотр занимает 0—4 такта работы автомата и что кривые, соответствующие различным  $n^*$  в рассматриваемом диапазоне значений  $\beta$  и  $p$ , не пересекаются между собой для  $n^* \leq 10$ . Повидимому, хотя и здесь это не удалось доказать аналитически, они не пересекаются и для всех остальных значений  $n$ , поэтому найденный минимум среднего

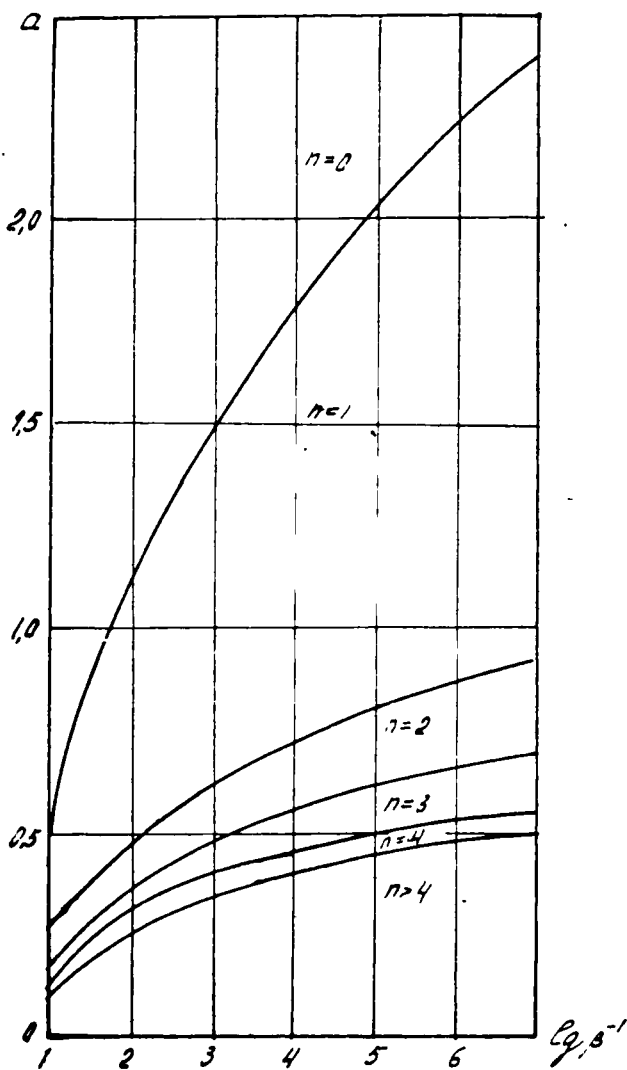


Рис. 2.5.12

времени обнаружения канала с сигналом по  $n$  и  $x$  будет скорее всего глобальным. Здесь же, на рис. 2.5.12, приведены оптимальные значения  $n$  для каждой из областей. Наконец, из рис. 2.5.13 следует, что оптимальные значения  $x$  при  $n > 0$  практически не зависят от  $n$  и  $\lg \beta^{-1}$ .

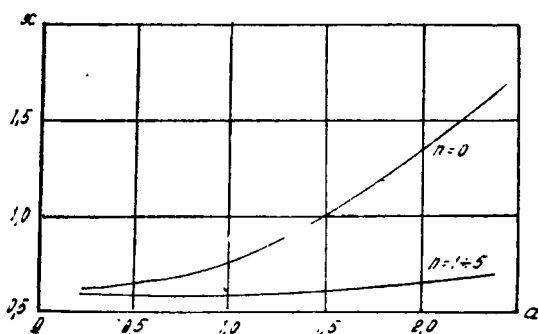


Рис. 2.5.13

Установим теперь величину проигрыша в среднем времени обнаружения канала с сигналом, который имеет место при переходе от непрерывного накопителя к дискретному накопителю логарифма отношения правдоподобия  $\Lambda$ . Для этого обратимся к зависимостям, изображенным на рис. 2.5.14, 2.5.15. Здесь представлены примеры проигрыша  $\nabla$  автомата в среднем времени обнаружения канала с сигналом непрерывному накопителю логарифма отношения правдоподобия  $\Lambda$  в зависимости от  $T_0$  — длительности одного такта работы автомата — для различных значений  $\lg \beta^{-1}$ .

Величина  $\nabla$  считалась по формуле

$$\nabla = \frac{\bar{\tau}_{\text{авт}} \cdot \mu T_0}{\bar{\tau}_{\text{непр}}},$$

где  $\bar{\tau}_{\text{авт}}$  вычислялось по формуле (2.5.23) при оптимальном  $n$  и оптимальном  $C$  (или  $C \neq 0$ ), а  $\bar{\tau}_{\text{непр}}$  вычислялось по формуле (2.5.24).

При оптимальном в смысле минимума среднего времени обнаружения выборе отличного от нуля по-



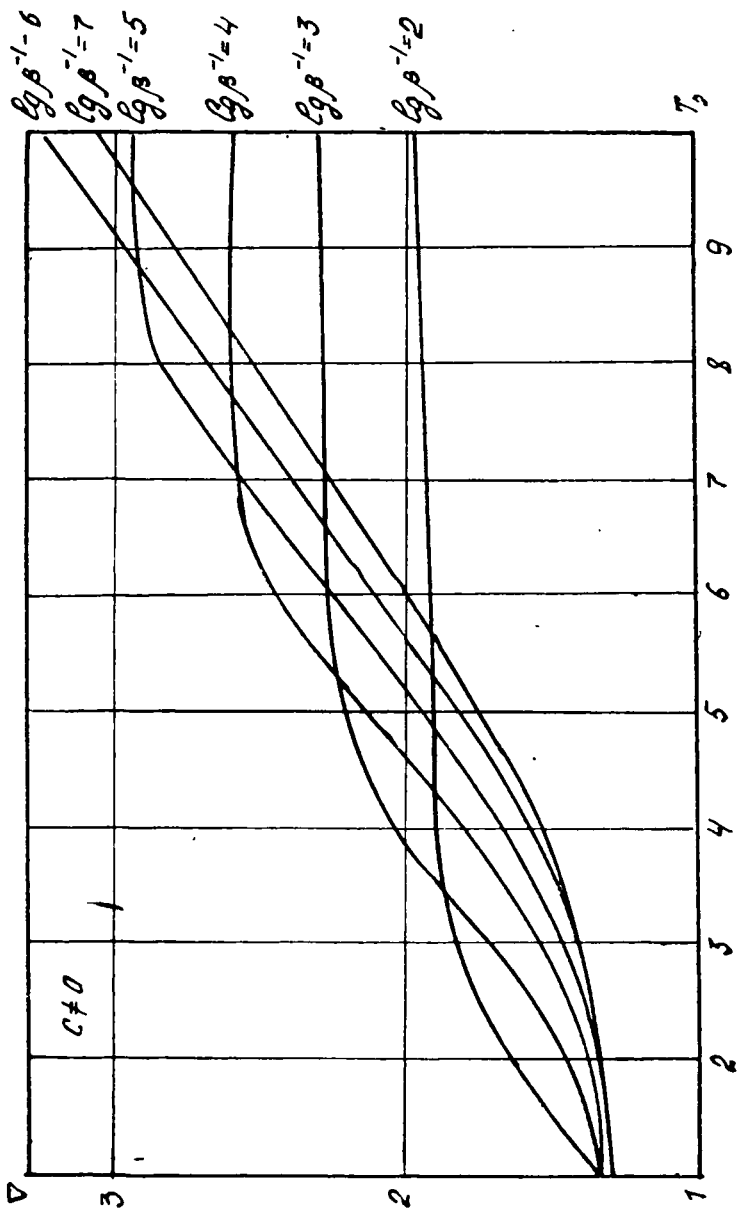


Рис. 2.5.14

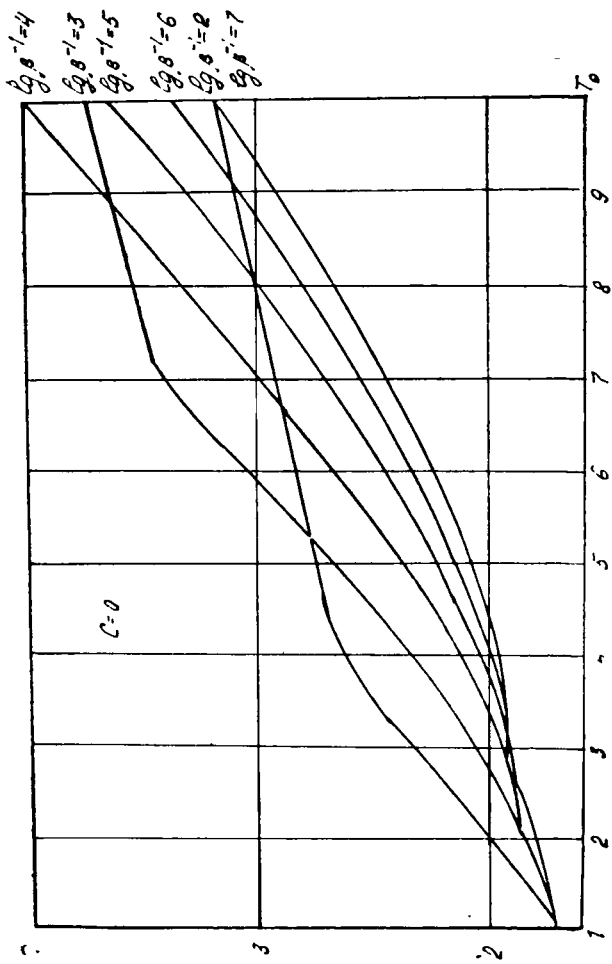


Рис. 2.5.15

рога  $C$ , определяющего вероятности переходов автомата, из рис. 2.5.14 видим, что проигрыш  $\nabla$  в среднем времени обнаружения канала с сигналом дискретного накопителя непрерывному накопителю величины  $\Lambda$  монотонно возрастает с увеличением длительности  $T_0$  одного такта работы автомата. Из рис. 2.5.14 следует, что имеется насыщение проигрыша, которое представлено на табл. 2.4.1

Т а б л и ц а 1.4.2

| $\lg^3 - 1$     | 2    | 3    | 4   | 5    | 6    | 7    |
|-----------------|------|------|-----|------|------|------|
| $\nabla_{\max}$ | 1,95 | 2,29 | 2,6 | 2,92 | 3,22 | 3,52 |

При малых  $T_0$  ( $\mu T_0 < 1$ ) проигрыш  $\nabla$  автомата непрерывному накопителю величины  $\Lambda$  невелик и равен примерно 1,3 для всех рассматриваемых значений величины  $\beta$ . Это согласуется с аналогичным результатом работы [19]. Если  $C=0$ , то, как следует из рис. 2.5.15, проигрыш автомата непрерывному накопителю логарифма отношения правдоподобия также монотонно возрастает с увеличением длительности одного такта работы автомата. При малых  $T_0$  ( $\mu T_0 < 1$ ) проигрыш  $\nabla$  примерно равен 1,7 для всех рассматриваемых значений  $\beta$ .

### ГЛАВА III

## ДВУХЭТАПНЫЙ ПОИСК ДВИЖУЩЕГОСЯ СИГНАЛА

Проблеме поиска сигнала в многоканальной системе, как уже отмечалось во введении, посвящен целый ряд работ.

Однако в перечисленных процедурах поиска предполагается, что сигнал неподвижен, то есть не перемещается из одного канала в другой.

Во многих случаях это предположение является очень ограничительным. Например, в радиолокационном случае предположение о том, что сигнал не перемещается из одного канала в другой, соответствует ситуации, когда цель не перемещается по сектору обзора. Поэтому возникает необходимость разработки таких алгоритмов поиска сигнала в многоканальной системе, которые учитывали бы возможность его перемещения из одного канала в другой. В этой главе предлагаются и исследуются два алгоритма поиска сигнала в многоканальной системе с учетом возможности его перемещения из одного канала в другой.

### § 1. Модель движения сигнала

При разработке и исследовании алгоритмов, учитывающих движение сигнала, необходимо иметь некоторую модель его движения. В настоящее время разработаны и используются несколько таких моделей [17, 24]:

1. Неслучайная модель движения сигнала, когда его движение математически описывается с помощью дифференциальных уравнений.

Однако эта модель имеет очень ограниченную область применения и поэтому в данной работе использоваться не будет.

2. Полиномиальная модель движения сигнала, когда его координаты (номер канала, где он находится) на ограниченном участке наблюдения представляются в виде полинома степени  $s$  относительно времени, то есть

$$Y(\theta, t) = \sum_{n=0}^s \theta_n t^n,$$

где  $\theta_n$  — неизвестные параметры движения, а  $t$  — текущее время. Использование этой модели предполагает достаточно точную оценку параметров  $\theta$  по результатам наблюдений, что возможно только тогда, когда сигнал уже обнаружен. Поэтому такая модель движения не может служить основой для построения систем обнаружения движущегося сигнала.

3. Модель движения сигнала с независимыми первыми либо вторыми приращениями. В этом случае если  $y_n$  — координата движущегося сигнала, измеренная в момент времени  $t_n$ , то величина

$$u_n = y_n - y_{n-1}$$

называется первым приращением координаты, а величина

$$\gamma_n = u_n - u_{n-1}$$

— вторым приращением координаты. В модели движения сигнала с независимыми первыми приращениями величины  $u_n$  считаются независимыми случайными величинами. Аналогично обстоит дело в модели движения с независимыми вторыми приращениями, где независимыми случайными величинами считают величины  $\gamma_n$ . Несмотря на свою простоту, эти модели достаточно хорошо описывают поведение многих реальных объектов. В то же время модели движения сигнала с независимыми первыми либо вторыми приращениями требуют сравнительно небольшого объема априорной информации. Вот почему в этой главе в качестве модели движущегося сигнала взята модель с независимыми первыми приращениями.

В случае поиска сигнала в многоканальной системе за координату сигнала следует принимать номер того канала, в котором он присутствует. Поэтому в данном случае модель движущегося сигнала с независимыми первыми приращениями приобретает следующий вид.

Пусть в момент времени  $t$  сигнал находился в канале с номером  $i$ , тогда в следующий момент времени с вероятностью  $p_k$  сигнал окажется в канале с номером  $i+k$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Величины  $p_k$  являются априорной информацией и считаются известными. Они должны определяться либо экспериментальным путем, либо из каких-то теоретических предположений. Их вычисление выходит за рамки данной работы. Простейшим примером такой модели является случай, когда  $p_1 = -p_{-1} = p$ ,  $p_0 = 1 - 2p$  и все остальные  $p_k = 0$ . Этот случай соответствует ситуации, когда сигнал может перемещаться только в соседние каналы. В этой ситуации исследование предлагаемых ниже алгоритмов поиска движущегося сигнала упрощается, так как в них присутствует только один параметр  $p$ . Поэтому исследование алгоритмов поиска движущегося сигнала, изложенное в § 3 и 4, проведено только для этого случая. Общий случай исследуется аналогично, но при этом объем и сложность формул очень сильно возрастают.

## § 2. Анализ двухэтапного поиска сигнала с упорядочиванием каналов и учетом его движения

Во второй главе был изучен алгоритм двухэтапного поиска сигнала в многоканальной системе с упорядочиванием каналов. Однако там предполагалось, что сигнал неподвижен. В этом параграфе будет проведено исследование характеристик двухэтапного поиска сигнала в многоканальной системе с упорядочиванием каналов, с учетом его движения и последующим сравнением полученных характеристик с соответствующими характеристиками алгоритма последовательного просмотра каналов. Для этого обозначим через  $p$  вероятность того, что за время предварительного просмотра  $T$  сигнал останется в том же канале, в котором он находился до начала просмотра. Через  $1-p$  обозначим веро-

ятность того, что за время  $T$  сигнал перейдет в любой другой канал. При сделанных предположениях о движении сигнала среднее время обнаружения канала с сигналом примет вид

$$\bar{t} = p \left[ NT + \frac{1}{\mu} M_{z, u_i} \left\{ \sum_{u_i \in z} (\ln \beta^{-1} + u_i) \right\} \right] + \\ + (1-p) \left[ NT + \frac{1}{\mu} M_{i, u(j)} \left\{ \sum_{j=1}^i (\ln \beta^{-1} + u_{(j)}) \right\} \right]. \quad (3.2.1)$$

Здесь сомножитель при  $p$  есть среднее время обнаружения канала с сигналом при условии, что за время  $NT$  сигнал остался в том же канале, где и был. Выражение в квадратных скобках во втором слагаемом есть среднее время обнаружения канала с сигналом при условии, что за время предварительного просмотра сигнал перешел в какой-либо другой канал. Как показано во второй главе [см. формулу (2.1.3)]:

$$M_{z, u_i} \left\{ \sum_{u_i \in z} (\ln \beta^{-1} + u_i) \right\} = (N-1) \{ (b-a) [1 - \Phi(\sqrt{a})] + \\ + \sqrt{a} \varphi(\sqrt{a}) \}, \quad (3.2.2)$$

где, как и всюду до сих пор,  $b = \ln \beta^{-1}$ ;  $a = \mu T$ . Перейдем теперь к вычислению среднего времени, необходимого для изучения тех каналов без сигнала, которые после упорядочивания получили меньший номер, чем номер канала с сигналом при условии, что за время между предварительным и окончательным просмотром сигнал перешел в какой-либо другой канал:

$$M_{i, u(i)} \left\{ \sum_{j=1}^i (b + u_{(j)}) \right\} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^i M_{u(j)} (b + u_{(j)}) = \\ = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-2} (N-j-1) M(b + u_{(j)}) = \frac{N-2}{2} b + \\ + \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-2} (N-j-1) M(u_{(j)}).$$

Поскольку плотность вероятностей  $j$ -й порядковой статистики случайной величины  $u$  равна [4]

$$p(u_{(j)}) = \\ = \frac{(N-1)!}{(j-1)!(N-j-1)!} F^{N-j-1}(u_{(j)}) [1-F(u_{(j)})]^{-1} F'(u_{(j)}),$$

где в силу нормальности случайной величины  $u$

$$F(u) = \Phi\left(\frac{u+a}{\sqrt{2a}}\right); \\ F'(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \exp\left[-\frac{(u+a)^2}{4a}\right],$$

то получаем, что

$$M_{i,u_{(j)}} \left\{ \sum_{j=1}^i (b+u_{(j)}) \right\} = \frac{N-2}{2} b + \\ + \frac{1}{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} u F'(u) du \sum_{j=1}^{N-2} \frac{(N-j-1) \cdot (N-1)!}{(j-1)!(N-j-1)!} \times \\ \times F^{N-j-1}(u) [1-F(u)]^{j-1} = \frac{N-2}{2} b + (N-2) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} u F(u) F'(u) du.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} u F(u) F'(u) du = \\ = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} u \Phi\left(\frac{u+a}{\sqrt{2a}}\right) e^{-\frac{(u+a)^2}{4a}} du = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} - \frac{a}{2},$$

то окончательно можем записать, что

$$M_{i,u_{(j)}} \left\{ \sum_{j=1}^i (b+u_{(j)}) \right\} = (N-2) \left( \frac{b-a}{2} + \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \right). \quad (3.2.3)$$

Введя в рассмотрение величину  $\mu \tilde{i}/N$  и переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , перепишем (3.2.1) с учетом (3.2.2) и (3.2.3) в виде

$$\bar{\tau} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu \tilde{i}}{N} = p[b - \Phi(\sqrt{a})(b-a) + \sqrt{a} \varphi(\sqrt{a})] +$$



$$+(1-p)\left[\frac{b+a}{2} + \sqrt{\frac{a}{2\pi}}\right]. \quad (3.2.4)$$

Величина  $\bar{\tau}$ , рассматриваемая как функция параметра  $a$ , имеет единственный минимум, положение которого определяется уравнением

$$b=1+\frac{2\sqrt{a}\Phi(\sqrt{a})}{\varphi(\sqrt{a})}+\frac{1-p}{p}\left(\frac{\sqrt{a}}{\varphi(\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varphi(\sqrt{a})}\right). \quad (3.2.5)$$

Действительно, в силу того, что

$$b'(\sqrt{a})=\frac{\Phi(\sqrt{a})+\sqrt{a}\varphi(\sqrt{a})+a\Phi(\sqrt{a})}{\sqrt{a}\varphi(\sqrt{a})}+\\ +\frac{1-p}{2p}\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}\varphi(\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varphi(\sqrt{a})}\right)>0$$

для  $a>0$ , то

$$b(\sqrt{a})=\frac{2\sqrt{a}\Phi(\sqrt{a})}{\varphi(\sqrt{a})}+\frac{1-p}{p}\left(\frac{\sqrt{a}}{\varphi(\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varphi(\sqrt{a})}\right)$$

является строго монотонно возрастающей функций своего аргумента. А это значит, что при фиксированных  $b$  и  $p$  уравнение (3.2.5) имеет единственное решение. Другими словами решение уравнения (3.2.5) или, что то же, решение уравнения  $\bar{\tau}'(a)=0$  дает единственную точку, подозрительную на экстремум. Поскольку  $\bar{\tau}''(a)>0$ , то величина  $\bar{\tau}$  из (3.2.4) действительно имеет минимум, положение которого определяется уравнением (3.2.5). Графики зависимости  $a=\mu T$  от  $\lg \beta^{-1}$  приведены на рис 3.1.1. Из рис. 3.1.1 следует, что предварительный просмотр каналов занимает при  $p=1$  20 — 25%, а при  $p=0,5$  — 8—16% среднего времени, необходимого для обнаружения канала с сигналом последовательной процедурой Вальда соответственно для  $\beta \in [10^{-1}, 10^{-11}]$ .

Последовательный просмотр каналов получается, когда  $a=0$ . При этом среднее время обнаружения канала с сигналом, как следует из (3.2.4), равно  $\bar{\tau}_0=$

$= \frac{1}{2} \ln \beta^{-1}$ . Поэтому выигрыш от введения предварительного просмотра каналов, их последующего упорядочивания и учета возможности перемещения сигнала из канала в канал равен

$$\Delta = \frac{\frac{1}{2} \ln \beta^{-1}}{p[b - \Phi(\sqrt{a})(b-a) + \sqrt{a} \varphi(\sqrt{a})] + (1-p) \left[ \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \right]}$$

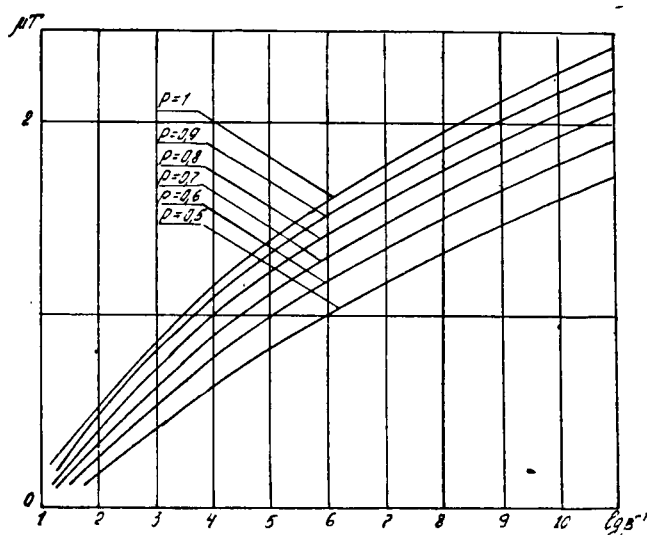


Рис. 3.1.1

Графики зависимости  $\Delta$  от  $\lg \beta^{-1}$  при оптимальном значении  $a$  (находится  $a$  как решение уравнения (3.2.5), которое доставляет минимум  $\tau$  из (3.2.4), и различных значениях  $p$  приведены на рис. 3.1.2, откуда следует, что введение предварительного просмотра каналов с последующим их упорядочиванием и учетом возможных перемещений сигнала из одного канала в другой уменьшает время, проходящее между началом

поиска и обнаружением канала с сигналом. Из табл. 3.1.1 видно, что выигрыш

Таблица 3.1.1

| $P$ | $\Delta$ для $\beta \in [10^{-2} - 10^{-7}]$ |
|-----|----------------------------------------------|
| 1   | 1,3—2,4                                      |
| 0,8 | 1,2—1,8                                      |
| 0,6 | 1,1—1,4                                      |

во времени обнаружения канала с сигналом растет с уменьшением  $\beta$  и понижается с уменьшением  $p$ . Это и не удивительно, так как с уменьшением  $p$  информация о положении сигнала, получаемая при предварительном

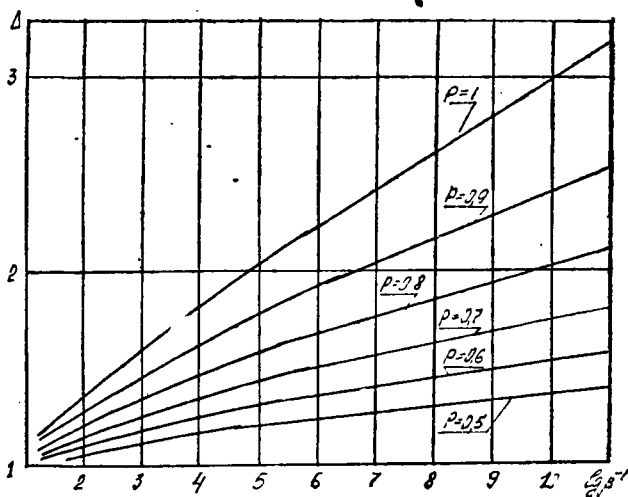


Рис. 3.1.2

просмотре каналов, играет все меньшую роль в системе поиска, и при  $p=0$  предварительный просмотр каналов вообще не нужен, ибо получаемая при этом информация о положении сигнала становится бесполезной.

### § 3. Двухэтапный поиск движущегося сигнала с забыванием информации, получаемой на первом этапе

В этом параграфе будет исследован алгоритм двухэтапного поиска движущегося сигнала, заключающийся в следующем.

1. На первом этапе каналы просматриваются последовательно один за другим каждый в течение некоторого времени  $t_0$ , меньшего времени  $t_1$ , необходимого для вынесения решения о наличии или отсутствии сигнала в канале. В каждом канале вычисляется логарифм отношения правдоподобия, который запоминается.

2. После этапа предварительного просмотра для учета возможных перемещений сигнала из одного канала в другой за время, проходящее между предварительным и окончательным просмотром, измеренные значения логарифма отношения правдоподобия пересчитываются по формуле

$$u'_j = \sum_{k=1}^N q_{jk} u_k,$$

где  $u_k$  — измеренное значение логарифма отношения правдоподобия в  $k$ -м канале;  $q_{jk}$  — некоторые коэффициенты, зависящие от скорости перемещения сигнала из канала в канал;  $u'_j$  — пересчитанное значение логарифма отношения правдоподобия в  $j$ -м канале.

3. Все каналы упорядочиваются в порядке убывания пересчитанных значений логарифма отношения правдоподобия так, что номер 1 получает канал с максимальным пересчитанным отношением правдоподобия, а максимальный номер получает канал с минимальным пересчитанным логарифмом отношения правдоподобия.

4. На втором этапе каналы просматриваются в порядке возрастания своих номеров каждый в течение времени  $t_1$  и при этом выносится решение о наличии или отсутствии сигнала в каждом из них.

Отметим, что основное отличие предлагаемого алгоритма поиска сигнала от изученных ранее состоит в том, что вся информация, получаемая на первом этапе, используется только в целях упорядочивания каналов и затем забывается. На втором этапе поиска окон-

чателный просмотр каналов начинается не с накопленного к этому моменту времени пересчитанного значения логарифма отношения правдоподобия, а с нуля.

В данном параграфе исследуется случай, когда за время, проходящее между предварительным и окончательным просмотром, сигнал с вероятностью  $1-p$  может остаться в том же канале, в котором он присутствовал до начала просмотра, с вероятностью  $p/2$  может перейти в соседний слева канал и с вероятностью  $p/2$  сигнал может перейти в соседний справа канал, а пересчет измеренных значений логарифма отношения правдоподобия проводится по формуле

$$u_j' = qu_{j-1} + (1-2q)u_j + qu_{j+1}, \quad 0 \leq q \leq \frac{1}{2}. \quad (3.3.1)$$

Очевидно, такая модель движения сигнала соответствует действительности только при достаточно медленном его перемещении по каналам. При более точном изучении предлагаемого алгоритма следовало бы учитывать переход сигнала в каналы, отстоящие от исходного на два, три и т. д. канала. Получающиеся при этом формулы будут аналогичны приводимым в этом параграфе, но только гораздо сложнее.

Перейдем теперь к нахождению одной из важнейших характеристик системы обнаружения—времени обнаружения сигнала. Введем для этого, как обычно, необходимые обозначения. Будем считать, что всего имеется  $N$  каналов ( $N \gg 1$ ), и сигнал может присутствовать только в одном из них. Считаем, что поисковый прибор также один. Измеренные значения логарифма отношения правдоподобия предполагаем нормальными случайными величинами с дисперсией  $2\mu t_0$  и математическим ожиданием  $t \pm \mu t_0$  в зависимости от того, присутствует сигнал в канале или его там нет. Здесь  $\mu$ —величина, характеризующая канал и имеющая смысл отношения сигнала к шуму, а  $t_0$ —время предварительного просмотра каждого канала. Так как упорядочивание теперь производится по величинам  $u_j'$  из (3.3.1), то условное среднее время обнаружения канала с сигналом в предположении, что в течение пред-

варительного просмотра сигнал находился в канале с номером  $i$ , равно]

$$\begin{aligned} \bar{t}_i = & N t_0 + t_1 \left[ p_{ii} \sum_{j \neq i} \int_{-\infty}^{\infty} du'_i \int_{u'_i}^{\infty} p(u'_i, u'_j) du'_j + \right. \\ & \left. + \sum_{k \neq i} p_{ik} \sum_{j \neq k} \int_{-\infty}^{\infty} du'_k \int_{u'_k}^{\infty} p(u'_j, u'_k) du'_j \right] + t_i. \quad (3.3.2) \end{aligned}$$

В (3.3.2) первое слагаемое есть время, отводимое на предварительный просмотр всех каналов. Слагаемые в квадратных скобках, учитывающие возможные перемещения сигнала из одного канала в другой, представляют собой время, затрачиваемое на изучение тех каналов без сигнала, которое после упорядочивания получили номер, меньший, чем номер канала с сигналом. Первое слагаемое в квадратных скобках появляется, если между предварительным и окончательным просмотром сигнал остался в том же канале, где и был. Второе слагаемое в квадратных скобках возникает, если в течение времени между предварительным и окончательным просмотром сигнал из канала с номером  $i$  переместился в канал с номером  $k$ , причем в рассматриваемом случае  $k=i \pm 1$ . Последнее слагаемое в (3.3.2) есть время, отводимое на втором этапе для изучения канала с сигналом. Из (3.3.1) следует, что величины  $u'_j$  являются нормальными случайными величинами с дисперсией

$$D\{u'_j\} = 2a(1 - 4q + 6q^2), \quad \forall j,$$

средним значением

$$\bar{u}'_j = \begin{cases} a(1 - 4q) & \text{для } j=i, \\ -a(1 - 2q) & \text{для } j=i \pm 1, \\ -a & \text{для } j \neq i, i \pm 1 \end{cases}$$

и ковариациями

$$\text{cov}(u'_j, u'_k) = 2a \cdot \begin{cases} 1 - 4q + 6q^2 & \text{для } k=j, \\ 2q(1 - 2q) & \text{для } k=j \pm 1, \\ q^2 & \text{для } k=j \pm 2, \\ 0 & \text{для остальных } k, \end{cases}$$

де  $a = \mu t_0$ .  
Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} du_i' \int_{u_i'}^{\infty} p(u_i' u_j') du_j' = \Phi \left( - \frac{\bar{u}_i' - \bar{u}_j'}{\sqrt{\sigma_{u_i'}^2 + \sigma_{u_j'}^2 - 2 \text{cov}(u_i', u_j')}} \right), \quad (3.3.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} du_k' \int_{u_k'}^{\infty} p(u_j' u_k') du_j' = \Phi \left( - \frac{\bar{u}_k' - \bar{u}_j'}{\sqrt{\sigma_{u_k'}^2 + \sigma_{u_j'}^2 - 2 \text{cov}(u_j', u_k')}} \right). \quad (3.3.4)$$

Тогда с учетом (3.3.3)

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \int_{-\infty}^{\infty} du_i' \int_{u_i'}^{\infty} p(u_i, u_j') du_j' &= \\ &= \sum_{j \neq i} \Phi \left( - \frac{\bar{u}_i' - \bar{u}_j'}{\sqrt{\sigma_{u_i'}^2 + \sigma_{u_j'}^2 - 2 \text{cov}(u_i', u_j')}} \right) = \\ &= 2 \Phi \left( - \frac{(1-3q)\sqrt{a}}{\sqrt{1-5q+8q^2}} \right) + 2 \Phi \left( - \frac{(1-2q)\sqrt{a}}{\sqrt{1-4q+5q^2}} \right) + \\ &+ (N-5) \Phi \left( - \frac{(1-2q)\sqrt{2}}{\sqrt{1-4q+6q^2}} \right). \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Аналогично с учетом (3.3.4) и принимая во внимание, что  $p_{ii} = 1-p$ , а  $p_{ik} = p/2$  для  $|i-k|=1$ , получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq i} p_{ik} \sum_{j \neq k} \int_{-\infty}^{\infty} du_k' \int_{u_k'}^{\infty} p(u_j', u_k') du_j' &= \\ &= \sum_{k \neq i} p_{ik} \sum_{j \neq k} \Phi \left( - \frac{\bar{u}_k' - \bar{u}_j'}{\sqrt{\sigma_{u_k'}^2 + \sigma_{u_j'}^2 - 2 \text{cov}(u_k', u_j')}} \right) = \\ &= p \left[ \frac{1}{2} + \Phi \left( \frac{(1-3q)\sqrt{a}}{\sqrt{1-5q+8q^2}} \right) + \Phi \left( - \frac{q\sqrt{a}}{\sqrt{1-5q+8q^2}} \right) + \right. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$+ \Phi\left(\frac{q\sqrt{a}}{\sqrt{1-4q+5q^2}}\right) + (N-5)\Phi\left(\frac{q\sqrt{a}}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right)\Bigg].$$

Подставляя (3.3.5) и (3.3.6) в (3.3.2), получим

$$\begin{aligned} \bar{t} = Nt_0 + t_1 & \left\{ (1-p) \left[ 2\Phi\left(-\frac{(1-2q)\sqrt{a}}{\sqrt{1-5q-8q^2}}\right) + \right. \right. \\ & + 2\Phi\left(\frac{(1-2q)\sqrt{a}}{\sqrt{1-4q-5q^2}}\right) + (N-5)\Phi\left(\frac{(1-2q)\sqrt{a}}{\sqrt{1-4q-6q^2}}\right) \Bigg] + \\ & + p \left[ \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{(1-3q)\sqrt{a}}{\sqrt{1-5q-8q^2}}\right) + \Phi\left(-\frac{q\sqrt{a}}{\sqrt{1-5q+8q^2}}\right) + \right. \\ & + \Phi\left(\frac{q\sqrt{a}}{\sqrt{1-4q+5q^2}}\right) + \\ & \left. \left. + (N-5)\Phi\left(-\frac{q\sqrt{a}}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) \right] \right\} + t_1. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Обозначим  $\mu t_1 = a_1$ , введем в рассмотрение величину  $\mu \bar{t} / N$  и перейдем в (3.3.7) к пределу при  $N \rightarrow \infty$ . В результате получим искомое среднее время обнаружения канала с сигналом, которое имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\tau} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu \bar{t}}{N} = a_1 + a_1 & \left\{ (1-p) \Phi\left(\frac{(1-2q)\sqrt{a}}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) + \right. \\ & \left. + p \Phi\left(-\frac{q\sqrt{a}}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

В дальнейшем будем сравнивать изучаемый алгоритм с процедурой поиска Е. Познера [18]. Среднее время обнаружения канала с сигналом алгоритмом, изложенным в [18], получается из (3.3.8), когда  $q=0$ , что соответствует ситуации, когда упорядочивание производится по убыванию величин  $u_j$ , а не величин  $u'_j$ , то есть когда сигнал неподвижен. Обозначим среднее время обнаружения канала с сигналом алгоритмом



изложенным в [18], через  $\tau_p$ , тогда

$$\bar{\tau}_p = a + a_1 \left[ (1-p) \Phi(-\sqrt{a}) + \frac{p}{2} \right]. \quad (3.3.9)$$

Перейдем теперь к минимизации среднего времени обнаружения канала с сигналом. Оптимальные в смысле минимума среднего времени обнаружения значения параметров  $c$  и  $q$  получаются из уравнений:

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial q} = 0; \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial c} = 0,$$

которые принимают вид

$$p = \frac{2q \varphi\left(\frac{c(1-2q)}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right)}{2q \varphi\left(\frac{c(1-2q)}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) + (1-2q) \varphi\left(\frac{cq}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right)}; \quad (3.3.10)$$

$$a_1 = \frac{2c \sqrt{1-4q+6q^2}}{(1-p)(1-2q) \varphi\left(\frac{c(1-2q)}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) + pq \varphi\left(\frac{cq}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right)}. \quad (3.3.11)$$

Поскольку сравнение изучаемой процедуры поиска сигнала проводится с двухэтапным алгоритмом, не учитывающим движение сигнала, то оптимальное значение параметра  $c=c_1$  в этом случае находится из уравнения  $\partial \tau_p / \partial c = 0$ , которое имеет вид

$$a_1 = \frac{2c_1}{(1-p) \varphi(c_1)}. \quad (3.3.12)$$

Выигрыш в среднем времени обнаружения канала с сигналом равен

$$\Delta = \frac{c_1^2 + a_1 [(1-p) \Phi(-c_1) + p/2]}{c^2 + a_1 \left[ (1-p) \Phi\left(-\frac{c(1-2q)}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) + \frac{1}{2} + p \Phi\left(-\frac{cq}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) \right]}. \quad (3.3.13)$$

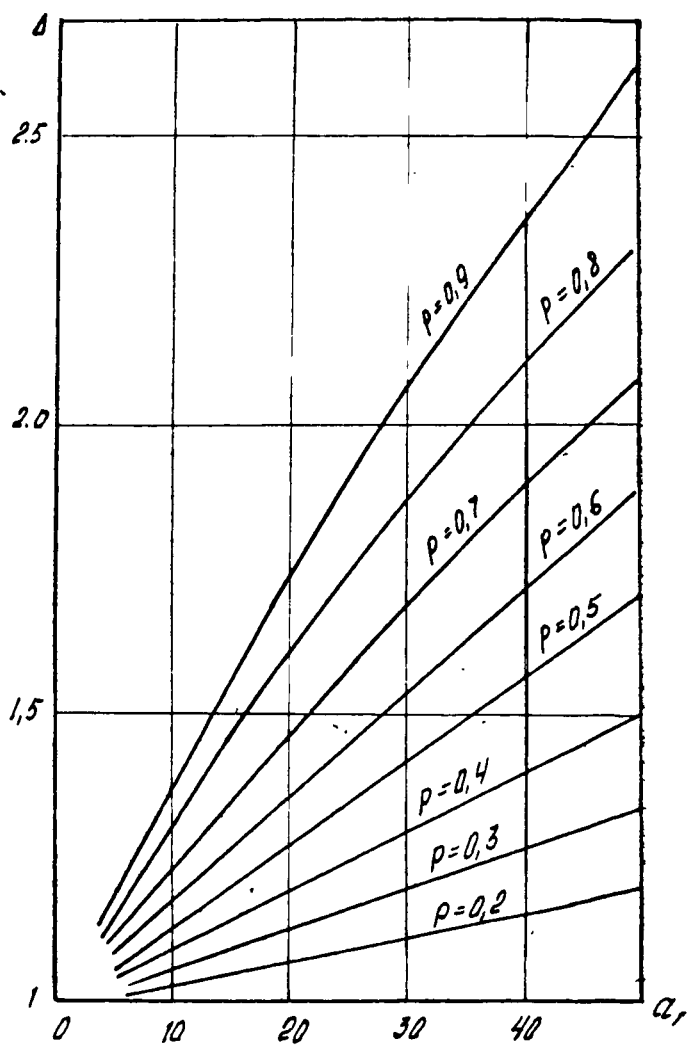


Рис. 3.1.3.

Уравнения (3.3.10)—(3.3.12) решались численно: задавалось  $a=c^2$  и из уравнения (3.3.10) определялось  $q$ , затем из уравнения (3.3.11) находилось значение параметра  $a_1$ , после чего находилось  $c_1$  как корень уравнения (3.3.12). На рис. 3.1.3 приведены зависимости  $\Delta$  от  $a_1$  для различных значений  $p$ , из которых следует, что учет возможных перемещений сигнала в соседние каналы позволяет сократить среднее время обнаружения канала с сигналом в 1,5—2,5 раза по сравнению с алгоритмом [18].

Кроме того, как видно из рис. 3.1.3, за счет оптимизации во времени предварительного просмотра получается дополнительное сокращение среднего времени обнаружения канала с сигналом, которое может достигать 60%. На рис. 3.1.4 приведена зависимость  $q$  от  $p$  при различных значениях  $a=\mu t_0$ , откуда видно, что величина  $q$  монотонно возрастает с ростом  $p$ , причем  $q=0$  при  $p=0$  (то есть для случая неподвижного сигнала получается алгоритм из [18]), а при  $p=1$   $q=0,5$ . Зависимость  $q$  от  $p$  для различных  $a$  не очень сильно отличается от зависимости  $q=p^2$ . Нельзя утверждать, что найденное решение этих уравнений является единственным и, следовательно, доставляет глобальный минимум среднему времени обнаружения канала с сигналом. Тем не менее получающийся при сравнении с алгоритмом из [18] выигрыш в среднем времени обнаружения канала с сигналом говорит о том, что найденное решение уравнений (3.3.10)—(3.3.12) является все же достаточно хорошим для практического использования.

#### § 4. Двухэтапный поиск движущегося сигнала с использованием информации, получаемой на первом этапе

Изученный в предыдущем параграфе алгоритм поиска движущегося сигнала использует информацию, накопленную на первом этапе, только в целях упорядочивания каналов. В то же время использование полученной на первом этапе информации для вынесения решения о наличии или отсутствии сигнала в канале приводит не только к уменьшению среднего времени

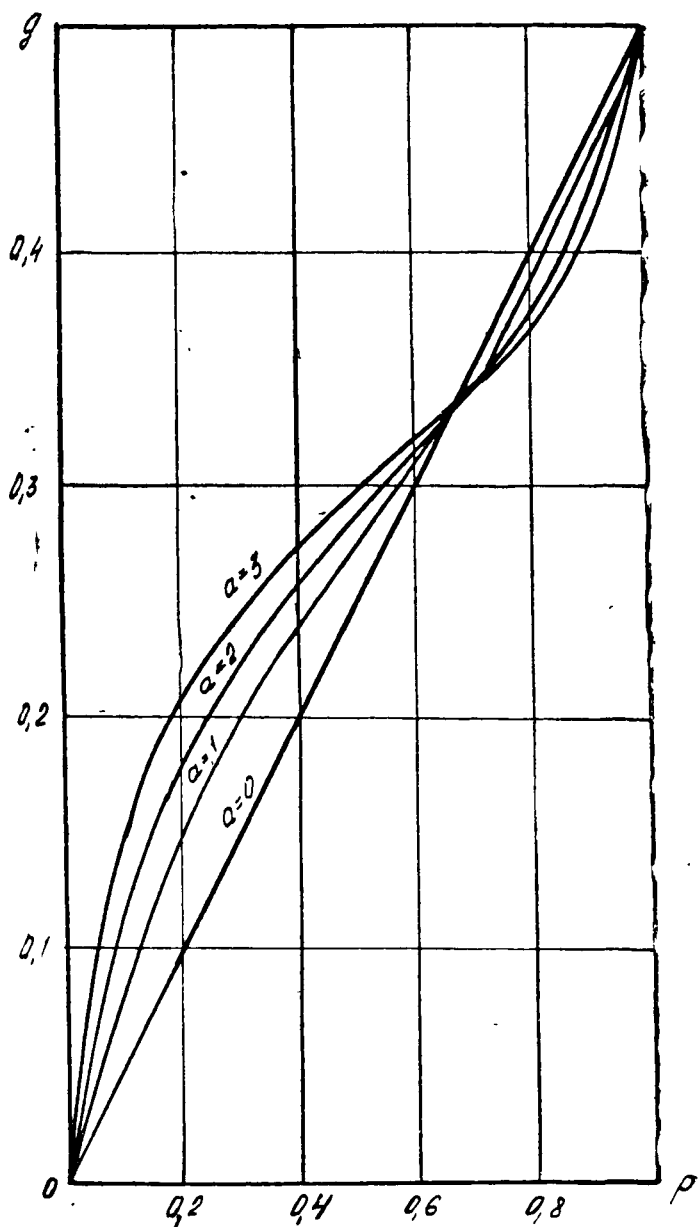


Рис. 3.1.4

обнаружения канала с сигналом, но и к сокращению темпа обзора, так как в этом случае среднее время изучения одного канала будет близко к  $t_1$ , а не к  $t_0 = t_1$ , как в предыдущем случае. В этом параграфе будет изучен двухэтапный поисковый алгоритм, заключающийся в следующем.

1. На первом этапе каждый канал просматривается в течение некоторого времени  $T$  последовательно один за другим. В каждом канале вычисляется логарифм отношения правдоподобия, который запоминается.

2. После этапа предварительного просмотра всех каналов производится пересчет измеренных значений логарифма отношения правдоподобия по формуле

$$u_j' = \sum_{k=1}^N q_{jk} u_k,$$

где  $u_k$  — измеренное значение логарифма отношения правдоподобия в  $k$ -м канале;  $q_{jk}$  — некоторые коэффициенты, зависящие от средней скорости перемещения сигнала из одного канала в другой;  $u_j'$  — пересчитанное значение логарифма отношения правдоподобия в  $j$ -м канале.

3. Все каналы упорядочиваются в порядке убывания величин  $u_j'$ , которые также запоминаются.

4. На втором этапе происходит просмотр каналов в порядке возрастания их номеров. При этом просмотр каждого канала проводится с использованием процедуры последовательного анализа Вальда при фиксированных вероятностях ошибок ложной тревоги  $\alpha$  и пропуска сигнала  $\beta$ .

Рассматриваемая процедура поиска сигнала в многоканальной системе отличается от алгоритма, изученного в главе II, тем, что здесь между предварительным и окончательным просмотром производится пересчет измеренных значений логарифма отношения правдоподобия, позволяющий учитывать перемещение сигнала из одного канала в другой, и упорядочивание производится по пересчитанным значениям логарифма отношения правдоподобия.

Заметим также, что для ускорения процедуры поиска на втором этапе используется информация, накопленная за время предварительного просмотра: просмотр

на втором этапе начинается либо с накопленного к этому моменту времени логарифма отношения правдоподобия (в этом случае в памяти запоминающего устройства хранятся как величины  $u_j$ , так и величины  $u_j'$ ), либо с его пересчитанного значения. В этом случае в памяти запоминающего устройства хранятся только величины  $u_j'$ .

Исследуем ситуацию, когда за время, проходящее между предварительным и окончательным просмотром, сигнал с вероятностью  $1-p$  может остаться в том же канале, в котором он присутствовал до начала просмотра, и с вероятностью  $p/2$  может перейти либо в соседний справа, либо в соседний слева каналы, а пересчет измеренных значений логарифма отношения правдоподобия ведется по формуле

$$u_j' = qu_{j-1} + (1-2q)u_j + qu_{j+1}, \quad 0 \leq q \leq \frac{1}{2}. \quad (3.4.1)$$

Понятно, что предлагаемая модель движения сигнала соответствует действительности только тогда, когда сигнал достаточно медленно перемещается по каналам. Чтобы изучаемый алгоритм был более адекватен реальным ситуациям, следовало бы учитывать переход сигнала в каналы, отстоящие от исходного на два, три и т. д. канала. Получающиеся при этом формулы будут аналогичны приводимым, но только существенно сложнее.

Перейдем к нахождению среднего времени обнаружения канала с сигналом, предложенным алгоритмом. Как и до сих пор, полагаем, что измеренные значения логарифма отношения правдоподобия являются нормальными случайными величинами с дисперсией  $2\mu T$  и математическим ожиданием  $\pm \mu T$  в зависимости от того, присутствует сигнал в канале или его там нет. Не нарушая общности, будем считать, что в течение предварительного просмотра сигнал находился в канале с номером  $i$ .

Рассмотрим случай, когда просмотр на втором этапе начинается с пересчитанного по формуле (3.4.1) значения логарифма отношения правдоподобия. Тогда условное среднее время обнаружения канала с сигналом в предположении, что в течение предварительного прос-

мотора сигнал находился в канале с номером  $i$ , равно

$$\bar{t}_i = NT + \frac{1}{\mu} p_{ii} \sum_{j \neq i} \int_{-\infty}^{\infty} du'_i \int_{u'_i}^{\infty} (b + u'_j) p(u'_i, u'_j) du'_j + \\ + \frac{1}{\mu} \sum_{k \neq i} p_{ik} \sum_{j \neq k} \int_{-\infty}^{\infty} du'_k \int_{u'_k}^{\infty} (b + u'_j) p(u'_j, u'_k) du'_j + t_1. \quad (3.4.2)$$

Здесь первое слагаемое есть время, отводимое на предварительный просмотр всех каналов. Второе и третье слагаемые, учитывающие перемещение сигнала из одного канала в другой, представляют собой время, необходимое для изучения тех каналов без сигнала, которые после упорядочивания получили меньший номер, чем номер канала с сигналом. Второе слагаемое в (3.4.2) появляется, если между предварительным и окончательным просмотром сигнал остался в том же канале, где и присутствовал. Третье слагаемое возникает, если в течение времени между предварительным и окончательным просмотром сигнал из канала с номером  $i$  перешел в канал с номером  $k$  (в рассматриваемом здесь случае  $k = i \pm 1$ ). Как и в предыдущем параграфе, из (3.4.1) следует, что  $u'_j$  являются нормальными случайными величинами с дисперсией

$$D\{u'_j\} = 2a(1 - 4q + 6q^2), \quad \forall j,$$

средним значением

$$\bar{u}'_j = \begin{cases} a(1 - 4q) & \text{для } j = i, \\ -a(1 - 2q) & \text{для } j = i \pm 1, \\ -a & \text{для } j \neq i, i \pm 1 \end{cases}$$

и ковариациями

$$\text{cov}(u'_j, u'_k) = 2a \cdot \begin{cases} 1 - 4q + 6q^2 & \text{для } k = j, \\ 2q(1 - 2q) & \text{для } k = j \pm 1, \\ q^2 & \text{для } k = j \pm 2, \\ 0 & \text{для остальных } k, \end{cases}$$

где, как и до сих пор,  $a = \mu T$ .

При отсутствии предварительного просмотра среднее время изучения канала без сигнала вальдовской про-

цедурой равно, как известно [3],  $\frac{1}{\mu} \ln \beta^{-1}$ . Но так как после этапа предварительного просмотра пересчитанное значение логарифма отношения правдоподобия достигает некоторой величины  $u_j'$  и на втором этапе досмотр начинается с этого значения  $u_j'$ , то среднее время достижения нижнего порога вальдовской процедурой равно  $\frac{1}{\mu}(b+u_j')$ . Чтобы определить величину  $b$ , вычислим связанную с  $b$  вероятность ошибки пропуска сигнала, которая должна быть равна  $\beta$ . При этом заметим, что если досмотр на втором этапе начинается с величины  $u'$ , то условная вероятность ошибки пропуска сигнала равна [19].

$$\beta(u') = e^{-(b+u')}.$$

Усредняя по возможным значениям случайной величины  $u'$ , получим выражение для безусловной вероятности ошибки пропуска сигнала, которое имеет вид

$$\beta = (1-p) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(b+u')} p(u' | H_1) du' + p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(b+u')} p(u' | H_{01}) du'.$$

Здесь первое слагаемое математически описывает ситуацию, когда за время между предварительным и окончательным просмотром сигнал не изменил своего местоположения, то есть остался в том же канале, в котором он находился до начала просмотра. Второе слагаемое соответствует ситуации, когда в течение времени между предварительным и окончательным просмотром сигнал переместился в соседний слева или в соседний справа канал ( $H_1$ —гипотеза о наличии сигнала в канале;  $H_{01}$ —гипотеза о том, что в течение предварительного просмотра сигнал находился в соседнем канале;  $p(u' | H_1)$  и  $p(u' | H_{01})$ —условные плотности вероятностей величины  $u'$  соответственно при гипотезах  $H_1$  и  $H_{01}$ ). Взяв интегралы и прологарифмировав выражение, определяющее  $\beta$ , получим окончательно, что



$$b = \ln \beta^{-1} + \ln[(1-p)e^{6aq^2} + pe^{2a(1-3q+3q^2)}], \quad (3.4.3)$$

С учетом (3.4.3), числовых характеристик случайных величин и того, что  $p_{ii}=1-p$ ,  $p_{ik}=p/2$  для  $|i-k|=1$ , а

$$\int_{-\infty}^{\infty} du_i' \int_{u_i'}^{\infty} p(u_i', u_j') du_j' = \Phi\left(\frac{\bar{u}_j' - \bar{u}_i'}{\sqrt{\sigma_{u_i'}^2 + \sigma_{u_j'}^2 - 2\text{cov}(u_i', u_j')}}\right); \quad (3.4.4)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} du_i' \int_{u_i'}^{\infty} u_j' p(u_i', u_j') du_j' = \\ & = \bar{u}_j' \Phi\left(\frac{\bar{u}_j' - \bar{u}_i'}{\sqrt{\sigma_{u_i'}^2 + \sigma_{u_j'}^2 - 2\text{cov}(u_i', u_j')}}\right) + \\ & + \frac{\sigma_{u_j'}^2 - \text{cov}(u_i', u_j')}{\sqrt{\sigma_{u_i'}^2 + \sigma_{u_j'}^2 - 2\text{cov}(u_i', u_j')}} \varphi\left(\frac{\bar{u}_j' - \bar{u}_i'}{\sqrt{\sigma_{u_i'}^2 + \sigma_{u_j'}^2 - 2\text{cov}(u_i', u_j')}}\right), \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

введем в рассмотрение величину  $\mu \bar{t}/N$  и перейдем после несложных преобразований к пределу при  $N \rightarrow \infty$ . В результате получим, что

$$\begin{aligned} \bar{\tau} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu \bar{t}}{N} = & a + (1-p) \left\{ \left( \ln \frac{1}{\beta} - a + \right. \right. \\ & + \ln[(1-p)e^{6aq^2} + pe^{2a(1-3q+3q^2)}]) \times \\ & \times \Phi\left(-\frac{(1-2q)\sqrt{a}}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) + \\ & + \sqrt{a(1-4q+6q^2)} \varphi\left(\frac{(1-2q)\sqrt{a}}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) \Big\} + \\ & + p[(\ln \beta^{-1} - a + \ln[(1-p)e^{6aq^2} + pe^{2a(1-3q+3q^2)}]) \times \\ & \times \Phi\left(-\frac{q\sqrt{a}}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) + \\ & + \sqrt{a(1-4q+6q^2)} \varphi\left(\frac{q\sqrt{a}}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) \Big\}. \end{aligned}$$

Изучаемый в этом параграфе алгоритм поиска движущегося сигнала будем сравнивать с процедурой поиска, изложенной в главе II, так как он является ее модификацией. Среднее время обнаружения канала с сигналом алгоритмом, не учитывающим перемещение сигнала; получается из (3.4.6), когда  $q=0$ , и равно

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_0 = & a + (1-p)[(\ln \beta^{-1} - a + \ln(1-p+pe^{2a}))\Phi(-\sqrt{a}) + \\ & + \sqrt{a}\varphi(\sqrt{a})] + p[(\ln \beta^{-1} - a + \ln(1-p+pe^{2a}))2 + \sqrt{\frac{a}{2\pi}}] \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Перейдем теперь к минимизации среднего времени обнаружения канала с сигналом. Оптимальные в смысле минимума среднего времени обнаружения значения параметров  $q$  и  $c=\sqrt{a}$  получаются из уравнений:

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial c} = 0; \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial q} = 0,$$

которые в явном виде выписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} & 2c + (1-p) \left\{ \left( \frac{12(1-p)cq^2e^{6c^2q^2} + 4pc(1-3q+3q^2)e^{2c^2(1-3q+3q^2)}}{(1-p)e^{6c^2q^2} + pe^{2c^2(1-3q+3q^2)}} - 2c \right) \times \right. \\ & \times \Phi\left(-\frac{c(1-2q)}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) + \frac{\varphi\left(\frac{c(1-2q)}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right)}{\sqrt{1-4q+6q^2}} [1-4q+6q^2 + \\ & \left. + (1-2q)(\ln \beta^{-1} - c^2 + \ln[(1-p)e^{6c^2q^2} + pe^{2c^2(1-3q+3q^2)}]) - \right. \\ & \left. - c^2(1-2q)^2] \right\} + p \left\{ \left( \frac{12(1-p)cq^2e^{6c^2q^2} + 4pc(1-3q+3q^2)e^{2c^2(1-3q+3q^2)}}{(1-p)e^{6c^2q^2} + pe^{2c^2(1-3q+3q^2)}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2c \right) \times \Phi\left(-\frac{cq}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) + \right. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varphi\left(\frac{c(1-2q)}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right)}{\sqrt{1-4q+6q^2}} [1-4q+6q^2 - \\
& - q(\ln \beta^{-1} - c^2 + \ln[(1-p)e^{6c^2q^2} + pe^{2c^2(1-3q+3q^2)}] - c^2q^2)] = 0; \\
& (1-p) \left\{ \frac{12(1-p)cqe^{6c^2q^2} + 6cp(2q-1)e^{2c^2(1-3q+3q^2)}}{(1-p)e^{6c^2q^2} + pe^{2c^2(1-3q+3q^2)}} \Phi\left(-\frac{c(1-2q)}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) + \right. \\
& + \frac{2\varphi\left(\frac{c(1-2q)}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right)}{(1-4q+6q^2)^{3/2}} [(3q-1)(1-4q+6q^2) + q(\ln \beta^{-1} - c^2 + \\
& + \ln[(1-p)e^{6c^2q^2} + pe^{2c^2(1-3q+3q^2)}] + c^2q(1-2q))] + \\
& + p \left\{ \frac{12(1-p)cqe^{6c^2q^2} + 6cp(2q-1)e^{2c^2(1-3q+3q^2)}}{(1-p)e^{6c^2q^2} + pe^{2c^2(1-3q+3q^2)}} \Phi\left(-\frac{cq}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right) + \right. \\
& + \frac{\varphi\left(\frac{cq}{\sqrt{1-4q+6q^2}}\right)}{(1-4q+6q^2)^{3/2}} [2(3q-1)(1-4q+6q^2) - \\
& - (1-2q)(\ln \beta^{-1} - c^2 + \\
& + \ln[(1-p)e^{6c^2q^2} + pe^{2c^2(1-3q+3q^2)}] - c^2q(1-2q))] = 0.
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Система уравнений (3.4.8) — (3.4.9) решалась численно: для заданных  $p$  и  $\beta$  в качестве решения находились искомые  $q$  и  $c$ , а затем для известных  $p$ ,  $q$ ,  $\beta$ ,  $c$  вычислялось минимальное значение  $\bar{\tau}$  из (3.4.6). Поскольку изучаемый алгоритм сравнивается с процедурой поиска, изложенной во второй главе, то оптимальное в смысле минимума величины  $\bar{\tau}_0$  из (3.4.7) значение параметра  $c$  определялось из уравнения  $\partial \bar{\tau}_0 / \partial c = 0$ , которое имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned}
p = & \left\{ 2c + \left( \frac{4pce^{2c^2}}{1-p+pe^{2c^2}} - 2c \right) \Phi(-c) - [\ln \beta^{-1} + \right. \\
& + \ln(1-p+pe^{2c^2}) - c^2] \times \\
& \times \varphi(c) + \varphi(c) - c^2\varphi(c) \Bigg\} / \left\{ \left( \frac{4pce^{2c^2}}{1-p+pe^{2c^2}} - 2c \right) \Phi(-c) + \varphi(c) - \right. \\
& \left. \left. \varphi(c) - c^2\varphi(c) \right\} \right.
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

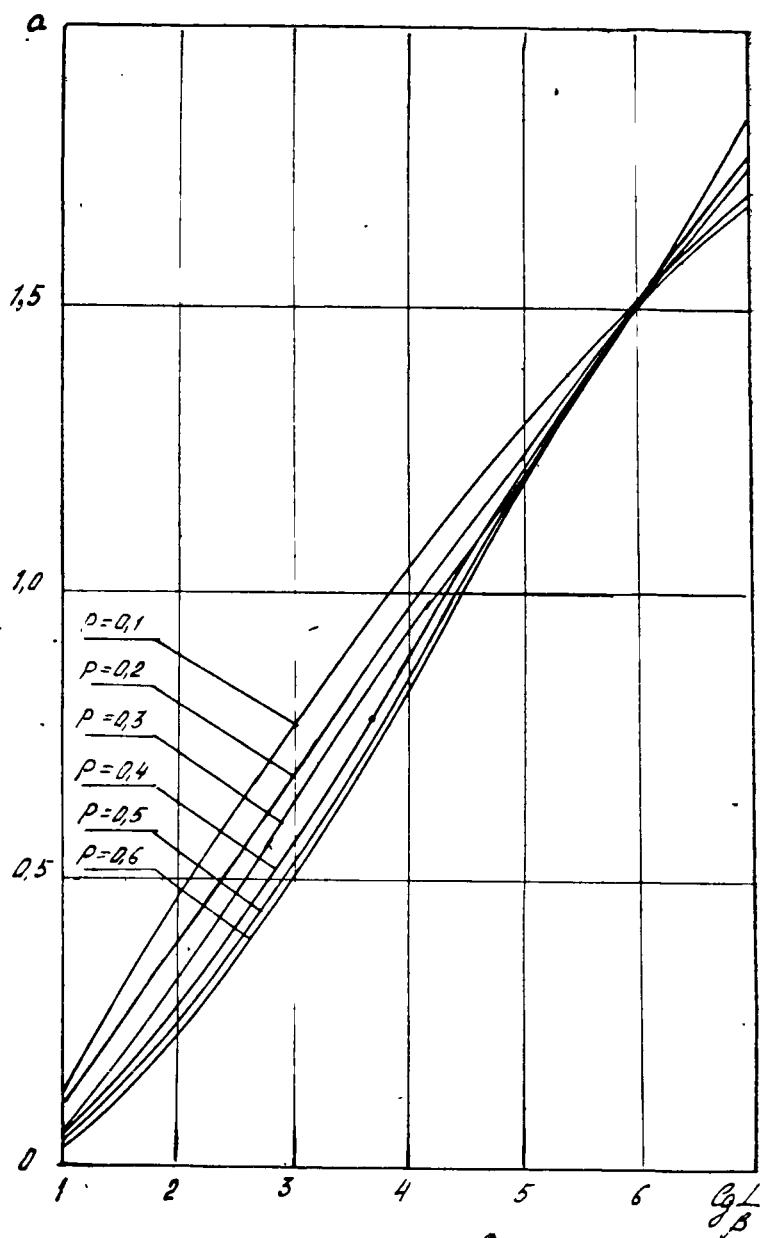


Рис. 3.1.5

$$-\left[\ln \beta^{-1}-c^2+\ln (1-p+p e^{2 c^2})\right] \varphi(c)-c^2 \varphi(c)+c- \\ -\frac{2 p c e^{2 c^2}}{1-p+p e^{2 c^2}}-\frac{1}{\sqrt{2 \pi}}\} .$$

Уравнение (3.4.10) также решалось численно. Аналогично задавались  $p$  и  $\beta$  и находилось в качестве решения значение параметра  $c$ , доставляющее минимум  $\tau_0$  из (3.4.6). На рис. 3.1.5 приведена зависимость  $a$  от  $\lg \beta^{-1}$  для различных значений  $p$ , откуда видно, что с ростом  $p$  доля времени, отводимая на предварительный просмотр, монотонно убывает. Этот факт достаточно естествен, так как движение сигнала уменьшает роль информации, получаемой от предварительного просмотра. На рис. 3.1.6 приведена зависимость  $q$  от  $\lg \beta^{-1}$  для различных значений  $p$ . Из рис. 3.1.5 видим,

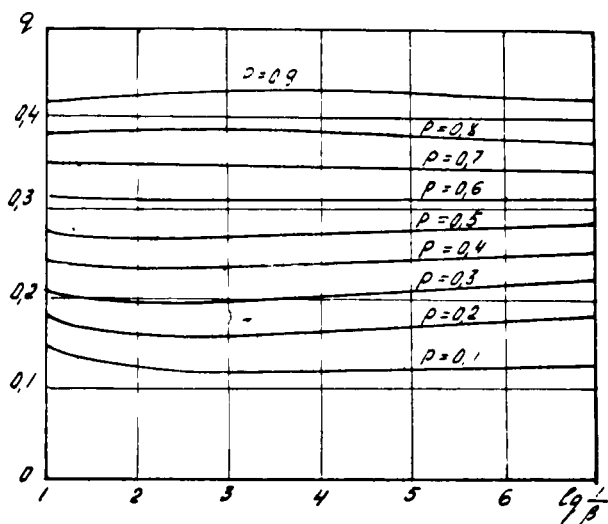


Рис. 3.1.6

что величина  $q$  практически не зависит от  $\beta$  и монотонно возрастает с ростом  $p$ . Таким образом, с ростом вероятности перехода сигнала в соседние каналы учет их влияния становится все более значимым. На рис. 3.1.7 приведена зависимость выигрыша  $\Delta = \tau_{0\min} \tau_{\min}$  в

среднем времени обнаружения изучаемым алгоритмом по сравнению с процедурой поиска, изложенной во второй главе, от  $\lg \beta^{-1}$  для различных значений  $p$ , откуда следует, что выигрыш  $\Delta$  монотонно растет с ростом  $p$  (чем больше  $p$ , тем сильнее изучаемый алгоритм отли-

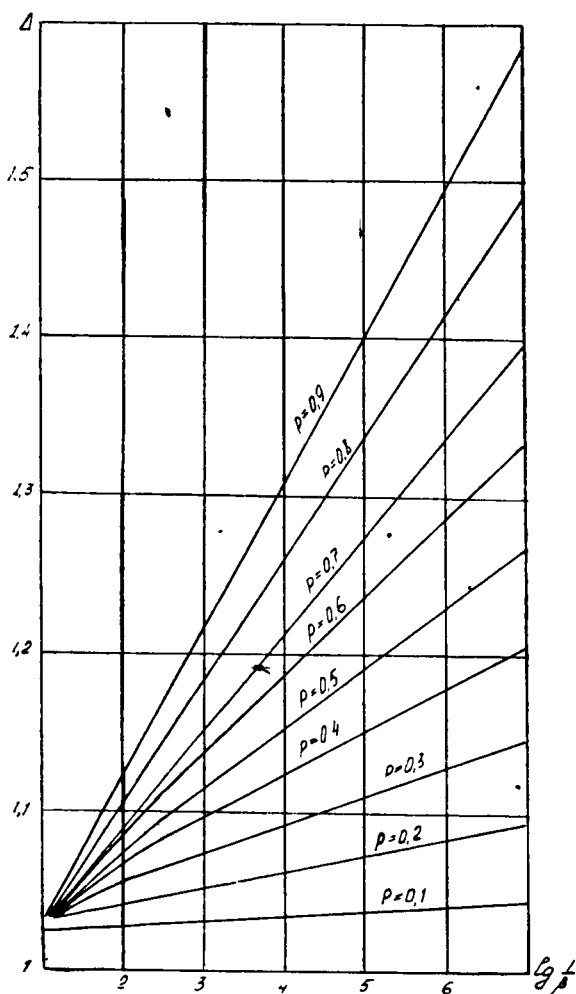


Рис. 3.1.7

чается от поисковой процедуры главы II, и при  $p=0,9$  уменьшение времени обнаружения канала с сигналом составляет 30—58% для  $\beta \in [10^{-4}, 10^{-7}]$ .

Отметим здесь же, что аналитические исследования и численный расчет показали, что при досмотре, начинающемся со значений величин  $u_j$ , выигрыш в среднем времени обнаружения канала с сигналом по сравнению с поисковой процедурой, изложенной во второй главе, примерно тот же, что и при досмотре, начинающемся со значений величин  $u'_j$ . Однако объем памяти запоминающего устройства возрастает при этом вдвое. Поэтому досмотр, начинающийся с величин  $u_j$ , следует считать нецелесообразным.

## § 5. О полном времени обзора

Кроме среднего времени обнаружения канала с сигналом определенную роль при проектировании систем обнаружения играет полное время обзора, то есть время, проходящее между началом просмотра первого и окончанием просмотра последнего,  $N$ -го канала. Сравним полное время обзора для алгоритмов, изученных в § 3,4 этой главы.

В § 3 данной главы изучался алгоритм поиска движущегося сигнала с забыванием информации, получаемой на первом этапе. Будем считать, что на втором этапе решение о наличии или отсутствии сигнала в канале выносится с использованием процедуры последовательного анализа Вальда при фиксированных вероятностях ошибок ложной тревоги  $\alpha$  и пропуска цели  $\beta$ . Тогда имеет место следующее приближенное равенство:

$$t_1 \approx \frac{1}{\mu} \ln \beta^{-1},$$

где  $t_1$  — это как раз то время, в течение которого на втором этапе алгоритма с забыванием изучается каждый канал. Обозначим полное время обзора этим алгоритмом символом  $T_n^{\text{заб}}$ . Теперь с учетом полученного приближенного равенства можем записать, что

$$T_n^{\text{заб}} = (t_0 + t_1)(N-1) + t_c = (t_0 + \mu^{-1} \ln \beta^{-1})(N-1) + t_c,$$

здесь  $t_c$ —суммарное время, отводимое на изучение канала с сигналом на обоих этапах;  $t_0$  и  $t_1$ , как и раньше, означают соответственно время предварительного и окончательного изучения каждого канала.

Полное время обзора алгоритмом, изученным в § 4 этой главы, обозначим символом  $T_n$ . Тогда

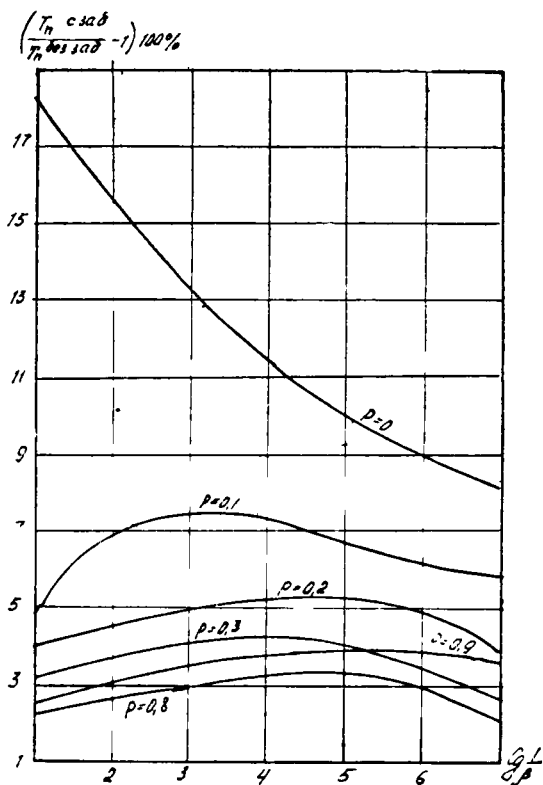


Рис. 3.1.8

$$T_n = NT - (N-5) M[(b+u') \mu] + O(1),$$

где  $T$ —время предварительного просмотра каждого канала;  $O(1)$ —время досмотра на втором этапе канала с сигналом и четырех соседних с ним каналов (см. с. 100). Поскольку (см. формулу (3.4.3))



$$b = \ln \beta^{-1} + \ln[(1-p)e^{6uq^2} + pe^{2a(1-3q+3q^2)}],$$

выражение для полного времени обзора алгоритмом, использующим для досмотра информацию, полученную на первом этапе, перепишем  $T_n$  в виде

$$T_n = NT + \frac{N-5}{\mu} \left\{ (\ln \beta^{-1} + \ln[(1-p)e^{6uq^2} + pe^{2a(1-3q+3q^2)}]) - T\mu \right\} + O(1).$$

Для сравнения полного времени обзора обсуждаемыми алгоритмами введем в рассмотрение величину  $T_n^{\text{заб}}/T_n$  и перейдем в этом отношении к пределу при  $N \rightarrow \infty$ . В результате получим, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T_n^{\text{заб}}}{T_n} = \frac{\mu t_0 + \ln \beta^{-1}}{\ln \beta^{-1} + \ln[(1-p)e^{6uq^2} + pe^{2a(1-3q+3q^2)}]}.$$

На рис. 3.1.8 приведены графики зависимости  $(T_n^{\text{заб}}/T_n - 1) \cdot 100\%$  от  $\lg \beta^{-1}$  для различных значений  $p$ . Из него видно, что использование при досмотре на втором этапе информации, получаемой на первом, несколько уменьшает полное время обзора. Так, для  $p=0$  и  $\beta \in [10^{-1}, 10^{-7}]$  это уменьшение составляет 8–18%. С ростом  $p$  сокращение полного времени обзора несколько снижается. Это происходит, по-видимому, потому, что с ростом  $p$  роль информации, получаемой на первом этапе, уменьшается.

## § 6. Оптимизация этапа досмотра

Всюду выше предполагалось, что досмотр каналов начинается с той величины  $u_i$ , которая была получена на первом этапе. Однако это совершенно не обязательно, и можно рассматривать процедуры поиска, когда досмотр начинается не с величины  $u_i$ , а с некоторой величины  $f(u_i)$  и пытаться улучшить характеристики системы поиска за счет выбора вида функции  $f(u)$ .

Если через  $b$  обозначить нижний порог процедуры последовательного анализа, то условное среднее время достижения нижнего порога вальдовской процедурой будет равно  $(b + f(u))/\mu$ . Формула (2.1.3) примет теперь вид

$$M\{\sum_{u_i > z} (b + f(u_i))\} = (N-1) \left[ b \int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz \int_z^{\infty} p(u) du + \int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz \int_z^{\infty} f(u) p(u) du \right]$$

и величина  $\bar{\tau}$  может быть записана в виде

$$\bar{\tau} = a + b \int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz \int_z^{\infty} p(u) du + \int_{-\infty}^{\infty} f(u) p(u) du \int_{-\infty}^u p(z) dz.$$

Следует иметь в виду, что теперь  $b \neq \ln \beta^{-1}$ . Найдем поэтому связь между  $b$  и  $\beta$ .

Если досмотр канала с сигналом начинается с величины  $f(z)$ , то условная вероятность пропуска сигнала будет равна  $\exp(-b - f(z))$ . Усредняя по  $z$ , получим

$$\beta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b - f(z)} p(z) dz$$

и

$$\ln \beta^{-1} = b - \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(z)} p(z) dz.$$

Таким образом,  $\bar{\tau}$  зависит от следующих двух функционалов от функции  $f(u)$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) p(u) du \int_{-\infty}^u p(z) dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \Phi\left(\frac{u-a}{\sqrt{2a}}\right) e^{-\frac{(u+a)^2}{4\pi a}} \frac{du}{\sqrt{4\pi a}}, \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(z)} p(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(u)} e^{-\frac{(u-a)^2}{4a}} \frac{du}{\sqrt{4\pi a}}. \end{aligned}$$

Задача о нахождении оптимального вида  $f(u)$  сведется к нахождению экстремума следующего функционала:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\frac{(u+a)}{4a}} \Phi\left(\frac{u-a}{\sqrt{2a}}\right) du + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(u) - \frac{(u-a)^2}{4a}} du,$$

где  $\lambda$  — неопределенный множитель Лагранжа.

Пользуясь обычными приемами вариационного исчисления, легко получить, что

$$f(u) = C + u - \ln \Phi\left(\frac{u-a}{\sqrt{2a}}\right) = C + f_0(u),$$

где  $C$  — константа. Однако легко видеть, что значение  $C$  роли не играет. Действительно, найдя  $b$  и  $\bar{\tau}$ , получим

$$b = \ln \beta^{-1} - C + \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f_0(z)} p(z) dz,$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau} = & a + (\ln \beta^{-1} + \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f_0(z)} p(z) dz) \int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz \int_z^{\infty} p(u) du + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} f_0(u) p(u) du \int_{-\infty}^u p(z) dz \end{aligned}$$

и  $\bar{\tau}$  от  $C$  не зависит. Таким образом, оптимальный вид функции  $f(u)$  следующий:

$$f_0(u) = u - \ln \Phi\left(\frac{u-a}{\sqrt{2a}}\right).$$

Заметим, что при  $u \rightarrow \infty$   $\Phi\left(\frac{u-a}{\sqrt{2a}}\right) \rightarrow 1$  и поэтому при  $u > a + 2\sqrt{2a}$   $f_0(u) \approx u$ , т. е. то, что рассматривалось выше. При  $u \rightarrow -\infty$   $-\ln \Phi\left(\frac{u-a}{\sqrt{2a}}\right) \approx \frac{(u-a)^2}{4a}$  и поэтому  $f_0(u) \approx \frac{u^2}{4a}$ . Однако, т. к.  $z$  распределена нормально со средним  $a$  и дисперсией  $2a$ , то часть  $f_0(u)$  для  $u > 0$  является наиболее «рабочей».

Получим теперь формулы для  $b$  и  $\bar{\tau}$  при оптимальном виде  $f(u)$ . Подставляя  $f_0(u)$  в выражение для  $b$ , получим

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u} \Phi\left(\frac{u-a}{\sqrt{2a}}\right) e^{-\frac{(u-a)^2}{4a}} \frac{du}{\sqrt{4\pi a}}.$$

Делая замену переменных  $(u-a)/\sqrt{2a} = z$ , получим

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z) e^{-\frac{1}{2}(z+\sqrt{2a})^2} dz = \Phi(-\sqrt{a}),$$

откуда получаем

$$b = \ln \beta^{-1} + \ln \Phi(-\sqrt{a}) = \ln \beta^{-1} + \ln[1 - \Phi(\sqrt{a})].$$

Далее

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \ln \Phi\left(\frac{u-a}{\sqrt{2a}}\right) \Phi\left(\frac{u-a}{\sqrt{2a}}\right) e^{-\frac{(u+a)^2}{4a}} \frac{du}{\sqrt{4\pi a}} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \ln \Phi(x) \varphi(x + \sqrt{2a}) dx, \end{aligned}$$

и поэтому, обозначая  $c = \sqrt{a}$ , получим окончательно

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \ln \beta^{-1} (1 - \Phi(c)) + (1 - \Phi(c)) \ln(1 - \Phi(c)) + c^2 \Phi(c) + \\ &+ c \varphi(c) - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \ln \Phi(x) \varphi(x + \sqrt{2}c) dx. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю  $d\bar{\tau}/dc$ , получим

$$\begin{aligned} \ln \beta^{-1} &= [2c \Phi(c) + I(c) - \varphi(c) \ln[1 - \Phi(c)]] \varphi(c), \\ I(c) &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} (x + c\sqrt{2}) \Phi(x) \ln \Phi(x) \varphi(x + c\sqrt{2}) dx. \end{aligned}$$

Дальнейшее исследование можно проводить лишь численно. Расчеты показали, что использование оптимального вида  $f_0(u)$  по сравнению с  $f(u) = u$  лишь на несколько процентов увеличивает выигрыш по сравнению с последовательным просмотром каналов. Поэтому усложнение схемы досмотра за счет оптимизации  $f(u)$  не представляется целесообразным.

Почти такие же результаты дает применение в качестве  $f(u)$  функции  $A \cdot u$ . В это случае

$$\begin{aligned} \beta &= e^{-b} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-Az - \frac{(z-a)^2}{4a}\right) \frac{dz}{\sqrt{4\pi a}} = \\ &= \exp(-b - aA + aA^2) \end{aligned}$$

и  $b = \ln \beta^{-1} - aA + aA^2$ . Подставляя это выражение в формулу для  $\bar{\tau}$ , получим

$$\bar{\tau} = c^2 + (\ln \beta^{-1} - c^2 A + c^2 A^2) [1 - \Phi(c)] + A [c \varphi(c) - c^2 (1 - \Phi(c))],$$

где  $c = \sqrt{a}$ . Приравнивая нулю производные от  $\tau$  по  $c$  и  $A$ , получим

$$A = 1 - \frac{\varphi(c)}{c(1 - \Phi(c))},$$

$$\ln \beta^{-1} = \{2c + A(A - 1)c[2(1 - \Phi(c)) - c\varphi(c)] + A[\varphi(c) - 2c(1 - \Phi(c))]\} \varphi(c).$$

Задавая  $c$ , легко получить зависимости  $A$  и  $\ln \beta^{-1}$  от  $c$ , а, следовательно, и  $A$  и  $c$  от  $\ln \beta^{-1}$ .

Использование функции  $f(u) = Au$  очень незначительно увеличивает  $\tau$  по сравнению с оптимальным видом  $f(u)$ .

---

## ЛИТЕРАТУРА

1. Башаринов А. Е., Флейшман Б. С. Методы статистического последовательного анализа и их приложения.— М., Сов. радио, 1962.
2. Вакин С. А., Шустов Л. Н. Основы радиопротиводействия и радиотехнической разведки. — М.: Сов. радио, 1963.
3. Вальд А. Последовательный анализ. — М.: Физматгиз, 1960.
4. Гаек Я., Шидак З. Теория ранговых критериев. — М.: Наука, 1971.
5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. — Вып. 1. — М.: Физматгиз, 1959.
6. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1969.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.
8. De Guenin J. Optimum distribution of effort. — Operation Research, 1961, v. 9, N. 1.
9. Зигангиров К. Ш. Задача поиска в системе с конечным числом позиций. — Радиотехника и электроника, 1963, 8, № 1, с. 16.
10. Зигангиров К. Ш. Об оптимальности поиска и систем с конечным числом позиций. — Радиотехника и электроника, 1964, 9, № 10, с. 1745.
11. Зигангиров К. Ш. Одна задача оптимального сканирования. — Теория вероятностей и ее применения. 1966, 11, № 2, с. 333.
12. Зигангиров К. Ш. Обнаружение сигналов в многоканальной системе при переходах сигналов из канала в канал. — Радиотехника и электроника. 1968, 13, № 8, с. 1393.
13. Клетский. Применение теории информации к отысканию неисправностей в технических устройствах. — Зарубежная радиоэлектроника, 1961, № 9, с. 124.
14. Кобзарев Ю. Б., Башаринов А. Е. Об эффективности алгоритмов поиска, основанных на методе пробных шагов управляемой длительности. — Радиотехника и электроника, 1961, 6, № 9, с. 1411.
15. Кузнецов И. Н. Вопросы радиолокационного поиска. — Радиотехника и электроника, 1964, 9, № 2, с. 187.
16. Кузнецов И. Н. Алгоритм решения задачи наилучшего

резервирования. — В сб.: Прикладные задачи технической кибернетики. — М.: Сов. радио, 1966, 14.

17. Кузьмин С. З. Цифровая обработка радиолокационной информации. — М.: Сов. радио, 1967.

18. Познер Е. Процедуры оптимального поиска. — Зарубежная радиоэлектроника, 1964, № 5, с. 34.

19. Радюк Л. Е. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ-мат. наук. — Томск, 1970.

20. Радюк Л. Е., Терпугов А. Ф. Оптимальное распределение энергии при поиске сигнала в многоканальной системе. — Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1971, 16, № 1, с. 89.

21. Радюк Л. Е., Терпугов А. Ф. Об эффективности применения автоматов с линейной тактикой в системах обнаружения сигналов. — Автоматика и телемеханика, 1971, 32, № 4.

22. Флейшман Б. С. О переходном режиме загрузки памяти кибернетического устройства статистического воспроизведения образов. — Радиотехника и электроника, 1961, 6, № 7, с. 1041.

23. Цыпкин Я. З. Введение в теорию импульсных систем. — М.: Физматгиз, 1968.

24. Теоретические основы радиолокации (под. ред. Я. Д. Ширмана) — М.: Сов. радио, 1970.

25. Терпугов А. Ф., Шапиро Ф. А. Двухэтапный поиск сигнала в многоканальной системе с упорядочиванием каналов. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1974, № 2, с. 126—130.

26. Терпугов А. Ф., Шапиро Ф. А. Двухэтапный поиск сигнала в многоканальной системе с группировкой и упорядочиванием каналов. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1977, № 3, с. 156—164.

27. Терпугов А. Ф., Шапиро Ф. А. Двухэтапный поиск движущейся цели. — Известия высш. уч. завед. СССР. Радиоэлектроника, 1978, № 7, с. 38—44.

28. Терпугов А. Ф., Шапиро Ф. А. Двухэтапный поиск сигнала в многоканальной системе линейными автоматами. — Автоматика и телемеханика. 1978, № 8, с. 101—107.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Введение (А. Ф. Терпугов).

|                                                                                                              |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 1. Задачи теории поиска сигнала в многоканальной системе . . . . .                                         | 3          |
| § 2. Последовательный просмотр каналов . . . . .                                                             | 5          |
| <b>Глава I. Алгоритм К. Ш. Зигангирова (Л. Е. Радюк)</b>                                                     |            |
| § 1. Среднее время поиска сигнала по алгоритму К. Ш. Зигангирова . . . . .                                   | 8          |
| § 2. Функция распределения времени поиска по алгоритму К. Ш. Зигангирова . . . . .                           | 13         |
| § 3. Реализация алгоритма К. Ш. Зигангирова на дискретных линейных накопителях . . . . .                     | 19         |
| § 4. Обнаружение нескольких сигналов в многоканальной системе . . . . .                                      | 35         |
| <b>Глава II. Двухэтапный поиск сигнала в многоканальной системе с упорядочиванием каналов (Ф. А. Шапиро)</b> |            |
| § 1. Поиск и обнаружение сигнала в многоканальной системе . . . . .                                          | 41         |
| § 2. Характеристики двухэтапного алгоритма поиска сигнала . . . . .                                          | 52         |
| § 3. Оптимальное управление энергией при поиске сигнала . . . . .                                            | 55         |
| § 4. Двухэтапный поиск сигнала в многоканальной системе с группировкой и упорядочиванием каналов . . . . .   | 61         |
| § 5. Двухэтапный поиск сигнала в многоканальной системе автоматами с линейной тактикой . . . . .             | 72         |
| <b>Глава III. Двухэтапный поиск движущегося сигнала (Ф. А. Шапиро)</b>                                       |            |
| § 1. Модель движения сигнала . . . . .                                                                       | 90         |
| § 2. Анализ двухэтапного поиска сигнала с упорядочиванием каналов и учетом его движения . . . . .            | 92         |
| § 3. Двухэтапный поиск движущегося сигнала с забыванием информации, получаемой на первом этапе . . . . .     | 98         |
| § 4. Двухэтапный поиск движущегося сигнала с использованием информации, получаемой на первом этапе . . . . . | 105        |
| § 5. О полном времени обзора . . . . .                                                                       | 117        |
| § 6. Оптимизация этапа досмотра . . . . .                                                                    | 119        |
| <b>Литература . . . . .</b>                                                                                  | <b>124</b> |



**Людмила Ефимовна РАДЮК, Александр Федорович ТЕРПУГОВ,  
Филипп Абрамович ШАПИРО**

**ПОИСК СИГНАЛА  
В МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ**

**Редактор Е. С. Юзефович  
Технический редактор Г. Н. Гридина  
Корректор Т. В. Худякова**

---

ИБ 816. Сдано в набор 22.09.80. Подписано к печати 2.06.1981.  
КЗ 06090. Формат  $84 \times 108^{1/32}$ . Бумага типографская № 3 П. л. 4;  
уч.-изд. л 4,9; усл. п. л. 6,72. Заказ 11352. Тираж 1000. Цена 75 к.





1-429831

75 коп.

Томский госуниверситет 1878



Научная библиотека 00889985