

532
А 847



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЦЕНТР ИССЛЕДОВАНИЙ И ОБРАЗОВАНИЯ
В ОБЛАСТИ РАКЕТНО-Артиллерийских наук

В.А. Архипов

**КУРС ЛЕКЦИЙ
ПО ТЕОРИИ И ПРАКТИКЕ
ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ**

Часть 2



Томск-1999

УДК 532.516: 536.24.01

Архипов В.А. Курс лекций по теории и практике закрученных потоков. Часть 2 (лекции 6–10). – Томск: Томский государственный университет, 1999. – 62 с.

Во второй части курса лекций рассмотрены методы теоретического исследования закрученных потоков. Проведен анализ моделей течения, как для чистого газа, так и для гетерогенных потоков. Приведены примеры аналитического решения для некоторых классов закрученных течений. Рассмотрены методы расчета параметров центробежных форсунок и вихревых камер.

Для научных и инженерно-технических работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области исследования и практического использования закрученных потоков.

Рецензенты:

Член-корреспондент РАН, профессор А.М. Липанов.

Доктор физико-математических наук, профессор А.М. Бубенчиков.



ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- C_D – коэффициент аэродинамического сопротивления;
 c_p, c_v – удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме, соответственно;
 D – диаметр частиц;
 G – массовый секундный расход;
 $\kappa = c_p / c_v$ – показатель адиабаты;
 p, ρ, T – давление, плотность, абсолютная температура;
 Q – объемный секундный расход;
 r, φ, z – цилиндрические координаты;
 v, w, u – радиальная, тангенциальная и аксиальная компоненты вектора скорости газа $\vec{v}$;
 v_p, w_p, u_p – соответствующие компоненты вектора скорости частиц $\vec{v}_p$;
 α – угол распыла форсунки;
 Γ – циркуляция;
 $\lambda = |\vec{v}|/c$ – приведенная скорость;
 μ, ν – коэффициенты динамической и кинематической вязкости;
 $\pi(\lambda) = p/p_0; \varepsilon(\lambda) = \rho/\rho_0; \tau(\lambda) = T/T_0$ – газодинамические функции;
 φ – коэффициент расхода;
 $\varphi_{ж}$ – коэффициент живого сечения;
 ψ – функция тока;
 Ω – угловая скорость.

Критерии подобия

- $A = \pi \Gamma_c R_0 / S_{вх}$ – геометрическая характеристика форсунки;
 $Fr = |\vec{g}| L_* / v_*$ – число Фруда;
 $Re = \rho |\vec{v}| D / \mu$ – число Рейнольдса;
 $Re_p = \rho |\vec{v} - \vec{v}_p| D / \mu$ – число Рейнольдса относительного движения;
 $Stk = \rho_p D^2 v_* / (18 \mu L_*)$ – Число Стокса;
 $\alpha_{кр} = \omega(r_{кр}) / v_{max}$ – параметр Магера.



Лекция шестая

МЕТОДЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

При конструировании различных вихрекамерных аппаратов и устройств, а также при изучении закрученных потоков широко используются методы теоретического исследования (математическое моделирование). Необходимость развития методов математического моделирования обусловлена следующими факторами:

- натурный эксперимент связан с большими материальными затратами, особенно при изучении крупногабаритных объектов;
- в эксперименте, как правило, получается лишь ограниченный объем информации из-за определенных технических трудностей, связанных с необходимостью размещения большого количества датчиков для измерения пространственных распределений параметров исследуемого потока;
- в ряде случаев эксперимент невозможен (проведение детальных измерений структуры течения в тайфунах и смерчах, например, проблематично из-за случайности места и времени их появления).

При математическом моделировании первоначально выбирается физическая модель объекта (реальное явление заменяется идеализированной схемой). Выбор такой модели – большое искусство: с одной стороны, модель должна адекватно отражать основные свойства объекта, а с другой – позволять получить решение доступными средствами и методами. Далее записывается система дифференциальных уравнений с соответствующими краевыми условиями (математическая модель) и выбирается метод ее решения (как правило, численный – с использованием компьютеров, а в ряде простейших случаев – аналитический). Затем проводится серия расчетов (математический эксперимент) для заданных диапазонов изменения определяющих параметров и анализируются полученные результаты (пространственно – временные распределения основных характеристик потока или заданные интегральные характеристики). Достоверность разработанной модели подтверждается проведением контрольных экспериментов в нескольких характерных точках поля исследуемого течения.

6.1 Модели течения

В зависимости от уровня скоростей в закрученном потоке, режимных и геометрических характеристик вихревых камер, а также от требуемой точности расчета используются различные модели течения разного уровня сложности.

Гидравлический подход

Во многих случаях течения жидкостей и газов их плотность ρ можно считать постоянной по всему объему жидкости в течение всего времени движения. Для облегчения решения гидродинамических задач введено понятие *идеальной жидкости*, которая считается совершенно несжимаемой и нерасширяющейся ($\rho = \text{const}$), обладает абсолютной подвижностью частиц и в которой отсутствуют силы внутреннего трения (коэффициент динамической вязкости $\mu = 0$). Такой *подход* к моделированию называется *гидравлическим*; он применим для описания течения капельных жидкостей, а также газов при малых скоростях движения $\vec{v}$ (малых значениях числа Маха $M = |\vec{v}|/c \ll 1$, где c – скорость звука). В рамках гидравлического подхода общие уравнения гидрогазодинамики существенно упрощаются и в ряде случаев позволяют получить их аналитическое решение.

Течения сжимаемого идеального газа

В рамках данного подхода газ считается невязким ($\mu = 0$), нетеплопроводным (коэффициент теплопроводности $\lambda = 0$) и имеющим постоянные значения удельных теплоемкостей c_p и c_v . Кроме того, предполагается, что в рассматриваемом потоке отсутствует объемное выделение тепла. Течение *идеального сжимаемого газа* описывается уравнениями Эйлера, являющимися одними из основных уравнений теоретической гидродинамики. Уравнения Эйлера используются при расчете до- и сверхзвуковых потоков (например, в соплах Лаваля), когда необходимо учитывать сжимаемость газа. Как показывают проведенные теоретические и экспериментальные исследования, при числах Маха $M \leq 0.5$ газы можно рассматривать как несжимаемую жидкость. При значениях $M \geq 0.5$ при изучении газовых потоков необходимо учитывать сжимаемость газа. Рассмотрение газа как идеального возможно при расчетах распределения давления на поверхности обтекаемых тел и при расчетах скоростей и температур жидкости на достаточно большом расстоянии от твердой поверхности или от переходных областей.

Ламинарные вязкие течения

Вязкой жидкостью называют жидкость, при изучении движения которой необходимо учитывать силы внутреннего трения и теплопроводность, обусловленные молекулярным движением. Движение вязкой жидкости или газа может быть ламинарным или турбулентным. Ламинарным называют такое течение, при котором частицы жидкости следуют по траекториям, представляющим собой плавные кривые, определяемые конфигурацией твердых границ, ограничивающих движение жидкости.

Критерием, определяющим влияние вязкости на характер движения жидкости, служит число Рейнольдса, характеризующее собой отношение сил инерции к силам вязкого трения

$$Re = \frac{|\vec{v}|D}{\nu} = \frac{\rho|\vec{v}|D}{\mu}, \quad (6.1)$$

где $|\vec{v}|$ — характерная скорость,

D — характерный размер,

$\nu = \mu/\rho$ — коэффициент кинематической вязкости.

При $Re \rightarrow \infty$ жидкость можно рассматривать как идеальную. Для описания вязких течений используются уравнения Навье–Стокса. Между поверхностью твердого тела и вязкой жидкостью всегда существуют силы молекулярного сцепления, приводящие к тому, что прилегающий к твердой стенке слой жидкости полностью задерживается (“прилипает” к ней). Соответственно этому граничные условия к уравнениям Навье–Стокса состоят в требовании $\vec{v} = 0$ на неподвижных твердых поверхностях. Отметим, что здесь требуется обращение в нуль как нормальной, так и тангенциальной компонент скорости, между тем как граничные условия к уравнениям Эйлера требуют обращения в нуль только нормальной компоненты $v_n = 0$ (условие непротекания).

Турбулентные течения

Движение жидкости, при котором траектории частиц быстро изменяются во времени, при этом изменение этих траекторий имеет случайный характер, называется турбулентным. При турбулентном движении имеет место нерегулярное, беспорядочное изменение скорости и других параметров потока как по величине, так и по направлению (пульсации гидродинамических величин и частиц жидкости).

Критерием перехода от ламинарного к турбулентному течению является критическое значение числа Рейнольдса $Re_{кр}$, величина которого зависит от геометрии и структуры потока. Закрученные течения, в частности в вихревых камерах, характеризуются интенсивным перемешиванием, образованием обратных токов и, как правило, турбулентны.

При изучении турбулентных течений проводится статистическое осреднение во времени и по отношению к группе частиц жидкости. Составляющие вектора действительной мгновенной (истинной) скорости потока u, v, w в данной точке пространства представляются в виде сумм:

$$u = \langle u \rangle + u'; \quad v = \langle v \rangle + v'; \quad w = \langle w \rangle + w', \quad (6.2)$$

причем $u' \ll \langle u \rangle$, $v' \ll \langle v \rangle$, $w' \ll \langle w \rangle$.

Здесь $\langle u \rangle$, $\langle v \rangle$, $\langle w \rangle$ — составляющие вектора средней (местной) скорости потока;

u' , v' , w' — пульсационные составляющие вектора скорости.

Средняя местная скорость — это средняя скорость, получающаяся в результате осреднения истинной скорости в каждой точке пространства по такому времени, чтобы нерегулярность истинной скорости сглаживалась и сама средняя скорость представляла собой плавно меняющуюся функцию.

Подставляя (6.2) в уравнения Навье—Стокса и отбрасывая члены второго порядка малости относительно пульсационных составляющих, можно получить уравнения, описывающие турбулентное течение жидкости (уравнения Рейнольдса).

При изучении турбулентных течений предполагается, что осредненное, в указанном выше смысле, движение можно рассматривать как движение сплошной среды, которая характеризуется средним местным давлением $\langle p \rangle$, средней местной скоростью $\langle \vec{v} \rangle$, средней местной плотностью $\langle \rho \rangle$ и средней температурой $\langle T \rangle$. Пульсационное движение сказывается на основном подобно молекулярному движению. Оно приводит к тому, что появляются дополнительные силы турбулентного трения, турбулентная теплопроводность и турбулентная диффузия.

Приближение пограничного слоя

Как было отмечено выше, большие значения чисел Рейнольдса эквивалентны малой вязкости, т.е. при больших Re жидкость можно представить как идеальную. Однако такое приближение для реальной (вязкой) жидкости непригодно вблизи обтекаемых стенок. Граничные условия для уравнений Эйлера требуют лишь исчезновения нормальной к поверхности компоненты вектора скорости $v_n = 0$, касательная же составляющая остается, вообще говоря, конечной. Между тем, у реальной вязкой жидкости скорость на обтекаемых стенках должна быть равна нулю: $\vec{v} = 0$.

Отсюда следует, что при больших Re падение скорости до нуля будет происходить почти полностью в тонком пристеночном слое (пограничном слое) толщиной δ , который характеризуется наличием в нем значительных градиентов скорости. Течение в пограничном слое может быть как ламинарным, так и турбулентным.

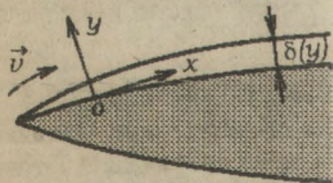


Рисунок 6.1

Схема течения в:

x, y – координаты;

$\delta(y)$ – толщина слоя.

Рассмотрим обтекание жидкостью плоского участка поверхности тела. Оси координат x, y выберем так, что ось x направлена по направлению обтекания, а ось y – перпендикулярно к оси x , по направлению внешней нормали, проведенной в данной точке поверхности тела (рис. 6.1).

Вдоль оси x скорость меняется медленно, а вдоль оси y происходит резкое изменение скорости от нуля на стенке до конечного значения на расстояниях порядка толщины δ пограничного слоя. В силу тонкости пограничного слоя при описании в нем течения жидкости можно принять следующие допущения:

- изменение гидродинамических параметров вдоль продольной координаты x много меньше, чем вдоль оси y :

$$\frac{\partial a}{\partial y} \gg \frac{\partial a}{\partial x}, \quad (6.3)$$

где a – некоторая гидродинамическая величина;

- в пограничном слое при отсутствии электрических и магнитных полей нет поперечного градиента давления

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (6.4)$$

- течение в пограничном слое происходит в основном параллельно обтекаемой поверхности, т.е.

$$v_y \ll v_x. \quad (6.5)$$

С учетом допущений (6.3)–(6.5) уравнения Навье–Стокса существенно упрощаются, и полученная при этом система уравнений (для ламинарного течения – уравнения Прандтля) в ряде случаев допускает аналитическое решение.

Двухфазные течения

При математическом моделировании рабочих процессов в целом ряде технических устройств (циклоны, барботажные камеры, вихревые камеры сгорания и т.д.) необходимо учитывать двухфазность рабочего тела. Аэродинамика многофазных сред отличается от классической механики “чистого” газа наличием в газовом потоке жидких или твердых (конденсированных) частиц различных размеров, которые могут обмениваться с газом кинетической и тепловой энергией. Массовый расход конденсированных частиц может в несколько раз превосходить расход газа и существенно меняться по тракту течения за счет перехода из одного агрегатного состояния в другое. Поскольку механизм движения многофазных сред заключается в увлечении вязкими силами газа инертных частиц и сопровождается теплообменом между газом и частицами, образованием новых частиц, их ростом, коагуляцией, дроблением, то решение задачи о движении двухфазных закрученных течений является весьма сложной проблемой.

При теоретическом исследовании двухфазных закрученных потоков в зависимости от массовой концентрации и дисперсности частиц конденсированной фазы используются, в основном, два подхода:

- Первый (упрощенный) подход состоит в том, что не учитывается влияние частиц на параметры газового потока. При этом по

заранее рассчитанным параметрам газового потока в исследуемом канале рассчитываются траектории частиц с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений движения последних (*траекторный подход*).

- Вторая группа методов основана на введении понятия многоскоростной многотемпературной среды, т.е. среды, в каждой точке которой имеется столько скоростей и температур, из какого количества фаз состоит среда. Двухфазная среда при этом рассматривается как совокупность двух взаимопроникающих континуумов – “чистого” газа и “газа” частиц, имеющего собственные значения скорости, температуры, “плотности” (концентрации частиц), но не имеющего давления. Такая схематизация многофазного потока в настоящее время является основой большинства современных моделей расчета многофазных потоков.

Реагирующие потоки

Наиболее сложным является математическое моделирование закрученных реагирующих неадиабатических потоков. Достижение замкнутости и полноты соответствующей системы уравнений осуществляется с помощью привлечения набора моделей физических процессов, протекающих в потоке с горением. Степень подробности описания этих процессов, как правило, ограничена либо их недостаточной изученностью, либо вычислительными возможностями используемых компьютеров. При этом необходимо построение адекватных моделей для следующих основных процессов:

- турбулентность — с использованием моделей с уравнениями для коэффициентов турбулентного обмена, либо непосредственно для турбулентных напряжений с учетом закрутки потока;
- радиационный теплоперенос — с использованием интегродифференциальных уравнений теории переноса излучения;
- химические реакции — включая моделирование предварительно перемешанных и диффузионных пламен, образования загрязняющих веществ, химической кинетики, а также учет влияния структуры турбулентности на средние по времени скорости химических реакций.

Отметим, что наиболее сложной задачей является правильное описание сложных химических реакций в турбулентных реагирующих

потоках применительно к конкретным горелочным устройствам. Особенно усложняются задачи математического моделирования в случае двухфазных реагирующих закрученных потоков, при решении которых наряду с проблемами инертных двухфазных потоков накладываются требования адекватного описания скорости горения капель и аэровзвесей в исследуемом потоке.

6.2 Основные уравнения

Для полного математического описания состояния движущейся жидкости необходимо найти поле вектора скорости (в общем случае нестационарное, то есть зависящее от времени t) $\vec{v} = f(r, \varphi, z, t)$ или распределения трех его компонент – радиальной $v(r, \varphi, z, t)$, тангенциальной $w(r, \varphi, z, t)$ и аксиальной $u(r, \varphi, z, t)$. Кроме того, необходимо найти распределения термодинамических параметров – давления $p(r, \varphi, z, t)$, плотности – $\rho(r, \varphi, z, t)$ и температуры – $T(r, \varphi, z, t)$. Здесь записаны цилиндрические координаты r, φ, z , поскольку закрученные потоки удобно рассматривать в цилиндрической системе координат. Таким образом, в результате математического моделирования для определения шести функций требуется решение системы, включающей шесть уравнений. Отметим, что в случае турбулентных, многофазных и реагирующих потоков количество искомых функций и, соответственно, уравнений в исходной системе увеличивается.

Основные уравнения гидромеханики выражают законы сохранения вещества (уравнение неразрывности), импульса (векторное уравнение движения) и энергии (уравнение энергии). Для замыкания системы служит уравнение состояния, связывающее термодинамические параметры среды.

Для решения соответствующей краевой задачи к уравнениям движения надо добавить краевые условия – граничные, которые должны выполняться на ограничивающих жидкость стенках, и начальные условия (в случае нестационарного течения). На границе между двумя несмешивающимися жидкостями должны выполняться условие равенства давлений и условие равенства нормальных к поверхности раздела компонент скорости обеих жидкостей, причем каждая из этих скоростей равна скорости нормального перемещения самой поверхности раздела v_n .

Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения массы, как для идеальной, так и для вязкой жидкости имеет идентичный вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (6.6)$$

Раскрывая выражение для $\operatorname{div}(\rho \vec{v})$, уравнение (6.6) можно представить также в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0. \quad (6.7)$$

Вектор $\vec{j} = \rho \vec{v}$ называют *плотностью потока жидкости*. Его направление совпадает с направлением движения жидкости, а абсолютная величина определяет количество жидкости, протекающей в единицу времени через единицу площади, расположенной перпендикулярно вектору скорости.

В случае несжимаемой жидкости (гидравлический подход), для которой $\rho = \text{const}$, уравнение неразрывности примет вид:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (6.8)$$

В цилиндрической системе координат уравнение (6.6) имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial(ru)}{\partial z} \right] = 0, \quad (6.9)$$

а уравнение (6.8) имеет вид

$$\frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial(ru)}{\partial z} = 0. \quad (6.10)$$

Уравнение движения

Уравнение движения выражает закон сохранения импульса, согласно которому изменение вектора количества движения (импульса)

$\vec{K}$ постоянной массы m , находящейся в объеме V в момент времени t , в единицу времени равно векторной сумме внешних сил $\sum \vec{F}_i$, действующих на рассматриваемую массу:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{F}_i. \quad (6.11)$$

Внешние силы $\vec{F}_i$ складываются из объемных и поверхностных сил.

Объемные силы — это силы, величина которых пропорциональна массе m : сила тяжести или другие силы, обусловленные ускоренным движением всей массы жидкости (например, центробежные силы), и силы, возникающие от действия электрических или магнитных полей.

Поверхностные силы — это силы, действующие на поверхность S , ограничивающую объем V , со стороны окружающей жидкости. Эти силы можно представить в виде суммы сил давления и сил трения. Давление p — это поверхностная сила, действующая на элементарную площадку, проведенную через данную точку, величина которой не зависит от ориентации площадки, к которой она приложена. Силы давления могут быть представлены в виде

$$\iint_S p \vec{n} dS,$$

где $\vec{n}$ — внешняя единичная нормаль к элементу поверхности dS .

Аналогично, силу трения представим в виде

$$\iint_S \vec{\tau}_n dS,$$

где $\vec{\tau}_n$ — напряжение трения (вектор силы трения, действующий на площадку с единичной площадью, положение которой в пространстве определяется единичной нормалью $\vec{n}$). С учетом этого, уравнение движения в интегральной форме имеет вид

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_V \rho \vec{F} dV - \iint_S p \vec{n} dS + \iint_S \vec{\tau}_n dS, \quad (6.12)$$

где $\vec{F}$ — суммарный вектор объемных сил. Векторное уравнение (6.12) эквивалентно трем скалярным, конкретный вид которых определяется выбранной моделью движения и используемой системой координат.

Для вязкой жидкости векторное уравнение движения в дифференциальной форме имеет следующий вид (уравнение Навье–Стокса):

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{v} + \left(\xi + \frac{\mu}{3} \right) \text{grad}(\text{div} \vec{v}), \quad (6.13)$$

где μ и ξ — коэффициенты вязкости, причем ξ часто называют “второй вязкостью” ($\mu > 0, \xi > 0$);

Δ — оператор Лапласа.

В кинетической теории газов показано, что для одноатомного совершенного газа отношение ξ/μ имеет порядок квадрата отношения объема, занятого молекулами, к объему газа, т.е. является величиной пренебрежимо малой. В дальнейшем будем считать это справедливым для любых газов (хотя строгого обоснования такого предположения для многоатомных газов не получено).

Для несжимаемой жидкости $\text{div } \vec{v} = 0$, и уравнение Навье-Стокса существенно упрощается:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{v}. \quad (6.14)$$

Полные производные $d\vec{v}/dt$ в левых частях уравнений (6.13), (6.14) определяют не изменение скорости в данной неподвижной точке пространства (подход Эйлера), а изменение скорости определенной передвигающейся в пространстве частицы жидкости (подход Лагранжа). Выражая эти производные через величины, относящиеся к неподвижным точкам, получим:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (6.15)$$

$$\text{где } (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}.$$

В уравнении (6.15) производная $\partial \vec{v}/\partial t$ берется в заданной точке пространства (при фиксированных значениях координат).

При моделировании закрученных течений удобно с помощью известных формул векторного анализа уравнения движения представить в форме Гельмгольца, содержащей только скорость. Уравнение Навье-Стокса примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{v} = \text{rot} [\vec{v} \cdot \text{rot } \vec{v}] + \frac{\mu}{\rho} \Delta \text{rot } \vec{v}, \quad (6.16)$$

где $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ — символ векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Уравнение Эйлера примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{v} = \text{rot} [\vec{v} \cdot \text{rot } \vec{v}]. \quad (6.17)$$

Уравнение Эйлера нередко используется также в форме Ламба-Громеки:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla H = [\vec{v} \cdot \text{rot } \vec{v}], \quad (6.18)$$

где $H = \frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{v}|^2}{2}$.

Приведем уравнения Навье—Стокса в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta_1 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{vw}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \varphi} + \nu \left(\Delta_1 w - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + u \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta_1 u, \end{aligned} \quad (6.19)$$

где
$$\Delta_1 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Уравнения Эйлера в цилиндрической системе координат примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{vw}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \varphi}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + u \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

В случае стационарного $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$ осесимметричного $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \right)$ течения уравнения существенно упрощаются. В частности, уравнения Эйлера примут вид

$$\begin{aligned} v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ v \frac{\partial w}{\partial r} + u \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{vw}{r} &= 0, \\ v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Отметим, что уравнения (6.16)–(6.21) записаны для случая, когда объемные силы отсутствуют ($\vec{F} = 0$).

Уравнения движения жидкости в пограничном слое, а также уравнения турбулентного течения выводятся из уравнений Навье–Стокса. Более подробно эти модели для закрученных потоков будут рассмотрены в последующих лекциях.

Уравнение энергии

В гидродинамике закон сохранения энергии заключается в том, что изменение энергии некоторой массы жидкости, содержащейся в произвольном объеме V , ограниченном поверхностью S , за некоторый промежуток времени dt равно работе всех сил, приложенных к данной массе жидкости, за данный промежуток времени плюс количество тепла, которое получает данная масса жидкости за тот же промежуток времени вследствие теплопроводности, излучения и химических реакций. Изменение полной энергии в единицу времени можно представить в виде

$$\frac{dE}{dt} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(U + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) dV + \iint_S \rho \left(U + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) v_n dS, \quad (6.22)$$

где $U, |\vec{v}|^2/2$ – внутренняя и кинетическая энергия единицы массы жидкости,

v_n – скорость перемещения элемента dS по направлению нормали.

В (6.22) первый интеграл выражает изменение энергии массы жидкости, содержащейся в объеме V , в единицу времени при неизменности этого объема, а второй — изменение энергии за счет переменности объема V .

Действующие на жидкость силы производят в единицу времени следующую работу:

$$\bullet \text{ работа сил давления} \quad - \iint_S p(\vec{n} \cdot \vec{v}) dS; \quad (6.23)$$

$$\bullet \text{ работа сил трения} \quad \iint_S (\vec{\tau}_n \cdot \vec{v}) dS; \quad (6.24)$$

$$\bullet \text{ работа массовых сил} \quad \iiint_V \rho(\vec{F} \cdot \vec{v}) dV, \quad (6.25)$$

где $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ – символ скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Количество тепла, получаемого данной массой жидкости в единицу времени, можно представить в виде

$$\iint_S q_n dS + \iiint_V \rho \varepsilon dV, \quad (6.26)$$

где q_n — проекция на внутреннюю нормаль $\vec{n}$ к элементу dS вектора потока тепла, проходящего через единицу поверхности S внутрь объема V в единицу времени (вектора $\vec{q}$);

ε — количество тепла, выделяемое единицей массы жидкости за единицу времени, — объемное тепловыделение за счет химических реакций и излучения.

С учетом (6.23)–(6.26) уравнение энергии в интегральной форме примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & - \iint_S p(\vec{n} \cdot \vec{v}) dS + \iint_S (\vec{\tau}_n \cdot \vec{v}) dS + \\ & + \iiint_V \rho(\vec{F} \cdot \vec{v}) dV + \iint_S q_n dS + \iiint_V \rho \varepsilon dV. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Преобразуя поверхностные интегралы (6.22) и (6.27) в объемные по теореме Остроградского и учитывая, что объем интегрирования V произвольный, можно получить дифференциальную форму уравнения энергии, которое с помощью уравнения неразрывности может быть представлена в следующем виде:

$$\rho \left[\frac{dU}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] = \Phi + \text{div} \vec{q} + \rho \varepsilon = \rho \frac{d'Q}{dt}, \quad (6.28)$$

где $\frac{d'Q}{dt}$ — количество тепла, которое получает единица массы жидкости в единицу времени;

$$\Phi = \left(\vec{\tau}_x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{\tau}_y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{\tau}_z \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) - \text{тепло, получаемое единицей объема жидкости в единицу времени за счет сил трения (диссипативная функция)}.$$

Здесь $\vec{\tau}_x, \vec{\tau}_y, \vec{\tau}_z$ — векторы, выражающие собой силы трения, действующие на единичные площадки, перпендикулярные, соответственно осям x, y, z .

При рассмотрении конкретных моделей течения уравнение энергии может быть значительно упрощено. Например, для адиабатического процесса $d'Q/dt = 0$. В частности, это модель справедлива, когда жидкость можно рассматривать как идеальную (отсутствуют силы трения, нет теплопередачи между частицами жидкости и нет объемного тепловыделения).

Уравнение состояния

Для несжимаемой жидкости, уравнение состояния имеет вид

$$\rho = \text{const.} \quad (6.29)$$

Для сжимаемых жидкостей (газов) уравнение состояния имеет более сложный вид. Исходные положения термодинамики для равновесной системы приводят к уравнениям, связывающим температуру T , внешние параметры a_i и какой-либо внутренний параметр b_k :

$$b_k = f_k(a_1, a_2, \dots, a_n, T). \quad (6.30)$$

Если внутренним параметром b_k является давление p , то уравнение

$$p = f(a_1, a_2, \dots, a_n, T) \quad (6.31)$$

называется *термическим уравнением состояния*.

Рассмотрим так называемые простые (двухпараметрические) термодинамические системы, состояние которых определяется двумя параметрами: одним внешним параметром (в качестве которого удобно выбрать объем V) и температурой T . Простыми системами являются газы, жидкости, изотропные твердые тела при отсутствии внешних электрических и магнитных полей и т.п. Для простых систем термическое уравнение состояния имеет вид:

$$p = p(V, T). \quad (6.32)$$

Любые газы при не слишком малых и не слишком больших давлениях и температурах (для каждого газа свой интервал) являются термодинамически идеальными или *совершенными газами*. Совершенный газ — это такой газ, размерами молекул которого можно

пренебречь по сравнению с длиной свободного пробега и в котором молекулы взаимодействуют друг с другом только в процессе столкновений. Для таких газов справедливо уравнение состояния Клапейрона-Менделеева

$$pV = \frac{m}{M} R_o T, \quad (6.33)$$

где m — масса газа, содержащегося в объеме V ;

M — молекулярный вес газа;

$R_o = 8.31441 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ — универсальная газовая постоянная. Подставляя в (6.33) плотность $\rho = m/V$ и газовую постоянную $R = R_o/M$, получим общепринятую форму уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$p = \rho R T. \quad (6.34)$$

Для механической смеси n совершенных газов, в которой компоненты сохраняют свою химическую индивидуальность и каждый из них ведет себя независимо от других, выполняется закон Дальтона

$$p = \sum_{i=1}^n p_i, \quad (6.35)$$

где p — общее давление смеси;

p_i — парциальные давления компонентов.

Входящая в уравнение состояния величина молекулярного веса M для смеси газов будет зависеть от относительной концентрации $\xi_i = \rho_i/\rho$ отдельных компонентов:

$$\frac{1}{M} = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{M_i}, \quad (6.36)$$

где M_i — молекулярный вес i -го компонента.

Для реальных газов, а также для паров необходимо использовать более сложные уравнения состояния (эмпирические или теоретические). Наиболее известным для реальных газов является уравнение состояния Ван-дер-Ваальса.



Лекция седьмая

ТЕЧЕНИЕ ГАЗА С ЧАСТИЦАМИ

7.1 Уравнение движения частицы

Во многих технических устройствах реализуются двухфазные закрученные течения, причем роль несущей фазы выполняет газ или жидкость, которые вовлекают в движение взвешенные в них твердые или жидкие частицы (газовые пузырьки в жидкости тоже могут рассматриваться как частицы). Введение частиц в поток, естественно, влияет на характер движения несущей среды, особенно при высоких концентрациях частиц. Первым и весьма важным этапом в изучении двухфазных течений является анализ закономерностей движения и теплообмена единичных частиц в известном поле скоростей и температур несущей среды (траекторный подход). Результаты подобных исследований не только необходимы для построения более сложных моделей, но и представляют практический интерес, поскольку во многих случаях объемная концентрация частиц невелика, и для описания закрученных потоков достаточно приближения единичной частицы.

Для данной задачи целесообразно применение метода Лагранжа при описании движения частиц, то есть задача сводится к определению закона движения частицы в неподвижной (инерциальной) системе координат

$$\vec{r} = \vec{r}(r_0, \varphi_0, z_0, t), \quad (7.1)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы (в данном случае в цилиндрической системе координат r, φ, z);

r_0, φ_0, z_0 – переменные Лагранжа (координаты частицы в момент времени $t = t_0$).

В проекциях на оси координат закон движения частицы будет:

$$r = r(r_0, \varphi_0, z_0, t); \quad \varphi = \varphi(r_0, \varphi_0, z_0, t); \quad z = z(r_0, \varphi_0, z_0, t). \quad (7.2)$$

Зная закон движения (7.1) или (7.2), можно найти скорость $\vec{v}_p$ и ускорения $\vec{a}_p$ частицы в каждый момент времени:

$$\bar{v}_p = \frac{d\bar{r}}{dt}; \quad \bar{a}_p = \frac{d\bar{v}_p}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Ускорение частицы (материальной точки) в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\bar{a}_p = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \bar{e}_r + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right] \bar{e}_\varphi + \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{e}_z. \quad (7.3)$$

Учитывая то, что $\frac{d\varphi}{dt} = \Omega = \frac{\omega_p}{r}$,

где Ω — угловая скорость, проекции вектора ускорения на орты $\bar{e}_r, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_z$ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} a_{pr} &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{dv_p}{dt} - \frac{\omega_p^2}{r}, \\ a_{p\varphi} &= 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d\omega_p}{dt} + \frac{v_p \omega_p}{r}, \\ a_{pz} &= \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{du_p}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

где v_p, ω_p, u_p — радиальная, тангенциальная и аксиальная компоненты вектора скорости частицы $\bar{v}_p$.

Будем считать параметры газового потока $v(r, \varphi, z), \omega(r, \varphi, z), u(r, \varphi, z), p(r, \varphi, z), \rho(r, \varphi, z), T(r, \varphi, z)$, заданными и не зависящими от наличия в нем конденсированных частиц.

В соответствии со вторым законом Ньютона уравнение движения частицы можно представить в виде:

$$m \frac{d\bar{v}_p}{dt} = \sum_i \bar{F}_i, \quad (7.5)$$

где $m = \rho_p V = \rho_p \frac{\pi D^3}{6}$ — масса частицы диаметром D ;

V, ρ_p — объем частицы и плотность ее материала;

$\bar{F}_i$ — внешние силы, действующие на частицу в потоке.

Уравнение (7.5) есть по сути, дифференциальное уравнение движения частицы в векторном виде. Решая это уравнение, можно найти закон движения частицы (7.1), то есть зависимость от времени ее радиус-вектора $\vec{r}(t)$, если известны $m, \vec{F}_1$ и начальные условия (начальная скорость частицы $\vec{v}_{po}$ и ее положение $\vec{r}_o$ в момент времени $t = t_o$). Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнения (7.5).

7.2 Анализ сил, действующих на частицу

Для закрученного двухфазного потока структура действующих на частицу сил гораздо сложнее, чем, например, в случае гравитационной седиментации или в квазиодномерном потоке. Проанализируем основные силы, действующие на частицу в закрученном потоке.

При отсутствии взаимодействия частиц между собой и со стенками канала основными силами, действующими на частицу, являются сила тяжести $\vec{F}_g$, подъемная сила (сила Архимеда) $\vec{F}_a$, сила, обусловленная радиальным градиентом давления несущей среды ("центробежная сила Архимеда") $\vec{F}_p$ и сила аэродинамического сопротивления $\vec{F}_c$.

1. Сила тяжести:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = \rho_p V \vec{g}, \quad (7.6)$$

где $\vec{g}$ – вектор ускорения свободного падения.

Сила тяжести действует в направлении вектора $\vec{g}$.

2. Сила Архимеда действует в направлении, противоположном вектору $\vec{g}$, и выражается формулой:

$$\vec{F}_a = -\rho V \vec{g} = -m \frac{\rho}{\rho_p} \vec{g}, \quad (7.7)$$

где ρ – плотность газа (несущей среды).

3. Сила, обусловленная изменением давления несущей среды по поверхности частицы (радиальным градиентом $\frac{dp}{dr}$, так как в закрученном потоке преобладающим является изменение давления по радиусу):

$$\vec{F}_p = \iint_S \vec{n} p dS = \iiint_V \text{grad } p dV,$$

где S – поверхность частицы;

$\vec{n}$ – нормаль к элементу поверхности dS .

Для частиц малых размеров изменением $\text{grad } p$ по объему частицы можно пренебречь и с учетом теоремы о среднем записать

$$\vec{F}_p = V \text{grad } p = V \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r, \quad (7.8)$$

где $\text{grad } p$ – градиент давления среды, взятый в точке, совпадающей с центром объема частицы.

Эта сила, направленная по радиусу к центру вращения, по аналогии с подъемной силой может быть названа “центробежной силой Архимеда”.

Из анализа уравнений закрученного газового потока можно показать, что при малых значениях радиальной скорости газа u

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho \omega^2}{r}, \quad (7.9)$$

где ρ, ω – плотность и тангенциальная скорость несущей среды.

Подставляя (7.9) в (7.8), получим выражение для центробежной силы Архимеда в виде

$$\vec{F}_p = V \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r = -\rho(r) V \frac{\omega^2(r)}{r} = -m \frac{\rho(r)}{\rho_p} \frac{\omega^2(r)}{r}. \quad (7.10)$$

4. Сила аэродинамического сопротивления, обусловленная относительным движением частиц и несущей среды. Эта сила действует в направлении разностного вектора $\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_p$ ($\vec{v}, \vec{v}_p$ – векторы скорости несущей среды и частиц, соответственно):

$$\vec{F}_c = C_D \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho |\vec{v}_r|}{2} \vec{v}_r, \quad (7.11)$$

где C_D – безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления,

$|\vec{v}_r| = \sqrt{(v - v_p)^2 + (\omega - \omega_p)^2 + (u - u_p)^2}$ – модуль вектора $\vec{v}_r$.

Уравнения движения частицы с учетом рассмотренных сил $\vec{F}_i$ и соотношений (7.4) в проекциях на оси цилиндрической системы координат r, φ, z с направленной вверх осью z сводятся к следующей системе:

$$m \frac{dv_p}{dt} = C_D \frac{\pi D^2 \rho |\vec{v}_r|}{8} (v - v_p) + \frac{m}{r} \left(w_p^2 - \frac{\rho}{\rho_p} w^2 \right); \quad (7.12)$$

$$m \frac{dw_p}{dt} = C_D \frac{\pi D^2 \rho |\vec{v}_r|}{8} (w - w_p) - \frac{m}{r} v_p w_p; \quad (7.13)$$

$$m \frac{du_p}{dt} = C_D \frac{\pi D^2 \rho |\vec{v}_r|}{8} (u - u_p) + mg \left(\frac{\rho}{\rho_p} - 1 \right); \quad (7.14)$$

Первые слагаемые в правых частях уравнений (7.12)–(7.14) обусловлены аэродинамической силой. Второе слагаемое в (7.12) обусловлено центробежным ускорением и центробежной силой Архимеда. Второе слагаемое в уравнении (7.13) обусловлено ускорением Кориолиса, а в уравнении (7.14) — силой Архимеда и силой тяжести.

При $\rho = \rho_p$ все силы, действующие на частицу, обусловлены отличием ее скорости от скорости газа и направлены в сторону сближения скоростей потока и частиц. При достижении равенств $\vec{v} = \vec{v}_p$ все приложенные к частице силы будут равны нулю, и частица будет двигаться вместе с потоком.

Отметим, что закон Ньютона справедлив только в инерциальной системе координат, движение частицы в которой обусловлено только силами взаимодействия частицы с несущим потоком. При использовании неинерциальной системы (например, связанной с вращающейся вокруг оси z частицы) для выполнения закона Ньютона вводятся силы инерции (центробежная сила инерции и сила Кориолиса). Математическая запись уравнений движения (7.12)–(7.14) при этом сохраняется (меняется только физический смысл входящих в них членов).

Для расчета траекторий частиц к уравнениям движения (7.12)–(7.14) необходимо присоединить кинематические соотношения:

$$\frac{dr}{dt} = v_p, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{w_p}{r}, \quad \frac{dz}{dt} = u_p. \quad (7.15)$$

Полученная система уравнений (7.12)–(7.15) после подстановки в нее заданных компонент вектора скорости несущего потока (v, w, u) интегрируется численно (методом Рунге–Кутты, например) с учетом соответствующих начальных условий ввода частиц в поток.

7.3 Коэффициент аэродинамического сопротивления

Для интегрирования уравнений движения частицы необходимо знать коэффициент аэродинамического сопротивления C_D , который зависит от режима обтекания частицы (числа Рейнольдса относительного движения Re_p), формы частицы и ряда других параметров. Наиболее подробно зависимость C_D от Re_p изучена для твердых сферических частиц.

В стоксовском режиме обтекания (малые значения Re_p) для твердых сферических частиц

$$C_D = 24/Re_p, \quad (7.16)$$

где $Re_p = (\rho |\vec{v}_r| D) / \mu$ – число Рейнольдса газа, движущегося относительно частицы;

μ – коэффициент динамической вязкости несущей среды.

Формула (7.16) дает удовлетворительную точность при $Re_p < 6$.

В области $Re_p = 10^3 \div 3 \cdot 10^5$ величина $C_D = 0.4$ (7.17)

Для диапазона $Re_p = 1 \div 10^3$ можно использовать формулу Клячко

$$C_D = 24/Re_p + 4 \cdot Re_p^{-1/3}. \quad (7.18)$$

При $Re_p > 3 \cdot 10^5$ коэффициент C_D резко уменьшается, затем снова возрастает.

В общем случае точно определить C_D для несферической частицы невозможно, так как он зависит от целого ряда параметров (геометрии, свойства поверхности, ориентация частиц и т.д.). Поэтому для конкретных расчетов используются различные аппроксимационные формулы.

С учетом (7.11) и (7.16) для $Re_p < 6$ сила сопротивления задается законом Стокса

$$\vec{F}_c = 3\pi\mu D\vec{v}_r. \quad (7.19)$$

Для автомодельной области с учетом (7.11) и (7.17) сила сопротивления определяется квадратичным законом

$$\vec{F}_c = 0.05\pi\rho D^2|\vec{v}_r|\vec{v}_r. \quad (7.20)$$

7.4 Критерии подобия задачи

Рассмотрим критерии подобия, которые наряду с числом Re_p определяют характер движения частиц в двухфазном потоке. Запишем векторное уравнение движения для стоксовского режима обтекания, подставив в (7.5) действующие на частицу силы (7.6), (7.7), (7.10), (7.19):

$$m \frac{d\vec{v}_p}{dt'} = 3\pi\mu D\vec{v}_r - m\vec{g} + m \frac{\rho}{\rho_p} \vec{g} - m \frac{\rho}{\rho_p} \frac{w^2}{r}. \quad (7.21)$$

Приведем уравнение (7.21) к безразмерному виду:

$$\frac{d\vec{v}'_p}{dt'} = \frac{1}{Stk} \vec{v}'_r + Fr(\bar{\rho} - 1) - \bar{\rho} \frac{w'^2}{r'}. \quad (7.22)$$

Штрихом помечены одноименные безразмерные переменные, $\bar{\rho} = \rho/\rho_p$.

В качестве масштабов при обезразмеривании параметров приняты характерные для конкретно рассматриваемой задачи размер области течения L_* (например, радиус вихревой камеры) и скорость v_* ; масштаб времени $t_* = L_*/v_*$. В уравнение (7.22) входят два безразмерных критерия подобия рассматриваемой задачи — число Стокса Stk , определяющее аэродинамическое воздействие потока на частицу, и число Фруда Fr , связанное с ускорением массовых сил. Эти параметры определяются следующими зависимостями:

$$Stk = \frac{\rho_p D^2}{18\mu t_*} = \frac{\rho_p D^2 v_*}{18\mu L_*}, \quad Fr = |\vec{g}| \frac{L_*}{v_*}. \quad (7.23)$$

Отметим, что при малых значениях числа Стокса ($Stk \rightarrow 0$) $\vec{v}_p \rightarrow \vec{v}$, то есть частица движется равномерно с газом.



Лекция восьмая

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ

8.1 Расчет закрученных течений газа с помощью газодинамических функций

При расчете некоторых классов течений газа, в частности, одномерных адиабатических газовых потоков, широкое распространение получил метод, основанный на использовании *газодинамических функций* — алгебраических зависимостей, которые выражают связь основных параметров потока в произвольном сечении канала (сопла Лавалия, например) с параметрами торможения p_0, ρ_0, T_0 (в камере сгорания или ресивере) через показатель адиабаты газа $k = c_p/c_v$ и приведенную скорость $\lambda = |\bar{v}|/a_{кр}$ ($a_{кр}$ — критическая скорость звука).

Преимуществами данного подхода являются сокращение вычислительной работы, упрощение преобразований при совместном решении основных уравнений, что позволяет получить в общем виде решения весьма сложных задач. Использование газодинамических функций позволяет вести расчет одномерных газовых течений с учетом сжимаемости почти так же просто, как ведется расчет течений несжимаемой жидкости. Этим функциям присвоены сокращенные обозначения, и значения их в зависимости от параметров λ и k вычислены и сведены в таблицы газодинамических функций.

Г.Н. Абрамович предложил обобщить аппарат газодинамических функций на случай закрученных потоков газа. Если параметры газа в поперечном сечении потока можно считать постоянными, то для расчета закрученных течений можно использовать формулы и таблицы обобщенных газодинамических функций. В частности, такой подход применим для течений в кольцевых каналах (рис. 8.1).

Рассмотрим закрученный поток газа с параметрами торможения p_0, ρ_0, T_0 и абсолютной скоростью $\bar{v}$, составляющей угол α с осью течения.

Простейшие функции, которые выражают связь между параметрами газа в произвольном сечении потока p, ρ, T и параметрами торможения, имеют тот же вид, что и для одномерного незакрученного потока.

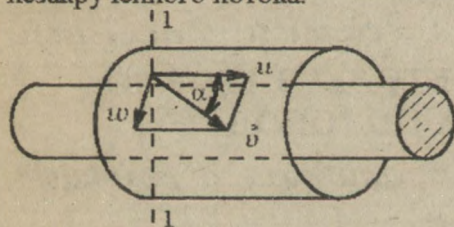


Рисунок 8.1.

Закрученный газовый поток в кольцевом канале:

u, w — аксиальная и тангенциальная компоненты вектора скорости $\vec{v}$ в сечении 1-1;
 α — угол закрутки

Функция $\pi(\lambda)$ связывает давление в потоке с давлением торможения:

$$\pi(\lambda) = \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (8.1)$$

Функция $\varepsilon(\lambda)$ связывает плотность в потоке с плотностью изоэнтропически заторможенного газа:

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (8.2)$$

Функция $\tau(\lambda)$ связывает температуру в потоке с температурой торможения:

$$\tau(\lambda) = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2. \quad (8.3)$$

Связь между этими функциями дается соотношением

$$\pi(\lambda) = \tau(\lambda) \cdot \varepsilon(\lambda). \quad (8.4)$$

Приведенная скорость λ рассчитывается по формуле

$$\lambda = |\vec{v}| / a_{кр}, \quad (8.5)$$

где

$$a_{кр} = \sqrt{2 \frac{k}{k+1} R T_0}. \quad (8.6)$$

Здесь $R = c_p - c_v$ — газовая постоянная.

Массовый секундный расход газа через поперечное сечение S , перпендикулярное оси потока, равен

$$G = \rho S u = \rho S |\bar{v}| \cos \alpha. \quad (8.7)$$

Выражая $|\bar{v}|$ через приведенную скорость, а ρ через параметры торможения, зависимость (8.7) можно представить в виде

$$G = m \frac{p_o S q(\lambda)}{\sqrt{T_o}} \cos \alpha, \quad (8.8)$$

где

$$m = \sqrt{\frac{k}{R} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} = \text{const}, \quad (8.9)$$

$$q(\lambda) = \frac{\rho |\bar{v}|}{\rho_{кр} a_{кр}} = \frac{S_{кр}}{S} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda \varepsilon(\lambda). \quad (8.10)$$

Здесь $q(\lambda)$ — газодинамическая функция, выражающая безразмерную плотность тока,

$\rho_{кр} a_{кр}$ — максимальное значение плотности тока при заданных p_o, T_o , соответствующее течению со скоростью звука (в критическом сечении сопла Лавала).

Соотношение (8.8) можно переписать в виде

$$G = m \frac{p_o S}{\sqrt{T_o}} q(\lambda, \alpha), \quad (8.11)$$

где

$$q(\lambda, \alpha) = q(\lambda) \cdot \cos \alpha. \quad (8.12)$$

Здесь $q(\lambda, \alpha)$ — газодинамическая функция $q(\lambda)$, обобщенная на случай закрученного течения газа.

Аналогично можно получить выражение для расхода газа через газодинамическую функцию $y(\lambda)$:

$$G = m \frac{p S}{\sqrt{T_o}} y(\lambda, \alpha), \quad (8.13)$$

где

$$y(\lambda, \alpha) = y(\lambda) \cdot \cos \alpha; \quad (8.14)$$

$$y(\lambda, \alpha) = \frac{q(\lambda)}{\pi(\lambda)} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{-1}. \quad (8.15)$$

Таким образом, если угол закрутки α задан, то для вычисления расхода газа и составления уравнения неразрывности используются те же формулы, что и при $\alpha = 0$, так как обобщенные функции $q(\lambda, \alpha)$ и $y(\lambda, \alpha)$ определяются по углу α и по значениям $q(\lambda)$ и $y(\lambda)$ для приведенной скорости в абсолютном движении газа.

Рассмотрим газодинамические функции, которые используются в уравнении количества движения газа. Для незакрученного потока это функция

$$z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda}, \quad (8.16)$$

с помощью которой полный импульс газового потока можно представить в виде произведения температуры торможения (критической скорости звука) на расход газа

$$J = G|\vec{v}| + pS = \frac{k+1}{2k} Ga_{кр} z(\lambda). \quad (8.17)$$

Для закрученного потока импульс потока газа в направлении оси канала равен

$$J = Gu + pS = G|\vec{v}| \cos \alpha + pS. \quad (8.18)$$

После некоторых преобразований (8.18) можно представить в виде

$$J = \frac{k+1}{2k} Ga_{кр} z(\lambda, \alpha), \quad (8.19)$$

где

$$z(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\cos \alpha} \left[\left(\frac{2k}{k+1} \cos^2 \alpha - \frac{k-1}{k+1} \right) \lambda + \frac{1}{\lambda} \right]. \quad (8.20)$$

Выражение (8.19) аналогично выражению (8.17), полученному при $\alpha = 0$, но содержит вместо $z(\lambda)$ обобщенную функцию $z(\lambda, \alpha)$.

Формулы (8.11) и (8.19) позволяют установить характер изменения плотности тока, площади сечения, удельного импульса и других величин, характеризующих газовый поток, в зависимости от k , λ и α .

8.2 Модель однородного винтового течения

Винтовое течение идеальной (невязкой) жидкости, как показал И.С. Громека, является наиболее общим случаем ее установившегося течения, когда во всей массе жидкости запас энергии постоянен, т.е. уравнение Бернулли применимо ко всему потоку в целом:

$$E = U + \frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} = \text{const}. \quad (8.21)$$

Здесь E – полная энергия; U – потенциальная энергия. Кинематическое условие винтового течения состоит в том, что вектор вихря $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$ коллинеарен вектору скорости $\vec{v}$; аналитически это можно выразить в следующих двух зависимостях:

$$[\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}] = 0 \quad (8.22)$$

или

$$\text{rot } \vec{v} = \gamma \vec{v}. \quad (8.23)$$

Отметим, что потенциальное безвихревое течение с $\text{rot } \vec{v} = 0$ является частным случаем винтового. В общем случае скаляр γ может быть функцией координат пространства: $\gamma = f(q_1, q_2, q_3)$. В случае, когда во всей массе движущейся жидкости $\gamma = \text{const}$, реализуется *однородное винтовое течение*; параметр γ , при этом называется *напряженностью однородного винтового течения*. В общем случае $\gamma \neq \text{const}$ реализуется *неоднородное винтовое течение*.

Н.Е. Жуковским и Бельтрами было показано, что винтовой поток как несжимаемой жидкости, так и идеального (невязкого) газа может быть только установившимся. В ряде случаев с использованием модели винтового течения удается получить аналитическое решение, в частности для течения идеального газа в сопле Лавалья такое решение получено Ю.А. Гостинцевым.

Общая система уравнений движения идеального совершенного газа имеет следующий вид (уравнение Эйлера записано в форме Ламба–Громеки):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [\text{rot } \vec{v} \times \vec{v}] &= -\text{grad} \left(\int \frac{dp}{\rho} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) &= 0, \\ p &= \rho RT. \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

Поскольку винтовой поток может быть только стационарным (в дальнейшем рассматривается только такое течение), то для него существует интеграл Бернулли

$$E = \int \frac{dp}{\rho} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} = \text{const}. \quad (8.25)$$

Эти свойства имеют место, как для жидкости, так и для газа. Помимо этого, винтовой поток газа обладает некоторыми специфическими особенностями. Используя известное термодинамическое соотношение

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } H - T \text{grad } S, \quad (8.26)$$

уравнение движения можно записать в виде

$$[\text{rot } \vec{v} \times \vec{v}] = T \text{grad } S - \text{grad} \left(H + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right). \quad (8.27)$$

Здесь S, H – энтропия и полная энтальпия газового потока.

Тогда для винтового течения из условия (8.22) следует:

$$TVS = \text{grad} \left(H + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right); \quad (8.28)$$

$$\text{rot}(T \text{grad } S) = [\text{grad } T \times \text{grad } S] = 0. \quad (8.29)$$

Другими словами, винтовое течение может быть либо изэнтропическим, либо изотермическим, а также течением, в котором поверхности $T = \text{const}$ совпадают с поверхностями $S = \text{const}$.

Винтовое течение газа возможно только при выполнении условия совместности уравнений движения и неразрывности (8.24) с кинематическим условием (8.23). Для несжимаемой жидкости это условие выполняется автоматически.

Для двумерного вихревого течения уравнения (8.24) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{L_2}{L_1 L_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{L_1}{L_2 L_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \\ & + \rho \frac{L_1 L_2}{L_3} \Gamma(\psi) \frac{\partial \Gamma}{\partial \psi} - \rho L_1 L_2 L_3 \frac{\partial E}{\partial \psi} = 0, \\ & L_2 L_3 \rho v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \\ & L_1 L_3 \rho v_2 = - \frac{\partial \psi}{\partial q_1}, \\ & L_3 v_3 = \Gamma(\psi). \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

Здесь ψ — функция тока;

q_i — криволинейные ортогональные координаты;

L_i — коэффициенты Ляме;

Γ — циркуляция.

С другой стороны, кинематическое условие (8.23) дает

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{L_2}{L_1 L_3} \frac{\partial \Gamma}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{L_1}{L_2 L_3} \frac{\partial \Gamma}{\partial q_2} \right) + \gamma \frac{L_1 L_2}{L_3} \Gamma = 0. \quad (8.31)$$

Из сопоставления (8.30) и (8.31) видно, что условие динамической возможности винтового течения газа заключается в выполнении соотношения

$$d\Gamma = \frac{\gamma}{\rho} d\psi. \quad (8.32)$$

Так как Γ однозначно определяется функцией тока ψ , то из (8.32) следует, что величина $\gamma/\rho = \text{const}$ для каждой линии тока. В соответствии с (8.30) и (8.32) выражение компонент вектора скорости через циркуляцию будет иметь вид

$$\begin{aligned} L_2 L_3 v_1 &= \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial q_2}; \\ L_1 L_3 v_2 &= - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial q_1}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Общий случай винтового течения, когда $\lambda = f(q_1, q_2, q_3)$ чрезвычайно сложен для интегрирования. Рассмотрим однородное винтовое течение ($\gamma = \text{const}$), которое по аналогии с течением несжимаемой жидкости будем называть потоком Громеки. Система уравнений для адиабатического двумерного потока Громеки имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{L_2}{L_1 L_3} \frac{\partial \Gamma}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{L_1}{L_2 L_3} \frac{\partial \Gamma}{\partial q_2} \right) + \gamma^2 \frac{L_1 L_2}{L_3} \Gamma &= 0, \\ L_2 L_3 v_1 &= \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial q_2}, \\ L_1 L_3 v_2 &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial q_1}, \\ \int \frac{dp}{\rho} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} &= E, \\ p &= \rho RT. \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

Рассмотрим один из предельных случаев — винтовое изэнтропическое течение. Будем считать, что течение осесимметричное и радиально-уравновешенное (радиальной составляющей вектора скорости можно пренебречь). При этом осевая и тангенциальная компоненты вектора скорости зависят только от радиальной координаты, а уравнение неразрывности заменяется его интегральной формой:

$$G = 2\pi \int_0^R \rho u r dr = \text{const}. \quad (8.35)$$

В цилиндрических координатах уравнение движения принимает простой вид

$$\frac{d^2 \Gamma}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Gamma}{dr} + \gamma^2 \Gamma = 0, \quad (8.36)$$

$$\text{общее решение которого } \Gamma = C_0 r J_1(\gamma r) + C_1 r Y_1(\gamma r). \quad (8.37)$$

Отсюда:

$$\left. \begin{aligned} \omega(r) &= C_0 J_1(\gamma r) + C_1 Y_1(\gamma r), \\ u(r) &= C_0 J_0(\gamma r) + C_1 Y_0(\gamma r), \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

где J_0, J_1, Y_0, Y_1 — функции Бесселя.

Для вихревого движения газа граничными условиями уравнения (8.36) являются:

$$\Gamma = 0 \text{ при } r = 0 - \text{ на оси потока,}$$

$$\Gamma = \Gamma_0 \text{ при } r = R - \text{ на стенке сопла.}$$

Тогда из (8.38) следуют выражения для расчета тангенциальной и аксиальной компонент вектора скорости для рассматриваемого типа течения:

$$\left. \begin{aligned} \omega(r) &= \frac{\Gamma_0}{R} \frac{J_1(\gamma r)}{J_1(\gamma R)}, \\ u(r) &= \frac{\Gamma_0}{R} \frac{J_0(\gamma r)}{J_1(\gamma R)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

Для потенциального течения ($\gamma = 0$ и $\text{rot } \vec{u} = 0$) решением уравнения (8.36) будет

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_0 = \text{const.}, \\ \omega(r) &= \Gamma_0 / r, \\ u &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

Расчеты, проведенные по формулам (8.39) для критического сечения сопла, показывают, что при значениях параметра Магера $\alpha_{кр} = \omega(r_{кр}) / v_{max} < 0.3$ аксиальная компонента вектора скорости слабо изменяется по радиусу, а тангенциальная практически соответствует закону квазитвердого вращения. Начиная со значений $\alpha_{кр} = 0.3$, профиль $\omega(r)$ искривляется, а профиль $u(r)$ приобретает максимум на оси сопла. При большей интенсивности закрутки $u(r)$ изменяется от существенно дозвуковой на стенке до большой сверхзвуковой на оси сопла. Тангенциальная скорость становится сверхзвуковой в пристеночной зоне сопла при значениях $\alpha_{кр} > 0.4$. При $\alpha_{кр} = 0.58$ величина $u(r)$ на оси приближается к максимальному значению, после чего в приосевой области, как и в случае квазипотенциального вращения, возникает вакуумное ядро.

Отметим, что модель винтового потока не учитывает производные аксиальной и тангенциальной компонент вектора скорости по продольной координате z (т.е. является квазицилиндрическим приближением). Поэтому она непригодна для сопел Лавала с большим углом сужения и малым радиусом кривизны критического сечения.



Лекция девятая

ТЕОРИЯ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ФОРСУНКИ

9.1 Устройство и принцип действия

Форсункой называется устройство для распыливания жидкости, широко используемое в различных отраслях техники. Приведем основные области применения форсунок:

- подготовка горючей смеси в ЖРД, двигателях внутреннего сгорания, горелках, топках, котельных установках и т.п.;
- системы охлаждения горячих газов в аппаратах химической технологии;
- поливочные устройства в сельском хозяйстве.

Наибольшее распространение получили центробежные форсунки (ЦБФ). Центробежная форсунка (рис. 9.1) состоит из камеры закручивания, входных тангенциальных каналов и выходного сопла.

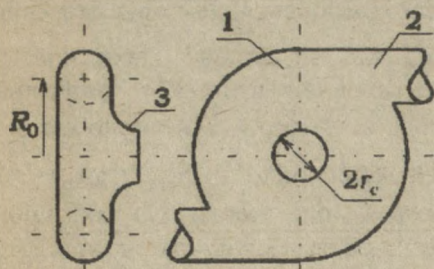


Рисунок 9.1

Схема центробежной форсунки

- 1 — камера закручивания;
- 2 — входные каналы;
- 3 — сопло.

Характеристики ЦБФ определяются следующими геометрическими параметрами:

R_0 — плечо закручивания (расстояние от оси симметрии ЦБФ до оси входного канала;

r_c — радиус сопла;

$r_{вх}$ — радиус входного канала;

n — количество входных каналов;

$S_{вх} = n\pi r_{вх}^2$ — суммарная площадь входных каналов.

Жидкость вводится в ЦБФ тангенциально, вследствие чего поток закручивается. При выходе жидкости из сопла действие центробежных сил от твердых стенок прекращается, и истекающая струя в результате нестационарных колебаний распадается на капли. При этом капли разлетаются по прямолинейным лучам, составляющим угол α с осью ЦБФ (рис. 9.2).

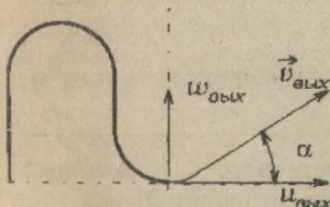


Рисунок 9.2

Угол распыла 2α является важнейшей характеристикой ЦБФ, его величина определяется значениями аксиальной $u_{\text{вых}}$ и тангенциальной $w_{\text{вых}}$ компонент вектора скорости $\vec{v}_{\text{вых}}$ в выходном сечении сопла:

$$\alpha = \arctg(w_{\text{вых}}/u_{\text{вых}}).$$

Кроме геометрических параметров на характеристики ЦБФ влияют перепад давления $\Delta p = p_{\text{вх}} - p_{\text{вых}}$ и физические свойства распыливаемой жидкости (в первую очередь вязкость).

9.2 Теория центробежной форсунки для идеальной жидкости

Теория ЦБФ для идеальной (невязкой) жидкости разработана Г.Н. Абрамовичем более 50 лет назад и до настоящего времени широко используется при расчете форсунок.

В соответствии с законом сохранения момента импульса, для идеальной жидкости момент импульса любой жидкой частицы относительно оси ЦБФ постоянен:

$$w_{\text{вх}} \cdot R_0 = w \cdot r = \text{const}. \quad (9.1)$$

Для идеальной жидкости запас энергии в потоке не изменяется и определяется уравнением Бернулли:

$$p_{\text{вх}} + \frac{\rho w_{\text{вх}}^2}{2} = p + \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\rho w^2}{2} = \text{const}. \quad (9.2)$$

Из (9.2) с учетом (9.1) можно получить выражение:

$$\frac{p}{\rho} = H - \left(\frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{2} \right), \quad (9.3)$$

где $H = \frac{p_{вх}}{\rho} + \frac{w_{вх}^2}{2} = \text{const}$ – полный напор.

Из (9.1) следует, что на оси ЦБФ ($r \rightarrow 0$) скорость потока стремится к бесконечности:

$$w = \frac{w_{вх} \cdot R_0}{r} \rightarrow \infty.$$

Из (9.3) следует, что давление на оси форсунки $p \rightarrow -\infty$, что физически невозможно.

Следовательно, должен существовать механизм, поддерживающий некоторую конечную величину давления на оси ЦБФ. Форсунка подает жидкость в среду с давлением p_a (истечение в атмосферу) или p_k (истечение в камеру сгорания ЖРД). Внутренняя полость форсунки сообщается с атмосферой (или камерой сгорания), и давление закрученного потока жидкости не может быть ниже p_a (или p_k). Поэтому величина w возрастает по мере приближения к оси ($r \rightarrow 0$) до тех пор, пока давление в закрученном потоке жидкости не достигнет p_a (или p_k). Дальнейшее уменьшение давления (и, следовательно, возрастание скорости w) физически невозможно.

Из этого следует важный вывод: центральная часть ЦБФ, где $p = p_a$ (или $p = p_k$), не заполнена жидкостью. В ней образуется газовый вихрь радиусом r_v , избыточное давление в котором равно нулю, то есть $p_v = p_a$ (или $p_v = p_k$). Таким образом, истечение жидкости происходит через кольцевое сечение (живое сечение), ограниченное радиусами r_v (радиус воздушного вихря) и r_c (радиус сопла). Площадь живого сечения равна

$$F_{жс} = \pi(r_c^2 - r_v^2) = \phi_{жс} \pi r_c^2,$$

где $\phi_{жс} = 1 - (r_v/r_c)^2$ – коэффициент живого сечения ЦБФ.

Распределение аксиальной скорости в выходном сечении сопла

Рассмотрим элементарную кольцевую площадку в выходном сечении сопла ЦБФ площадью $dS = 2\pi r dr$ (рис. 9.3).

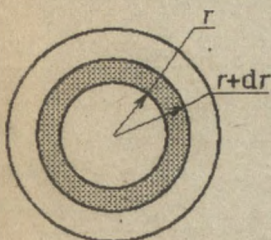


Рисунок 9.3

Согласно принципу Даламбера, перепад давления на боковых поверхностях площадки уравнивается действием центробежной силы, приходящейся на единицу поверхности кольцевого элемента:

$$dp/dr = \rho \omega^2 / r. \quad (9.4)$$

Из условия сохранения момента импульса (9.1) следует

$$r = \omega_g r_g / \omega, \quad (9.5)$$

где ω_g — тангенциальная скорость на границе вихря ($r = r_g$).

Продифференцировав (9.5), подставляем полученное значение dr в (9.4), и после интегрирования получим:

$$p/\rho = -\omega^2/2 + C, \quad (9.6)$$

где C — константа интегрирования.

На границе газового вихря избыточное давление равно нулю, а $\omega = \omega_g$, следовательно $C = \omega_g^2/2$.

Отсюда:

$$p/\rho = \omega_g^2/2 - \omega^2/2. \quad (9.7)$$

Из (9.3) и (9.7) получим:

$$u^2(r)/2 = H - \omega_g^2/2 = \text{const}.$$

Таким образом, аксиальная компонента вектора скорости в выходном сечении сопла постоянна и равна:

$$u = \sqrt{2(H - \omega_g^2/2)}. \quad (9.8)$$

Расчетные формулы для коэффициента расхода

Введем понятие эквивалентной скорости истечения — это фиктивная скорость, которая получилась бы, если расход жидкости осуществлялся не через живое сечение $F_{ж}$, а через всю площадь сечения сопла $F_c = \pi r_c^2$:

$$u_e = Q / (\pi r_c^2),$$

где Q — объемный расход жидкости:

$$Q = u F_{ж} = \varphi_{ж} u \pi r_c^2 = u_e \pi r_c^2.$$

Значения u и u_e связаны соотношением:

$$u_e = \varphi_{ж} u.$$

Из условия сохранения расхода $Q_{вх} = Q_{вых}$ можно получить:

$$\omega_{вх} \pi r_{вх}^2 = u_e r_c^2, \quad \omega_{вх} = u_e r_c^2 / (\pi r_{вх}^2).$$

Найдем распределение тангенциальной скорости $\omega(r)$ через u_e . Из закона сохранения момента импульса следует:

$$\omega(r) = u_e \frac{R_o}{\pi r} \left(\frac{r_c}{r_{вх}} \right)^2. \quad (9.9)$$

На стенке ($r = r_c$): $\omega_{cm} = u_e R_o r_c / (\pi r_{вх}^2).$

На границе вихря ($r = r_v$): $\omega_v = u_e \frac{R_o}{\pi r_v} \left(\frac{r_c}{r_{вх}} \right)^2 = u_e \frac{R_o r_c}{\pi r_{вх}^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \varphi_{ж}}}.$

Таким образом, тангенциальная скорость распределена по закону квазипотенциального вращения.

Вводя коэффициент живого сечения, можно получить выражение для эквивалентной скорости в виде

$$u_e = \sqrt{2H} \left(\frac{1}{\varphi_{ж}^2} + \frac{A^2}{1 - \varphi_{ж}} \right)^{-1/2} = \varphi \sqrt{2H} = \varphi \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}, \quad (9.10)$$

где φ — коэффициент расхода форсунки;

Δp — перепад давления на форсунке;

$A = \pi R_o \Gamma_c / S_{вх} = R_o \Gamma_c / (\pi r_{вх}^2)$ — геометрическая характеристика ЦБФ.

Из (9.10) следует, что коэффициент расхода φ связан с величиной $\Phi_{жс}$:

$$\varphi = \left(\frac{1}{\Phi_{жс}^2} + \frac{A^2}{1 - \Phi_{жс}} \right)^{-1/2} \quad (9.11)$$

Зависимость $\varphi(\Phi_{жс})$ неоднозначна. Для ее конкретизации используется принцип максимума расхода, который формулируется следующим образом:

При заданном напоре H устойчивым будет такой вихрь, размер которого определяется величиной r_v (или связанной с r_v величиной $\Phi_{жс}$), который обеспечивает максимум расхода жидкости через ЦБФ.

Следовательно, в (9.11) выражение в скобках должно быть минимальным. Найдем экстремум, приравнявая нулю производную:

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_{жс}} \left(\frac{1}{\Phi_{жс}^2} + \frac{A^2}{1 - \Phi_{жс}} \right) = 0. \quad (9.12)$$

Из (9.12) следует:

$$A = \frac{1 - \Phi_{жс}}{\sqrt{\Phi_{жс}^3/2}}; \quad \varphi = \sqrt{\frac{\Phi_{жс}^3}{2 - \Phi_{жс}}} \quad (9.13)$$

Таким образом, коэффициенты расхода φ и живого сечения $\Phi_{жс}$ полностью определяются геометрической характеристикой форсунки A и не зависят от режима работы ЦБФ.

Расчет угла распыла

Выше мы нашли распределение $u(r)$ и $w(r)$ в выходном сечении:

$$u_{вых} = \text{const}, \quad w_{вых} = \text{const}/r,$$

то есть угол распыла неодинаков. Частицы, находящиеся ближе к оси ЦБФ, имеют больший угол распыла. При расчетах принимают среднее значение α , соответствующее среднему значению тангенциальной скорости:

$$\operatorname{tg} \alpha_{cp} = w_{cp} / u_{вых},$$

где $w_{cp} = w_c r_c / r_{cp}$, $r_{cp} = (r_c + r_v) / 2$.

Подставляя эти значения в формулу для угла распыла, получим после некоторых преобразований:

$$\operatorname{tg} \alpha_{cp} = 2\Phi A \left[\left(1 + \sqrt{1 - \Phi_{жс}} \right)^2 - 4\Phi^2 A^2 \right]^{-1/2}. \quad (9.14)$$

Из (9.14) следует, что угол распыла $2\alpha_{cp}$ однозначно определяется величиной коэффициента живого сечения $\Phi_{жс}$ (или связанной с ней величиной A) и не зависит от режима работы форсунки, которая определяется величиной перепада давления Δp .

Таким образом, геометрическая характеристика A полностью определяет параметры распыливания и является важнейшим критерием подобия центробежной форсунки. Определив величину A по заданной геометрии форсунки (r_c, r_v, R_o, n), можно рассчитать все параметры распыла ($u_{вых}, w_{вых}, \alpha_{cp}, \Phi_{жс}, \Phi$). Массовый секундный расход жидкости через форсунку рассчитывается по формуле:

$$G = \rho Q = \Phi \pi r_c^2 \rho \sqrt{2H} = \Phi \pi r_c^2 \sqrt{2\rho \Delta p}. \quad (9.15)$$

9.3 Теория центробежной форсунки для вязкой жидкости

В теории Абрамовича полагалось, что вязкость жидкости $\mu = 0$ и момент количества движения M неизменен по всему тракту форсунки:

$$M = \rho \omega r = \text{const}.$$

Реальная жидкость всегда вязкая ($\mu \neq 0$), поэтому за счет внутреннего трения происходят потери момента импульса, то есть

всегда $M_{\text{вых}} < M_{\text{вх}}$. Чем больше потери, тем сильнее расчёты по теории Абрамовича отличаются от опытных данных (в реальном случае больше коэффициент расхода ϕ и меньше угол распыла $2\alpha_{\text{ср}}$). Уменьшение интенсивности закрутки на выходе ведет к уменьшению размера газового вихря r_v , увеличению коэффициента живого сечения $\phi_{\text{жс}}$ и уменьшению тангенциальной скорости $w_{\text{вых}}$.

При анализе течения вязкой жидкости в ЦБФ Л.С. Клячко установил, что изменение момента количества движения жидкости по тракту форсунки описывается формулой:

$$M = M_{\text{вх}} \left[1 + \xi \left(B^2/n - A \right) / 2 \right]^{-1}, \quad (9.16)$$

где $M_{\text{вх}} = \rho w_{\text{вх}} R_o$ — момент количества движения на входе ЦБФ;

ξ — безразмерный коэффициент трения,

$B = R_o / (n r_{\text{вх}})$ — безразмерный комплекс.

Из (9.16) следует, что M уменьшается с ростом ξ и B . Аналогично теории Абрамовича можно получить выражение для коэффициента расхода:

$$\phi = \left(\frac{A_e}{1 - \phi_{\text{жс}}} + \frac{1}{\phi_{\text{жс}}^2} \right)^{-1/2}, \quad (9.17)$$

где

$$A_e = A \left[1 + \xi \left(B^2/n - A \right) / 2 \right]^{-1}. \quad (9.18)$$

Здесь A_e — эквивалентная геометрическая характеристика форсунки.

Функциональная связь между A_e и $\phi_{\text{жс}}$ определяется так же, как и для идеальной ЦБФ из принципа максимума расхода:

$$A_e = (1 - \phi_{\text{жс}}) / \sqrt{\phi_{\text{жс}}^3 / 2}. \quad (9.19)$$

Аналогично получаем выражение для среднего угла распыла топлива:

$$\text{tg } \alpha_{\text{ср}} = 2\phi A_e \left[\left(1 + \sqrt{1 - \phi_{\text{жс}}} \right)^2 - 4\phi^2 A_e^2 \right]^{-1/2}. \quad (9.20)$$

Таким образом, формулы (9.17) и (9.20) для расчёта коэффициента расхода и угла распыла полностью совпадают с формулами для идеальной жидкости, если A заменить на A_e .

Сравнивая уравнения (9.16) и (9.18), получим:

$$M/M_{\text{вх}} = A_e/A. \quad (9.21)$$

Таким образом, величина A_e учитывает уменьшение момента импульса в камере закручивания. Поскольку $A_e < A$, то для вязкой жидкости угол распыла $2\alpha_{\text{ср}}$ меньше, а коэффициент расхода ϕ больше, чем для идеальной жидкости.

Рассмотрим как меняется A_e при изменении геометрии ЦБФ (при увеличении плеча закручивания R_o и при уменьшении радиуса входных каналов $r_{\text{вх}}$). Из (9.18) следует:

$$A_e = R_o r_c \left[n r_{\text{вх}}^2 + \xi R_o (R_o - r_c) / 2 \right]^{-1}. \quad (9.22)$$

Сравним поведение A_e и $A = R_o r_c / (n r_{\text{вх}}^2)$.

- 1) Пусть $r_c = \text{const}$, $r_{\text{вх}} = \text{const}$, $n = \text{const}$, $\xi = \text{const}$, а R_o неограниченно увеличивается.
- 2) Пусть $r_{\text{вх}}$ неограниченно уменьшается при постоянстве остальных геометрических параметров.

При этом для идеальной жидкости

$$A \rightarrow \infty, \quad \phi \rightarrow 0, \quad 2\alpha_{\text{ср}} \rightarrow 2\pi.$$

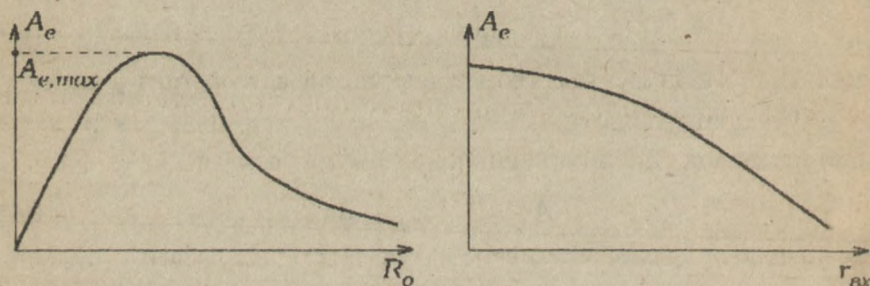


Рисунок 9.4

Зависимости A_e для реальной жидкости от R_o и $r_{\text{вх}}$.

В отличие от идеальной жидкости, величина A_e ограничена сверху (рис. 9.4), а ее максимальное значение зависит от способа регулирования (уменьшение $r_{\text{вх}}$ или увеличение R_o). При $r_{\text{вх}} \rightarrow 0$ величина

$$A_{e, max} = \frac{2r_c}{\xi(R_o - r_c)}. \quad (9.23)$$

Следовательно, для реальной жидкости коэффициент расхода имеет некоторое минимальное значение (стремится не к нулю, а к Φ_{min}).

Угол распыла для реальной жидкости также не может превышать некоторого максимального значения. Значения Φ_{min} и $2\alpha_{max}$ определяются максимальным значением A_e . Увеличить угол распыла за счет уменьшения $r_{вх}$ технологически сложно, кроме того, с уменьшением $r_{вх}$ возникает опасность засорения входных каналов. Можно достичь увеличения 2α путем снижения ξ (повысить класс чистоты при изготовлении форсунки или подогреть жидкость).

Для практического использования полученных формул необходимо знать коэффициент трения ξ , который по рекомендации Л.С. Клячко можно взять в виде

$$\lg \xi = \frac{25.8}{(\lg Re_{вх})^{2.58}} - 2, \quad (9.24)$$

где число $Re_{вх}$ определяется из условий на входе в ЦБФ:

$$Re_{вх} = 2\rho\omega_{вх}r_e/\mu.$$

Здесь $r_e = r_{вх}\sqrt{n}$, μ — коэффициент динамической вязкости жидкости.

9.4 Процесс распыливания

Распыливание — это процесс распада струи жидкости, истекающей из ЦБФ, на капли и дальнейшего их дробления на более мелкие. Распад струи происходит под действием внешних и внутренних сил. Внешние силы обусловлены аэродинамическим воздействием на поверхность струи. Величина этих сил зависит от относительной скорости движения жидкости, плотности окружающей среды, размера частиц жидкости и других факторов. К внутренним относятся инерционные и молекулярные силы, связанные с вязкостью и поверхностным натяжением жидкости.

Турбулизация струи приводит к появлению в ней периодических колебаний с возрастающей амплитудой. Под влиянием внутренних и внешних сил возникают волны малой длины. Струя теряет устойчивость и распадается на капли с ростом амплитуды колебаний (рис. 9.5).

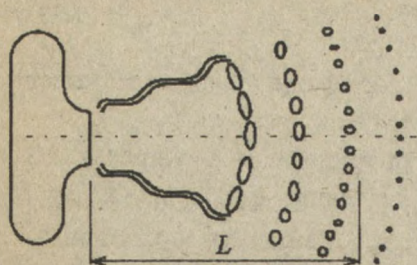


Рисунок 9.5

Процесс распыливания

распыленной жидкости в газовую среду называется дальностью факела распыла.

Тонкость и однородность распыла характеризуются функцией распределения капель жидкости по размерам $f(D)$ или некоторым средним размерам капель D_{cp} . Для определения тонкости распыла используются эмпирические формулы, приведем одну из них:

$$D_m = 2r_c \frac{47.8}{A^{0.6} \Pi^{0.1} Re^{0.7}}, \quad (9.25)$$

где D_m — средний медианный диаметр капель (средний диаметр, при котором относительная масса капель с размерами от нуля до D_m составляет половину массы всех капель);

$$Re = 2\rho u_e r_c / \mu, \quad \Pi = \mu^2 / (2\rho \sigma r_c),$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения распыливаемой жидкости.

Эта зависимость получена для следующих диапазонов изменения определяющих параметров:

$$A = 1.72 \div 9.51;$$

$$\Delta p = 0.1 \div 3.0 \text{ МПа};$$

$$r_c = 0.18 \div 0.79 \text{ мм};$$

$$\sigma = (2.97 \div 7.44) \cdot 10^{-3} \text{ кгс} \cdot \text{м}^{-1};$$

$$\rho = (1.0 \div 1.19) \cdot 10^3 \text{ кгс} \cdot \text{м}^{-3}; \quad \mu = 10^{-4} \div 2.9 \cdot 10^{-3} \text{ кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2}.$$

Анализ формулы (9.25) показывает, что величина $D_m = 20 \div 150 \text{ мкм}$.

Однородность распыла увеличивается с ростом Δp и давления окружающей среды. Увеличение μ и σ ведет к снижению тонкости распыла (росту D_m). Влияние A очень велико — с ростом A

уменьшаются коэффициент живого сечения $\Phi_{ж}$ и толщина жидкостной пленки, что ведет к лучшему распыливанию. Тонкость распыла повышается также с ростом давления окружающей среды.

С точки зрения завершения процесса горения в малом объеме камеры сгорания увеличение дальности факела нежелательно. Управлять этим параметром можно путем варьирования величины A . Увеличение A ведет к росту угла распыла $2\alpha_{ср}$, тонкости распыла и, следовательно, к увеличению аэродинамического сопротивления факела и к снижению его дальности.

Плотность орошения

Плотность орошения является очень важной характеристикой ЦБФ. Это радиальное и осевое распределения относительного расхода капель, которые находятся, как правило, экспериментально

$$\bar{G}(r, z) = G(r, z) / G_{\Sigma},$$

где G_{Σ} — суммарный расход капель.

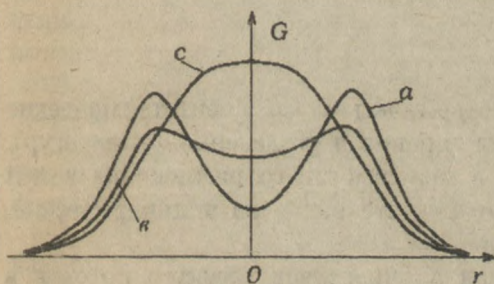


Рисунок 9.6

Наличие газового вихря в ЦБФ и вращательное движение вытекающей струи приводит к тому, что струя приобретает форму полого тела вращения. В связи с этим для ЦБФ типично такое распределение $\bar{G}(r, z)$, при котором центральная часть факела заполнена небольшим количеством

жидкости, а на некотором расстоянии от оси плотность орошения достигает максимума (рис. 9.6а). Присутствие некоторого количества жидкости в центральной зоне объясняется выносом отдельных капель из основной струи за счет турбулентных пульсаций. С ростом расстояния от среза сопла распределение $\bar{G}(r)$ сглаживается (рис. 9.6в).

С увеличением вязкости распыливаемой жидкости распределение $\bar{G}(r)$ также сглаживается и даже может качественно измениться. С ростом влияния сил вязкого трения образуется максимум $\bar{G}(r)$ на оси ЦБФ (рис. 9.6с).



Лекция десятая

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ВИХРЕВОЙ КАМЕРЫ

Вихревая камера — это осесимметричная емкость, по периферии которой тангенциально вводится рабочее тело (газ, жидкость, двухфазная среда), которое выходит через центральное сопло в торцевой крышке.

Области использования вихревых камер в современной технике и технологии достаточно обширны:

- камеры сгорания энергоустановок и ракетных двигателей;
- циклоны для очистки газа от пыли и жидких капель;
- нагревательные печи для заготовок, размещенных в объеме камеры;
- реакторы для проведения тепло- и массообменных процессов;
- вихревые холодильники;
- вихревые расходомеры;
- вихревые клапаны.

Камеры делятся на изотермические и неізотермические (в которых существенны процессы горения и разделения температур), загруженные и незагруженные (в зависимости от размещения в ней заготовки, например) по конфигурации стенок — на цилиндрические, конические, гиперболические и т.д.

Расположение входных каналов определяет характер потоков в объеме вихревой камеры. По расположению входных тангенциальных каналов камеры могут быть с распределенным и локализованным входом, прямоточные и противоточные (рис. 10.1).

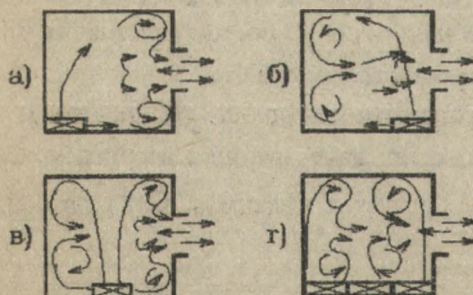


Рисунок 10.1

Характер потоков в камерах:

- а) прямоточная с локализованным вводом со стороны торца;
- б) противоточная с локализованным вводом со стороны сопла;
- в) центральный локализованный ввод;
- г) равномерно распределенный ввод.

Расположение входных каналов по длине вихревой камеры крайне мало сказывается на закрутке потока, но весьма заметно влияет на поле скоростей в ее продольном сечении. Так, например, при размещении входных каналов вблизи сопла (противоточная вихревая камера) газ движется в периферийной зоне по направлению к торцевой стенке, разворачивается вблизи нее и в приосевой зоне движется в сторону сопла (рис. 10.16).

10.1 Элементарная теория изотермической вихревой камеры

В настоящее время используются самые разнообразные схемы и методы расчета закрученных течений в вихревых камерах, базирующиеся на уравнениях движения идеальной или вязкой жидкости и опирающиеся в различной степени на экспериментальные данные. Рассмотрим некоторые простейшие модели течения, позволяющие получить аналитическое решение. Наиболее раннее развитие получили методы расчета, основанные на применении дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости и их интегралов. В интегральных моделях используется уравнение Бернулли и формулируется экстремальный принцип для одной из характеристик потока — принцип максимума расхода (Г.Н. Абрамович), минимума кинетической энергии (Н. Ротт), минимума потока кинетической энергии (М.А. Гольдштик) и др.

Рассмотрим один из этих методов, в основу которого положены физические представления о движении жидкости в центробежной форсунке (гидравлическое приближение).

Рассмотрим простейший случай — цилиндрическую вихревую камеру. Она характеризуется следующими геометрическими параметрами (рис. 10.2):

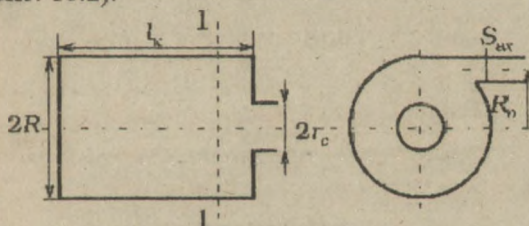


Рисунок 10.2

Цилиндрическая вихревая камера:

l_k — длина вихревой камеры, r_c — радиус сопла;

R — радиус вихревой камеры, R_0 — плечо закручивания;

S_{vx} — суммарная площадь сечения входных тангенциальных каналов.

Рассмотрим некоторое сечение 1-1 вблизи сопла вихревой камеры. Закон закрутки в объеме вихревой камеры описывается вихрем Рэнкина. Сечение 1-1 условно делится на две радиальные зоны — центральное вихревое ядро, в котором реализуется квазитвердое вращение (КТВ), и периферийная зона, в которой реализуется квазипотенциальное вращение (КПВ) (рис. 10.3):

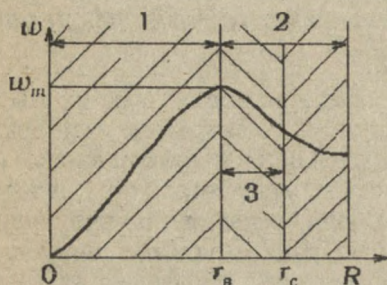


Рисунок 10.3

Профиль тангенциальной скорости
в вихревой камере:

1. вихревое ядро (КТВ);
2. периферийная зона (КПВ);
3. зона постоянного расхода

На границе этих зон ($r = r_b$) достигается максимальное значение тангенциальной скорости $w = w_m$, а избыточное давление $p_{изб} = p - p_{атм} = 0$ (рис. 10.4).

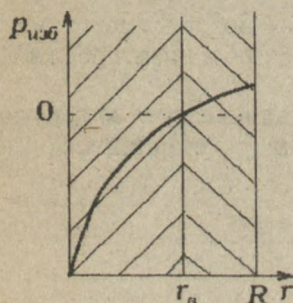


Рисунок 10.4

Профиль избыточного давления в вихревой
камере:

- при $r = 0 \div r_b$: $p_{изб} < 0$ (разрежение),
при $r = r_b \div R$: $p_{изб} > 0$.

В периферийной зоне предполагается закон КПВ, который запишем в виде:

$$w(r) \cdot r = \alpha \cdot w_{вх} \cdot R_0, \quad (10.1)$$

где $\alpha < 1$ — эмпирический коэффициент, учитывающий торможение тангенциальной скорости w в объеме камеры за счет сил трения,

$w_{вх}$ — скорость газа во входных каналах вихревой камеры.

Для вихревого ядра предполагается, что нет радиального перетока жидкости, т.е. на границе вихря $r_{\text{в}}$ радиальная компонента вектора скорости $u(r_{\text{в}}) = 0$.

Введем область постоянного расхода, которая будет ограничена кольцевым сечением

$$F_{\text{жс}} = \pi(r_{\text{с}}^2 - r_{\text{в}}^2), \quad (10.2)$$

в которой u не меняется по радиусу.

Введем также коэффициент живого сечения (отношение площади зоны постоянного расхода к площади сечения сопла).

$$\varphi_{\text{жс}} = \frac{F_{\text{жс}}}{F_{\text{с}}} = \frac{\pi(r_{\text{с}}^2 - r_{\text{в}}^2)}{\pi r_{\text{с}}^2} = 1 - \left(\frac{r_{\text{в}}}{r_{\text{с}}}\right)^2. \quad (10.3)$$

Объемный расход газа через вихревую камеру можно представить в виде:

$$Q = \varphi \pi r_{\text{с}}^2 \sqrt{2H} = \varphi \pi r_{\text{с}}^2 \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}}, \quad (10.4)$$

где $\Delta p = p_{\text{вх}} - p_{\text{атм}}$ — перепад давления в вихревой камере;

φ — коэффициент расхода.

Выражая φ через $\varphi_{\text{жс}}$, зависимость (10.4) можно представить в виде

$$Q = \pi r_{\text{с}}^2 \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}} \cdot \left[\frac{1}{\varphi_{\text{жс}}^2} + \frac{a^2 A^2}{(1 - \varphi_{\text{жс}})} + (1 - a^2) F^2 \right]^{1/2}, \quad (10.5)$$

где $F = \pi r_{\text{с}}^2 / S_{\text{вх}}$ — отношение площади сечения сопла к сумме площадей входных каналов;

$A = \pi r_{\text{с}} R_0 / S_{\text{вх}}$ — геометрическая характеристика вихревой камеры.

Из (10.4) и (10.5) можно получить выражение для коэффициента расхода вихревой камеры:

$$\varphi = \left[\frac{1}{\varphi_{\text{жс}}^2} + \frac{A'^2}{(1 - \varphi_{\text{жс}})} + (1 - a^2) F^2 \right]^{-1/2}, \quad (10.6)$$

где $A' = aA$ — приведенная геометрическая характеристика вихревой камеры (с учетом потерь на трение).

Как видно из (10.6), зависимость $\varphi(\varphi_{\text{жс}})$ неоднозначна, т.е. зависит от относительного размера вихревого ядра. Величина коэффициента расхода φ мала как при больших размерах вихревого

ядра (мала величина живого сечения $F_{жс}$), так и при малых (напор H тратится на создание больших ω вблизи оси камеры).

Для определения r_b используется сформулированный Г.Н. Абрамовичем принцип максимального расхода: в выходном сечении сопла вихревой камеры устанавливается такой режим течения, при котором для данного расхода Q потребный напор H будет минимальным; или при заданном напоре H реализуется такая структура закрученного потока, при которой расход максимален — такое течение будет устойчивым.

С учетом данного условия можно получить следующие зависимости:

$$A' = aA = (1 - \varphi_{жс}) \left(\frac{\varphi_{жс}^3}{2} \right)^{-1/2}, \quad (10.7)$$

$$\varphi_{max} = \left[\frac{2 - \varphi_{жс}}{\varphi_{жс}^3} + (1 - a^2) F^2 \right]^{1/2}. \quad (10.8)$$

Графики зависимостей $\varphi_{жс}(A')$ и $\varphi_{max}(\varphi_{жс})$ приведены на рис. 10.5 и 10.6.

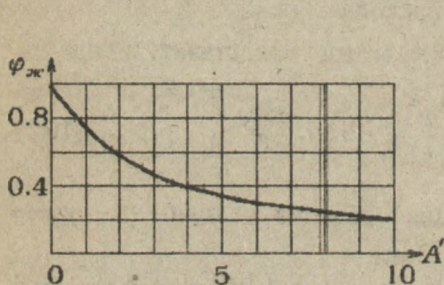


Рисунок 10.5

Зависимость коэффициента живого сечения от приведенной геометрической характеристики вихревой камеры

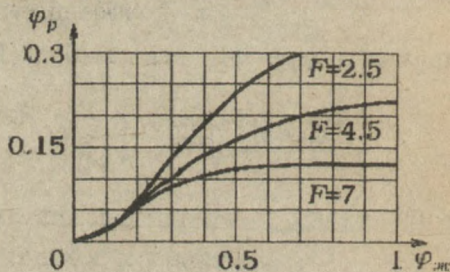


Рисунок 10.6

Зависимость коэффициента расхода φ_{max} от коэффициента живого сечения

Порядок расчета основных характеристик вихревой камеры следующий.

1. По заданным геометрическим параметрам камеры $S_{вх}$, R_o , r_c и опытному значению коэффициента a рассчитывается

$$A' = aA = a \frac{\pi r_c R_o}{S_{вх}} = a \frac{r_c R_o}{n r_{вх}^2}.$$

2. По графику $\varphi_{ж}(A')$ находится коэффициент живого сечения $\varphi_{ж}$.
3. Рассчитывается радиус вихревого ядра

$$r_{в} = r_c \sqrt{1 - \varphi_{ж}}.$$
4. По известным $F = \pi r_c^2 / S_{вх}$ и $\varphi_{ж}$ находится коэффициент расхода $\varphi_{тах}$ из графика (рис. 10.6).
5. Рассчитывается скорость в зоне постоянного расхода (расходная скорость)

$$u = Q / (\varphi_{ж} \pi r_c^2).$$

6. Находится максимальное значение тангенциальной скорости (на границе вихревого ядра)

$$\omega_m = a \omega_{вх} (R_o / r_{в}).$$

7. Для заданной величины расхода Q находится величина давления на входе в вихревую камеру

$$\Delta p_{вх} = 2\rho \left(\frac{Q}{\varphi \pi r_c^2} \right)^2.$$

8. Рассчитывается коэффициент сопротивления вихревой камеры

$$\xi = \frac{2\Delta p}{\rho \omega_{вх}^2} = \frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{S_{вх}}{\pi r_c^2} \right)^2.$$

Рассмотренная выше элементарная теория используется, как правило, для получения нулевого приближения при использовании более сложных методов расчета течений в вихревых камерах.

10.2 Метод Вулиса — Устименко

Рассмотренная выше элементарная теория вихревой камеры позволяет оценить основные ее характеристики, которые можно использовать в качестве первого приближения при использовании более сложных моделей течения. Дальнейшее совершенствование физической модели потока в указанной гидравлической постановке задачи является бесперспективным. Существенными недостатками гидравлического подхода, если рассматривать его применительно к реальным вихревым камерам, являются грубая схематизация течения, отсутствие учета особенностей движения потока в зоне КТВ, где оно носит весьма сложный характер и оказывает значительное влияние на расходные характеристики вихревой камеры.

Другая группа методов базируется на использовании уравнений Навье-Стокса, которые с целью получения аналитического решения упрощаются в зависимости от постановки задачи и принятой физической модели движения закрученного потока в вихревой камере. В методе Шваба на основе оценки членов уравнений динамики вязкой жидкости принята гипотеза о постоянстве эффективной турбулентной вязкости закрученного потока. Это позволяет использовать уравнения Навье-Стокса для решения задачи о движении потока в вихревой камере при замене физической (молекулярной) вязкости μ ее турбулентным аналогом μ_t . В.А. Швабом выполнено решение системы уравнений движения в предположении, что тангенциальная составляющая турбулентного напряжения $\tau_{t\varphi}$ по аналогии с вязким касательным напряжением трения пропорциональна градиенту угловой скорости. При анализе турбулентной вязкости длина пути смещения l принимается пропорциональной радиальной координате: $l = br$, где b — константа, определяемая опытным путем. Для ее нахождения В.А. Швабом предложена эмпирическая зависимость:

$$b = 0.01 + 0.56 \sqrt{\frac{\omega_{вх}}{\omega_m} \frac{S_{вх}}{2\pi R l_k}}, \quad (10.9)$$

где $\omega_{вх}$, ω_m — скорость потока на входе в камеру и тангенциальная скорость на границе ядра потока.

Найденное решение для плоской модели движения жидкости в вихревой камере устанавливает особенности и характер влияния физических и конструктивных факторов на аэродинамику камеры.

Отметим, что теория В.А. Шваба явилась основой для развития целого ряда методов расчета турбулентных закрученных потоков.

Оригинальная схема расчета, позволившая аналитически описать картину течения в вихревой камере, была предложена Л.А. Вулисом и Б.П. Устименко. В ее основу положено представление о закрученном потоке как о своеобразной вращающейся полый турбулентной струе, пограничный слой которой обращен к оси камеры. Такая струя вследствие интенсивного турбулентного обмена подсасывает присоединенные массы воздуха, притекающие к зоне обратных токов, и вовлекает их во вращательное движение.

Запишем систему уравнений турбулентного пограничного слоя в цилиндрических координатах при разложении потока на осредненный и

пульсационный ($u = \langle u \rangle + u'$; $v = \langle v \rangle + v'$; $w = \langle w \rangle + w'$) в рамках следующих допущений:

- поток осесимметричный;
- градиент давления по оси камеры много меньше градиента по радиусу:

$$\frac{\partial p}{\partial z} \ll \frac{\partial p}{\partial r};$$

- компоненты вектора скорости в основной части потока находятся в соотношении:

$$v \ll u \ll w;$$

- длина пути смещения определяется соотношением

$$l = br,$$

где b – экспериментальная константа, зависящая от геометрии вихревой камеры.

Кроме того, принята гипотеза, что пульсации скорости связаны в первую очередь с радиальным градиентом момента импульса относительно оси z :

$$u' \approx v' \approx w' \approx \frac{1}{r} \frac{\partial(wr)}{\partial r}. \quad (10.10)$$

Система уравнений для определения осредненных параметров течения имеет следующий вид (знак осреднения опущен):

$$\left. \begin{aligned} \frac{w^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{l}{r} \frac{\partial(wr)}{\partial r} \right]^2, \\ v \frac{\partial w}{\partial r} + u \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{vw}{r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{l}{r} \frac{\partial(wr)}{\partial r} \right]^2 + \frac{2}{r} \left[\frac{l}{r} \frac{\partial(wr)}{\partial r} \right]^2, \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(vr)}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

Для замыкания системы (10.11) необходимо дополнительное условие, в качестве которого принят заданный закон закрутки $w(r)$ (теория, следовательно, полуэмпирическая):

$$\bar{w}(\eta) = \frac{2\eta}{1 + \eta^2}, \quad (10.12)$$

где $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_m}$, $\eta = \frac{r}{r_B}$ — безразмерные скорость и координата.

Из первого уравнения системы (10.11) находится распределение статического давления $p(r)$; из второго — распределение радиальной скорости $v(r)$ и из третьего уравнения системы определяется профиль аксиальной скорости $u(r)$. В безразмерном виде аналитическое решение (10.11) имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}(\eta) &= \frac{2\eta}{1+\eta^2}, \\ \bar{u}(\eta) &= -32b^2 \frac{[(1+\eta^2)^2 - 6\eta^2]}{4(1+\eta^2)^4} \xi, \\ \bar{v}(\eta) &= 16b^2 \frac{\eta(1-\eta^2)}{(1+\eta^2)^3}, \\ \bar{p}(\eta) &= 2\left(1 - \frac{2}{1+\eta^2}\right) + \frac{2}{3}b^2 \left[\frac{8}{(1+\eta^2)^3} - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

Здесь в качестве масштаба для компонент вектора скорости выбрана величина ω_m , а для аксиальной ξ и радиальной η координат — величина r_B ; в качестве масштаба для давления используется величина $0.5\rho\omega_m^2$.

Значения выбранных масштабов находятся непосредственно из эксперимента при сопоставлении расчетных и опытных данных. В этом случае полученное решение содержит одну экспериментальную константу b , выбор которой необходим для построения всех профилей, кроме $\omega(r)$.

В случае предварительного расчета параметров течения в вихревой камере следует вначале определить масштаб скорости ω_m и значение r_B по изложенной выше элементарной теории вихревой камеры.

Сопоставление результатов расчета с использованием данного метода и опытных данных показывает, что полученное решение качественно верно отражает основные черты структуры потока в

вихревой камере, хотя и не дает характерной для нее картины изменения профиля $u(r)$ в периферийной области.

Причинами этого, вероятно, являются погрешности в использовании аппроксимации (10.12), несоответствие используемой гипотезы (10.10) с существующей в действительности взаимосвязью между пульсационными и осредненными значениями скоростей, а также принятие постоянным коэффициента α в формуле для пути смещения.

В дальнейшем метод Вулиса—Устименко был модифицирован С.В. Карповым и Э.Н. Сабуровым с целью учета влияния неидентичности профиля $\omega(r)$ в различных сечениях вихревой камеры вдоль ее оси. При этом для распределения $\omega(r, z)$ использовались различные аппроксимации, параметры которых определялись экспериментально для заданных геометрических характеристик конкретных вихрекамерных устройств.

В работах В.А. Архипова и В.П. Волкова данный метод получил дальнейшее развитие для случая закрученных течений в противоточной вихревой камере (рис. 10.16). При этом для получения как начального приближения, так и уточненных характеристик потока, гидравлический подход и уравнения турбулентного пограничного слоя использовались для каждой из двух зон (периферийной — с течением в сторону торцевой стенки, и центральной — с течением в сторону сопла) с последующей сшивкой полученных решений.

10.3 Метод Чинь Ко-фа

Другой подход для расчета осредненных и турбулентных параметров закрученного потока в вихревой камере применен в работах Чинь Ко-фа. В основу теоретического решения задачи также было положено представление о течении в вихревой камере как о полуограниченной вращающейся турбулентной струе, пограничный слой которой обращен к оси камеры. В отличие от рассмотренной выше теории Вулиса—Устименко, которая на основе априорных допущений о взаимосвязи характеристик турбулентности дает метод расчета осредненных характеристик потока, метод Кнорре—Чинь Ко-фа рассматривает параметры турбулентности как величины искомые, избегая каких-либо допущений о пути смещения или коэффициенте турбулентной вязкости, и дает уравнения для приближенной оценки среднего по времени уровня турбулентных параметров.

В рамках полуэмпирической теории турбулентности Прандтля, в которой принимается линейная зависимость между турбулентными напряжениями и осредненными скоростями деформации жидкости, тензор турбулентных напряжений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rr} &= -\rho \overline{v'v'} = 2\mu_t \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ \tau_{\varphi\varphi} &= -\rho \overline{w'w'} = 2\mu_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{r} \right) \\ \tau_{zz} &= -\rho \overline{u'u'} = 2\mu_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{r\varphi} &= -\rho \overline{v'w'} = \mu_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \\ \tau_{rz} &= -\rho \overline{v'u'} = \mu_t \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ \tau_{\varphi z} &= -\rho \overline{w'u'} = \mu_t \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

Подставляя τ_{ij} из (10.14) в уравнения Рейнольдса, можно получить связь осредненных параметров течения с пульсационными через коэффициент турбулентной вязкости μ_t . Приближенное аналитическое решение задачи возможно в рамках следующих допущений:

- поток осесимметричен и квазистационарен;
- изменение всех параметров по оси вихревой камеры значительно меньше изменения их по радиусу;
- коэффициент молекулярной вязкости μ значительно меньше μ_t , причем последний является величиной скалярной.

При этом уравнения Рейнольдса и неразрывности можно записать в виде следующей системы:

$$\left. \begin{aligned} v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} &= \frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu_t}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right), \\ v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{w^2}{r} &= \frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \mu_t}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ v \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu_t}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

Система уравнений (10.15) дополняется аппроксимационной зависимостью для тангенциальной компоненты вектора скорости в виде:

$$\omega(r) = C_1 r^{-n}, \quad (10.16)$$

где C_1 — постоянная, зависящая от граничных условий (например от входной скорости;

n — коэффициент, определяемый опытным путем, причем величина n имеет различное значение не только для центральной и периферийной зон потока, но и для различных поперечных сечений вдоль оси камеры.

Интегрирование систем (10.14) и (10.15) дает следующее аналитическое решение для осредненных параметров потока:

$$\left. \begin{aligned} \omega(r) &= C_1 r^{-n}, \\ v(r) &= C_2 r^{-m}, \\ u(r) &= C_3 \left\{ \frac{1}{1-n} r^{1-n} + 2\rho C_2 (1-n) r^{(3-m-5n+nm+2n^2)/(1-n)} \right. \\ &\quad \times \left[C_4 (1+n)(2-n-m)(3-m-5n+nm+2n^2) \right]^{-1} \Big\} + C_5, \\ p(r) &= \frac{\rho C_1^2}{2n} (r_s^{-2n} - r^{-2n}) + \frac{\rho C_2^2}{2} (r_s^{-2m} - r^{-2m}) \end{aligned} \right\} \quad (10.17)$$

Здесь r_θ – радиус, соответствующий границе между зонами КТВ и КПВ;

m – опытный коэффициент;

C_1 – константы интегрирования.

Для турбулентных параметров потока получены следующие решения:

$$\left. \begin{aligned} \mu_t(r) &= C_4 r^{n-1} - \rho C_2 \frac{(1-n)r^{1-m}}{(1+n)(2-n-m)}, \\ w'(r) &= \sqrt{(\overline{w'})^2} = \frac{\mu_t(1+n)C_1}{\rho\sqrt{m}R_{\Phi r}r^{1+n}}, \\ v'(r) &= \sqrt{(\overline{v'})^2} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{(\overline{w'})^2}, \\ u'(r) &= \sqrt{(\overline{u'})^2} = \frac{\partial u}{\partial r} \sqrt{(\overline{w'})^2} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\partial w}{\partial r} \right]^{-1}, \\ \varepsilon_\Phi(r) &= \left\{ \mu_t(1+n) \left[\rho\sqrt{m}R_{\Phi r}C_1 r^{1-n} \right]^1 \right\}^{1/2}, \\ l &= \left(\frac{\mu_t}{\rho\sqrt{y}} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

Здесь $\overline{w'}(r)$, $\overline{v'}(r)$, $\overline{u'}(r)$ – среднеквадратичные значения пульсационных составляющих соответствующих компонент скорости потока;

$\varepsilon_\Phi(r) = \sqrt{(\overline{w'})^2} / w$ – степень турбулентности потока;

$R_{\Phi r} = \frac{\overline{w' \cdot v'}}{\sqrt{(\overline{w'})^2} \cdot \sqrt{(\overline{v'})^2}}$ – коэффициент корреляции, который определяет степень статистической связи между двумя пульсирующими величинами;

l – длина пути смешения;

y – квадратичный инвариант тензора скоростей деформации.

Количественное сопоставление теоретического расчета турбулентных параметров с экспериментальными данными позволяет сделать ряд выводов. В частности, установлено, что путь смешения в зоне КПВ сохраняется постоянным и равным $l = (4 \div 5) \text{ мм}$, а степень турбулентности потока составляет $\varepsilon_\Phi \approx (6 \div 10)\%$. Пограничный слой

струи находится в зоне КТВ, которая имеет большую интенсивность турбулентности $\varepsilon_{\varphi} \approx (20 \div 40)\%$, а путь смещения достигает в ней $l = (5 \div 9) \text{ мм}$.

В исследованном диапазоне чисел Рейнольдса (рассчитанных по скорости на входе в вихревую камеру) $Re = (40 \div 130) \cdot 10^4$ коэффициент турбулентной вязкости μ_t зависит от числа Re и растет с увеличением последнего. Значение μ_t во много раз больше коэффициента молекулярной вязкости μ ($\mu_t/\mu \sim 10^4$).

Количественно результаты расчета турбулентных параметров достаточно полно отражают турбулентную структуру потока: расчетные и опытные данные сходятся везде, кроме пристенной области течения. Это может происходить вследствие того, что теорией не учтено влияние входной тангенциальной струи, а также шероховатости стенки и молекулярной вязкости вблизи нее на турбулентные параметры в прилегающих слоях потока. Очевидно, что одного допущения, что у стенки все турбулентные параметры стремятся к нулю, недостаточно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. – М.: Наука, 1976. – 888 с.
2. Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1986. – 264 с.
3. Васильев А.П., Кудрявцев А.М., Кузнецов В.А. и др. Основы теории и расчета жидкостных ракетных двигателей. – М.: Высшая школа, 1967. – 675 с.
4. Гинзбург И.П. Аэрогазодинамика. – М.: Высшая школа, 1966. – 404 с.
5. Гостинцев Ю.А. Расходные характеристики сопла при истечении винтового потока газа // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1969, №4. – С. 158-161.
6. Кнорре Г.Ф., Арефьев К.М., Блох А.Г. и др. Теория топочных процессов. – М. – Л.: Энергия, 1968. – 491 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
8. Смутьский И.И. Аэродинамика и процессы в вихревых камерах. – Новосибирск: Наука, 1992. – 301 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные обозначения.....	3
Лекция шестая. <i>Методы теоретического исследования закрученных течений</i>	
6.1 Модели течения.....	5
6.2 Основные уравнения.....	11
Лекция седьмая. <i>Течение газа с частицами</i>	
7.1 Уравнение движения частицы.....	20
7.2 Анализ сил, действующих на частицу.....	22
7.3 Коэффициент аэродинамического сопротивления.....	25
7.4 Критерии подобия задачи.....	26
Лекция восьмая. <i>Аналитические методы в теории закрученных потоков</i>	
8.1 Расчет закрученных течений газа с помощью газодинамических функций.....	27
8.2 Модель однородного винтового течения.....	31
Лекция девятая. <i>Теория центробежной форсунки</i>	
9.1 Устройство и принцип действия.....	36
9.2 Теория центробежной форсунки для идеальной жидкости.....	37
9.3 Теория центробежной форсунки для вязкой жидкости.....	42
9.4 Процесс распыливания.....	45
Лекция десятая. <i>Методы расчета вихревой камеры</i>	
10.1 Элементарная теория изотермической вихревой камеры.....	49
10.2 Метод Вулиса — Устименко.....	53
10.3 Метод Чинь Ко-фа.....	57
Литература.....	61

Владимир Афанасьевич Архипов,

Курс лекций по теории и практике закрученных потоков. Часть 2.

/Томский государственный университет.— Томск, 1999 г.

Подп. в печать

Тираж 50 экз.

Заказ №

Типография ТГУ, Томск, Никитина 4

теперь $y \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (x_k \cap D_k(x_k^*)) \setminus G_e(m \geq 1)$.
 $(x, y) \subset D_k(x_k^*) \cup D_{k+1}(x_{k+1}^*)$. Если $y \in G_e$

т.д. Аналогично, из того, что $x \in G_e$, сле-
 дует, что должны существовать точки $x^{i-1}, x^{i+1} \in$
 такие, что $x^{i-1} \in G_e$, а $x^{i+1} \in G_e$, причем $x^{i+1} \in D_k(x_k^*)$
 что противоречит выше доказанному.

Следствие 3.4. Если $x \in D_k(x_k^*) \cap H_e$, то $\forall y \in [$

Доказательство. Если $y \in G_e$, то $x \in H_e$ по док-
 зательству, т.к. $x \in H_e$, то $\exists x' \in G_e \cap D_{k-1}(x_k^*)$

Кроме того, т.к. $x \in H_e$, то $\exists x' \in G_e \cap D_{k-1}(x_k^*)$
 $\subset G_e$. Если $y \in G_e$, $y \neq x$, то $\exists x' \in D_{k-1}(x_k^*) \cap D_1(y)$
 вательно, $D_1(G_e) \cap G_e \neq \emptyset$, что противоречит лем-
 ме 3.5. Если $D_k(x_k^*) \subset G_e$, то $D_{k-1}(x_k^*) \subset$

Следствие 3.5. Если $D_k(x_k^*) \subset G_e$, то $D_{k-1}(x_k^*) \subset$

Доказательство. Очевидным образом следует из л-
 леммы.

Следствие 3.6. $\forall x_k^* \in \{x_1^*, \dots, x_q^*\}$: $G_e = \bigcup_{k=1}^q D_k(x_k^*)$

Томский государственный университет



Научная библиотека 00140033