

А. С. ЗАВЬЯЛОВ

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Томск—1980

Томск, 1901 г.

А.С.Завьялов

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ



Томск - 1980

УДК 53.081:519.2

Обработка результатов измерений. Завьялов А.С. Томск, Изд-во
ТГУ, 1980.

В книге изложены основы метрологии – науки об измерениях, методах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности. Приводятся правила обработки и графического представления результатов измерений. Даются понятия о планировании эксперимента.

Книга предназначена для студентов физических факультетов университета и может быть полезна научным работникам, ведущим экспериментальные работы.

Библ. 10, ил. II, табл. 5.

5 кб 95 ур 2

Редактор – Л.П. Китаева



Издательство Томского университета, 1980 г.

5 ур 2

1. Измерения и средства измерений.

Измерения являются основой научных знаний. Прогресс науки и техники неразрывно связан с возможностями осуществления и совершенствованием измерений.

Наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности называется метрологией. Метрология служит теоретической основой измерительной техники.

В соответствии с принятым определением (ГОСТ 16263-70. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Термины и определения), измерение – это нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

Физическая величина – это свойство, общее в качественном отношении многим объектам (системам, их состояниям и происходящим в них процессам), но в количественном отношении индивидуальное для каждого объекта.

Измерение предполагает сравнение измеряемой физической величины с физической величиной того же рода, значение которой принято за единицу.

Количественная оценка конкретной физической величины, выраженная в виде некоторого числа единиц данной величины, называется значением физической величины. Отвлеченное число, входящее в значение величины, называется числовым значением. Для числового значения характерно, что при применении другой единицы оно изменяется, тогда как размер величины остается неизменным.

Измерение – это процесс, завершающим этапом которого является результат измерения.

Результат измерения X представляется произведением числового значения величины и единицы данной физической величины

$$X = x[x],$$

где X – измеряемая физическая величина;

$[x]$

– единица величины;

x

– числовое значение измеряемой величины при выбранной единице величины.

Шкала физических величин – это последовательность значений, присвоенная в соответствии с правилами, принятыми по соглашению, последовательности одноименных физических величин различного размера, например шкалы твердости, шкалы температур.

Единица физической величины – физическая величина, которой по определению придано значение, равное единице. Можно сказать также, что единица физической величины – такое её значение, которое принимают за основание для сравнения с ним физических величин того же рода при их количественной оценке.

Системой единиц называется совокупность единиц физических величин, охватывающих некоторую область величин (механические, электрические, магнитные и др.). Основные единицы в системе единиц устанавливаются произвольно, а производные – в соответствии с уравнениями связи с основными единицами.

В 1963 г. в СССР был введен ГОСТ 9867 – 61 "Международная система единиц", согласно которому СИ была признана предпочтительной во всех областях науки, техники, народного хозяйства и педагогической практики.

В табл. 1 дан список важнейших единиц СИ с русскими и международными обозначениями.

Таблица 1

МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ (СИ)

Величина	Единица		
	Наименование	Обозначение	
		русское	международное
1	2	3	4
Основные единицы			
Длина	метр	<i>m</i>	<i>m</i>
Масса	килограмм	<i>kg</i>	<i>kg</i>
Время	секунда	<i>s</i>	<i>s</i>
Сила электрического тока	ампер	<i>A</i>	<i>A</i>
Термодинамическая температура Кельвина	кельвин	<i>K</i>	<i>K</i>
Сила света	кандела	<i>cd</i>	<i>cd</i>

1	2	3	4
Дополнительные единицы			
Плоский угол	радиан	<i>rad</i>	<i>rad</i>
Телесный угол	стерадиан	<i>sr</i>	<i>sr</i>
Производные единицы			
Площадь	квадратный метр	<i>м²</i>	<i>м²</i>
Объем, вместимость	кубический метр	<i>м³</i>	<i>м³</i>
Плотность	килограмм на кубический метр	<i>кг/м³</i>	<i>kg/m³</i>
Скорость	метр в секунду	<i>м/с</i>	<i>m/s</i>
Угловая скорость	радиан в секунду	<i>rad/c</i>	<i>rad/s</i>
Сила; сила тяжести (вес)	ньютон	<i>Н</i>	<i>N</i>
Давление; механическое напряжение	паскаль	<i>Па</i>	<i>Pa</i>
Работа; энергия; количество теплоты	джоуль	<i>Дж</i>	<i>J</i>
Мощность; тепловой поток	ватт	<i>Вт</i>	<i>W</i>
Количество электричества; электрический заряд	кулон	<i>Кл</i>	<i>C</i>
Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	вольт	<i>В</i>	<i>V</i>
Электрическое сопротивление	ом	<i>Ом</i>	<i>Ω</i>
Электрическая проводимость	сименс	<i>См</i>	<i>S</i>
Электрическая емкость	фарада	<i>Ф</i>	<i>F</i>
Магнитный поток	вебер	<i>Вб</i>	<i>Wb</i>
Индуктивность, взаимная индуктивность	генри	<i>Г</i>	<i>H</i>
Удельная теплоемкость	джоуль на килограмм-кельвин	<i>Дж/(кг·К)</i>	<i>J/(kg·K)</i>
Теплопроводность	ватт на метр-кельвин	<i>Вт/(м·К)</i>	<i>W/(m·K)</i>
Световой поток	люмен	<i>лм</i>	<i>lm</i>
Яркость	кандела на квадратный метр	<i>кд/м²</i>	<i>cd/m²</i>
Освещенность	люкс	<i>лк</i>	<i>lx</i>

Размеры единиц Международной системы (СИ) для многих случаев практики могут оказаться слишком велики или очень малы. Для сокращения нулей справа или слева в числовом значении измеряемой величины допускается применение кратных и дольных единиц, наименование которых образуется присоединением одной из приставок, предусмотренных ГОСТ 7662-55 (Образование кратных и дольных единиц измерений. Сокращенное обозначение единиц измерений), к наименованию (или сокращенному обозначению) соответствующей единицы СИ. В табл. 2 приведен список применяемых в настоящее время десятичных множителей и соответствующих им приставок.

Таблица 2

МНОЖИТЕЛИ И ПРИСТАВКИ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ ДЕСЯТИЧНЫХ
КРАТНЫХ И ДОЛЬНЫХ ЕДИНИЦ И ИХ НАИМЕНОВАНИЙ

Множитель, на кото- рый умно- жается единица	Пристав- ка	Обозначение		Множи- тель	Пристав- ка	Обозначение	
		рус- ское	междуна- родное			рус- ское	между- народ- ное
10^{12}	тера	<i>T</i>	<i>T</i>	10^{-2}	(санти)	<i>c</i>	<i>c</i>
10^9	гига	<i>G</i>	<i>G</i>	10^{-3}	милли	<i>м</i>	<i>m</i>
10^6	мега	<i>M</i>	<i>M</i>	10^{-6}	микро	<i>мк</i>	<i>μ</i>
10^3	кило	<i>к</i>	<i>k</i>	10^{-9}	нано	<i>н</i>	<i>n</i>
10^2	(гекто)	<i>г</i>	<i>h</i>	10^{-12}	пико	<i>п</i>	<i>p</i>
10^1	(дека)	<i>да</i>	<i>da</i>	10^{-15}	фемто	<i>ф</i>	<i>f</i>
10^{-1}	(деци)	<i>д</i>	<i>d</i>	10^{-18}	атто	<i>а</i>	<i>a</i>

Примечание. В скобках указаны приставки, которые допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, уже получивших широкое распространение (например, гектар, декалитр, дециметр, сантиметр).

Широкое распространение в науке и технике имеют относительные и логарифмические величины и их единицы.

Относительная величина представляет собой безразмерное отношение физической величины к одноименной физической величине, прини-

маемой за исходную. Относительные величины могут обычно выражаться или в безразмерных единицах или процентах.

Логарифмическая величина представляет собой логарифм (обычно десятичный или натуральный) безразмерного отношения двух одноименных физических величин. В виде логарифмических величин выражаются уровни звукового давления, усиление, ослабление и т.п. Единицей логарифмической величины является бел (Б), определяемый следующим соотношением: $1\text{Б} = \lg \frac{P_2}{P_1}$ при $P_2 = 10P_1$, где $P_2 = 10P_1$ - одноименные энергетические величины (мощности, энергии, плотности энергии и т.п.). В случае, если берется логарифмическая величина для отношения двух одноименных "силовых" величин (напряжения, напряженности поля, силы тока и т.п.) бел определяется по формуле $1\text{Б} = 2 \lg \frac{F_1}{F_2}$ при $F_2 = \sqrt{10} F_1$.

Дольной единицей от бела является децибел, равный 0,1Б. Так, в случае усиления (ослабления) мощности в 10 раз усиление или ослабление будет равно 10 Дб, в 100 раз - 20 Дб и т.д.

При изменении значения физических величин находятся опытным путем с помощью специальных технических средств.

Под измерительной техникой в широком понимании значения этих слов подразумевают как все технические средства, с помощью которых выполняют измерения, так и технику проведения измерений.

Технические средства, используемые при измерениях и имеющие нормированные метрологические свойства, называются средствами измерений.

В число средств измерений входят меры, измерительные приборы и измерительные установки. К ним относятся также измерительные преобразователи и измерительные принадлежности, которые не могут применяться самостоятельно, а служат для расширения диапазона измерений, повышения точности измерений, передачи результатов измерений на расстояние и обеспечения техники безопасности в процессе измерения. К средствам измерений не следует относить устройства, служащие для создания заданных условий измерений (температуры, давления и т.д.).

Мера - средство измерения в виде тела или устройства, предназначенного для воспроизведения величины одного и нескольких размеров (дробного или кратного), значения которых известны с необходимой для измерений точностью.

Некоторые меры являются телами определенной формы, изготовлен-

ными с необходимой тщательностью.

Например, концевые меры длины, гири, измерительные колбы. Другие меры представляют совокупность многих деталей с определенной взаимосвязью (измерительный конденсатор, генератор стандартных сигналов).

Мера воспроизводит величины, значения которых связаны с принятой единицей этой величины определенным известным соотношением. (Например, на рычажных весах сравнивают массу взвешиваемого тела с массой гирь 0,1; 0; 2; 0,5; 1; 5 кг.)

Измерительный прибор – средство измерения, в котором измеряемая величина преобразуется в показание или сигнал, доступный для непосредственного наблюдения и пропорциональный измеряемой физической величине (например, вольтметр, амперметр, частотомер и др.).

В составе измерительного прибора обычно имеется мера, устройство сравнения, один или несколько преобразовательных элементов. Приборы, не включающие в себя меру, или градуируются с помощью мер (их шкалы можно рассматривать как запоминающие устройства) или применяются только с мерами (например, пружинные и рычажные весы). Измерительным преобразователем называется средство измерений, вырабатывающее сигнал измерительной информации в форме, удобной для передачи, дальнейшего преобразования и (или) хранения, но не поддающейся непосредственному восприятию наблюдателя. Измерительные преобразователи делятся на передаточные, служащие для преобразования измеряемой величины в другую физическую величину и передачи её на расстояние, и масштабные, предназначенные для изменения значения измеряемой физической величины в заданное число раз без изменения её физической природы. Измерительные усилители, делители напряжения, измерительные трансформаторы – это масштабные преобразователи.

Измерительной установкой называется совокупность функционально объединенных средств измерений (мер, измерительных преобразователей и измерительных приборов) и вспомогательных устройств, предназначенных для выработки сигналов измерительной информации в форме, удобной для непосредственного восприятия наблюдателем, и расположенных в одном месте.

Измерительной системой называется совокупность средств измерений и вспомогательных устройств, соединенных между собой каналами связи, предназначенная для выработки сигналов измерительной инфор-

мации в форме, удобной для автоматической обработки, передачи и (или) использования в автоматических системах управления.

Единство измерений достигается путем точного воспроизведения и хранения установленных единиц физических величин и передачи их размеров применяемым средствам измерений.

Размеры единиц воспроизводятся, хранятся и передаются с помощью эталонов и образцовых средств измерений.

Эталон единицы физической величины – средство измерений (или комплекс средств измерений), предназначенное для воспроизведения и хранения единицы данной величины. Назначение эталона единицы физической величины – передача её размера ниже-стоящим по точности средствам измерений в общегосударственном или международном масштабе.

Если эталон обеспечивает воспроизведение единицы с наивысшей в стране точностью, он называется первичным эталоном.

Первичный эталон, официально утвержденный в качестве исходного для страны, называется Государственным эталоном.

Государственный эталон утверждается Государственным комитетом стандартов Совета Министров СССР и на каждый из них создается государственный стандарт.

Государственные эталоны бывают двух видов: первичные и специальные эталоны, обеспечивающие воспроизведение единицы в особых условиях и заменяющий для этих условий первичный эталон.

В метрологической практике большое распространение получили вторичные эталоны, значение которых устанавливается по первичным эталонам.

По своему метрологическому назначению вторичные эталоны делятся на эталоны копии, эталоны сравнения, эталоны свидетели, рабочие эталоны.

Эталон-свидетель предназначен для проверки сохранности государственного эталона и для замены его в случае порчи или утраты;

эталон-копия предназначен для передачи размеров единицы рабочим эталонам;

эталон-сравнения применяется для сличения эталонов, которые по тем или иным причинам не могут быть непосредственно сличаемы друг с другом;

рабочий эталон применяется для передачи размера единицы образцовым средствам измерений высшей точности и в отдельных случаях – наиболее точным рабочим средствам измерений.

Вторичные эталоны могут осуществляться в виде а) комплекса средств измерений; б) одиночных эталонов; в) групповых эталонов; г) эталонных наборов.

Образцовым средством измерений называют меру, измерительный прибор или измерительный преобразователь, служащие для поверки по ним других средств измерений и утвержденные в качестве образцовых. Образцовые средства недопустимо применять для измерений, так как это грозит нарушением единства мер и измерений.

Рабочее средство измерений – средство, применяемое для измерений, не связанных с передачей размера единиц. Так, к рабочим относятся измерительные приборы, которыми пользуются в повседневной лабораторной и производственной практике.

2. Виды и методы измерений

Классификацию измерений можно провести по ряду признаков: способу получения результата или виду уравнений измерения; методу получения результата; по условиям, определяющим точность результата измерений и т.д.

По способу получения результатов измерений (виду уравнений измерения) их разделяют на прямые, косвенные, совокупные и совместные.

Прямые – это измерения, при которых искомое значение физической величины находят непосредственно из опытных данных путем сравнения измеряемой величины с мерой этой величины или отсчета показаний средства измерений, непосредственно дающего значение измеряемой величины. Например, измерение длины линейкой, электрического напряжения вольтметром и т.д.

Уравнение прямых измерений можно выразить формулой $A = X$, где A – искомое значение измеряемой величины;

X – значение, непосредственно получаемое из опытных данных.

Прямые измерения – основа более сложных измерений.

Косвенные – это измерения, при которых искомую величину определяют на основании прямых измерений величин с помощью известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям. Примером может служить определение мощности, выделяемой на резисторе, по измеренным значениям напряжения и тока.

При косвенных измерениях значение измеряемой величины в общем случае находят по формуле

$$A = f(X_1, X_2, \dots),$$

- II -

где A - искомое значение измеряемой величины;

X_i - значения величин, измеряемых прямым способом;

f - знак функциональной зависимости, форма которой и природа связанных его величин заранее известны. К косвенным измерениям прибегают в тех случаях, когда прямые измерения провести вообще невозможно или слишком сложно, или когда прямое измерение дает менее точный результат, чем косвенное.

Совокупные - это измерения, в которых значения измеряемых величин находят по данным повторных измерений одной или нескольких одноименных величин при разных сочетаниях мер или этих величин.

Результаты совокупных измерений находят путем решения системы уравнений, составленных по результатам нескольких прямых измерений.

Например, совокупными являются измерения, при которых массы отдельных гирь набора находят по известной массе других гирь путем сравнения масс различных сочетаний гирь. Примером совокупных измерений будет измерение погонного сопротивления провода с помощью амперметра и вольтметра при учете внутреннего сопротивления амперметра. В этом случае нужно измерить сопротивление минимум двух разных отрезков проводов.

Совместными называются производимые одновременно (прямые или косвенные) измерения двух или нескольких неоднородных величин. Целью совместных измерений, по существу, является нахождение функциональной зависимости между величинами. В качестве примера совместных измерений можно назвать исследование температурной зависимости электрического сопротивления резистора. По данным измерений сопротивления при различных температурах можно найти коэффициенты при линейном члене квадратичном и т.д. Чем больше количество членов следует учесть в разложении, тем больше число измерений при разных температурах надлежит проделать.

Принцип измерений - физическое явление или совокупность физических явлений, положенных в основу измерений. Например, измерение массы тела при помощи взвешивания с использованием силы тяжести, пропорциональной массе.

Метод измерений - совокупность приемов использования принципов и средств измерений.

Различают два общих метода измерений: непосредственной оценки и сравнения с мерой.

Метод непосредственной оценки заключается в определении значения физической величины по отсчетному устройству измерительного

прибора прямого действия, например амперметра.

При методе сравнения с мерой значение измеряемой величины находят путем сравнения её с величиной, воспроизводимой мерой. Наиболее распространенным является метод непосредственной оценки, но его точность зависит от точности измерительного прибора. Значительно выше может быть точность метода сравнения с мерой.

Различают следующие разновидности метода сравнения с мерой: метод противопоставления, в котором измеряемая величина, воспроизводимая мерой, одновременно воздействуют на прибор сравнения, с помощью которого устанавливается соотношение между ними;

дифференциальный метод, в котором на измерительный прибор воздействует разность между измеряемой величиной и известной величиной, воспроизводимой мерой;

нулевой метод, при котором результирующий эффект воздействия величин сравнения доводят до нуля соответствующим изменением размера величины, воспроизводимой мерой;

метод замещения заключается в том, что измеряемую величину замещают известной величиной, воспроизводимой мерой;

метод совпадения отличается тем, что равенства размеров измеряемой величины и величины, воспроизводимой мерой, фиксируют по совпадению отметок шкалы или периодических сигналов. Эти методы определяют принципы построения измерительных приборов.

Алгоритм измерения - точное предписание о выполнении в определенном порядке совокупности операций, обеспечивающих измерение значения физической величины.

Методика измерений - это детально намеченный распорядок процесса измерений, регламентирующий методы, средства и алгоритмы выполнения измерений, которые в определенных (нормированных) условиях обеспечивают измерения с заданной точностью. По способу выражения результатов измерения различают абсолютные и относительные измерения.

Абсолютными называются измерения, результат которых представляет значение измеряемой величины, выраженное в единицах принятой системы единиц, при условии, что уравнение измерения отражает определение величины или строгую функциональную зависимость, основанную на теоремах механики, электродинамики и т.д. Абсолютные измерения основаны на прямых измерениях одной или нескольких величин или на использовании значений физических констант. Искомая величина в общем случае является функцией разнородных аргументов.

Относительными измерениями называют количественные сравнения двух однородных величин, позволяющие установить, на сколько (Δ) или во сколько раз (K) одна величина больше другой. Соответственно вид уравнений относительных измерений будет

$$V = X + \Delta; \quad V = KX.$$

Величина X играет роль единицы. Например, измерение относительной влажности воздуха, определяемое как отношение количества водяных паров в 1 м^3 воздуха к количеству водяных паров, которые насыщают 1 м^3 воздуха при данной температуре.

Если значение X одной из сравниваемых величин задано в установленных единицах, то легко найти и значение V измеряемой величины в тех же единицах, т.е. получить абсолютный результат.

В тех случаях, когда невозможно поставить опыт, позволяющий определить на сколько или во сколько раз одна из величин такого рода больше другой, при измерениях используются так называемые натуральные шкалы, которые представляют совокупность реперных (отправных) точек, выстроенных в ряд по принципу: каждая из входящих в него величин будет больше всех предыдущих и меньше всех последующих. Примерами натуральных шкал являются шкалы твердости, шкала скорости ветра в "баллах Бофорта".

Результатом измерения является указание того, что измеряемая величина лежит в данном интервале натуральной шкалы.

В зависимости от требований, предъявляемых к точности результата, измерения имеют ряд наименований.

1. Измерения максимально возможной точности, достижимой при существующем уровне техники. Это в первую очередь эталонные измерения, связанные с максимально возможной точностью воспроизведения единиц физических величин, и измерения физических констант, прежде всего универсальных (например, абсолютного значения ускорения свободного падения, гиромагнитного отношения протона).

2. Контрольно-поверочные измерения, погрешность которых не должна превышать некоторое заданное значение. К ним относятся измерения, выполняемые в поверочных контрольно-измерительных лабораториях такими средствами и по такой методике, которые гарантируют

погрешность результата, не превышающего некоторого заранее заданного значения.

3. Технические измерения, в которых погрешность результата определяется характеристиками средств измерений. К таким измерениям следует отнести лабораторные измерения, проводимые при различных разработках и исследованиях, производственные измерения.

При лабораторных измерениях обычно устанавливается погрешность результата измерения, при производственных измерениях погрешности не должны превышать некоторого допустимого значения.

По ходу измерений экспериментатор снимает отсчеты и показания. Отсчет – это число, отсчитанное по отсчетному устройству средства измерений либо полученное счетом последовательных отметок или сигналов. При пользовании стрелочными приборами отсчет – число, написанное у отметки шкалы, на которой установилась стрелка; применительно к цифровым приборам – число, наблюдаемое на передней панели в виде светящихся цифр.

Показание средства измерений – значение величины, определяемое по отсчетному устройству и выраженное в принятых единицах этой величины, соответствующей отсчету.

3. Погрешности измерений

При анализе результатов измерений следует четко разграничивать два понятия: истинные значения измеряемых величин и их эмпирические проявления – результаты измерений.

Истинные значения физических величин – это значения, идеальным образом отражающие свойства данного объекта как в количественном, так и в качественном отношении. Результат измерения дает нам только приближенное значение измеряемой величины.

Разница Δ между результатами измерения X и истинным значением A_0 измеряемой величины называется абсолютной погрешностью измерения

$$\Delta = X - A_0.$$

Оценка погрешности является одной из основных задач измерений. Поскольку истинное значение A_0 измеряемой величины неизвестно, на практике истинное значение измеряемой величины заменяют более близким к нему значением, чем полученное при измерении, называя его действительным значением. Под действительным значением измеряемой величины будем понимать такое её значение, найденное эксперименталь-

но, которое заведомо точнее, чем полученное при измерении, и настолько приближающееся к истинному, что для данной цели оно может быть использовано вместо него.

Действительное значение необходимо для оценки погрешности измерения, определение которой приобретает несколько другой характер.

Погрешность результата измерения - это алгебраическая разность между полученным при измерении и действительным значением измеряемой величины

$$\Delta = X - A_0.$$

Погрешность результата измерения может быть выражена в единицах измеряемой величины и называется абсолютной погрешностью (Δ), или выразится в долях измеряемой величины или процентах и называется относительной погрешностью

$$\delta = \frac{\Delta}{A}.$$

Причинами возникновения погрешностей являются: несовершенство методов измерений, технических средств, применяемых при измерениях, и органов чувств наблюдателя. В отдельную группу объединяют причины, связанные с влиянием условий проведения измерений. Последние проявляются двояко. С одной стороны, с изменением внешних условий изменяются истинные значения измеряемых величин. С другой стороны, условия проведения измерений влияют и на характеристики средств измерений и физиологические свойства органов чувств наблюдателя и через их посредство становятся источником погрешностей измерения. Погрешности можно классифицировать по разным признакам.

1. Соответственно слагаемым измерения различают:

- а) погрешность воспроизведения единицы физической величины, иначе, погрешность меры;
- б) погрешность преобразования;
- в) погрешность сравнения;
- г) погрешность фиксации результата сравнения.

2. В зависимости от источника возникновения погрешности их делят на методические, инструментальные, погрешности, вызываемые влиянием внешних причин и непостоянством условий наблюдения, субъективные погрешности.

Методические (теоретические) погрешности связаны с недостаточно точным обоснованием самого метода измерений, с допущениями при выводе формул. К погрешностям метода следует отнести погреш-

ности, которые возникают вследствие влияния измерительной аппаратуры на результат измерений. Например, влияние собственного сопротивления амперметра или вольтметра, входной емкости прибора и т.д.

Во многих случаях погрешность метода измерения поддается теоретической оценке на базе анализа более точных моделей или учета влияния параметров измерительного прибора на результат измерений.

Инструментальные погрешности обусловлены конструктивными и технологическими несовершенствами средств измерения. Они зависят от качества изготовления и градуировки измерительных приборов, их стабильности. К числу инструментальных погрешностей относятся также погрешности отсчета, определяемые ценой деления стрелочного прибора или единицей наименьшего разряда у цифрового.

Погрешности, обусловленные влиянием внешних причин, возникают вследствие отступления от нормальных условий работы средств измерений, т.е. условий, при которых была проведена их градуировка. Эти погрешности могут быть вызваны влиянием температуры как на объект, так и на средство измерений электрических и магнитных полей, неправильной установкой и взаимным расположением средств измерений, нестабильностью источников питания.

Субъективные погрешности связаны с несовершенством органов чувств наблюдателя, недостаточным опытом наблюдателя, вниманием при измерениях и др. Примером субъективных погрешностей являются погрешности отсчитывания, погрешность паралакса.

3. По закономерности проявления различают систематические погрешности и случайные погрешности. Кроме того, в процессе измерения могут появиться очень большие (грубые) погрешности и могут быть допущены промахи. На практике далеко не всегда удается четко разграничить систематические и случайные погрешности, обнаружить промахи и выделить грубые погрешности.

Систематическими называются погрешности, остающиеся постоянными или изменяющиеся по определенному закону при повторных измерениях одной и той же величины.

Систематический характер, как правило, носят методические погрешности. Примером систематических погрешностей могут быть такие инструментальные погрешности, как постоянная погрешность меры, погрешность от точного нанесения штрихов на шкалу прибора (погрешность градуировки), температурные погрешности мер и измерительных приборов.

Одной из трудностей в проведении измерений и оценке их результатов является выделение систематических погрешностей. Подчас экспериментатор не знает и даже не подозревает о их существовании. В тех случаях, когда систематические погрешности изучены, результат измерений может быть уточнен или путем применения таких способов измерения, которые дадут возможность исключить влияние систематических погрешностей без их определения, или путем численного определения значения этих погрешностей и внесения поправок.

Поправкой называют значение величины, одноименной с измеряемой, прибавляемое к полученному при измерении значению физической величины с целью исключения систематической погрешности. Поправка численно равна абсолютной систематической погрешности, но имеет обратный знак.

Поправки задаются в виде графиков, таблиц, формул. Исключить систематическую погрешность измерения можно также путем умножения результатов измерения на поправочный множитель, который предварительно определен при поверке средств измерений.

Случайными называются погрешности, изменяющиеся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Случайные погрешности обусловлены, как правило, факторами, проявляющимися весьма нерегулярно и столь же неожиданно исчезающие или проявляющиеся с интенсивностью, которую трудно предвидеть. Часто случайная погрешность является следствием большого количества причин, каждая из которых оказывает какое-либо влияние на средства измерений.

Простейшим примером источника случайной погрешности является различие показаний стрелочного прибора при повторных измерениях одной и той же величины из-за трения в опорах подвижной части прибора или из-за гистерезиса. Если стрелочный прибор стоит на выходе усилителя, то к указанным источникам погрешностей добавляются неустойчивость цепи питания и помехи от внешних источников.

Случайные погрешности не могут быть исключены из результатов измерений, как известные систематические погрешности. Однако при проведении некоторого числа повторных измерений с помощью теории вероятностей и методов математической статистики удастся несколько уточнить результат, т.е. найти значение измеряемой величины, более близкое к истинному, чем результат одного измерения.

Следует заметить, что одна и та же погрешность может считаться систематической при одних условиях и случайной при других. Так, на-



пример, несколько мер одного номинала какой-либо физической величины (массы, сопротивления, индуктивности, емкости и т.д.) имеют свои абсолютные погрешности. Погрешность каждой меры в отдельности является систематической погрешностью для этой меры, но для всей совокупности мер погрешность одной меры будет считаться случайной, так как распределение этой погрешности по разным мерам носит случайный характер.

Промахами и грубыми погрешностями называются погрешности, существенно превышающие оправдываемые объективными условиями измерения, систематические или случайные погрешности.

Промахи - погрешности, зависящие от наблюдателя и связанные с неправильным обращением со средствами измерений, неверным отсчетом показаний или ошибками при записи результатов. Обнаружить промахи бывает не всегда легко, особенно при одиночных измерениях. Кроме того, результат промаха оказывается иногда таким, что бывает трудно решить, является ли он промахом или большой случайной погрешностью.

Причинами грубых погрешностей является неисправность измерительной аппаратуры, резкое изменение условий измерений и другие. Например, внезапное падение напряжения в сети электропитания может привести к тому, что погрешность измерения примет размеры, явно выходящие за границы, обусловленные ходом эксперимента в целом. Такая погрешность в составе случайной погрешности и будет грубой.

Промахи и грубые погрешности удается обнаруживать при многократных повторных измерениях. Как правило, результат измерения, содержащий промах или грубую погрешность, не принимают во внимание.

Таким образом, по характеру проявления все погрешности можно объединить в два типа:

а) случайные (в том числе грубые погрешности и промахи), изменяющиеся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины;

б) систематические погрешности, остающиеся постоянными или закономерно изменяющимися при повторных измерениях.

В процессе измерений оба вида погрешностей проявляются одновременно. Под точностью измерений понимают степень приближения результатов измерений к истинному значению измеряемой величины. Высокая точность измерений соответствует малым погрешностям всех видов как систематических, так и случайных. Термин "точность" применяется обычно для сравнения результатов или относительной характеристики методов измерений.

Мнение о том, что чем точнее, тем лучше, для многих случаев не оправдано прежде всего потому, что чем выше точность, тем труднее и сложнее её достигнуть. Уровень точности, к которой следует стремиться, определяется критерием целесообразности.

Целесообразная точность определяется конкретными условиями и целью измерения.

Например, ставится задача приблизительно определить размер некоторой величины, непостоянной во время измерений. В этом случае нецелесообразно стремиться к тому, чтобы погрешность измерения сделать меньше возможных колебаний размера. Но может быть поставлена и другая цель – изучить эти колебания. Очевидно, в этом случае необходимо повысить точность измерения настолько, чтобы погрешность оказалась много меньше колебаний размера. Для каждого конкретного случая следует выбирать те средства и методы измерения, которые обеспечивают получение результата с допустимой (не превышающей целесообразных для данного случая границ) погрешностью с необходимой степенью достоверности.

Достоверность результатов измерений характеризует степень доверия к результатам измерений и делит их на две категории: достоверные и недостоверные, в зависимости от того, известны или неизвестны вероятностные характеристики результатов измерений от истинных значений соответствующих величин. Результаты измерений, достоверность которых неизвестна, не представляют ценности и в ряде случаев могут служить источником дезинформации.

При заданной измерительной аппаратуре погрешности измерений могут существенно превышать погрешности применяемых мер и приборов, если не учитывать влияние различных причин на процесс измерения и не соблюдать определенных правил измерений.

Поэтому повышение точности измерений с помощью заданной измерительной аппаратуры обычно состоит в исключении или уменьшении систематических погрешностей и в уменьшении влияния случайных погрешностей.

4. Способы обнаружения и исключения систематических погрешностей измерений

Качество измерений, отражающее близость к нулю систематических погрешностей результатов, называют правильностью измерений.

Результаты измерений, из которых исключены систематические по-

грешности, называют исправленными

$$X = X' - \theta$$

Причины, вызывающие систематические погрешности, весьма разнообразны. Анализ этих причин, способы их обнаружения, исключения или оценки представляют одну из основных и самых трудных задач процесса точных измерений.

Сложность задачи исключения или уменьшения систематических погрешностей состоит в том, что нет общих способов её решения. В каждом отдельном случае применяют тот или иной способ, являющийся наиболее эффективным.

Способы исключения и учета систематических погрешностей можно разделить на четыре основные группы.

1. Устранение источников погрешностей до начала измерений (профилактика погрешностей).

2. Исключение погрешностей в процессе измерения (экспериментальное исключение погрешностей).

3. Внесение поправок в результат измерения (исключение погрешностей вычислением).

4. Оценка границ систематических погрешностей, если их нельзя исключить.

По причинам возникновения систематические погрешности разделяются на несколько видов:

а) Погрешности метода, возникающие из-за несовершенства метода измерений, из-за ограниченной точности формул, примененных для описания явления, которое положено в основу измерения, из-за ограниченной точности значений используемых констант и т.п.

В некоторых случаях из-за неправильного выбора системы прибора или способа его включения образуются погрешности методики. Во многих случаях методические погрешности появляются из-за нарушения работы исследуемой цепи вследствие включения измерительного прибора, например, при включении амперметра за счёт его собственного сопротивления меняется ток в исследуемой цепи.

Профилактика методических погрешностей сводится к теоретическому исследованию уравнений измерений, в частности, решению этой же задачи в более строгой постановке и сравнению результатов с результатами используемого метода, нахождению границ применимости упрощенных методов, учёту влияния измерительного прибора на результат измерений и т.п.

б) Уменьшают или исключают систематические погрешности путем выявления и устранения причин, их вызывающих. Это относится в первую очередь к установочным погрешностям, возникающим из-за взаимного влияния используемых средств измерений, из-за колебаний внешних условий. Для устранения такого рода погрешностей, например, создаются условия постоянства температуры окружающей среды, экранируют средства измерения от влияния внешних электрических и магнитных полей, используют стабилизированные источники питания. Если не удается сохранить постоянства условий, изучают закономерности изменения измеряемой величины при изменении условий измерений, вычисляют поправки и вносят их в результаты измерений.

Один из приемов, позволяющий обнаружить систематическую погрешность в процессе измерения, — это метод замещения, сущность которого состоит в том, что измерение осуществляется в два этапа:

- 1) Сначала измеряют неизвестную величину X и получают

$$X_n = X + \theta,$$

где X_n — показание измерительного прибора;
 θ — абсолютная систематическая погрешность.

- 2) Затем, ничего не заменяя в измерительной установке, вместо X подключают регулируемую меру X_m и подбирают такое значение X_m , при котором достигаются те же показания прибора, что и при измерениях X , то есть

$$X_n = X + \theta = X_m + \theta.$$

Следовательно

$$X = X_m;$$

$$\theta = X_n - X_m.$$

При методе замещения систематическая погрешность измерения будет в основном определяться погрешностью установки меры; измерительный прибор здесь выполняет лишь функцию индикатора и погрешности почти не вносит. Если источник погрешности имеет направленное действие (например, погрешности от влияния постоянных полей), то может быть осуществлена компенсация погрешности по знаку. Измерения при этом проводят так, чтобы систематическая погрешность входила в результаты измерений дважды с противоположными знаками, то есть

$$X_{n1} = X + \theta; \quad X_{n2} = X - \theta.$$

откуда

$$X = \frac{X_{n1} + X_{n2}}{2}; \quad \rho = \frac{X_{n1} - X_{n2}}{2}.$$

В тех случаях, когда есть подозрение, что систематическая погрешность меняется монотонно, практически по линейному закону во времени, или измерительная аппаратура дает разные показания в зависимости от направления подхода к значениям измеряемых величин, применяют метод двойных измерений.

Метод состоит в том, что наблюдения выполняются в прямом и обратном направлениях одним прибором и в одинаковых условиях. При этом получают двойной ряд данных наблюдений

$$\begin{aligned} X'_1, X'_2, \dots, X'_i, \dots, X'_n; \\ X''_1, X''_2, \dots, X''_i, \dots, X''_n. \end{aligned}$$

Затем составляют разности каждой пары данных

$$d_i = X'_i - X''_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и находят среднее арифметическое значение этих разностей

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i.$$

Малое значение $\bar{d}$ указывает на отсутствие систематических разностей между наблюдениями в прямом и обратном направлениях.

Если такое изучение аппаратуры или метода измерений указывает на наличие существенных разностей между наблюдениями в прямом (X') и обратном (X'') направлениях, то измерения следует осуществлять с подходом к номинальному значению измеряемой величины слева и справа, а действительное значение этой величины вычислять как среднее арифметическое наблюдений.

$$\bar{X}_i = \frac{X'_i + X''_i}{2}.$$

Этим методом могут быть существенно уменьшены погрешности из-за мертвого хода верньерных механизмов, из-за трения в опорах приборов, от гистерезиса, а также погрешности, линейно изменяющиеся во времени, например, за счет плавного ухода мощности, частоты.

В тех случаях, когда причина (или причины) систематической погрешности в общем ясна, но её абсолютное значение и знак неизвестны, существенное уменьшение систематической погрешности может дать рандомизация - перевод систематической погрешности в случайную. (Рандомизация в буквальном переводе с английского означает перемешивание, создание беспорядка, хаотичности.)

Перевести систематическую погрешность в случайную можно организовав измерения таким образом, чтобы фактор (или факторы), влияющий на результат измерений в каждом из наблюдений, действовал разным образом, и результат его действия носил случайный характер. С помощью рандомизации можно уменьшить погрешности меры или прибора, если в распоряжении экспериментатора имеется набор одноименных мер или приборов, обладающих систематической погрешностью одинакового происхождения (скажем, неточная градуировка шкалы). Для данного прибора (меры) эта погрешность – величина постоянная, но от прибора к прибору она меняется случайным образом. Поэтому если измерить интересующую нас величину M приборами, т.е. сделать ряд измерений, а затем вычислить среднее арифметическое всех результатов измерений, то погрешность заметно уменьшится. Простейший пример: определение веса одного и того же тела с помощью нескольких разных наборов гирь.

Методом рандомизации можно уменьшить многие неизвестные погрешности тогда, когда с точки зрения теории метода, не учитывавшей какой-либо фактор (факторы), отдельные измерения, проводимые при несколько измененных условиях, равноценны. Например, определение среднего диаметра цилиндра из результатов измерения диаметра под разными углами к какому-то выбранному направлению. Наиболее надежный способ обнаружения и оценки систематической погрешности, часто применяемый при точных измерениях, состоит в сравнении результатов измерений данной величины различными принципиально независимыми методами, основанными на разных физических принципах, с применением различной аппаратуры. Устойчивые расхождения между результатами измерений будут говорить о наличии систематической погрешности одного из методов. Хотя указанный трудоемкий путь достаточно надежен, все же полной гарантии исключения скрытых систематических погрешностей он не дает.

5. Обработка результатов наблюдений при измерениях с многократными наблюдениями (прямые измерения)

Различают измерения с однократными и многократными наблюдениями.

Наблюдение – экспериментальная операция, выполняемая в процес-

се измерения, в итоге которой получают одно из значений, подлежащих обработке для получения результата измерения.

(При измерении с однократным наблюдением термином "наблюдение" пользоваться не следует.)

Если существенный вклад в общую погрешность измерений вносят случайные погрешности (или к ним сведены систематические) для нахождения более точного значения измеряемой величины прибегают к измерениям с многократными наблюдениями. При проведении повторных наблюдений в одинаковых условиях каждая из возможных причин случайных изменений результатов наблюдений может или появиться, или не появиться. В результате суммарного воздействия множества различных причин, не поддающихся учету, каждое новое наблюдение дает и новое случайное значение X_i измеряемой величины A .

Погрешность i -го результата наблюдений

$$\Delta_i = X_i - A$$

является также случайной величиной и может быть любой как по размеру, так и по знаку.

Случайные величины бывают дискретными и непрерывными.

Дискретная случайная величина может принимать конечное или счетное множество частных значений, отделенных друг от друга конечными промежутками.

Например, число попаданий стрелка в цель при ста выстрелах, число очков, выпадающих при бросании игральной кости. Случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый интервал без каких-либо разрывов или скачков, называют непрерывными случайными величинами. Например, непрерывными величинами являются длина отрезка линии, промежутка времени, интервал температур и т.д. Большинство измеряемых величин считают непрерывными. Однако любой замер непрерывной случайной величины в силу ограниченной чувствительности имеющихся средств измерения можно задать только в дискретной форме. Иногда непрерывные величины искусственно представляют как дискретные, изменяющиеся равными ступенями, и измеряют их путем счета этих ступеней. Повысить точность измерений можно уменьшая размер ступеней измеряемой величины. Причем это возможно в принципе до тех пор, пока ступени не станут равными элементарным частицам измеряемой величины, т.е. обнаружится природная дискретность величины.

Для полной характеристики дискретной случайной величины необходимо и достаточно знать возможные её значения и вероятность каждого из этих значений.

Расположив возможные значения дискретной случайной величины в порядке возрастания и обозначив $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, а соответствующие им вероятности $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, получают таблицу, называемую рядом распределения, который можно представить в виде графика (рис. 1).

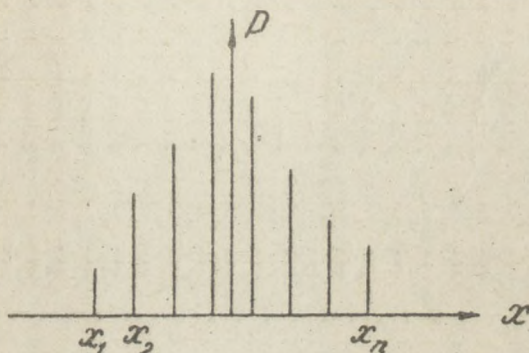


Рис. 1. График распределения дискретной случайной величины

Вероятность любого значения непрерывной величины бесконечно мала. Чтобы выявить распределение вероятностей, рассматривают ряд интервалов Δx_i значений величины и подсчитывают частоты p^* попадания значения величины на каждый интервал. Таблица, в которой приводятся интервалы в порядке их расположения вдоль оси абсцисс и соответствующие частоты, называется статистическим рядом. Статистический ряд графически представляется в виде ступенчатой кривой-гистограммы (рис. 2).

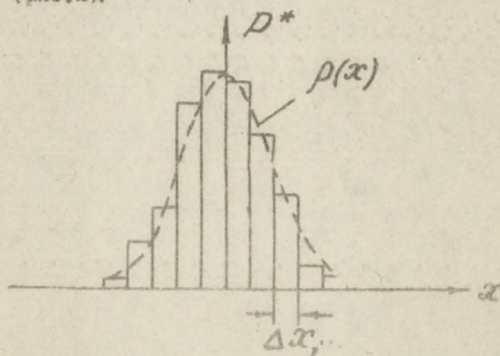


Рис. 2. Гистограмма и кривая плотности вероятности

Если взять очень малые интервалы (от x_i до $x_i + dx$), то при уменьшении dx кривая в пределе потеряет ступенчатый характер и перейдет в плавную кривую (штриховая кривая на рис.2), называемую кривой плотности вероятности для данной непрерывной случайной величины. Уравнение, описывающее эту кривую, называют законом распределения. Ординаты кривой, например ордината ρ_i , в точке x_i называется плотностью вероятности в данной точке. Размерность плотности вероятности $\rho(x)$ – величина, обратная размерности самой случайной величины x . Произведения $\rho(x)dx$ называются элементами вероятностей, они равны вероятностям того, что случайные величины x_i находятся в промежутке между x и $x+dx$. Площадь же под всей кривой $\rho(x)$ равна вероятности появления любого из возможных значений x_i , т.е. 1.

Математическое ожидание случайной величины – это такое её значение, вокруг которого группируются результаты отдельных наблюдений. Математическое ожидание дискретной случайной величины $M(x)$ определяется как сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятность этих значений

$$M(x) = \sum x_i \rho_i.$$

Для непрерывных случайных величин

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx.$$

Более строгое определение постоянной систематической и случайной погрешностей можно дать следующим образом. Систематической постоянной погрешностью называется отклонение математического ожидания результатов наблюдений от истинного значения измеряемой величины:

$$\theta = M(x) - A.$$

а случайной погрешностью – разность между результатом единичного наблюдения и математическим ожиданием результатов

$$\Delta_i = X - M(x).$$

В этих обозначениях истинное значение измеряемой величины составляет

$$A = X - \theta - \Delta_i.$$

Функция распределения является самым универсальным способом описания поведения случайных погрешностей. В различных измерительных установках (системах) законы распределения вероятностей случайных величин различны. В практике измерений закон распределения вероятностей случайных погрешностей наиболее часто полагается равномерным или нормальным (рис.3).

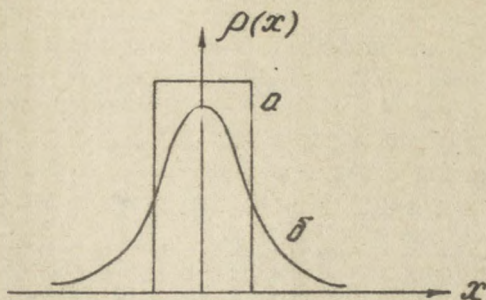


Рис.3. Равномерный (a) и нормальный (δ) законы распределения случайных величин

По равномерному закону распределяются случайные составляющие погрешностей измерений с помощью стрелочных приборов, которые обусловлены трением в опорах и округлением отсчетов по шкале прибора. Если две случайные величины распределены по равномерным законам с центром в начале координат и изменяются в общем случае в разных пределах, то их сумма будет распределена по трапециoidalному закону. При равных пределах получается треугольное распределение. Согласно центральной предельной теореме, сумма большого количества распределений, подчиненных разным законам, образует распределение, приближающееся к нормальному тем больше, чем больше таких распределений образует данную композицию. Необходимым условием при этом является равномерно малое значение отдельных случайных величин. При невыполнении этого условия характер распределения меняется в сторону тех закономерностей, по которым распределяются случайные величины, значительно превышающие остальные. Распределение случайных погрешностей будет близко к нормальному всякий раз, когда результат наблюдения формируется под влиянием большого числа независимо действующих факторов, каждый из которых оказывает лишь незначительное действие по сравнению с суммарным действием всех остальных.

При нормальном распределении функция плотности вероятности случайных величин имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma^2}},$$

(закон Гаусса)

где m_x и σ - параметры нормального распределения;

$m_x = M(x)$ - математическое ожидание;

σ - среднеквадратическое отклонение.

Значение математического ожидания при нормальном распределении равно абсциссе центра распределения, т.е. m_x .

Если систематические погрешности полностью исключены, то истинное значение измеряемой величины равно математическому ожиданию результатов наблюдений, то есть

$$A = M(x) = m_x.$$

На рис. 4 изображено несколько кривых нормального распределения для различных значений параметра σ .

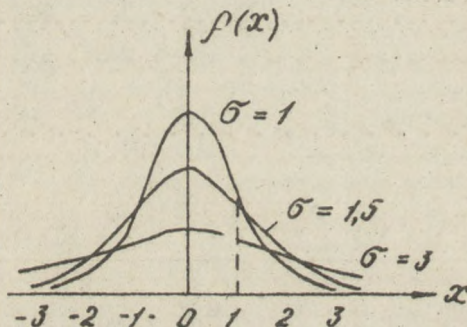


Рис. 4. Кривые нормального распределения случайных величин

Из рисунка видно, что по мере увеличения среднего квадратического отклонения возрастает вероятность появления больших значений погрешностей, т.е. увеличивается рассеяние результатов наблюдений.

Мерой рассеяния значений случайных величин служит дисперсия $D(x)$.

Для дискретных распределений дисперсия отклонений от математического ожидания определяется выражением

$$D(x) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(x)]^2 p_i,$$

и соответственно для непрерывных

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [x_i - M(x)]^2 \rho(x) dx.$$

Размерность дисперсии отлична от размерности измеряемой величины, поэтому в практике измерений применяют среднее квадратическое отклонение, определяемое как положительный квадратный корень из дисперсии

$$\sigma = + \sqrt{D(x)}.$$

В измерительной практике, когда оценивают точность измерений, σ называют средней квадратической погрешностью. Объем измерений, необходимый для достаточно точного установления закона распределения и числовых вероятностных характеристик, чрезвычайно велик. Практически число наблюдений ограничено. Поэтому реально пользуются статистическими числовыми характеристиками - оценками, которые принимают за искомые параметры функции распределения случайной величины на основании выборки - ряда значений, принимаемых этой величиной в n независимых опытах.

Получаемая в результате многократных наблюдений информация об истинном значении измеряемой величины и рассеянии результатов наблюдений состоит из ряда результатов отдельных наблюдений $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, где n - число наблюдений.

В качестве оценки истинного значения измеряемой величины $\tilde{A}$ принимается среднее арифметическое получаемых результатов наблюдений

$$\tilde{A} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Случайная погрешность оценивается средне квадратическим отклонением

$$\sigma \approx S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}.$$

На кривой нормального распределения абсциссам $+\sigma$, $-\sigma$ соответствуют точки перегиба. Вероятность того, что случайные погрешности измерения не выйдут за пределы $\pm \sigma$ составляет $0,6826$, приближенно $\frac{2}{3}$. Вероятность попадания случайной погрешности в симметричный интервал, называемый доверительным интервалом, с границами $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$

$$P[-\varepsilon < \Delta < +\varepsilon] = \alpha.$$

называется доверительной вероятностью, а значение $q = 1 - \alpha$ - уровнем значимости. При нормальном распределении $\alpha = 2 \Phi(t)$, где

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} d\Delta.$$

интеграл вероятности (интеграл Лапласа), $t = \epsilon/\sigma$.

Часто пользуются доверительным интервалом от $+3\sigma$ до -3σ , для которого доверительная вероятность составляет 0,9973 или 99,73%. При сужении границы доверительного интервала до $\pm 2\sigma$, доверительная вероятность уменьшится до 0,9544 или 95,44%.

Среднее значение результатов бесконечного числа ($n \rightarrow \infty$) наблюдений стремится к истинному значению измеряемой величины. Практически среднее значение $\bar{X}$ вычисляется на основании конечного числа результатов и само является случайной величиной. Его случайная погрешность характеризуется среднеквадратическим отклонением среднего арифметического

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Оценка среднего квадратического отклонения результата измерения (среднего арифметического исправленных результатов наблюдений) вычисляется по формуле

$$S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}.$$

Вероятность того, что погрешность среднего арифметического не превышает значения $S_{\bar{X}}$ составляет 0,68, так же как для σ . Но границы доверительного интервала сужаются, так как $S_{\bar{X}}$ в $\sqrt{n}$ раз меньше S_X . Полученные оценки позволяют записать результат измерения в виде

$$A = \bar{X}, S_{\bar{X}} = \dots, n = \dots$$

Вычисляемое по отклонениям от среднего арифметического среднее квадратическое отклонение S_X является лишь некоторым приближением к действительному значению среднего квадратического отклонения σ . Если нет возможности теоретически на основе предварительных опытов с достаточным числом наблюдений определить σ для данного метода, то при малом числе наблюдений пользоваться формулами нормального распределения нельзя.

На возможность определять доверительную вероятность и доверительный интервал для среднего при малом числе наблюдений указал В.С. Госсет, писавший под псевдонимом Стьюдент.

Границы интервала, за пределы которого с заданной доверительной вероятностью не выходят случайные погрешности, выражают в виде значения, кратного $S_{\bar{X}}$:

$$\Delta_{1,2} = \pm t \cdot S_{\bar{X}} = \pm t \frac{S_X}{\sqrt{n}},$$

где $t=t_{\alpha n}$ - коэффициент Стьюдента, который зависит от задаваемой доверительной вероятности $P=\alpha$ и количества измерений n (см. табл. 3). В аналогичных таблицах, приводимых в книгах, чаще указывается не число наблюдений n , а число степеней свободы $k = n - 1$

Таблица 3

Коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha n}$

n	α				
	0,5	0,9	0,95	0,99	0,999
2	100	6,31	12,7	63,7	636,6
3	0,82	2,92	4,3	9,9	31,6
4	0,77	2,4	3,2	5,8	12,9
5	0,74	2,1	2,8	4,6	8,6
6	0,73	2,0	2,6	4,2	6,9
7	0,72	1,9	2,4	3,7	6,0
8	0,71	1,9	2,4	3,5	5,4
9	0,71	1,9	2,3	3,4	5,0
10	0,70	1,8	2,3	3,3	4,8
	0,674	1,63	1,960	2,58	3,29

Выбор вероятности α при построении доверительного интервала зависит от целей измерений и требований к ним.

Например, погрешность $\hat{\sigma}_{\text{ср}} = \frac{s}{\sqrt{5}}$ называют вероятной случайной погрешностью. Вероятность её появления равна 0,5 (крайняя левая колонка в табл. 3). Обычно для определения доверительных границ погрешностей результата измерения доверительную вероятность α принимают равной 0,95. Допускается указывать границы для доверительной вероятности $\alpha = 0,99$ и более высокие значения (ГОСТ 8.207-76 Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений).

Проанализировав способы оценки случайных погрешностей, подведем итог и рассмотрим порядок обработки результатов многократных наблюдений.

При статистической обработке группы результатов наблюдений следует выполнить следующие операции:

1. Исключить известные систематические погрешности из результатов наблюдений и записать исправленные результаты наблюдений X_i .

2. Вычислить среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений, принимаемое за результат измерения:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \tilde{A}.$$

3. Найти погрешности отдельных измерений

$$\Delta_i = X_i - \bar{X}$$

и их квадрат Δ_i^2 .

4. Вычислить оценку среднего квадратического отклонения результата наблюдений

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum \Delta_i^2}{n-1}}.$$

5. Определить наличие грубых погрешностей и промахов и, если последние обнаружены, соответствующие результаты отбросить и повторить вычисления $\bar{X}$ и S_X .

6. Вычислить оценку среднего квадратического отклонения результата измерений

$$S_{\bar{X}} = \frac{S_X}{\sqrt{n}}.$$

7. По заданной доверительной вероятности $P=\alpha$, и количеству измерений n найти по таблице 3 коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$, а затем значение доверительного интервала $\epsilon = t_{\alpha n} \cdot S_{\bar{X}}$ в единицах измеряемой величины. Окончательный результат измерения при многократных наблюдениях запишется в виде

$$\tilde{A} = \bar{X} \pm t_{\alpha n} \cdot S_{\bar{X}} \quad (\alpha = \dots).$$

Нужно отметить, что обычно доверительная погрешность результата измерений $\Delta_{\alpha n} = t_{\alpha n} S_{\bar{X}}$ записывается только с одной значащей цифрой. Две значащие цифры указываются только в случаях, когда первая значащая цифра меньше или при особо точных измерениях. Приводить значение погрешности с большой точностью не имеет смысла, так как $\Delta_{\alpha n}$ - приближенная величина, и все погрешности с вероятностью $P=\alpha$, будут меньше $\Delta_{\alpha n}$. Числовое значение результата измерения $\bar{X}$ должно оканчиваться цифрой того же разряда, что и значение погрешности $\Delta_{\alpha n}$.

6. Совместная обработка нескольких групп наблюдений. Обнаружение систематических погрешностей на фоне случайных

а) Сравнение результатов измерений двумя независимыми методами. Как уже отмечалось, один из способов обнаружения систематической погрешности состоит в сравнении результатов измерения данной вели-

ны различными, принципиально независимыми методами, основанными на разных физических принципах и на различной аппаратуре. Часто по результатам отдельных измерений трудно судить о совпадении или расхождении результатов (случайные погрешности отдельных методов заметны). В этом случае следует поступить следующим образом.

Проводят многократные измерения обоими методами и находят результаты измерений $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$ и оценки их дисперсий соответственно S_1^2 и S_2^2 .

Дисперсия разности $\bar{X}_2$ и $\bar{X}_1$, которые предполагаются независимыми

$$D(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) \approx S_1^2 + S_2^2.$$

Далее можно рассчитать отношение

$$t = \frac{|\bar{X}_2 - \bar{X}_1|}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}.$$

По величине t можно судить об отсутствии или наличии систематических погрешностей в значениях $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$. Если t значительно превышает единицу, то имеются основания предполагать наличие систематических погрешностей в обоих измеренных значениях или по крайней мере в одном из них.

б) Совместная обработка нескольких рядов наблюдений. Понятие о дисперсионном анализе.

Для точного определения искомой величины прибегают к многократным измерениям. Многократные измерения можно классифицировать по ряду признаков, методу измерения, применяемой аппаратуре, внешним условиям и др., позволяющим разделить всю совокупность измерений на несколько серий.

Кроме того, даже в пределах одного классифицированного признака имеет значение последовательность измерений во времени. Измерения, выполненные в разные промежутки времени, можно отнести к разным сериям.

После того как совокупность измерений разделена на серии, можно проверить предположение о наличии или отсутствии систематических погрешностей. Путем разбиения на серии и дальнейшей обработки результатов измерений (дисперсионный анализ) можно выявить источники систематической погрешности.

Предположим, что при измерениях на объект действует ряд факторов контролируемых, которые можно измерять, и неконтролируемых. Применяя дисперсионный анализ, можно ответить на вопросы: влияет ли

контролируемый фактор на результат измерений и какова количественная оценка влияния контролируемых и неконтролируемых факторов. Для этого, поддерживая контролируемые факторы на уровнях $Q_1, Q_2, \dots, Q_6$, проводят измерения, результаты которых представляют в виде серий

$$\begin{array}{c} j \rightarrow \\ i \downarrow \end{array} \begin{array}{cccc} X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}; & (Q_1) \\ X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}; & (Q_2) \\ \vdots & \vdots \\ X_{41}, X_{42}, \dots, X_{4n_4}; & (Q_4) \end{array}$$

При обработке результатов группы наблюдений сначала проверяется гипотеза о равенстве дисперсий S_i^2 во всех группах наблюдений. Для этого находят среднее арифметическое внутри i -й группы

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij},$$

и оценку дисперсии внутри каждой группы

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

Дисперсии отдельных групп наблюдений располагают в ряд в порядке возрастания

$$S_{(1)}^2, S_{(2)}^2, \dots, S_{(L)}^2.$$

При проверке допустимости различия оценок дисперсии двух групп наблюдений, результаты которых распределены нормально, используется так называемое F - распределение Р. Фишера. Различие оценок дисперсий считается допустимым, если выполняется условие, что отношение большей из них к меньшей с выбранной вероятностью находится между верхним F_{α} и нижним F_{α} предельными значениями:

$$P\left\{F_H < \frac{S_{21}^2}{S_{22}^2} < F_b\right\} = \alpha.$$

Число степеней свободы для S_1 равно $k_1 = n_1 - 1$, для S_2 равно $k_2 = n_2 - 1$, причем S_2^2 и S_1^2 соответственно большая и меньшая из двух оценок дисперсии. Верхние пределы распределения Фишера находятся по таблицам, F_{k_1, k_2} нижние вычисляются по формуле $F_H = F_k^{-1}$.

Таблица 4

Значение функции F - распределение фишера

	Число степеней свободы										
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50
1	161	200	216	225	230	234	239	244	246	249	252
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,8	8,7	8,7	8,6	8,6
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	6,0	5,9	5,8	5,8	5,7
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,0	4,9	4,8	4,2	4,6	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,2	4,0	3,9	3,8	3,8
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	2,9	2,8	2,7	2,6

- 35 -

Проверяют значимость отношения $S_{(L)}^2 / S_{(1)}^2$. Если для выбранного значения окажется, что

$$F_H < S_{(L)}^2 / S_{(1)}^2 < F_6, \quad S_{(L+1)}^2 / S_{(1)}^2, \dots$$

то она выполняется и для остальных отношений

Тогда следует принять гипотезу как правдоподобную и считать, что рассеивание результатов наблюдений относительно средних во всех группах одинаково.

При равенстве дисперсий в группах проверяется гипотеза о равенстве математических ожиданий во всех группах. Для этого находится среднее значение внутригрупповых оценок дисперсии

$$\begin{aligned} \bar{S}_{NL}^2 &= \frac{1}{N-L} \sum_{i=1}^L (n_i - 1) S_i^2 = \\ &= \frac{1}{N-L} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2; \end{aligned}$$

(число степеней свободы здесь равно $K_2 = N - L$)

среднее арифметическое по всем измерениям (совокупное среднее)

где $N = \sum_{i=1}^L n_i$ - общее число измерений, и оценку межгрупповой дисперсии

$$S_{LL}^2 = \frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2;$$

(число степеней свободы здесь равно $K_1 = L - 1$).

Рассеивание средних арифметических считают допустимым, если отношение оценки межгрупповой дисперсии к среднему значению внутригрупповых оценок дисперсий находится в пределах, определяемых по таблицам процентных распределений Р. Фишера

$$P \left\{ F_H \leq \frac{S_{LL}^2}{S_{NL}^2} \leq F_6 \right\} = \alpha.$$

(Верхние пределы находятся по таблицам, нижние из соотношения $F_H = F_6^{-1}$.)

В этом случае группы результатов наблюдений считают равнорассеянными. Их можно объединить в один ряд и обрабатывать как результаты одной группы наблюдений (см. раздел 1.5).

Если значения S_{LL}^2 / S_{NL}^2 находятся вне интервала (F_H, F_6) , то это означает, что между средними арифметическими групп имеются недопустимые смещения. Иными словами при проведении измерений имели

место случайные или систематические сдвиги математического ожидания результатов наблюдений, вследствие чего расхождения между средними оказались больше тех, которые могут быть оправданы ограниченностью опытных данных. Значимое различие групповых средних говорит о том, что на формирование результата измерений большое влияние оказывает тот или иной фактор, в частности контролируемый фактор Q . В этом случае целесообразно выяснить, монотонно или случайно изменяются средние значения групп. Для этого строят графики средних значений групп или используют критерий Э.Аббе.

в) Выявление характера изменения среднего арифметического. Критерий Э.Аббе.

Критерий Аббе позволяет отличить монотонное смещение средних арифметических групп от их случайных колебаний. Метод можно использовать при числе групп $L \geq 4$ и если дисперсии групп одинаковы. Средние арифметические значения групп данных располагают в той последовательности, с которой эти группы были получены

$$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_L.$$

Затем составляют ряд последовательных разностей этих значений

$$d_1 = \bar{X}_2 - \bar{X}_1, \dots, d_i = \bar{X}_{i+1} - \bar{X}_i, \dots, d_{L-1} = \bar{X}_L - \bar{X}_{L-1}.$$

Оценка дисперсии ряда средних арифметических, вычисленная с помощью этих разностей, будет равна

$$S_d^2 = \frac{1}{2(L-1)} \sum_{i=1}^{L-1} d_i^2.$$

Обычную оценку дисперсии находят по формуле

$$S_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2,$$

где

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^L n_i \bar{X}_i, \quad N = \sum_{i=1}^L n_i.$$

Затем составляют отношение

$$\nu = S_d^2 / S_{\bar{X}}^2.$$

Считают, что среднее арифметическое групп имеет систематическое смещение, если

$$\nu < \nu_{\min},$$

где $\nu_{\min}$ - критерий Аббе.

Таблица 5
Значения критерия Аббе для $\alpha = 0,95$

Число групп L	4	5	6	7	8	9	10
ν_{min}	0,39	0,41	0,44	0,47	0,49	0,51	0,53

11	12	13	14	15
0,55	0,56	0,58	0,59	0,60

Метод Аббе можно применять и для обнаружения монотонных смещений между наблюдениями одной группы. Для этого в приведенных формулах следует заменить

$\bar{X}_i$ на X_i , $\bar{X}$ на $\bar{X}$ и L на n .

В том случае, когда смещения между наблюдениями не монотонны, а носят случайный характер, применим метод рандомизации (см. раздел 1.4) и тогда результат измерений

$$\tilde{A} = \bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}.$$

Аналогично, когда рассеивание средних арифметических хотя и значительно, но носит случайный характер, в качестве оценки истинного значения измеряемой величины принимают совокупное среднее, вычисляемое по формуле

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^L n_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^L n_i}.$$

Желательно при этом, чтобы все группы имели примерно равное число наблюдений. Оценка дисперсии совокупного среднего равна

$$S_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{N(N-1)} \left[\sum_{i=1}^L (n_i - 1) S_i^2 + \sum_{i=1}^L n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 \right],$$

где

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2.$$

Если группы содержат равное число наблюдений, то совокупное среднее арифметическое и его дисперсию можно найти по более простым формулам:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^L \bar{X}_i}{L};$$

$$S_{\bar{X}}^2 = \frac{(n-1) \sum_{i=1}^L S_i^2}{N(N-1)} + \frac{\sum_{i=1}^L (\bar{X}_i - \bar{X})^2}{L(N-1)}.$$

Если обнаружено монотонное смещение средних арифметических, то для выяснения формы зависимости используют методы регрессионного анализа. После этого следует попытаться исключить систематические погрешности и затем снова вернуться к вопросу объединения групп.

г) Обработка неравнорассеянных групп наблюдений

В том случае, когда оценки дисперсий отдельных групп наблюдений значительно отличаются друг от друга, а средние арифметические групп являются оценками одного и того же значения измеряемой величины, группы результатов называются неравнорассеянными (неравноточными). При обработке результатов неравнорассеянных групп наблюдений ставится задача нахождения значения измеряемой величины, наиболее близкого к истинному. Каждую группу результатов наблюдений, относящихся к одинаковым условиям (данный прибор, данный наблюдатель и т.д.) необходимо оценить с точки зрения степени доверия, определить их "вес" в общей совокупности всех результатов, подлежащих обработке. Чем больше степень доверия к результату, тем больше его вес, тем больше число, выражающее этот вес. Значение измеряемой величины, наиболее близкое к истинному её значению, определяется по формуле

$$\bar{X}_0 = \frac{\sum_{i=1}^L p_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^L p_i},$$

где $\bar{X}_i$ - средние значения отдельных групп наблюдений;
 p_i - их вес.

Величина $\bar{X}_0$ называется средним взвешенным.

Веса средних арифметических считают обратно пропорциональными их дисперсиям или квадратам

$$p_1 : p_2 : \dots : p_i : \dots : p_L = \frac{1}{S_{\bar{X}_1}^2} : \frac{1}{S_{\bar{X}_2}^2} : \dots : \frac{1}{S_{\bar{X}_i}^2} : \dots : \frac{1}{S_{\bar{X}_L}^2}.$$

Дисперсия и соответственно среднее квадратическое отклонение среднего взвешенного при выбранных значениях весов определяется выражением

$$D(\bar{x}_0) = S_{\bar{x}_0}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{S_{x_i}^2}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{S_{x_i}^2}}$$

из которого, в частности, следует, что дисперсия среднего взвешенного меньше дисперсии всех средних арифметических, если веса выбраны обратно пропорционально квадратам средних квадратических отклонений средних арифметических исходных рядов наблюдений.

7. Погрешности средств измерений. Классы точности средств измерений

а) Погрешности средств измерений и формы их выражения.

Средства измерений – это технические средства, используемые при измерениях и имеющие нормированные метрологические свойства. Средства измерений включают в себя меры, измерительные приборы, измерительные преобразователи и вспомогательные средства.

Их часто объединяют в более или менее сложные комплексы: измерительные установки и измерительные системы.

Метрологические характеристики средств измерений – это характеристики свойств средств измерений, оказывающие влияние на результаты и погрешности измерений.

К нормируемым метрологическим характеристикам средств измерений относят номинальное значение однозначной меры, номинальную статическую характеристику преобразования измерительного преобразователя, наименьшую цену деления неравномерной шкалы стрелочного измерительного прибора, номинальную цену единицы младшего разряда кода цифровых средств измерений, характеристики систематической и случайной составляющих погрешности средства измерений, входное сопротивление измерительного прибора и другие характеристики.

В результате воздействия большого числа различных случайных и детерминированных факторов, возникающих в процессе изготовления, хранения и эксплуатации измерительных средств, номинальные значения мер и показания измерительных приборов неизбежно отличаются от истинных значений воспроизводимых или измеряемых ими величин. Эти отклонения характеризуют погрешности измерительных средств.

Под абсолютной погрешностью меры понимается алгебраическая разность между её номинальным A_n и действительным A_d значениями

$$\Delta_M = X_M - A_g.$$

под абсолютной погрешностью измерительного прибора — алгебраическая разность между показаниями X_n прибора и действительным значением A_g измеряемой величины

$$\Delta_n = X_n - A_g.$$

Абсолютное значение погрешности прибора Δ_n может не зависеть от текущих значений измеряемой величины X . В этом случае погрешность определяется только аддитивной составляющей Δ_o . В качестве числовой характеристики точности прибора берется отношение абсолютной погрешности прибора Δ_o к некоторому нормирующему значению L

$$\delta_o = \Delta_o / L.$$

Для приборов с равномерной или степенной шкалой в качестве нормирующего значения принимают конечное значение шкалы и, если нулевая отметка находится на краю шкалы, приведенная погрешность выражается в процентах от конечного значения шкалы X_K

$$\delta_o = \Delta_o / X_K.$$

называемое приведенной погрешностью. Если прибор имеет двустороннюю шкалу, то приведенная погрешность выражается в процентах от суммы пределов измерения по обе стороны от нуля.

Абсолютное значение погрешности в любой точке шкалы прибора принимается постоянным и равным для большинства приборов (амперметры, вольтметры, ваттметры, частотомеры).

Текущее значение относительной погрешности в различных точках шкалы прибора определяется как

$$\delta_n = \Delta_o / X_n.$$

Относительную погрешность измерительного прибора можно выразить через приведенную погрешность

$$\delta_n = \delta_o \frac{X_K}{X_n}.$$

Из этого выражения следует, что большая точность при равномерной шкале будет в том случае, когда значение X_n близко к X_K , т.е. когда стрелки прибора находятся в последней трети шкалы. При неравномерной шкале относительная погрешность измерительного прибора в разных частях шкалы может быть различной. Например, у симетров наибольшее значение относительной погрешности соответствует как начальной, так и конечной частям шкалы. Измерение следует стремиться проводить в средней её части.

Во многих измерительных устройствах существенную роль играет мультипликативная составляющая, т.е. составляющая, пропорциональная

текущему значению X измеряемой величины. Эта составляющая называется ещё погрешностью чувствительности. Типичными случаями погрешности чувствительности являются, например, погрешность вольтметра от изменения добавочного сопротивления, погрешность от изменения коэффициента усилителя.

Погрешность чувствительности уменьшается с уменьшением измеряемой величины, благодаря чему её относительная величина остаётся постоянной во всем рабочем диапазоне преобразователя, включая и область сколь угодно малых значений измеряемой величины.

При $X = 0$ мультипликативная составляющая также равна нулю и погрешность определяется только аддитивной составляющей. Поэтому аддитивная составляющая погрешности получила название погрешности нуля.

При наличии погрешности нуля и мультипликативной погрешности абсолютная погрешность прибора записывается двучленной формулой

$$\Delta_n = \Delta_0 + \delta'_m \cdot X,$$

где Δ_0 - абсолютная погрешность нуля;

δ'_m - относительная погрешность чувствительности.

Текущее значение относительной погрешности в этом случае определяется выражением

$$\delta_n = \delta'_m + \frac{\Delta_0}{X} = \delta'_m + \delta_0 \frac{X_0}{X}.$$

Погрешности измерительных средств принято подразделять на статические, имеющие место при измерении постоянных величин после завершения переходных процессов в элементах приборов и преобразователей, и динамические, появляющиеся при измерении переменных величин и обусловленные инерционными свойствами средств измерений.

Статические погрешности измерительных средств делятся на систематические и случайные. Систематические погрешности являются в общем случае функциями измеряемых величин, влияющих величин (температуры, влажности, напряжения питания и пр.) и времени. Систематическую погрешность в функции измеряемой величины можно представить в виде суммы погрешностей схемы и технологических погрешностей.

Как те, так и другие виды погрешностей можно рассматривать в качестве систематических лишь при измерении постоянной величины с помощью одного экземпляра измерительного прибора. В массе измерений различных значений физической величины, осуществляемых одним или многими приборами, эти систематические погрешности приходится относить к классу случайных.

б) Классы точности средств измерений. Поверка, калибровка, градуировка..

Инструментальная погрешность включает в себя систематическую и случайную составляющие и соотношения между ними могут быть разными: погрешность меры обычно носит систематический характер, у измерительных приборов может преобладать случайная составляющая.

Значения суммарных погрешностей устанавливаются отдельно для нормальных условий применения средств измерений и для случая отклонения влияющих величин от значений, имеющих место в нормальных условиях. Нормальные значения влияющих величин (температура, влажность, частота и напряжение питания и т.д.) указываются в стандартах или технических условиях на средства измерений данного вида в форме номиналов с нормированными отклонениями, например, температура должна составлять $20 \pm 2^\circ\text{C}$, напряжение питания $-220 \text{ В} \pm 10\%$. Погрешность, свойственная средству измерений, находящемуся в нормальных условиях применения, называется основной погрешностью. Средства измерений каждого вида делятся на классы точности в зависимости от значений предельных допускаемых основных погрешностей. Для каждого вида средств измерений устанавливается ряд классов точности и им присваиваются те или иные обозначения: номера, числа, буквы и т.п.

Основой для присвоения средствам измерений того или иного класса точности является их основная погрешность и способ её выражения.

Средствам измерений, пределы допускаемых погрешностей которых выражаются в единицах измеряемой величины или в делениях шкалы, присваиваются классы точности, обозначаемые порядковыми номерами (арабскими цифрами, например 0,1,2, и т.д.). При этом с увеличением допускаемой погрешности увеличивается порядковый номер. Классы точности средств измерений, пределы допускаемых погрешностей которых задаются относительной погрешностью, выраженной в процентах, обозначаются числами, совпадающими со значениями предела допускаемой основной погрешности.

Электронизмерительные приборы делятся, например, по точности на восемь классов: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0.

Класс прибора определяет наибольшую допускаемую приведенную основную погрешность в рабочей части шкалы, значение которой равно приведенной погрешности в процентах, т.е. 0,05; 0,1 и т.д. Для некоторых приборов допускаемая относительная погрешность вы-

ражается двучленной формулой, например

$$\delta_n = \pm (h + d \frac{x_n}{x_n})$$

где h и d - постоянные относительные величины (числа).

Классы точности таких приборов обозначаются двумя числами, разделенными косой чертой (h/d).

Величина h характеризует остаточную погрешность средства измерения.

Погрешности измерительного прибора (или меры) определяются поверкой. Поверкой мер и измерительных приборов называют совокупность действий, выполняемых для определения и оценки погрешностей средства измерений. Цель, которую в первую очередь преследует поверка, - выяснить, соответствуют ли их точностные характеристики регламентированным значениям и пригодно ли средство измерений к применению. Поверка обычно сводится к сравнению показаний поверяемых приборов (или меры) с показаниями более точного прибора (или меры) при измерениях одной и той же величины. Значение измеряемой величины, определяемое по образцовому прибору (или мере), принято считать действительным значением. Однако действительное значение отличается от истинного на величину погрешности, присущей данному образцовому прибору (или мере). Если источники систематических погрешностей прибора неизвестны или неустраняемы в ходе поверки прибора, находятся поправки. Поправка - значение, которое прибавляется алгебраически к результату измерения, полученному с помощью средства измерений, для исключения систематических погрешностей. По анаку поправка противоположна погрешности. Поправки обычно строятся в виде таблиц или графиков поправки к результатам измерений.

При поверке средств измерений, предназначенных для применения без поправок, определяют, не выходят ли их погрешности за установленные пределы, не превышают ли они допускаемые значения. При поверке средств измерений, применяемых с учетом поправок к их показаниям, задача уложится, так как необходимо определять значения погрешностей. Соответственно повышаются требования к образцовым средствам измерений. В зависимости от целей поверки меняются требования к величине погрешности образцового средства измерения. В случае поверки средств измерений, для которых не требуется указание поправок, минимально допустимым отношением погрешностей считают 1:3. Отношения 1:2 и менее могут оказаться приемле-

мыми при условии, если случайные погрешности поверяемых и образцовых средств измерений незначительны, а их точность определяется в основном только систематическими погрешностями, поддающимися учету. В технической литературе и нормативной документации для отдельных типов и видов измерительных устройств устанавливаются отношения 1:3; 1:4 и 1:5. При определении поправок к показаниям средств измерений критерием для определения необходимой точности образцового средства измерений является точность, с которой требуется определить поправки. Чтобы удостовериться в том, что погрешности образцового средства измерений малы настолько, насколько это необходимо для поверки рабочего средства измерений, образцовое средство измерений, в свою очередь, подвергается поверке с помощью ещё более точного образцового средства измерений и так далее до эталона.

По мере продвижения вверх по поверочной схеме от рабочих мер и измерительных приборов к эталонам неизбежно сокращается число мер, различных по номинальному значению. На верхних ступенях поверочной схемы часто имеется мера (эталон) только одного значения. Повышение точности измерительных приборов неизбежно связано с сокращением диапазона измерений по их шкале. Поэтому на некоторой ступени поверочной схемы иногда разность номинальных значений поверяемой и ближайшей к ней по разряду исходной меры превышает диапазон измерения измерительного прибора, соответствующий данному разряду точности. В этих случаях поверка осуществляется способом калибровки.

Калибровка – способ поверки измерительных средств, заключающийся в сравнении различных мер, их сочетаний или отметок шкал многозначных мер в различных комбинациях и вычислении по результатам этих сравнений значений отдельных мер или отметок шкалы (или поправок к ним) исходя из известного значения одной из них.

Во многих случаях изготовление прибора с заданными пределами допускаемых погрешностей технологически неосуществимо. Выйти из положения можно двумя путями: во-первых, расширить допуски на параметры некоторых элементов приборов и ввести в его конструкцию дополнительные регулируемые узлы, способные компенсировать влияние отклонений этих параметров от их нормальных значений, во-вторых, осуществить специальную градуировку измерительного прибора.

Под градуировкой средств измерения понимается совокупность

операций, имеющих целью уменьшить основную погрешность до значений, соответствующих пределам ее допускаемых значений, путем компенсации систематической составляющей погрешности средств измерений, т.е. погрешности схемн, мультипликативной и аддитивной погрешностей. В общем случае в конструкции измерительного прибора должны быть предусмотрены два регулировочных узла: регулировка нуля и регулировка чувствительности. Регулировкой нуля уменьшают влияние аддитивной погрешности, постоянной для каждой точки шкалы, а регулировкой чувствительности уменьшают мультипликативные погрешности, меняющиеся линейно с изменением измеряемой величины. Градуировкой называется процесс нанесения отметок на шкалы средств измерения, а также определение значений измеряемой величины, соответствующих уже нанесенным отметкам, для составления градуировочных кривых или таблиц.

В лабораторной практике чаще всего приходится иметь дело с градуировкой условной шкалы. Условной называется шкала, снабженная некоторыми условными равномерно нанесенными делениями, например, через миллиметр или угловой градус. Градуировка шкалы состоит в определении при помощи образцовых мер или измерительных приборов значений измеряемой величины, соответствующих некоторым отметкам, нанесенным на ней. В результате определяют зависимость числа делений шкалы, пройденных указателем от значений измеряемой величины. Эту зависимость представляют в виде таблицы или графика.

8. Границы суммарной погрешности результата измерения. Запись результатов измерений. Понятия о планировании эксперимента

а) Доверительные границы неисклученной систематической погрешности результата измерения.

При точных измерениях стремятся исключить систематические погрешности результатов измерений. Однако полностью исключить систематические погрешности не представляется возможным: после внесения поправок остаются неисклученные остатки систематических погрешностей, которые называют неисклученными систематическими погрешностями. Для неисклученных систематических погрешностей обычно находят граничные значения. В качестве границ составляющих неисклученной систематической погрешности принимают, например, пределы допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений, если случайные составляющие погрешности пренебрежимо малы.

Неисключенная систематическая погрешность результата измерения складывается из составляющих, в качестве которых могут быть неисключенные систематические погрешности метода, средств измерений, вызываемые другими источниками.

При суммировании составляющих неисключенной систематической погрешности результата измерения неисключенные систематические погрешности средств измерений каждого типа и погрешности поправок рассматривают как случайные величины. При отсутствии данных о виде распределения случайных величин их распределения принимают за равномерные. Границы неисключенной систематической погрешности результата измерения вычисляют путем построения композиции неисключенных систематических погрешностей средств измерений, метода и погрешностей, вызванных другими источниками. При равномерном распределении неисключенных систематических погрешностей эти границы вычисляют по формуле

$$\theta = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2},$$

где θ_i - граница i -й неисключенной систематической погрешности;
 k - коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью. Доверительную вероятность для вычисления границ неисключенной систематической погрешности принимают той же, что при вычислении доверительных границ случайной погрешности результата измерения.

При доверительной вероятности $\alpha = 0,95$ коэффициент принимает равным 1,1. ($k = 1,1$).

б) Границы погрешности результата измерения.

Характеристиками точности результата измерения являются систематические и случайные погрешности. Общая погрешность результата измерения включает систематическую и случайную составляющие. Однако в ряде случаев эти составляющие существенно различны и одной из них можно пренебречь. В случае, если $\theta / S_x < 0,8$, то неисключенными систематическими погрешностями по сравнению со случайными пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата $\Delta = \epsilon$. Если $\theta / S_x > 0,8$, то случайной погрешностью по сравнению с систематическими пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата $\Delta = \theta$.

Если не выполняется ни одно из неравенств, границу погрешности результата измерения находят путем построения композиции распределения случайных и неисключенных систематических погрешностей, рас-

считаемых как случайные величины. Границы погрешности результата измерения Δ (без учета знака) вычисляются по формуле

$$\Delta = K S_{\Sigma},$$

где K - коэффициент, зависящий от соотношения случайной и неисключенной систематической погрешностей;

S_{Σ} - оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения.

Оценку суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения вычисляют по формуле

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{3} + S_{\bar{x}}^2}.$$

Коэффициент K вычисляют по эмпирической формуле

$$K = \frac{\varepsilon + \theta}{S_{\bar{x}} + \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2 / 3}}$$

в) Форма записи результатов измерений.

Результат измерений должен содержать значение измеряемой величины и характеристики точности этого значения.

При симметричной доверительной погрешности результаты измерений представляют в форме

$$\bar{X} \pm \Delta, \alpha = \dots,$$

где $\bar{X}$ - результат измерений (среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений);

Δ - граница общей погрешности результата измерений;

α - доверительная вероятность.

Числовое значение результата измерения должно оканчиваться цифрой того же разряда, что и значение погрешности Δ . При отсутствии данных о виде функций распределений составляющих погрешности результата и необходимости дальнейшей обработки результатов или анализа погрешностей, результаты измерений представляют в форме

$$\bar{X}, S_{\bar{x}}, n, \theta.$$

где $S_{\bar{x}}$ - оценка среднего квадратического отклонения результата измерения;

n - число измерений;

θ - граница неисключаемой систематической погрешности.

В случае вычисления θ путем построения композиции неисключенных систематических погрешностей следует дополнительно указывать доверительную вероятность α .

г) Планирование эксперимента. Максимальное число наблюдений

Планирование эксперимента предполагает выбор рациональной последо-

вательности проведения измерений и их обработки с целью получения максимума информации при минимальной затрате времени и средств. В лабораторной практике одним из основных вопросов планирования эксперимента является выбор числа измерений.

Для уменьшения влияния случайной погрешности на результат измерений следует идти по пути увеличения числа наблюдений, так как

$$S_{\bar{X}} = \frac{S_X}{\sqrt{n}}$$

Однако увеличивать число наблюдений целесообразно до тех пор, пока доверительная погрешность измерения не будет определяться только систематической погрешностью. Пусть систематическая погрешность измерений, определяемая классом точности прибора или другими обстоятельствами будет θ .

Используя критерий

$$\frac{\theta}{S_{\bar{X}}} > 8,$$

получим выражение для максимального числа наблюдений

$$n_{\max} = 64 \left(\frac{S_X}{\theta} \right)^2.$$

Как следует из формулы, и показывает опыт, увеличением числа измерений можно устранить влияние случайной погрешности на результат только в том случае, если среднеквадратическая погрешность не более, чем в несколько раз превышает систематическую погрешность. Реально это возможно, если

$$S_X \leq 5\theta.$$

При больших значениях S_X для существенного уменьшения роли случайной погрешности по сравнению с систематической требуется сотни и тысячи наблюдений. В этом случае общая погрешность измерения практически целиком определяется случайной и можно говорить просто об уменьшении влияния случайной погрешности на результат измерений с увеличением числа наблюдений. Значительно сложнее планировать эксперимент, сводящийся к исследованию зависимости исследуемой величины X от двух и более факторов, т.е. переменных величин, принимающих в некоторый момент некоторое определенное значение и соответствующие одному из возможных способов воздействия на объект исследования. Для описания объекта исследования удобно пользоваться кибернетической моделью "черного ящика" (см. рис. 5), где объекту исследования соответствует прямоугольник.

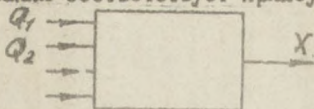


Рис. 5. Схема "черного ящика"

Стрелки, входящие в объект, обозначают входы-факторы, воздействующие на объект, стрелкой, выходящей из объекта, обозначается измеряемая величина (функция отклика).

Факторы характеризуются уровнями:

$$Q_1^{(1)}, Q_1^{(2)}, \dots, Q_1^{(n)}, Q_2^{(1)}, Q_2^{(2)}, \dots, Q_2^{(n)}$$

Эксперимент, в котором реализуются все возможные комбинации уровней всех факторов, называется полным факторным экспериментом. Если обозначить число уровней ℓ , а число факторов через k , то число опытов в полном факторном эксперименте будет равно ℓ^k .

При большом числе факторов и уровней полный факторный эксперимент оказывается подчас чрезмерно трудоемким. Возникает необходимость сокращения (редуцирования) эксперимента, планирования эксперимента.

Условия проведения всех опытов в эксперименте в соответствии с выбранным планом сводятся в таблицу, которая называется матрицей планирования эксперимента. Эксперимент, в котором, в отличие от полного, часть опытов отсечена, называется дробным факторным экспериментом, а его матрица планирования - дробной репликой. В тех случаях, когда имеется много факторов и нужно приближенно оценить влияние отдельных факторов, выделить наиболее эффективные сочетания факторов, чтобы определить, с чего начинать детальное исследование, план эксперимента строится с применением латинского квадрата и греко-латинского квадрата.

Латинским квадратом называется квадратная таблица из n^2 элементов (чисел или букв), в которой каждый из них встречается только один раз в каждой строчке и каждом столбце, например квадрат 4×4 (рис.6).

A	B	C	D
C	D	A	B
B	A	D	C
D	C	B	A

Рис.6. Латинский квадрат 4×4

Пусть, например, на объект действует три фактора. Выберем по четыре уровня в каждом факторе. Обозначим уровни первого фактора (фактора 1) цифрами 1, 2, 3, 4; уровни второго фактора (П)-малыми латинскими буквами a, b, c, d ; уровни третьего фактора-большими латинскими буквами A, B, C, D .

План эксперимента может быть построен по схеме латинского квадрата (рис.7).

		$\overline{II} \rightarrow a \quad b \quad c \quad d$			
$I \downarrow$	1	A	B	C	D
	2	C	D	A	B
	3	B	A	D	C
	4	D	C	B	A

Рис.7. Схема планирования эксперимента по типу латинского квадрата

Все опыты разобьем на 4 серии в соответствии с уровнями фактора 1 (1, 2, 3, 4).

Первая серия.

Задаем уровень первого фактора (1). Опыт № 1.1. Полагаем уровень фактора (II) равным (a), уровень фактора III - только (A).

Опыт № 1.2, II - (b), III - (B) и т.д.

Вторая серия.

Задаем уровень фактора 1 - (2).

Опыт 2.1. Полагаем уровень фактора (II) - (a), III - (C).

Опыт 2.2 (II) - (b), (X1) - (D) и т.д.

При четырех факторах и четырех уровнях, используя те же обозначения для первых трех уровней и греческие буквы для обозначения уровней четвертого фактора $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; план эксперимента можно записать, используя греко-латинский квадрат 4x4 (рис.8).

A γ	B δ	C α	D β
C δ	D γ	A β	B α
B β	A α	D δ	C γ
D α	C β	B γ	A δ

Рис.8. Схема планирования эксперимента по типу греко-латинского квадрата

Греко-латинский квадрат получается в результате наложения квадрата из греческих букв на квадрат из латинских букв. При этом соблюдается условие: каждая латинская буква встречается по одному разу с каждой греческой буквой и наоборот.

Эти два плана требуют по 16 опытов вместо $3^4 = 81$, в первом случае и $4^4 = 256$ - во втором случае. При пяти факторах на четырех уровнях планирование можно провести по схеме латинского квадрата 4×4 третьего порядка. При увеличении числа уровней увеличивается размер квадрата. Можно пользоваться квадратами 5×5 , 7×7 , 8×8 и т.д. Недостаток планирования с использованием латинских и греко-латинских квадратов, как и всякого планирования со смешиванием, заключается в том, что некоторые взаимодействия здесь не учитываются.

9. Обработка результатов косвенных, совокупных и совместных измерений

а) Оценка результата и погрешности косвенных измерений.

Косвенным называют измерения, результат которых определяют на основании прямых измерений величин, связанных с измеряемой величиной известной зависимостью. В общем случае при косвенных измерениях искомая величина Y представляет явную функцию ряда непосредственно измеряемых величин $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ т.е.

$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$. В качестве результата измерений принимается выражение

$$Y_0 = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m),$$

где

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \quad \bar{X}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}, \dots$$

средние арифметические результатов соответствующих прямых измерений. Если $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ независимы, среднеквадратическое отклонение Y от $M[Y]$

$$\sigma_Y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)_{X_1=\bar{X}_1}^2 \cdot S_{\bar{X}_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)_{X_2=\bar{X}_2}^2 \cdot S_{\bar{X}_2}^2 + \dots}$$

Выражения вида $\frac{\partial f}{\partial X}$ называются коэффициентами влияния, а $\left(\frac{\partial f}{\partial X} \cdot S\right)$ - среднеквадратическими отклонениями частных составляющих погрешностей косвенного измерения.

Коэффициенты влияния определяют при значениях X_j , равных их математическим ожиданиям. При этом вычисления функций $(\frac{\partial f}{\partial x})$ должны производиться с погрешностями, на порядок меньшими погрешностей непосредственных измерений аргументов. При наличии систематических погрешностей $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ используется следующая формула для оценки среднего квадратического отклонения

$$S_Y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2 \left(S_{X_1}^2 + \frac{\theta_1^2}{3}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2 \left(S_{X_2}^2 + \frac{\theta_2^2}{3}\right) + \dots}$$

где проведено объединение случайной и систематической погрешностей путем эквивалентной замены систематической погрешности случайной величиной, распределенной по равномерному закону в границах систематической погрешности. Формулы, используемые для оценки погрешностей при косвенных измерениях, могут быть использованы также при анализе погрешностей многоблочной радиоизмерительной аппаратуры.

Заметим, что формула для подсчета суммарной систематической погрешности

$$|\theta| = \left| \frac{\partial f}{\partial X_1} \theta_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial X_2} \theta_2 \right| + \dots$$

($|\theta|$ называют предельной систематической погрешностью) дает, как правило, завышенную оценку границ систематических погрешностей многоблочной аппаратуры.

Результат косвенных измерений Y представляется в виде

$$Y = Y_0 \pm \Delta Y, \alpha = \dots,$$

где $\Delta Y = t_{\alpha} \cdot S_Y$;

t_{α} - коэффициент, определяющий доверительный интервал при заданной доверительной вероятности.

б) Совокупные и совместные измерения.

Эти виды измерений характеризуются тем, что значения исконых величин $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ рассчитывают по системе уравнений, связывающих их с некоторыми другими величинами, измеряемыми прямыми или косвенными методами: $X_1, X_2, \dots, X_n$. При этом измерения проводят при нескольких комбинациях значений этих величин. Каждая комбинация позволяет получить одно уравнение вида

$$F_i(Y_1, Y_2, \dots, Y_m; X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_n^{(i)}) = 0,$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ - номер комбинации;

Y_j - значение искомой величины;

$X_k^{(i)}$ - значение величины X_k , полученное в i -м опыте, измеряемых прямыми или косвенными методами.

F_i - символ функциональной зависимости для i -й комбинации (в i -м опыте).

Если Y_j являются значениями однородных физических величин (вес отдельных тел, вводимых в разных комбинациях), то измерения совокупны, если же Y_j - это значения различных физических величин, то мы имеем дело с совместными измерениями. После подстановки в исходную систему уравнений результатов прямых (или косвенных) измерений и проведения необходимых преобразований, получаем ряд уравнений, содержащих лишь искомые величины и числовые коэффициенты.

$$f_i(Y_1, Y_2, \dots, Y_j, \dots, Y_m) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Эти уравнения называются условными. Для того чтобы рассчитать значения искомых величин, достаточно иметь m -уравнений, т.е. ровно столько, сколько имеется неизвестных. Тогда результаты измерений и доверительные границы их погрешностей можно найти методами обработки результатов косвенных измерений. Однако обыкновенно для уменьшения погрешностей результатов делается значительно большее число измерений, чем необходимо для определения неизвестных ($n > m$).

Вследствие ограниченной точности определения величины X_2 условные уравнения одновременно не обращаются в тождества ни при каких значениях искомых величин. И поскольку определить истинные значения искомых величин мы не можем, задача сводится к нахождению их оценок, представляющих собой наилучшее приближение к истинным значениям.

Предположим, что $\hat{Y}_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) - наилучшие приближения к неизвестным Y_j . Если значения этих оценок подставить в условные уравнения, то их левые части будут отличаться от нуля. Чтобы получились тождества, придется к каждому уравнению добавить некоторую величину v_i , называемую остаточной погрешностью условного уравнения, т.е.

$$f_i(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_j, \dots, \hat{Y}_m) + v_i = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Если в систему условных уравнений подставить истинные значения искомых величин, то остаточные погрешности превратятся в случайные погрешности условных уравнений. Одним из наиболее общих способов отыскания оценок истинных значений измеряемых величин является метод наименьших квадратов.

Согласно этому методу оценки $\hat{Y}_j$ выбираются так, чтобы миними-

эировать сумму квадратов остаточных погрешностей условных уравнений.

Сумма квадратов остаточных погрешностей составляет

$$S^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_j, \dots, \hat{Y}_m)$$

и достигает минимума при системе значений $\hat{Y}_j$, обращающих в нуль все частные производные от S^2 по искомым величинам

$$\frac{\partial}{\partial \hat{Y}_j} \sum_{i=1}^n v_i^2 = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Выражая остаточные погрешности через функции, стоящие в левой части условных уравнений, получим систему из m уравнений с n неизвестными

$$\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial f_i}{\partial \hat{Y}_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

которая может быть решена относительно оценок $\hat{Y}_j$ искомым величин. Рассмотрим частный случай, когда условные уравнения линейны или приведены к линейному виду, а результаты измерений величины равнобразеяны.

Система линейных условных уравнений может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} a_{11} \hat{Y}_1 + a_{12} \hat{Y}_2 + \dots + a_{1m} \hat{Y}_m &= b_1; \\ a_{21} \hat{Y}_1 + a_{22} \hat{Y}_2 + \dots + a_{2m} \hat{Y}_m &= b_2; \\ \vdots &\vdots \\ a_{n1} \hat{Y}_1 + a_{n2} \hat{Y}_2 + \dots + a_{nm} \hat{Y}_m &= b_n, \end{aligned}$$

где a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$)

и b_i - коэффициенты, определяемые из системы условных уравнений после подстановки значений величин, измеренных прямыми или косвенными методами. Знак равенства в условных уравнениях при $n > m$ будет иметь место только в том случае, если к левым частям прибавить значения остаточных погрешностей. Согласно способу наименьших квадратов оценки $\hat{Y}_j$ искомым величин Y_j нужно вычислить так, чтобы минимизировать сумму квадратов остаточных погрешностей

$$v_i = b_i - a_{i1} \hat{Y}_1 - a_{i2} \hat{Y}_2 - \dots - a_{im} \hat{Y}_m.$$

Сумма квадратов остаточных погрешностей будет равна

$$S^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (b_i - a_{i1} \hat{Y}_1 - a_{i2} \hat{Y}_2 - \dots - a_{im} \hat{Y}_m)^2.$$

Искомые оценки неизвестных, обращающие в минимум сумму квадратов остаточных погрешностей, получаются в результате решения линейных уравнений с m неизвестными

$$\frac{\partial S^2}{\partial \hat{y}_1} = -2 \sum_{i=1}^m a_{i1} (b_i - a_{i1} \hat{y}_1 - a_{i2} \hat{y}_2 - \dots - a_{im} \hat{y}_m) = 0;$$

$$\frac{\partial S^2}{\partial \hat{y}_2} = -2 \sum_{i=1}^m a_{i2} (b_i - a_{i1} \hat{y}_1 - a_{i2} \hat{y}_2 - \dots - a_{im} \hat{y}_m) = 0;$$

$$\frac{\partial S^2}{\partial \hat{y}_m} = -2 \sum_{i=1}^m a_{im} (b_i - a_{i1} \hat{y}_1 - a_{i2} \hat{y}_2 - \dots - a_{im} \hat{y}_m) = 0.$$

Полученная система называется системой нормальных уравнений.

Вводя обозначения Гаусса для сумм

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = [a_{ij}^2]; \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} = [a_{ij} a_{ik}];$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} b_i = [a_{ij} b_i],$$

систему нормальных уравнений можно записать в более удобном для решения виде.

$$[a_{i1}^2] \hat{y}_1 + [a_{i1} a_{i2}] \hat{y}_2 + \dots + [a_{i1} a_{im}] \hat{y}_m = [a_{i1} b_i];$$

$$[a_{i2} a_{i1}] \hat{y}_1 + [a_{i2}^2] \hat{y}_2 + \dots + [a_{i2} a_{im}] \hat{y}_m = [a_{i2} b_i];$$

$$[a_{im} a_{i1}] \hat{y}_1 + [a_{im} a_{i2}] \hat{y}_2 + \dots + [a_{im}^2] \hat{y}_m = [a_{im} b_i].$$

Решения системы нормальных уравнений является, очевидно, линейными комбинациями величин:

$$\hat{y}_1 = \alpha_{11} b_1 + \alpha_{12} b_2 + \dots + \alpha_{1n} b_n = [\alpha_{1i} b_i];$$

$$\hat{y}_2 = \alpha_{21} b_1 + \alpha_{22} b_2 + \dots + \alpha_{2n} b_n = [\alpha_{2i} b_i];$$

$$\hat{y}_m = \alpha_{m1} b_1 + \alpha_{m2} b_2 + \dots + \alpha_{mn} b_n = [\alpha_{mi} b_i].$$

Для проверки правильности определения оценок $\hat{Y}_j$ исконых величин из системы нормальных уравнений могут быть использованы равенства, выражающие свойства остаточных погрешностей условных уравнений:

$$\sum_{i=1}^n a_{i1} v_i = \sum_{i=1}^n a_{i2} v_i = \dots = \sum_{i=1}^n a_{im} v_i = 0.$$

Для оценки точности полученной системы уравнений предположим, что точность определения коэффициентов a_{ji} системы уравнений значительно выше точности определения коэффициентов b_j , поэтому погрешности оценок исконых величин определяются только дисперсиями результатов измерения последних.

Для равнорассеянных наблюдений

$$S_{Y_j}^2 = S_e \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ji}^2} \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

где
$$S_e^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n v_i^2.$$

Остаточные погрешности

$$v_i = b_j - a_{i1} \hat{Y}_1 - a_{i2} \hat{Y}_2 - \dots - a_{im} \hat{Y}_m.$$

10. Графическое представление результатов измерений.

Нахождение интерполяционных кривых

Очень часто измерения имеют целью нахождение функциональной зависимости, которая наилучшим образом описывает закон измерения интересующей нас величины. Пусть мы измеряем некоторую величину Y , зависящую только от величины X . Для каждого значения X_i проводим ряд измерений и получаем величину Y_i ; для которой установлен доверительный интервал ΔY_i . Если величины X_i не могут быть заданы точно, а также измеряются с некоторой погрешностью, то и для них известны средние значения $\bar{X}_i$ и соответственно доверительные интервалы ΔX_i . Величины $\bar{X}_i$ и $\bar{Y}_i$ могут рассматриваться как координаты точек на плоскости. От этих точек откладывают отрезки, равные величине доверительных интервалов, соответствующих определенному значению доверительной вероятности, например $\alpha = 0,95$ (значение доверительной вероятности следует при этом указать) (рис. 9).

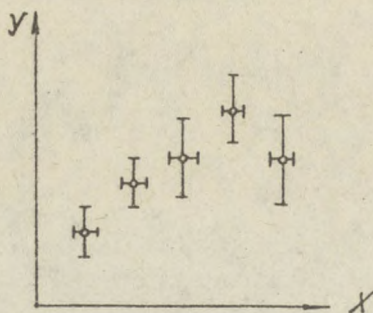


Рис.9. Результаты измерений, представленные в виде диаграмм

Диаграмма позволяет установить с некоторой степенью вероятности ту функциональную зависимость, которой связаны X и Y . В качестве функции можно выбрать ломаную линию, но она не дает ничего нового по сравнению с диаграммой. На графике около точек можно вычерчивать прямоугольники, стороны которых равны удвоенному значению абсолютной погрешности (доверительному интервалу при заданной доверительной вероятности) (рис.10).

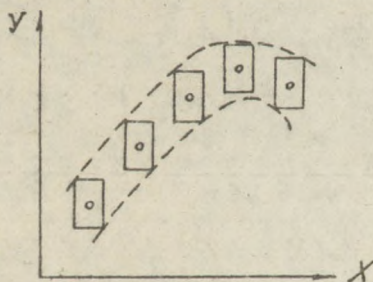


Рис.10. Построение полосы, в которой проходит экспериментальная кривая

Можно утверждать, что точки, которые мы могли бы получить при измерениях, свободных от погрешностей, должны находиться где-то внутри этих прямоугольников. Если мы проведем две предельные кривые, то кривая, точно отвечающая виду функции $f(X)$, может и не проходить через экспериментальные точки, однако она не должна выходить за пределы узкой полосы, ограниченной кривыми. Практика показывает, что на графиках наблюдается некоторый разброс экспериментальных точек независимо от того, получены эти точки в резуль-

тате одного измерения или многих (в последнем случае разброс в основном может быть обусловлен систематическими погрешностями). И если бы мы соединили точки непрерывной линией, то получились бы кривые с резкими перегибами и искривлениями. Однако процессы, которые имеют заведомо плавное течение, принято изображать графически также плавными кривыми. Основным путем аналитического решения задачи подбора плавной кривой, хорошо описывающей экспериментальные результаты является метод наименьших квадратов. В том случае, когда искомая зависимость есть некоторая прямая

$$Y = aX + b,$$

задача сводится к тому, чтобы выбрать коэффициенты a и b наилучшим образом. Пусть положение искомой прямой известно (рис.11).

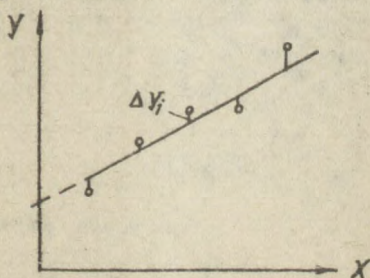


Рис.11. Прямая, построенная по методу наименьших квадратов

Проводим ординаты точек Y_i до их пересечения с искомой прямой. Значение этих ординат будет $aX_i + b$. Расстояние по ординате от точек X_i, Y_i до прямой равно

$$\Delta Y_i = aX_i + b - Y_i.$$

Положим, что прямая будет наилучшей, если сумма квадратов всех расстояний $\sum_{i=1}^n \Delta Y_i^2$ имеет наименьшее значение. Минимум этой суммы ищется по правилам дифференциального исчисления.

Коэффициенты a и b определяются из соотношений:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2};$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2}.$$

где n - число наблюдений.

Разумеется не всякая зависимость описывается уравнением прямой линии. Однако в ряде случаев можно путем несложных преобразований привести к линейной более сложную зависимость.

Следует подчеркнуть, что ни способ наименьших квадратов, ни другие методы (например, метод Чебышева) не могут дать ответа на вопрос о том, какого вида функция лучше всего аппроксимирует данные экспериментальные точки. Вид интерполирующей функции должен быть выбран на основании каких-то физических соображений. Метод наименьших квадратов позволяет лишь выбрать, какая из этих кривых является лучшей, т.е. определить параметры кривой, наилучшим образом описывающую экспериментально снятую зависимость.

Один из приемов "сглаживания" экспериментальных данных сводится к следующему. Пусть имеется серия экспериментальных данных

$$Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{n-3}, Y_{n-2}, Y_{n-1}, Y_n,$$

соответствующих равноотстоящим значениям

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n-3}, X_{n-2}, X_{n-1}, X_n$$

Добавим к экспериментальным данным по два числа слева и справа, определенных по формулам:

$$Y_0 = \frac{4Y_1 + Y_2 - 2Y_3}{3}, \quad Y_{-1} = \frac{4Y_0 + Y_1 - 2Y_2}{3};$$

$$Y_{n+1} = \frac{4Y_n + Y_{n-1} - 2Y_{n-2}}{3}, \quad Y_{n+2} = \frac{4Y_{n+1} + Y_n - 2Y_{n-1}}{3}.$$

Ординаты "сглаженной" кривой получаются как

$$\tilde{Y}_i = \frac{Y_{i-2} + Y_{i-1} + 4Y_i + 2Y_{i+1} + Y_{i+2}}{10}.$$

Аналогичным образом сглаживаются серии кривых, полученные для равноотстоящих значений X и параметров. Графические изображения результатов измерений не только дают наглядные представления о взаимной зависимости исследуемых величин, но и одновременно дают возможность производить ряд измерительных и вычислительных операций:

а) определять значения X и Y при любых значениях; для которых составлен график;

б) по графику можно определять максимальное и минимальное значения величин, а такие значения другой величины, которой соответствует максимум или минимум;

в) пользуясь чисто графическими приемами, можно производить дифференцирование и интегрирование.

Графики, которые служат измерительным целям, необходимо вычерчивать с большой точностью и строить в достаточно большом масштабе.

При графическом изображении результатов измерений необходимо иметь в виду следующее.

1) Построение графиков облегчает применение различных видов координатных бумаг: миллиметровой, логарифмической, полярной. При этом следует пользоваться только шкалой бумаги, но не линейкой и циркулем, т.к. деления бумаги и линейки могут не совпадать. Погрешность при отсчете по графикам, вычерченным на миллиметровой бумаге составляет $\pm 0,25$ мм и даже больше.

2) При выборе масштаба необходимо иметь в виду определенные условия:

а) Если необходимо, чтобы точность отсчетов по графику отвечала точности измерений, то масштаб графика нужно выбирать таким, чтобы наименьшее расстояние, которое можно отсчитывать на графике, соответствовало величине абсолютной погрешности измерений. Так, например, если погрешность отсчетов на графике достигает $\pm 0,25$ мм, то абсолютная погрешность измерений на графике должна равняться этой величине.

Если приходится отступать от правила в сторону уменьшения масштаба, тогда отсчеты по графику будут менее точны, чем измерения, на основе которых он составлен.

б) Строить график в величине большом масштабе не имеет смысла.

в) Относительную величину масштаба на той и другой оси следует выбирать так, чтобы кривые не были слишком плоскими, растянутыми вдоль одной из осей, так как при этом теряется наглядность графика.

3) При построении графика обычно нет необходимости брать особенно большое число точек. Если на кривой намечается возможность появления максимума, минимума или точки перегиба, то следует на этих участках увеличивать число точек.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- Маликов С.Ф., Тюрин Н.И. Введение в метрологию. Под ред. К.П.Широкова. Изд-во Комитета стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР, 1966.
- Тюрин Н.И. Введение в метрологию. М., Изд-во стандартов, 1976.
- Бурдун Г.Д., Марков Б.Н. Основы метрологии. М., Изд-во стандартов, 1975.
- Долинский Е.Ф. Обработка результатов измерений. М., Изд-во стандартов, 1973.
- Новицкий П.В. Основы информационной теории измерительных устройств. Л., Энергия,
- Рабинович С.Г. Погрешности измерений. Л., Энергия, 1978.
- Кудряшов К.Ф., Рабинович С.Г., Резник К.А. Рекомендации по методам обработки результатов наблюдений при прямых измерениях (Методы обработки результатов наблюдений при измерениях. - Труды Метрологических институтов СССР. М., 1972, вып. 134(194).
- Кудряшов К.Ф., Рабинович С.Г. Методы обработки результатов наблюдений при косвенных измерениях. - Труды Метрологических институтов СССР. М., 1975, вып. 173(232), с.3-41.
- Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента. М., Металлургия, 1969.
- Маркова Е.В. Латинские квадраты в планировании эксперимента, Заводская лаборатория, 34, 1968, № 1, с.60-65. Латинские прямоугольники и кубы в планировании эксперимента, Заводская лаборатория, 34, 1968, № 7, с.832-837.

СОДЕРЖАНИЕ

I. Измерения и средства измерений	3
2. Виды и методы измерений	10
3. Погрешности измерений	14
4. Способы обнаружения и исключения систематических погрешностей измерений	19
5. Обработка результатов наблюдений при измерениях с многократными наблюдениями (прямые измерения)	23
6. Совместная обработка нескольких групп наблюдений. Обнаружение систематических погрешностей на фоне случайных	32
7. Погрешности средств измерений. Классы точности средств измерений	40
8. Границы суммарной погрешности результата измерения. Запись результатов измерений. Понятия о планировании эксперимента	46
9. Обработка результатов косвенных, совокупных, совместных измерений	52
10. Графическое представление результатов измерений. Нахождение интерполяционных кривых	57
Литература	62

Арнольд Семенович Завьялов
ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Редактор Л. И. Дыкалова

ИБ 634 КЗ 06044 Подписано к печати 11.02.1980 г.
Формат 60x84¹/16, бумага для множительных аппаратов,
П.Л.4; уч.-изд.л. 3,33; усл.п.л. 3,72
Заказ 372 Тираж 400 Цена 50 коп.

Издательство ТГУ. 634029, Томск, ул. Никитина, 17
Ротапринт ТГУ. Томск, ул. Никитина, 17

1-405239

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
<http://vital.lib.tsu.ru>

Томский госуниверситет 1878



Научная библиотека 00642332