

учебное пособие

Н. В. КУДРЯВЦЕВА

**Лекции
по классической
механике**

ЧАСТЬ I



**издательство
томского
университета**

'91

Томский государственный университет имени В.В.Куйбышева

Н.В.Кудрявцева

**ЛЕКЦИИ
ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

Часть I

Учебное пособие

Под редакцией доктора физико-математических наук

В.Г.Багрова

**Издательство Томского университета
Томск - 1992**

УДК 531.01 (07)

Кудрявцева Н.В. Лекции по классической механике. Ч. I. - Томск;
Изд-во Том. ун-та, 1992. 163 с. ЭОС экз.1603020000

Пособие представляет собой литературную обработку курса классической механики, который читался автором на физфаке ТГУ в 1970 - 1985 гг. В нем излагается теоретический материал, необходимый для изучения курса классической механики в рамках традиционных программ физических факультетов университетов.

Рассматриваются элементы теории познания, формируется физическая картина мира, объясняется взаимосвязь классической, релятивистской и квантовой механики. Выявляется динамика развития физических представлений.

Наглядность и детальность изложения делают пособие доступным для самостоятельного изучения всеми студентами, независимо от уровня их способностей. В конце части II пособия приводится "Каркас-информация", а также вопросы, опосредствующие хорошему усвоению и закреплению материала. Пособие снабжено краткими методическими замечаниями, облегчающими его использование преподавателями.

Для студентов, аспирантов и преподавателей физических факультетов университетов и пединституты.

Рецензенты: проф. А.М.Кольчужкин,
доцент В.М. Кузнецов

К 1603020000
177(012)-92

44 - 91

© Н.В.Кудрявцева, 1992

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга - обработка лекций, которые я читала на физическом факультете Томского государственного университета в 1970 - 1985 годах.

Сокращение аудиторных часов, перенос акцента на САМОбразование, лежащие в основе методической политики последнего времени лишают студента прелести непосредственного контакта с лектором. Живая речь лекционного общения, как правило, превращается на бумаге в "ученый канцелярит", зубодробительно оухой и безнадежно скучный.

Я попыталась, насколько хватило способностей и энтузиазма, сохранить в изложении аромат атмосферы лекционного собеседования. Писать, как говорить, - занятие не из легких. И конечно мне не удалось полностью изгнать книжные обороты и фразы. Максимальные старания я приложила, особенно, при обсуждении самых оущественных проблемных вопросов, там, где особенно важна активность восприятия.

Большинство учебников и учебных пособий грезат также тенденцией экономить на математических выкладках. Заимствованное из научных знаний дурная традиция использовать обороты вроде: "можно показать, что ...", "исходя из и принимая во внимание. иеем", когда "за боотом" оказываются целые отграници математических расчетов, оставляет студентов продирающихся сквозь математические "джунгли" о "тыпором и мачете". Всё внимание студента концентрируется на математике. Но ведь в физике, даже теоретической, математика - только инструмент познания. Главное, основное - идеи, представления, смысл физического материала, который зашматывается под мельничные жерно-

ва математики. Но на осмысливание физики у студента уже не остается ни времени, ни вдохновения. Поэтому я старалась проводить все выкладки так, как это делается на лекции, со всеми разъяснениями и деталями. Некоторые сложные и длинные расчеты, дополняющие курс, вынесены в приложения.

Этой же цели — сокращения затрат непроизводительного труда — служит повторение формул в тексте вместо ссылок на номера, вынуждающих лихорадочно перелистывать десятки страниц. Пронумерованы поэтому только немногие формулы, "географические" близкие (в пределах одной — трех страниц) к месту их использования.

"Несъедобность" учебников обусловлена ещё тем, что в них отсутствуют те образные иллюстрации, которые использует каждый хороший лектор. Притчи, физические "анекдоты" и побасенки считаются "неприличными" в тексте книги. Но как они помогают воображению, воображению и пониманию в самых сложных ситуациях! Я сохранила все свои лекционные сказки и при сказки, рискуя навлечь на себя праведный гнев равнодушных пуритан педагогики.

Интонации живой речи не поддаются изображению на бумаге. Этот недостаток частично компенсируют "дорожные знаки", поставленные в тексте, согласно остроумной идее Бурбаки.

В пособии используются следующие символы:

- Знак  — Внимание! Помни и не забывай!
Особо трудный или особо важный момент!
- Знак  — Вопрос к аудитории или к самому себе.
Места, отмеченные этим знаком, желательно излагать в форме вопросов к студентам.
- Знак  — Сложная мысль, ототупление в сторону.
- Знак  — Лирическое ототупление. Пауза.
Здесь надо перевести дух, поговорить о погоде или рассказать анекдот.

Эти знаки — символы отображают также, насколько возможно, методическую канву лекции.

В заключение приводится перечень информации, обязательной для запоминания, и вопросы, ответы на которые демонстрируют уровень усвоения материала. Этот список вручался мною студентам перед экзаменом вместе с текстом экзаменационных билетов. Знание информационного минимума на экзамене считалось

обязательным. Как показала многолетняя практика, эта "формалистика" существенно помогала студентам и готовиться к экзамену, и отвечать настырному педагогу.

Классическая механика - наука давняя, почтенная. Развивали её, шлифовали и отделявали многие корифеи. Соответственно учебников и руководств - изобилие. Однако до появления "Евангелия от Ландау" вся учебная литература была ориентирована на подготовку инженеров. Механика как раздел теоретической физики дебютировала в 1957 году (учебник Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица, ныне переизданный, - Теоретическая физика, т. I. Механика. М.: Наука, 1988). Новое освещение старых проблем было продолжено в обработках лекционных курсов, читанных на физических факультетах разных вузов:

- 1) Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970, 1974 (МГУ)
- 2) Федорченко А.М. Теоретична фізика. Механіка. Київ: Вища шк., 1971 (КГУ)
- 3) Айзерман М.А. Классическая механика. М.: Наука, 1974 (МФТИ)
- 4) Жирнов Н.И. Классическая механика. М.: Просвещение, 1980 (МГПИ им. В.И.Ленина)
- 5) Петкевич В.В. Теоретическая механика. М.: Наука, 1981 (МГУ)

Все эти курсы ориентированы на студентов, "подогнаны" к запросам потребителей и соответствуют специфике факультета и вуза. Они, а также курс Тер Хаара, читанный в Оксфордском университете (Тер Хаар Д. Основы гамильтоновой механики. М.: Наука, 1974), послужили отправной точкой и трамплином и для моих лекций, и для этого изложения. Низкий поклон и признательная благодарность моим предшественникам, облегчившим и осветившим мой путь.

Помимо перечисленных особенностей изложения, цель которых - понятность и доступность, некоторые нестандартные моменты имеются и в содержании курса.

Классическая механика рассматривается как основа для ПОСЛЕДУЮЩИХ курсов теоретической физики. Поэтому везде и всюду, где только возможно, прослеживаются пути, ведущие к соответствующим разделам квантовой механики, статистической физики и так далее. Эти "лирические отступления", необязательные для механики как таковой, воспитывают целостность физического миропонимания, обязательность которого намного выше кон-

кретного знания деталей.

Этой же цели-воопитания физика-олужат и все философии , экокормы, особенно связанные с обоснованиями базовых понятий механики. Как правило, студенты воспринимают многие, потом и кровью выпотеванные модели как само собой разумеющиеся, что чревато в их дальнейшей научной деятельности узкокобостью или мучительной линькой ознания.

Я старалась подчеркнуть, насколько сумела, ту зависимость понятий от экспериментальной базы, которая характерна для физики — науки экспериментальной по определению. В этом, мне кажется, великое её достоинство и преимущество перед другими науками, в которых так легко хитросплетения ума и воображения отождествить с окружающей нас действительностью. Мне представляется, что для физика чрезвычайно важно знание мер своего невежества. Только наука, прочно уходящая корнями в землю фактов, способна зажигать звезды понимания в облаках воображения. Избегать опасности заблуждения можно, только трезво оценивая и зная эти опасности. Как часто физик в растерянности останавливается перед лавиной нелепогег, которую нагромождает тупое использование физических моделей там и тогда, где и когда они оказывались неприменимыми.

Думаю, что в понимании оложностей познания физика может олужить образом и примером для многих других наук.

Надеюсь, что мои старания будут полезны и для студентов в их частично или полностью самостоятельном приобщении к основам классической механики, и для лекторов нового поколения, ониходящих до принятия методического опыта своих предшественников.

ВВЕДЕНИЕ

РАЗЫСЛЕНИЯ О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ

Курс классической механики является первым и значительным в серии курсов теоретической физики. Иногда, особенно в технических вузах, этот раздел теоретической физики называют теоретической механикой. Это устаревшее название сохранилось с тех времен, когда теоретическая механика фактически совпадала со всей теоретической физикой. В настоящее время классическая механика — только один из многочисленных разделов теоретической физики, хотя и чрезвычайно важный.

Действительно, в классической механике вводятся и обосновываются фундаментальные понятия теоретической физики и вообще физики. В классическую механику уходят корни многих проблем и парадоксов современной теоретической физики. С критическим первосмысливанием основных представлений классической механики связано становление специальной теории относительности и квантовой механики.

Поскольку классическая механика — ПЕРВЫЙ раздел (курс) ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, желательно сразу уяснить, чем теоретическая физика отличается от общей или экспериментальной физики.

Как известно, в физике осуществляют два метода исследования — экспериментальный и теоретический. Соответственно со-

временные физики делятся на экспериментаторов и теоретиков. Поэтому с первого взгляда кажется, что различие между теоретиками и экспериментаторами сводится к различию в методах работы.

Кино и телевидение затратили немало усилий, чтобы создать расхожий стереотип экспериментатора и теоретика. Согласно этому стереотипу экспериментаторы днём и ночью сидят у приборов и меряют, меряют, меряют... А результаты измерений записывают в толстый лабораторный журнал. Приборы - экспериментальные установки - преимущественно гигантских размеров, играют разноцветными лампочками и как-то связаны с ЭВМ. А всё, что намеряют экспериментаторы, - правда, правда и только правда.

Теоретики же либо ходят по коридорам с отрешёнными лицами, либо сидят за столами и пишут формулы, формулы, формулы... А затем комкают написанные листы и выбрасывают их в мусорную корзину. Впрочем, иногда формулы пишутся на доске. Тогда дискутирующие теоретики поочередно вырывают друг у друга тряпку и мах, пишут и стирают, стирают и пишут...

Это наглядные и образные "рисовки с натуры". Но суть дела они, конечно, не определяют.

 Чем же, по-существу, заняты экспериментаторы? Зачем проводятся измерения?

Каждый эксперимент является ДИАЛОГОМ человека и природы. В этом диалоге человек (экспериментатор) задаёт природе вопросы, ответы на которые он хочет получить.

Естественно, что для осуществления такого диалога необходимо знать ЯЗЫК, на котором можно задавать природе вопросы, получать ответы и правильно эти ответы понимать.

Этот язык - ФИЗИЧЕСКИЙ ЯЗЫК - имеет свой словарь - физические понятия, определения, символы, свою азбуку - математические обозначения, свою "грамматику", определяющую правильные сочетания физических "слов" в физические "предложения" - формулы и формулировки физических законов.

Физический язык, необходимый для общения с природой, для исследования характера и сути физических явлений, создается и экспериментаторами, и теоретиками. При этом "словарный запас" и первоначальные "грамматические формы" закладывают в об-

ход в основном экспериментаторы, но, как правило, приоритет соприкосновения с неизвестным принадлежит им.

Что же делают теоретики?

На долю теоретиков выпадает изучение общих закономерностей физического языка, выявление еще не встречававшихся в "беседе" с природой, но правомочных "грамматически" предложений и конструкций. Таким образом, теоретики разрабатывают как бы "физическую филологию", определяя нормы и правила использования физического языка, обеспечивая тем самым понимание результатов эксперимента, а следовательно, в конечном счете и понимание физических явлений, понимание законов природы.

Иногда теоретики же находят новые "слова" и "предложения", необходимость существования которых логически вытекает из общих положений и принципов.

Для обозначения физических "слов" применяются иероглифико-математические символы. Это позволяет записывать физические "предложения" в виде формул и широко использовать математический аппарат. Поэтому теоретики действительно пишут формулы, формулы, формулы..., а теоретическая физика во многом совпадает с математической физикой.

Любой язык является не только средством общения. Изучение языка может дать и дает обширную информацию о мировоззрении, взаимоотношениях, культуре общества, говорящего на этом языке. Точно так же, исследуя закономерности физического языка, теоретики получают информацию о природе, о закономерностях физического мира.

⚠ Однако физический язык создан не природой, а исследователями. Это обстоятельство экспериментаторы зачастую упускают из виду, трактуя результаты своих измерений как истину в последней инстанции. Но теоретики по роду своей деятельности вынуждены осознавать закономерность, более того, необходимость вопроса: "а правильно ли понят "ответ" природы? Сколько в этом ответе от природы, а сколько "от лукавого", от исследователя?" - И отвечать на этот вопрос приходится, естественно, тоже теоретикам.

Поэтому теоретики вынуждены серьезнее и глубже, а главное, сознательнее задумываться о способах получения информа-

ции, то есть фактически решать проблемы теории познания.

Но теория познания - один из разделов философии. Так что теоретики волей-неволей оказываются в какой-то мере и философами. По этому поводу бытует афоризм: "копни физика поглубже - найдешь философа". Сами же физики-теоретики искренне убеждены, что в натурфилософии они разбираются намного лучше, чем философы - профессионалы.

Таким образом, разделение труда между экспериментаторами и теоретиками по существу сводится к тому, что экспериментаторы отвечают за технику общения с природой, а теоретики обеспечивают философию общения.

Итак, теоретическая физика не только разрабатывает математический аппарат физики, не только исследует закономерности физического языка, она определяет философские основы, философскую базу физики, её парадигму.

Если отгнать в сторону несущественные детали и всякую оловесную шелуху, то можно увидеть, что здание физики, как Земля в старинных космогониях, покоится на пяти философских "кигах" - основных философских постулатах.

ПОСТУЛАТ ПЕРВЫЙ - природа существует объективно.

Все физики независимо от национальности и вероисповедания, осознанно или бессиозно убеждены, что природа существует независимо от осущестования изучающего её физика. Полное исчезновение физиков с Земли и её окрестностей не может изменить законы, которым подчиняются физические процессы. Этот постулат - постулат первичности материи - является первым и основным постулатом материализма. Так что все физики - материалисты, хотя бы и отихийные. Стихийный материализм присущ также и другим естествоиспытателям.

ПОСТУЛАТ ВТОРОЙ - природа познаваема.

Познаваемость исследуемого мира также признается всеми физиками и другими естествоиспытателями независимо от их национальности, религиозных убеждений и официальной приверженности какой-либо философской системе. Но познаваемость мира - второй основной постулат материалистической философии. . . Так что физики вместе с другими естествоиспытателями опять-таки оказываются в лагере материализма, даже если они сами

об этом и не задумываются.

ПОСТУЛАТ ТРЕГИЙ - источник познания - опыт.

Этот постулат специфичен для естественных наук вообще и для физики в особенности. В физику он введен Галилеем и Ньютоном, Декартом и Бэконом и может быть переформулирован так: **ФИЗИКА ЕСТЬ НАУКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ.**

Это означает, в частности, что в физике понятие "дано" в "измерено". Если физик утверждает, что скорость поезда равна 60 км/ч, то это значит, что либо он сам измерил скорость поезда и получил такое значение, либо кто-то когда-то получил или мог получить это значение при измерениях.

 Итак, в физике источником информации признается **ТОЛЬКО ОПЫТ**. Информация из других источников, при всей их авторитетности, рассматривается как взятая "о потолка" и научной ценности не имеет. Разумеется, современные экспериментальные данные получаются иногда в результате радикальной переработки информации с участием ЭВМ. Точно так же питьевая вода попадает к нам, пройдя длинный путь водопроводных коммуникаций и сооружений. Однако изначальным источником водоснабжения является все-таки родник. Точно так же в основе любых суперсложных экспериментов лежит наблюдение природного явления.

ПОСТУЛАТ ЧЕТВЕРТЫЙ - способ познания - субъективное отображение объективной действительности или, короче, **МОДЕЛЬ**

Такое определение модели является закономерным обобщением до философского уровня обычно используемого понятия модели, которое в свою очередь намного шире понимания модели, характерного для XVIII - XIX веков.

Простейшими моделями являются модели объектов.

ПРИМЕРЫ моделей объектов.

I) Телевизор

 Какой мысленный образ соответствует этому широко распространенному агрегату?

Вряд ли будет преувеличением утверждение, что у большинства пользователей образ телевизора ограничивается представлением о большом ящике с большим выпуклым экраном, за кото-

рый заплачены большие же деньги. При включении "ящика" в электросеть и подключении к нему антенны, нажимая на те или иные кнопки, можно добиться того, что на экране возникнет движущееся цветное или черно-белое изображение, которое сопровождается музыкой и голосами артистов или диктора.

Ну, а если телевизор сломается?

Тогда вызывается мастер из телеателье. Его модель, его представление о телевизоре богаче и подробнее, чем у его клиентов. Он знает, что и как расположено внутри "ящика", какие положения случаются чаще всего, а также степень дефицитности деталей, необходимых для ремонта, и их рыночную стоимость.

Еще подробнее и точнее будет модель телевизора у главного инженера-конструктора завода, проектирующего и выпускающего телевизоры. В нее войдут и информация о физических процессах, протекающих в отдельных узлах телевизора, и возможные варианты нового решения, например, развертки изображения и....

Однако будет ли даже такая подробная модель тождественна самому работающему телевизору? Конечно же нет! Во-первых, в телевизоре всегда могут возникнуть непредусмотренные случайные процессы. Капля воды или таракан, заползший в конденсатор, могут привести к самым невероятным последствиям. Во-вторых, возможен и естественный не мешающий работе фон - изменения магнитного поля Солнца, несущественные колебания температуры, космические лучи... В-третьих, если такой фон начинает систематически влиять на работу аппаратуры телевизора, то возможно, что перед нами окажется новое, не известное ранее физическое явление. Тогда исследование досадных помех приведет к открытию этого явления.

Как видим, модель оказывается НЕПОЛНЫМ отображением действительности, а степень неполноты - связанной с уровнем знания, уровнем информации о моделируемом объекте.

2) Земля

Планете, на которой мы живем, могут быть сопоставлены разные модели. Так, для решения задачи о движении Земли вокруг Солнца может быть выбрана модель материальной точки. Но эта модель оказывается непригодной при изучении эффектов суточного вращения Земли вокруг своей оси, когда приходится

использовать модель однородного шара - геоида. В свою очередь, модель однородного шара не годится для описания движения материковых плит. Таким образом, выбор модели обусловлен самой решаемой задачей, специфика которой диктует возможности делаемых огрублений и приближений. Недаром говорят, что теоретическая физика - это искусство правильно пренебрегать, правильно выбирать модели.

Модели объектов - наиболее простые и понятные модели, полностью соответствующие старому определению модели.

 Но ведь и все понятия в физике, да и не только в физике, тоже являются моделями уже в более широком, современном смысле.

ПРИМЕРЫ моделей понятий.

1) Число

Понятие числа, по-видимому, вырабатывалось еще в первобытные времена из чисто практических потребностей: например, из необходимости сосчитать, сколько в стаде мамонтов (быков, оленей) и сколько охотников понадобится, чтобы убить хотя бы одного мамонта (быка, оленя). Очевидно, что таким образом могло выработаться только понятие ЦЕЛОГО числа. Делёж добычи между охотниками или одного райского яблока на двоих привел к возникновению представлений о ДРОБНЫХ числах.

С целыми и дробными, но только РАЦИОНАЛЬНЫМИ числами оперировала вся античная математика. И главные её проблемы: квадратуры круга, трисекции угла и так далее - являлись неразрешимыми именно в силу недостаточности для их решения понятия рациональных чисел. Однако задачи, неразрешимые в рамках рациональных чисел, кажутся тривиальными при расширении понятия числа на область чисел ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ. И современные школьники часто не могут уразуметь, в чем же таки заключалась, например, проблема квадратуры круга.

Сейчас мы свободно оперируем не только с иррациональными, но и с комплексными числами, и глазом не моргнем, если нам предложат работать с числами гипер- или суперкомплексными. Только поинтересуемся техникой выполнения для этих чисел обычных алгебраических (арифметических) операций.

Получается, что модель зависит также и от уровня общече-

ловеческого знания, от уровня развития науки.

2) Масса

Со времен Ньютона в физике под массой понимается некоторая неизменная, присущая именно данному телу скалярная физическая характеристика - мера его инерции. Однако при достижении телом релятивистских скоростей ситуация изменяется. Сохраняя второе начало Ньютона, мы вынуждены обобщить ньютоновское представление о массе. Масса, как мера инерции, оказывается уже не скалярной, а тензорной величиной и при этом зависит от направления и скорости движения тела. Релятивистская "масса" - тензорная функция вектора скорости, вырождающаяся в скалярную константу, совпадающую с массой покоя, в нерелятивистском пределе.

Как видим, модель зависит и от уровня знания, и от характера решаемой задачи.

ПЯТЫЙ ПОСТУЛАТ - критерий истины - опыт.

Существование произвола в выборе модели, связанного и со спецификой задачи, и с уровнем знания, приводит к необходимости запостулировать способ контроля за правильностью сделанного выбора (приближения). ОТК в физике, отображающий физическую "продукцию", - это эксперимент. Вспомним - физика есть наука экспериментальная! Из опыта берется информация и опытом же проверяется правильность построенных представлений и сделанных выводов.

Разумеется, контрольная экспериментальная информация, так же, как и исходная, не "зачерпывается ковшиком из родника", а добывается с помощью весьма сложной системы "водонабжения".

Разумеется также, что на суд эксперимента попадают только теоретические положения, отображенные в результате расследования с позиций логики, простоты, красоты, математической и физической непротиворечивости...

 Однако правом **ДОКАЗАТЕЛЬНОСТИ** в физике обладает опыт и только опыт. А вовсе не логические и тем более не математические построения и выводы, как это иногда мерещится.

Математика для физика-теоретика - это просто рабочий инструмент, позволяющий перерабатывать "полуфабрикат" в про-

дукт, "годный к употреблению". Это своеобразная "молотубка" или "мельница", по образному выражению академика А.Крылова. Мельница может перемолоть и камни, но как полученный в результате песок не заменит муку, так и математическая обработка неверных физических предпосылок не приводит к правильным физическим результатам.

Альберту Эйнштейну принадлежит следующее красочное определение роли эксперимента в отбраковке теорий (цитата о точности до перевода с немецкого):

"эксперимент является оуровым и бесжалостным судьей работы теоретика. Тот судья никогда не говорит о теории "да". В лучшем случае говорит "может быть", а наиболее часто отвечает "нет". Если эксперимент соглашается с теорией, то для последней это значит "может быть". Если такое согласие отсутствует - это значит "нет".

Итак, развитие и усложнение физических теорий идет по схеме

$$Э \longrightarrow T \longrightarrow Э$$

Исходным является Эксперимент, на базе эксперимента путем обобщения его результатов строится Теория, правильность которой проверяется Экспериментом. Он же позволяет ввести поправки и изменения в Теорию - нижняя отрезка. Затем всё повторяется сначала и нет конца...

Вот почему, несмотря на убежденность экспериментаторов, что наши знания целиком и полностью "от природы", теоретики склонны к гораздо меньшему оптимизму. Они -то хорошо знают, как много в нашем знании "от себя", от модели.

Но разве нельзя построить такую модель, которая давала бы точное отображение? Или такую, неточность которой была бы следствием, образно говоря, неточной "фокусировки" отображения, устранимой хотя бы в принципе? Такие классические идеалы до сих пор живут среди физиков, в основном среди экспериментаторов.

Для того чтобы понять, в чем тут дело, рассмотрим подробнее само определение модели: модель - это субъективное отображение объективной действительности (рис. I).

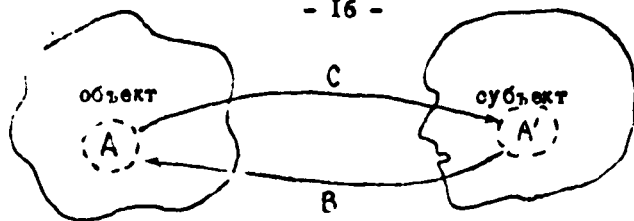


Рис. I

ОБЛАСТЬ A - некоторое явление, процесс, совокупность явлений в природе - является ОБЪЕКТОМ исследования. Субъект - ученый, группа ученых - исследует A , получает информацию (отрезка C) и строит в "своем" мозгу ОБЛАСТЬ A' , которая является СУБЪЕКТИВНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ (моделью) области A . Для того чтобы получить информацию C , исследователю надо вступить в контакт с объектом A (стрелка B). Какие особенности присущи всем этим этапам?

1) Объективная действительность

Исследователь изучает объективную действительность - область A . Информация может быть получена в результате ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ A и B , где B - приборы или непосредственные органы чувств исследователя. Например, в наши глаза попадают кванты света, отраженные от букв на листе бумаги, что и позволяет нам читать напечатанный текст. Точно так же отклонение стрелки амперметра свидетельствует о наличии тока в электрической цепи. Существование природного объекта A , не взаимодействующего ни с какими другими объектами B , никак не может быть установлено. Такой объект A может служить хорошим примером кантовской "вещи в себе".

Итак, существование A определяется по действию A на B : $A \rightarrow B$.

Однако поскольку все действия суть ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ, то наряду с действием A на B имеет место обратное действие B на A : $B \rightarrow A$. Следовательно:



$$A \rightleftharpoons B$$

Удобно говорить, что имеет место ЭФФЕКТ ВМЕШАТЕЛЬСТВА. Эффект вмешательства, вообще говоря, изменяет A и, следова-

тельно, получаемая информация, от того говоря, относится не к A самому по себе, а к A , взаимодействующему с B .

Р Образное художественное описание сути эффекта вмешательства приведено разговорным в фантастической миниатюре "Четыре четверки". Действие происходит на Марсе, что однако сути дела не меняет.

В одной марсианской школе учитель физики объясняет ученикам понятие температуры и устройство термометра. Потом он показывает классу стакан с водой и обыкновенный массовый лабораторный термометр и спрашивает, как можно измерить температуру воды в стакане? Все ученики, кроме одного, поднимают руки. Они знают, как можно измерить температуру воды в стакане. И только любимец учителя, отличник и будущий академик, сидит в глубокой задумчивости.

- В чем дело? - спрашивает его учитель. - Разве ты не знаешь, как можно измерить температуру воды в стакане?

- Не знаю, - отвечает вникший талант, - ведь, когда я опускаю термометр в стакан с водой, вода или немного нагреется или немного охладится, потому что термометр только случайно может иметь такую же температуру, как и вода в стакане. А следовательно, я измерю температуру системы вода плюс термометр, а вовсе не температуру воды такую, какой она была до погружения в нее термометра.

Объяснение марсианского вундеркинда великолепно демонстрирует все тонкости эффекта вмешательства.

 Эффект вмешательства - это изменение измеряемой величины в результате измерения.

 Ну, а если всё тем же лабораторным термометром измерять температуру воды в Каспийском море? Будет ли при этом иметь место эффект вмешательства? - Ясно, что нет! Более того, возможно даже составить карту распределения температуры воды по акватории Каспийского моря. И измерить зависимость такого температурного распределения от времени года или суток,

 Область физики, для которой эффект вмешательства в принципе можно сделать пренебрежимо малым, принято называть классической физикой.

Границы классической физики хорошо демонстрирует мысленный эксперимент, предложенный доцентом кафедры теоретической физики ТГУ Валерием Федоровичем Конусовым.

△ Предположим, что положение предметов на местности экспериментатор определяет с помощью такого своеобразного дататора: имеется "излучатель", позволяющий получать однородный пучок шариков для настольного тенниса, и приемное устройство, регистрирующее шарики, отраженные лоцируемым предметом. Время полета отраженного шарика и направление его движения позволяют рассчитать положение наблюдаемого объекта.

Допустим, что с помощью этой установки определяется движение трактора по полю. Будет ли при этом иметь место эффект вмешательства? - Конечно, нет! Для трактора столкновение (взаимодействие) с шариком для настольного тенниса практически "неощутимо". Слопу дробина и то ощутимее! Таким образом, в этом эксперименте реализуется чисто классическая ситуация.

△ А если с помощью этой же установки измерять движение надутого воздушного шарика, такого, какие покупают детям и носят на демонстрации? Проявится ли в этом случае эффект вмешательства? - Конечно, проявится! Первое же столкновение шарика для настольного тенниса с резиновым шариком хотя и дает нам информацию о положении этого последнего в момент столкновения, изменяет его движение коренным образом, искажая до неузнаваемости первоначальную траекторию. Реализуется явно неклассическая ситуация.

В данном случае, однако, неклассичность ситуации устроена. Для этого достаточно уменьшить размеры (и массу) "пробных" шариков, посылаемых излучателем. Например, использовать световые кванты.

△ Мы видим, что эффект вмешательства устраним тогда, когда возможно использовать "зонд", параметры которого пренебрежимо малы по сравнению с характеризующими исследуемый объект. Если же любой возможный "зонд" оказывается "в одной весовой категории" с объектом, эффект вмешательства принципиально неустраним. Такая ситуация имеет место, например, в микромире, где для получения информации о движении микрочастиц приходится использовать их взаимодействия с такими же микрочастицами.

Ясно, что эффект вмешательства ограничивает возможность получения информации (стрелка С). Нереализуемые измере-

ния информации не дает.

2) Отображение

По информации S исследователь строит ОТОБРАЖЕНИЕ A' изучаемого объекта A . Но отобразить - это не значит вообразить, выдумать. Отображение, образ A' физического объекта, явления A должно ОТВЕЧАТЬ A так, чтобы характеристики A' определялись ИСЧЕРПАЮЩИМИ характеристиками A . Это требование Бор называл ПРИНЦИПОМ НАБЛЮДАЕМОСТИ: любое используемое в физике понятие (модель) должно быть обосновано экспериментально - наблюдаемо. И наоборот, понятия, характеризующие величины, которые невозможно измерить в силу существования эффекта вытеснения, лишаются в физике права существования. Так, в микромире нельзя использовать понятие траектории, ибо нельзя измерить значение координаты микрочастицы без неустраняемого изменения её импульса (скорости). Вспомним пример с воздушным шариком, приведенный выше!

 Заметим, что вопрос: существует ли траектория микрочастицы? - является бессмысленным. Траектория - ПОНЯТИЕ, субъективная картина некоторой объективной физической сущности. Замы по себе без субъекта понятия не существуют, хотя и придуманы, созданы для описания объективно существующей действительности. Но разве ВТ понятия пригодны для описания ЛЮБОЙ объективной реальности? Будем ли мы использовать, например, понятия любви и дружбы для описания поведения автомобилей?

Разумеется, принцип наблюдаемости нельзя понимать "в лоб", как то есть возможность непосредственного измерения (наблюдения). Физический эксперимент давно уже перешел на стадию сложнейших опосредствованных измерений, зачастую с использованием промежуточных расчетов на ЭВМ.

Хорошим примером физического понятия, отвергнутого физикой из-за НЕНАБЛЮДАЕМОСТИ, может служить Эфир. Без понятия эфира в XIX веке не обходилась, наверное, ни одна научная работа по электродинамике, да и не только по электродинамике. Но уже к сороковым годам XX века понятие эфира сохранилось в словаре только радиостов для пистолетов. И хотя современный физический вакуум, заменивший собой гипотетический эфир прошлого века, обладает может быть и более фантастическими

свойствами, эти свойства приводят к измеряемым эффектам, например к сдвигу энергетических уровней атомных электронов, обусловленному взаимодействием с вакуумом.

⚠ Итак, в силу существования эффекта вмешательства принцип наблюдаемости ограничивает возможность "словотворчества" физиков. Не на всякий вопрос, заданный природе, можно получить осмысленный ответ. Существуют ограничения, накладываемые на область применения физических понятий.

3) Субъективность

Полученное отображение субъективно. Оно не существует БЕЗ мыслящего субъекта, хотя исследователь может, так сказать, материализовать модель, выразив свои субъективные представления на физическом языке и опубликовав их в печати. Можно выделить три "уровня" субъективности и рассматривать субъективность индивидуальную, историческую и "генетическую".

С ИНДИВИДУАЛЬНОЙ субъективностью отображения физики стараются всячески бороться. Так, в физике научным фактом считается только ВОСПРОИЗВОДИМЫЙ эффект или явление. Единичное наблюдение, независимо от авторитетности наблюдателя, научной ценности в физике не имеет. Наблюдение приобретает силу научного факта, только если открыватели или другие экспериментаторы такого же или более высокого класса воспроизвели условия эксперимента, получили тот же результат и добились неоднократного повторения этого результата.

Требование воспроизводимости результатов устраняет индивидуальную субъективность отображения, но не субъективность вообще.

Неустранима, в частности, ИСТОРИЧЕСКАЯ субъективность — описание одних и тех же экспериментальных фактов различно в разные эпохи и обусловлено общим физическим мировоззрением, характерным для каждого конкретного исторического момента. Так, описание электромагнитных явлений до конца прошлого века проводилось в свете представлений об эфире — модели, ныне изъятой из арсенала науки. Описание тепловых процессов и циклов Карно, сделанное первоначально с позиций модели теплорода, современная термодинамика проводит исходя из представлений о молекулярно-кинетическом движении.

Неустранима также субъективность, которую можно назвать ГЕНЕТИЧЕСКОЙ. Она связана с тем, что всякое новое открытие делается в продолжение и развитие уже накопленной системы знаний. Более того, первая попытка объяснения любого нового явления делается с позиций и на языке "великих предшественников". Так, обнаружив у электрона собственный магнитный момент, Уленбек и Гаусмит пытались описать это явление с позиций классической электродинамики, как результат вращения электрона вокруг своей оси. Отсюда и название эффекта - С.МН (веретено). Эта классическая трактовка оказалась неосостоятельной. Современная физика рассматривает спин как специфическую характеристику квантовых частиц, не имеющую классического аналога, проявляющуюся так-то и так-то, измеряемую так-то и так-то в единицах постоянной Планка или Дирака.

Р Суть генетической субъективности в науке художественно точно описана Станиславом Лемом в его фантастическом рассказе - рецензии на якобы существующую книгу - биографии предприимчивого янки, организовавшего фирму по эксплуатации идей "супергениев". С точки зрения этого янки гении подразделяются на три сорта. Во-первых, гении обыкновенные, идеи которых понятны их современникам, а сами они при жизни достигают признания, славы и академических званий. Во-вторых, гении необыкновенные, "сортом" повыше, идеи которых опережают время. Они становятся понятными только ближайшим потомкам, которые и воздают усопшим гениям славу и почести. В-третьих, супергении, идеи которых настолько забегают вперед, что остаются непонятными ни современникам, ни ближайшими потомками. Их участь - несправедливое забвение.

Глава фирмы, ясно представлявший возможности извлечения прибыли из достижений науки, надеялся на суперприбыльность эксплуатации идей супергениев. После долгих поисков по архивам академий наук, университетов и сумасшедших домов представителем фирмы удалось обнаружить работу предположительно супергениального автора. Её отдали на рецензию гениям обыкновенным - единственно доступному контингенту гениев. Гении обыкновенные, добросовестно проанализировав работу, сказали, что неизвестный автор выдвинул основы нестандартного подхо-

да к анализу типа анализа бесконечно малых.

- Как можно развить и использовать идеи автора? - спросил глава фирмы.

- Очень просто, - ответили ословенные гении. - Современный матанализ возник в результате того, что идеи Ньютона и Лейбница триста лет разрабатывались множеством математиков. Посадите столько же математиков разрабатывать новые идеи и через триста лет Вы получите новый вариант матанализа.

△ Как поступил глава фирмы? Нетрудно догадаться, что фирма была немедленно закрыта. Янки был прагматиком.

△ Почти наверняка используемый нами физический язык является не единственно возможным, а может быть, даже не наилучшим способом отображения, описания явлений природы. Но коль скоро большинство исследователей развивает некоторое генеральное направление, либо другие, в том числе и равноценные, варианты практически бесперспективны. Многовариантный подход возможен либо на начальной стадии исследования, когда генеральное направление еще не выделилось, или же заброшенные варианты вспоминаются при появлении неразрешимых противоречий и пропятствий на генеральном направлении.

В этом смысле любое НОВОЕ есть порождение и развитие СТАРОГО, даже в том случае, когда это старое подвергается критическому пересмотру или "вовсе" отвергается. Даже если подготовившие базу для перехода к новому пониманию корифеи оказываются психологически неспособными сделать оледующий шаг. Этот шаг делает новое молодое поколение ученых, осмыслившее и переосмыслившее достижения своих предшественников. Но без знания уже созданного, с "пвотой гловвой" никакой научный Маугли не сумеет не только продвинуть науку дальше, но не достигнет хотя бы уже существующего уровня - просто не успеет это сделать за краткий срок человеческой жизни.

△ Каждое новое открытие опирается на уже накопленные знания, опыт. А стало быть и НАСЛЕДУЕТ все "дефекты", как лежащие в первоосновах, так и приобретенные за время пути. Эти дефекты выявляются, подправляются. Эдакие науки не только непрерывно надстраиваются, но и непрерывно рсмонтируются, иногда капитально, но никогда не разрушаются "до нуля".

Любая самая современная модель всегда генетически вписыв-

вается в существующую систему моделей. Поэтому она присуща ЗЕМНОЙ и именно земной физике, её субъективность связана с земным вариантом развития науки. А как было бы интересно сопоставить физику землян и физику обитателей какой-либо другой планеты такого же уровня развития! Вот когда бы выяснилось, что в нашей культуре "от природы", а что от специфики мышления человека Земли.

⚠ Таким образом, любая модель содержит элемент субъективности, обусловленный "временем и местом", тем, когда эта модель появилась, и тем, что она появилась на Земле, в процессе развития земной и именно земной науки.

Подведем итоги

Физика опирается на пять философских постулатов:

1. МИР ОБЪЕКТИВЕН
2. МИР ПОЗНАВАЕМ
3. ИСТОЧНИК ПОЗНАНИЯ - ОПЫТ
4. СПОСОБ ПОЗНАНИЯ - МОДЕЛЬ
5. КРИТЕРИИ ИСТИНЫ - ОПЫТ

При этом под моделью понимается СУБЪЕКТИВНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ОБЪЕКТИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ.

Специфику модели определяют:

1. ЭФФЕКТ ВМЕШАТЕЛЬСТВА
2. ПРИНЦИП НАБЛЮДАЕМОСТИ
3. ИСТОРИЧЕСКАЯ И ГЕНЕТИЧЕСКАЯ СУБЪЕКТИВНОСТЬ

С развитием науки модели эволюционируют, подвергаются критическому пересмотру и переоценке. Очевидно, что чем "древнее" модель, тем больше необходимость в её переосмыслении.

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА - раздел физики, изучающий ПРОСТЕЙШУЮ (механическую) ФОРМУ ДВИЖЕНИЯ - изменение взаиморасположения физических тел в пространстве и времени. Однако простота механического движения - кажущаяся простота. Впечатление простоты механического движения создается его наглядностью и обыденностью. Уложность вводимых для его описания понятий постигается не сразу, а лишь на довольно высоком уровне понимания физики.

Модели, лежащие в основе классической механики, - самые

"древние" модели физики. Экспериментальной базой для создания этих моделей послужили исследования МЕДЛЕННЫХ движения МАКРОСКОПИЧЕСКИХ тел. Современный эксперимент позволяет выйти за пределы этой базы и в область быстрых (равнительно со скоростью света) движений - релятивистская механика (Р.М.), и в область микромира - квантовая механика (К.М.).

Наличие новой экспериментальной информации дает возможность критически пересмотреть и оосовременить основные модели классической механики, четко оценить границы их применимости. Такой "перечет" позволяет выделить "первородные грехи" современной физики и опосредует углубленному пониманию её основ. При этом, конечно, соблюдается принцип соответствия - любая более широкая, более общая теория в области старого эксперимента должна обладать (соответствовать) старой теории, которая оказывается, таким образом, частным случаем общей теории.

ГЛАВА I

АКСИОМАТИКА КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

§ I. НЕКОТОРЫЕ УТОЧНЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

Прежде чем рассматривать аксиоматику, аксиомы классической механики, нужно определить, что будет пониматься под аксиомой.

В математике аксиомами называются исходные положения, которые предполагаются очевидными и не подлежат доказательству. Расплывчатый термин "очевидное" используется для того, чтобы скрыть "неблагородное" происхождение аксиом из практики измерений. Если же разобраться в генеалогии, то аксиомы в математике - это некоторое абстрагированное, обобщенное, "очищенное" заимствование из опыта.

В физике принцип эксперимента провозглашается "о аксиомы". Поэтому аксиомы открыто определяются как базовые, фундаментальные результаты эксперимента, лежащие в основе остальных логически выводимых из них положений.

Аксиоматика включает также физический словарь - репертуар понятий и их определения. При этом понятия подразделяются на **ОСНОВНЫЕ** и **ПРОИЗВОДНЫЕ**.

Основные понятия образуют некоторый минимальный набор понятий, через которые вводятся **ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ** (словесному или математическому) все остальные - **ПРОИЗВОДНЫЕ** понятия.

Разделение понятий на основные и производные не абсолютно. В принципе возможны альтернативы, отступления от принятого канона.

 Определить ОСНОВНЫЕ понятия, естественно, можно только атрибутивно, перечисляя подра/умеваемые качества и свойства. Но физика есть наука экспериментальная. Поэтому атрибуция сводится к перечислению экспериментальных проявлений сущности, описываемой вводимым понятием. А так как физика к тому же еще наука "точная", претендующая на необходимость количественной оценки, то определение основного понятия включает способ сравнения данности с некоторым выбранным ЭТАЛОНОМ, то есть ИЗМЕРЕНИЕ. Поскольку сама процедура измерения основана на экспериментальном проявлении свойства материи, которое определяется, можно говорить, что основные понятия вводятся в физику ЧЕРЕЗ ИЗМЕРЕНИЕ.

Таким образом, ОТМЫЗНОЕ ПОНЯТИЕ в физике - это характеристика природного явления, которое обнаруживается так-то и там-то и значение (величину) которой можно определить с помощью некоторого измерения - способа сравнения с выбранным эталоном. Любые другие "определения" в лучшем случае имеют обмысл наглядных иллюстраций, эмоциональных образов или философских рассуждений, зачастую не поясняющих, а только запутывающих ФИЗИЧЕСКУЮ суть дела.

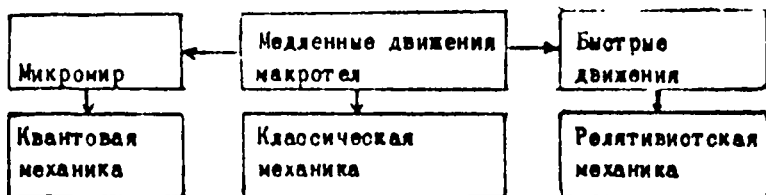
Определение основных понятий из эксперимента приводит, очевидно, к зависимости границ применимости этих понятий от использованной для их определения экспериментальной базы. Очевидно также, что расширение экспериментальной базы приводит к необходимости переосмысливания, переучета старой аксиоматики. Эта необходимость тем актуальнее, чем "древнее" подлежащий пересмотру раздел физики.

Классическая механика является самым древним таким разделом. В то же время основные понятия классической механики используются всеми разделами физики, в том числе и самыми новыми. Поэтому изложение аксиоматики классической механики естественно сопровождать критическим пересмотром, переоценкой с позиций возможностей современного эксперимента, о точки зрения современной физической парадигмы.

Сложившуюся ситуацию можно наглядно представить в виде охемы, демонстрирующей связь расширения экспериментальной

базы о возникновении новых разделов механики.

ИСХОДНАЯ БАЗА



Для того чтобы не загромождать текст длинными комментариями, продолжим идею использования "дорожных знаков":

- { знак  - символ ограниченной годности понятия, аксиомы,
- { знак  - символ полного запрета на использование понятия, аксиомы.

Область ограничения или запрета отмечается поставленным рядом со знаком буквами:

- { Р.М. - релятивистская механика или
- { К.М. - квантовая механика.

Так, отмеченная знаком  К.М. аксиома может использоваться в микромире с определенными оговорками или переделками (ограниченная годность в микромире). Отмеченная знаком  Р.М. - неверна (полностью запрещена) для движений с оубоветовыми скоростями.

В проводимом "пересчете ценностей" классической механики все понятия вводятся по возможности последовательно. Однако, особенно в обсуждении, учитывается, что азы классической механики изучались и в школе, и в курсе общей физики. Это позволяет забегать вперед и анализировать многие моменты на уровне выше примитивного.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Ну что ж, мистер Сайрес, с чего начнем? - спросил на следующее утро Пенкроф.

- С самого начала, - ответил инженер.

Жюль Верн. Таинственный остров

Начнем с самого начала и мы.

Обоудим систему исходных моделей - понятий и аксиом, лежащих в основе классической механики. За немногими исключениями эти понятия формулируются для одной материальной точки.

I. Объект исследования

Любой объект исследования в механике принято НАЗЫВАТЬ МАТЕРИАЛЬНЫМ или ФИЗИЧЕСКИМ ТЕЛОМ. Это не определение, не модель, а некоторая "этикетка", уравнивающая всех и вся и обеспечивающая единообразие в подходе к любому объекту, - будь то звезда, атом, автомобиль или человек.

Используются следующие МОДЕЛИ материальных тел:

1) МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА - материальное тело, размерами которого можно пренебречь в рассматриваемой задаче.

ПРИМЕРЫ: атомы (при изучении явления диффузии), планеты (при изучении их движения вокруг Солнца).

Область применения: от микро- до макромира.

Заметим, что ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ материальная точка не тождественна точке математической, "размеры" которой определяются как бесконечно малые.

В современной научной и учебной литературе вместо термина материальная точка широко используется термин ЧАСТИЦА.

2) СИСТЕМА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК - множество материальных точек.

ПРИМЕРЫ: атомы, образующие молекулу, планеты, образующие планетную систему.

Область применения: от микро- до макромира.

3) **ТВЕРДОЕ ТЕЛО** - система материальных точек, расстояния между которыми не меняются во время движения. ○ Р.М.
В физике твердого тела эта модель называется **АБСОЛЮТНО** твердым телом в отличие от деформируемого твердого тела.

ПРИМЕРЫ: молекула или планета (при описании вращательных движений, которые не сопровождаются изменением формы).

Область применения: от микро- до макромира.

△ Имеет место ограничение применения понятия в релятивистской механике. Оно обусловлено зависимостью расстояния (пространственного интервала) от скорости движения. В специальной теории относительности известен целый ряд парадоксов, которые появляются при некритическом использовании модели твердого тела. Справедливости ради следует заметить, что эксперименты в области релятивистских скоростей осуществимы покамест только для микрочастиц и систем микрочастиц, но не для макроскопических твердых тел.

4) **КОНТИНУУМ** - система материальных точек, расстояния между которыми пренебрежимо малы по сравнению с размерами системы, так что дискретность строения системы можно не учитывать.

ПРИМЕРЫ: жидкость, деформируемое твердое тело в пренебрежении его кристаллической структурой, иногда газ.

Область применения: макромир, объекты на земле и в космосе.

2. Пространство

Представления о пространстве начали формироваться в глубокой древности на основе наблюдений за взаиморазмещением физических тел. Примером может служить задача о распределении студентов по скамьям аудитории во время лекции по классической механике.

Современные представления о пространстве сводятся к следующей совокупности моделей:

I) **СИСТЕМА ОТСЧЕТА** - некоторое массивное твердое тело, могущее служить "печкой" для проведения измерений.

Требование **МАССИВНОСТИ** системы отсчета позволяет избежать эффекта выметательства. Экспериментатор должен быть уверен, что система отсчета останется неизменяемой и неподвижной в

процессе измерения, а не "откатится" от "отдачи", как пушка после выстрела.

Требование выбирать в качестве системы отсчета ТВЕРДОЕ ТЕЛО обеспечивает неизменность системы отсчета и позволяет использовать аппарат евклидовой геометрии. Действительно, нетрудно убедиться (см., приложение I), что твердое тело удовлетворяет всем постулатам евклидова пространства, являясь, так сказать, физическим воплощением этой математической абстракции. Разумеется, фактически сами постулаты евклидова пространства были сформулированы в результате обобщения экспериментально установленных свойств именно твердого тела.

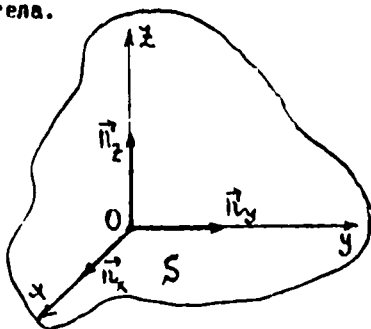


Рис. 2

В евклидовом пространстве может быть выбрана некоторая математическая точка O - начало отсчета и три неизменных орта (единичных вектора), как правило, взаимно ортогональных друг другу: $\vec{n}_x$, $\vec{n}_y$, $\vec{n}_z$. В твердом теле, выбранном в качестве системы отсчета и воплощающем евклидово пространство, орты представляются жесткими "стрелками". Начало отсчета и "выткнутое"

в него орты образуют репер. При абстрагировании от "телесности" системы отсчета репер (начало O и орты $\vec{n}_x$, $\vec{n}_y$, $\vec{n}_z$) определяют декартову систему координат в евклидовом пространстве. В физике принято использовать ПРАВО систему координат (рис. 2).

ПРИМЕРЫ систем отсчета.

ЛАБОРАТОРНАЯ система отсчета - чаще всего лабораторный стол или комната, где проводится эксперимент. Так, в задаче о расположении студентов в аудитории в качестве системы отсчета естественно выбрать саму аудиторию. В лабораторной (аудиторной) системе отсчета орты можно мыслить "прибитыми" в углу вдоль двух плинтусов и линии соприкосновения

двух стен.

ПОВЕРХНОСТЬ земли - в задачах о движении физических тел по земной поверхности или над ней. Третье измерение - высота над поверхностью земли.

ГЕОЦЕНТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА отсчета - та же Земля с началом в центре Земли.

В астрономии используется также ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКАЯ система отсчета, связанная с Солнцем (начало в центре Солнца). фактически используется, конечно, не система отсчета, а система координат.

Выбирая в качестве системы отсчета твердое тело - евклидово пространство, физик получает возможность использовать идеи и методы евклидовой геометрии для определения положения материальных тел (точек).

2) ПОЛОЖЕНИЕ материальной точки относительно системы отсчета определяется заданием радиус-вектора

$$\vec{r} = x\vec{n}_x + y\vec{n}_y + z\vec{n}_z. \quad (1)$$

Понятие радиус-вектора и его разложения по ортам $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$ заимствуется из евклидовой геометрии. Величины x, y, z - координаты МАТЕМАТИЧЕСКОЙ точки, заданной радиус-вектором $\vec{r}$, имеют смысл расстояний между двумя точками системы отсчета. В математике понятие расстояния конкретно не рассматривается. В физике понятие расстояния (длины) является ПОНЯТИЕМ, простейшим, НЕ СВОДИМЫМ к другим понятиям, а следовательно, должно определяться из эксперимента.

Такие "эксперименты" осуществляются в нашей повседневности, когда мы вытягиваем, "измеряя ногами" расстояние от дома до работы, магазина, кино и так далее. Или "измеряем руками" размеры книги, кейса, отула и других предметов, не говоря уже об измерениях собственного роста, охвата груди или талии.

Итак, под РАССТОЯНИЕМ (длиной) понимается ТАКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОСТРАНСТВА, КОТОРАЯ МОЖЕТ БЫТЬ ОПРЕДЕЛЕНА - ИЗМЕРЕНА ЧУМЕМ СРАВНЕНИЯ С ЭТАЛОНОМ НЕКОТОРЫМ УСТАНОВЛЕННЫМ СПОСОБОМ.

Единица - эталон - длины входит в систему основных еди-

нии измерения.

△ В приведенном определении неявно ПОСТУЛИРУЕТСЯ ВОЗМОЖНОСТЬ ИЗМЕРИТЬ РАСТОЯНИЕ (определить координаты x, y, z).

○ К.М. Ограничение связано с тем, что в микромире информация о координатах частицы не может быть получена, если известен (измерен) её импульс. Напротив, знание положения частицы исключает возможность получить информацию о её импульсе.

△ Заметим, что, определяя положение материальной точки радиус-вектором $\vec{r}$, мы тем самым отождествляем, на уровне математической символики, точки: материальную и математическую. И никакие образы "капельки на кончике радио-вектора" не могут исключить из уравнений парадоксальных бесконечноностей, происходящих из МАТЕМАТИЧЕСКОГО точечности объекта, точечного только ФИЗИЧЕСКИ.

Зная радиус-вектор $\vec{r}_1$, определяющий положение одной материальной точки, и радиус-вектор $\vec{r}_2$, определяющий положение другой материальной точки, можно ввести понятие относительного радиус-вектора

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (2)$$

определяющего положение второй точки относительно первой.

Заметим, что $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$, но

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = r_{21}.$$

□ Теперь, измерив координаты всех студентов, сидящих в аудитории, мы можем получить информацию относительно их расположения в выбранной лабораторной системе отсчета (аудитории).

3) Построенную модель пространства необходимо дополнить аксиомой, позволяющей СРАВНИВАТЬ результаты измерений, выполненных разными экспериментаторами, использующими РАЗНЫЕ системы отсчета (рис. 3):

Пусть S и S' - две системы отсчета, различающиеся в простейшем случае только выбором начала отсчета (точки O и O' соответственно) и направлением ортов (осей x, y ,

z и x', y', z') в ОДНОМ И ТОМ ЖЕ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ. Нетрудно видеть, что коль скоро S и S' определены ОДНИМ И ТЕМ ЖЕ массивным твердым телом, радиус-векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}'$, описывающие положение рассматриваемой материальной точки в системах S и S' соответственно, обязаны друг о другом соотношением

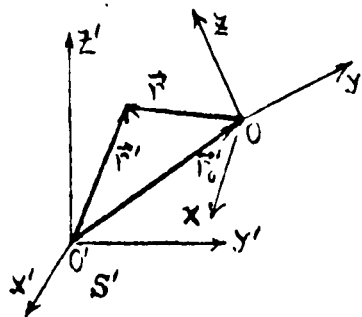


Рис. 3

$$\vec{r} = \vec{r}_0' + \vec{r}', \quad (3)$$

где $\vec{r}_0'$ - радиус-вектор начала O системы отсчета S в системе S' . Соотношение (3) - закон сложения векторов в евклидовом пространстве - является следствием евклидовости системы отсчета S (S').

⚠ Классическая механика ПОСТУЛИРУЕТ, что закон сложения (3) сохранится и в том случае, когда S и S' - РАЗНЫЕ не связанные друг о другом системы отсчета (массивные твердые тела) в общем случае движущиеся относительно друг друга:

$$\vec{r}' = \vec{r}_0'(t) + \vec{r} \quad \ominus \text{ Р.М. } \quad (3')$$

При оправедливости (3') имеем

$$\vec{r}_{12}' = \vec{r}_{12} \quad \ominus \text{ Р.М. } \quad (4)$$

- закон независимости пространственного интервала от выбора системы отсчета.

⚠ Поставленные знаки запрета очевидны, поскольку в релятивистской механике пространственный интервал (длина) зависит от скорости движения. Расширение постулата о евклидовости системы отсчета на связь между двумя движущимися системами отсчета оказывается правильным только в случае медленных движений. Так маленькое и казалось бы естественное обобщение правила переноса начала отсчета в одной и той же системе отсчета - твердом теле - на связь между измерениями, выполненными в ДВУХ ДВИЖУЩИХСЯ системах отсчета, создает

скрытый дефект теории. Этот дефект, незаметный при малых скоростях относительного движения S и S' , приводит к противоречию с экспериментом в релятивистской области.

3. Время

Понятие времени также возникло в глубокой древности и основано на наблюдениях ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, таких как смена дня и ночи, чередование фаз луны, времена года и так далее. Стучит маятник, отсчитывая мгновения человеческой жизни...

1) Физическое понятие ИНТЕРВАЛА ВРЕМЕНИ t_{12} (обозначение по аналогии с пространственным интервалом $\vec{r}_{12}$) является одним из основных, простейших понятий и вводится из эксперимента.

⚠ ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ В ФИЗИКЕ ЧЕРЕЗ ИЗМЕРЕНИЕ, КОТОРОЕ ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ ПУТЕМ СРАВНЕНИЯ ИЗМЕРЯЕМОГО ПРОМЕДУКА ВРЕМЕНИ С ЭТАЛОНОМ.

Этот эталон - единица времени - входит в систему единиц измерения физических величин вместе с эталоном (единицей) длины. Простейшим и общепотребительным прибором для измерения интервала времени являются часы.

⚠ В приведенном определении неявно ПОСТУЛИРУЕТСЯ ВОЗМОЖНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ИНТЕРВАЛА ВРЕМЕНИ t_{12} . ○ К.М.

Знак ограничения обусловлен тем, что для микрочастицы, обладающей определенным значением энергии, точное измерение неосуществимо.

⚠ Определение интервала времени t_{12} должно быть дополнено аксиомой сравнения результатов измерения интервалов времени в разных системах отсчета.

2) Из сопоставления результатов измерения интервалов времени в РАЗЛИЧНЫХ системах отсчета S и S' постулируется, что

$$t_{12} = t'_{12} \quad (\ominus) \quad \text{Р.М.} \quad (5)$$

Этот постулат не выполняется в случае, когда велика относительная скорость движения систем S и S' .

Специальная теория относительности утверждает, что

при больших скоростях движения сохраняющейся величиной является пространственно-временной интервал (просто интервал)

$$S_{12} = \sqrt{r_{12}^2 - c^2 t_{12}^2}.$$

По аналогии с пространственными интервалами $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ можно записать

$$t_{12} = t_2 - t_1, \quad t'_{12} = t'_2 - t'_1.$$

Направляется возможность заключить соглашение между наблюдателями в различных системах отсчета и выбрать общее начало отсчета времени $t_1 = t'_1 = 0$. Тогда $t_{12} = t_2 = t$ и $t' = t$. Время оказывается универсальной (абсолютной) физической величиной, не связанной с пространственной системой отсчета и её движением.

⚠ ЗАМЕЧАНИЯ

1) Запись $t_{12} = t_2 - t_1$ по аналогии с $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (с последующим переходом $t_{12} \rightarrow t$), вообще говоря, неправомерна ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ. Ибо эталоном времени является ПЕРИОД некоторого выбранного физического процесса, например колебания маятника. Как и эталон длины, этот эталон определяет значение интервала времени только по АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЕ. Знак, а отало быть и направление времени, появляющийся в записи $t_{12} = t_2 - t_1 = t$, приносится к оделанному определению без каких-либо критических комментариев. Но если выбор знака радику-вектора $\vec{r}$ произволен и соответствует только выбору первого октанта (ориентации осей) системы координат, то знак времени t , его направленность связаны с реальными, выходящими за рамки простого соглашения.

Лучше поэтому открыто признать, что время классической механики имеет смысл ДЛИТЕЛЬНОСТИ, обратимо по определению, и не пытаться описывать с его помощью процессы остановки и эволюции. Направленность времени должна быть ПРИВНЕСЕНА в классическую механику при расширении экспериментальной базы на область более сложных НЕМЕХАНИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ.

Р Обратимость классического времени приводит в физике к парадоксам - своего рода "квадратурам круга", решение которых возможно только при расширении понятия времени. Над такими обобщениями сейчас работают и теоретики, и экспериментаторы,

пытаться построить физику возникающего (в отличие от традиционной физики существующего). Это - работы в области статистической физики, синергетики.

2) Построенные классические пространство и время трактуются как НЕЗАВИСИМЫЕ от движения и НЕ СВЯЗАННЫЕ друг с другом.

Р Однако при детальном анализе измерений, лежащих в основе определения длин и интервалов времени, усматривается принципиальная возможность существования такой связи и зависимости.

В самом деле, операция сравнения с эталоном не мгновенна, а растянута во времени. Будем измерять длину лабораторного стола, прикладывая к нему эталонную линейку. Отметим точку "конца" эталона, перенесем эталон вдоль стола, снова приложим эталон к столу и так далее. Пренебречь временем измерения можно, если "скорость" измерения намного превышает скорость движения, например, самой системы отсчета.

Точно так же периодический процесс наблюдаем постольку, поскольку наблюдаемы относительные изменения размеров или положения некоторых физических тел: маятника, Солнца, Луны, границы её освещенной части...

Поэтому по принципу уже классический эксперимент дает информацию не о пространственном или временном интервале самом по себе, а о некоей пространственно-временной совокупности. Так что отсутствие связи пространства, времени и движения в классической механике - фикция, оправданная отсутствием критических замечаний "Всего Величества Эксперимента" до тех пор, пока скорость движения классически мала. При увеличении скорости движения "туман" рассеивается и первородная связь пространства и времени проступает с немолчаливой неизбежностью. х)

3) Еще одно последнее замечание. АБСОЛЮТИЗАЦИЯ (фактически универсализация) времени, неизбежность и взаимная независимость времени и пространства породили среди физиков маниакальное стремление отыскать абсолютную систему отсчета, абсолютное пространство, стремление, обусловленное причинами скорее психологическими, чем физическими.

В идеале модифицироь провозглашенное Ньютоном абсолютное
к) Сделанное замечание подсказано одним из студентов РФФ.

пространство и абсолютное время, ощущающие сами по себе независимо друг от друга и от движущихся "в них" физических тел, как и подобает волковому идеалу, этот идеал оказался и неудовимым, и недостижимым, и...ненужным.

4. Движение

Понятие движения в классической механике - самое противоречивое и неудачное из "древних" понятий. Поскольку это понятие основное, приходится обратиться к эксперименту.

Пусть из измерения найдено, что материальная точка в момент времени t_1 находится в точке, определяемая радиус-вектором $\vec{r}_1$, в момент t_2 - в точке $\vec{r}_2$, и так далее. Получаем соответствие:

$$\begin{array}{lcl} t_1 & \longrightarrow & \vec{r}_1 \\ t_2 & \longrightarrow & \vec{r}_2 \\ \dots & & \dots \\ t_n & \longrightarrow & \vec{r}_n \end{array}$$

Это соответствие задает функцию $\vec{r} = \vec{r}(t)$, называемую ЗАКОНОМ ДВИЖЕНИЯ. Множество $\{\vec{r}_i\}$, упорядоченное по признаку возрастания времени t ($t_i < t_{i+1}$), определяет ТРАЕКТОРИЮ движения.

Заметим, что вообще говоря, функция $\vec{r}(t)$ не обязана быть непрерывной.

Очевидно, что неявно постулируется возможность ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ И ВОО ТРАЕКТОРИИ (—) К.М.

Запрет на область микромира обусловлен невозможностью одновременного измерения координаты микрочастицы и её скорости (импульса). Вспомним эксперимент с воздушным шариком, который лопнул пучком шариков для настольного тенниса!

Если предположить дополнительно, что время t , пространство $\{\vec{r}\}$ и закон движения $\vec{r}(t)$ непрерывны, то можно ввести понятия:

скорости $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ и ускорения $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$.

Тогда закон движения (траектория) можно определить заданием множества одновременных пар $\{\vec{r}, \vec{v}\}$ или $\{\vec{r}, \vec{p}\}$. Такое задание закона движения помогает уяснить причину запрета на это понятие в микромире.

 Классическое определение движения через закон движения приводит к тому, что фактически движение рассматривается как чередование СОСТОЯНИЙ ПОКОЯ. Но еще античные философы понимали противоречивость такого представления: ведь движущаяся частица как бы и находится в каждый момент времени в определенной точке пространства, и не находится в ней, ибо она уже "покидает" эту точку. Греческие философы придумали целую серию апорий о движении, из которых наиболее наглядна апория Зенона "Стрела".

 Обсудим содержание этой апории, переводя рассуждения Зенона на язык молекулярно-кинетических представлений. Пусть лучник стоит на старте, удерживая отстрелу на натянутой тетиве. Будем полагать, что пространство заполнено практически неподвижными молекулами воздуха. Перенумеруем все молекулы и будем определять положение какого-либо тела, перечисляя номера молекул, места которых заняло рассматриваемое тело. Зафиксируем номера молекул, вытесненных неподвижной стрелой. Когда лучник опустит тетиву и стрела полетит, то она будет вытеснять новые молекулы своим острием, в то время как позади отстрелы вытесненные ею прежде молекулы будут "возвращаться" на "свое место". Этот процесс непрерывного протекания молекул есть нечто новое, отличное от последовательного перечисления молекул, определяющих положение отстрелы в любые моменты времени. Определение движения через чередование состояний покоя ПРОТИВОРЕЧИВО ИЗНАЧАЛЬНО. Переход к бесконечно малым не снимает, а только "замазывает" противоречие,

 С точки зрения физики источник противоречия в том, что новое понятие - движение - является ОСНОВНЫМ понятием, а стало быть должно определяться через эксперимент, путем измерения некоторой НОВОЙ независимой характеристики, описывающей движение. Эксперимент же, о помощи которого определяется закон движения, устанавливает только связь $\vec{r} = \vec{r}(t)$ между СТАРЫМИ характеристиками $\vec{r}$ и t .

 В качестве новой основной характеристики можно выбрать,

например, ИМПУЛЬС. Нужно ввести эталон импульса, указать способ измерения (сравнения с эталоном), а связь F и $\vec{p}$ рассматривать как некоторый эмпирический (аксиоматический) закон, оправдаваемый только в классической механике. Такое описание движения может быть использовано и в микромире. Тогда запрет на одновременное задание точных координаты и импульса только подтверждает отличие движения от чередования состояний покоя.

⚠ Описанная схема требует проведения двух независимых экспериментов: по измерению импульса и по определению связи импульса с положением материальной точки в пространстве-времени. Эксперимент, устанавливающий закон $\vec{F} = \vec{F}(t)$, может быть использован вместо одного из них. Но он не может заменить оба сразу - охота за двумя зайцами всегда бесперспективна. Вместо второго эксперимента классика утверждает, что $\vec{F} = m\vec{a}$ ПО ОПРАВДАНИЮ. И понятие движения противоречиво тоже по определению. При этом принято сослаться на диалектику, что не способствует ни ясности понимания, ни освобождению от чувства омутного беспокойства.

Не удивительно, что уже в классической механике был реализован и такой вариант, когда импульс рассматривается как независимая переменная - независимая характеристика движения. Это - формализм Гамильтона. Идея гамильтоновой механики используется в квантовой механике и в статистической физике. Формализм Гамильтона (гамильтонова механика) будет рассмотрен в главе IV.

5. Законы (начала) Ньютона

Законы Ньютона определяют, КАК происходит движение. Они являются физическими АКСИОМАМИ - обобщением результатов эксперимента.

I) Первое начало Ньютона

Формулировка Ньютона: всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока какая-либо причина не выведет его из этого состояния.

Причина изменения состояния называется СИЛОЙ.

В такой формулировке первое начало предстает как явная

физическая аксиома, как обобщение результатов эксперимента. Правда, в ней неявно фигурирует не введенное еще понятие силы, но это не такой уж большой криминал. Новое понятие можно ввести, как основное, через измерение. Гораздо хуже, что формулировка Ньютона никак не оговаривает специфику используемой системы отсчета.

Для того чтобы поставить все точки над i , в настоящее время, по предложению Эйнштейна, первое начало принято формулировать в три этапа.

ПЕРВЫЙ ЭТАП. Вводится понятие **ИЗОЛИРОВАННОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ** - то есть такой материальной точки, взаимодействия которой со всеми остальными физическими телами пренебрежимо малы, а в идеале отсутствуют совсем. Тем самым, к недогованию правоверных, в экспериментальную науку вводится почти что кантовская "вещь в себе". Однако "нарушение конвенции" можно обойти, рассматривая изолированную материальную точку как предельную идеализацию реальной экспериментально обнаружимой неизолитрованной материальной точки. Если расстояния между такой реальностью и взаимодействующими с ней телами постепенно увеличивать (хотя бы мысленно), то взаимодействия будут столь же постепенно убывать. Получаемая в пределе абстракция будет соответствовать определению изолированной материальной точки. Возможен и такой вариант - точка, взаимодействия которой с другими телами неизменно взаимно уравновешиваются.

Зачем же понадобилось такое "незаконное" понятие? На этот вопрос отвечает второй этап.

ВТОРОЙ ЭТАП. Вводится понятие **ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА** - это такая система отсчета, относительно которой изолированная материальная точка либо покоится, либо движется с $\vec{v} = \omega \vec{r}$ (прямолинейно и равномерно) из любого начального положения $\vec{r}_0$ и при любой значении скорости $\vec{v}$.

Очевидно, что любая система отсчета, движущаяся с постоянной скоростью $\vec{v}$ относительно инерциальной системы отсчета, тоже инерциальна.

ТРЕТИЙ ЭТАП. После того как введены понятия изолированной материальной точки и инерциальной системы отсчета, первое начало Ньютона ободится к лаконичному утверждению:

СУЩЕСТВУЮТ ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

В этой трехступенчатой формулировке совершенно потерялось экспериментальное, аксиоматическое происхождение первого начала. Зато в физику введено чрезвычайно важное понятие инерциальной системы отсчета, а также указана сцена, на которой разыгрывается действие первого начала. Физический же смысл первого начала остался прежним - если нет взаимодействия, то нет и изменения движения.

Для описания причины, приводящей к изменению движения материальных тел, вводится понятие СИЛЫ $\vec{F}$. Это - модель, которую естественно рассматривать как некоторое новое **ОСНОВНОЕ**, простейшее понятие классической механики. Следовательно, сила должна определяться из эксперимента, без измерения. Нужно указать эталон (единицу) силы и способ сравнения измеряемой силы с эталоном. При этом, естественно, противопоставляется возможность измерения силы. ○ К.М.

Ограничение вытекает из уже отмеченного ограничения на изменение координат, а $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$. Как же её измерять, если неизвестно $\vec{r}$?

Поскольку кроме первого начала существует и второе, вопрос об определении понятия силы традиционно связывается с трактовкой второго начала.

2) Второе начало Ньютона

Запишем сразу математическую формулировку второго начала

$$m\vec{w} = \vec{F}(\vec{r}, t). \quad (5)$$

где $\vec{F}(\vec{r}, t)$ - сила, действующая в момент t на материальную точку массы m , находящуюся в точке $\vec{r}$. Уравнение (6) называется **УРАВНЕНИЕМ ДВИЖЕНИЯ**. Интегрируя уравнение движения, можно получить закон движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Заметим прежде всего, что второе начало основано на обобщении следующих экспериментальных фактов:

1. Независимость действия сил. Следовательно, силы и ускорения должны входить в уравнение **ЛИНЕЙНО**.

2. Силы и ускорения складываются как векторы. Следовательно, уравнение должно связывать **ВЕКТОРЫ** силы и ускорения, должно быть **ВЕКТОРНЫМ УРАВНЕНИЕМ**.

3. Ускорение $\vec{W}$, приобретаемое материальной точкой под действием силы $\vec{F}$, направлено вдоль силы: $\vec{W} \parallel \vec{F}$. Следовательно, в линейном уравнении, связывающем векторы $\vec{F}$ и $\vec{W}$, отсутствует аддитивная константа.

4. Отношение $F/m = c\omega t$ для каждого конкретного материального тела. Эта константа обозначается m - масса. Следовательно, $\vec{F} = m\vec{W}$.

5. Взаимодействие между телами осуществляется как дальное действие, эффект запаздывания отсутствует. Следовательно,

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = m\vec{W} = m\ddot{\vec{r}}. \quad (5')$$

В правой и левой части уравнения стоит один и тот же радиус-вектор положения материальной точки $\vec{r}$. Взаимодействие передается, распространяется мгновенно. Скорость распространения взаимодействия бесконечно велика, $c = \infty$.

⚠️ Каковы границы применимости второго начала? Из записи

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, t) \quad \text{⊖} \quad \text{Р.М.}$$

видно, что второе начало не может быть использовано для описания движений с субсветовой скоростью, когда нужно учитывать эффект запаздывания. Его нужно переделывать. В частности, чтобы сохранить стандартную форму записи, приходится рассматривать массу как тензорную функцию скорости.

Далее, из записи

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{F}(\dot{\vec{r}}, t) \quad \text{⊖} \quad \text{К.М.}$$

видно, что второе начало нуждается в переработке и для описания движения микрочастиц, ибо в микромире нельзя получить совместную информацию о координатах материальной точки и о её импульсе.

⚠️ Таким образом, сохраняя форму второго начала Ньютона, приходится поступить целым рядом привычных классических представлений.

Заметим, наконец, что второе начало, рассматриваемое как

аксиома (обобщение эксперимента), вводит в физику сразу ДВА новых понятия : силу и массу. И если одно из них может быть определено из уравнения Ньютона, то второе должно играть роль основного, простого понятия и вводиться в физику через измерение.

Какое из двух: сила или масса?

Рассмотрим варианты.

МАССА

Рассмотрим случай, когда основным понятием выбора масса тела. Тогда должен быть задан эксперимент - процедура сравнения массы тела рассматриваемой материальной точки с эталоном. Наиболее естественной кажется возможность пересчитать число "кирпичиков" - атомов, образующих данное тело (материальную точку). Тогда эталоном массы будет масса одного "кирпичика", а сама масса получает смысл количества вещества. К сожалению, мир устроен намного сложнее - великое многообразие сортов "кирпичей" в сочетании с "дефектом массы" доводит задачу учета их числа до полного абсурда.

Однако ещё Ньютон обнаружил окольную лазейку - вместо уравнения инертных масс можно сравнивать гравитационные, фигурирующие в законе всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} . \quad (7)$$

Здесь m_1, m_2 - гравитационные массы взаимодействующих тел; r - расстояние между ними; F - сила тяготения; γ - гравитационная постоянная.

Естественно, возникает вопрос о связи между массами инертной m_{in} и гравитационной m_g . Как всегда в сложных ситуациях на помощь приходит опыт. Неоднократно экспериментально установлено (одна из последних проверок датируется 1956 годом), что отношение масс инертной к массе гравитационной - постоянная величина, которая за счет выбора гравитационной постоянной γ может быть принята за единицу:

$$\frac{m_{g1}}{m_{i1}} = \frac{m_{g2}}{m_{i2}} = \dots = const \rightarrow 1.$$

Таким образом, вводится эталон массы - грамм, килограмм, а операция измерения сводится к элементарному взвешиванию.

Вариант, когда основной величиной является масса, удобен для расчетов (система CGS, СИ). Однако пристальный анализ показывает, что такое определение ничего не определяет. Ведь в операции взвешивания сравниваются ВЕСА тел, то есть СИЛЫ их взаимодействия с Землей. Но сила, при выборе массы за основную характеристику, определяется по второму началу, как произведение массы на ускорение. Получается порочный круг: сила определяется через массу, а масса - из сравнения сил!

СИЛА

Рассмотрим теперь другую возможность и выберем за основное простейшее понятие силу. Тогда согласно общему правилу физической аксиоматики сила должна определяться через измерение - сравнение с эталоном, а единица (эталон) силы входить в систему единиц (система MKS). Такое определение является исчерпывающим для основного понятия. Все другое, а им несть числа - иллюстрации проявления, образы или философские рассуждения.

Наиболее распространены являются следующие "определения" силы:

а) Причина изменения движения. Это представление вытекает из первого начала Ньютона. Но назвать причину изменения движения силой - не значит её определить. Возможно, такое определение удовлетворит философа. С точки же зрения физика - это не определение, а констатация факта существования таинственного "нечто", влияющего на движение. Введена "этикетка", условное обозначение понятия, физическая суть которого остается неопределенной.

б) Определение из курса Ольховского: сила есть такое влияние второго тела на первое, в результате которого первое тело приобретает ускорение, исчезающее при удалении второго тела на бесконечно большое расстояние от первого тела. Опять таки вместо определения имеем описание, теперь уже второго начала. Слово "сила" заменено словом "влияние". А стало быть задача сведена к задаче физического определения понятия "влияние".

Фактически оба "определения" - перечисление атрибутивов,

экспериментальных проявлений той сущности, которую мы называем силой. Не хватает откровенного признания необходимости измерения.

Р Недобротность поисков определения основных понятий не через эксперимент демонстрирует Китайгородский в книге "Физика - моя профессия". Он описывает случай, имевший место на выпускном экзамене по физике, на котором присутствовал представитель из вуза - физик. Разумеется, присутствие вузовского профессора нервировало не столько школьников, сколько учителя, который жаждал одобрения "светила" плодами трудов своих. Как часто бывает в таких случаях, школьники отвечали ничем своих возможностей. Профессор скучал и тихонько позевывал. Очередь доходит до первого ученика. Вопрос: "Сила, определение, примеры..." Ученик бойко чеканит: "Причина изменения движения, влияние... которое..." и так далее. Профессор зевает, учитель нервно задает наводящие вопросы, хотя и сам не знает, куда наводить и что этому светилу еще надо. Наконец, доведенный до отчаяния отличник ляпает: "Сила - это величина, измеряемая динамометром". Учитель хватается за сердце, а проснувшийся профессор лезет в потылицу и довольно хмыкает: суть-то схвачена верно! Ая да парень, сообразил!

Конечно, на такую силу можно измерить динамометром. Но дано физически грамотное определение - указан способ измерения и эталон (предложено уравнение о силе упругости).

Когда скоро за основную физическую величину выбирается сила, то масса из второго закона Ньютона определяется элементарно - $m = \frac{F}{a}$, то есть масса - это коэффициент пропорциональности в уравнении, связывающем силу и ускорение, имеющий смысл "меры инерции".

Δ Любопытно, что все модификации второго начала, как в области больших скоростей, так и в области микромира, связаны с улощением именно коэффициента m , массы: в релятивистской механике этот коэффициент превращается в тензорную функцию скорости, в квантовой теории твердого тела вводится тензор обратной эффективной массы, аналог $\frac{1}{m}$.

Так что, по-видимому, выбор силы в качестве основного поход-

ного понятия предпочтителен, хотя для расчетов система единиц, использующая в качестве основного понятия массу, - удобнее.

3) Третье начало Ньютона

Третье начало Ньютона обобщает экспериментальный факт ВЗАИМОСТИ действия физических тел друг на друга. Математическая запись

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (8)$$

или, точнее,

$$\vec{F}_{21}(\vec{r}_1) = -\vec{F}_{12}(\vec{r}_2) \quad \bigcirc \quad \text{Р.М.}$$

свидетельствует, что классическая механика - это теория дальнего действия. Отсюда следует и ограничение на релятивистскую область. В релятивистской механике скорость распространения взаимодействия - это скорость света $c \neq \infty$. В теориях ближнего действия, например в электродинамике, роль переносчика взаимодействия отводится полю. Поэтому третье начало в электродинамике превращается в условие, налагаемое на поле.

Отмеченное ограничение относится только к математической формулировке третьего начала, а не к утверждению, что нет "односторонних" действий, а есть только ВЗАИМОдействия.

В тех случаях, когда сила описывает действие НА какое-то физическое тело, она представляет собой модель, суммирующую и обобщающую совокупность "элементарных" взаимодействий.

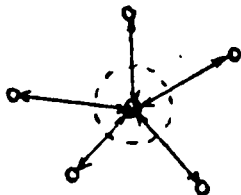


Рис. 4

Δ В самом деле, рассмотрим систему взаимодействующих физических тел (рис. 4). Допустим, что нас интересует только одно из них (на рисунке оно отмечено крестиком). Рассмотрим тело, взаимодействующее со всеми остальными - отрезки на рисунке -, которые взаимодействуют также и друг с другом (эти взаимодействия не указаны)

Если физическая ситуация такова, что влияние движения выбранного тела на остальные тела несущественно (пренебрежимо мало), то можно как бы выделить, "выстричь" выбранное тело и рассматривать его движение под совокупным действием всех остальных. Суммируя взаимодействия избранного тела со всеми остальными, получим силу, описывающую действие этих тел на нашего избранника. Это и есть ВНЕШНЯЯ сила, "приложенная" к данному телу.

Таковыми же оумарными моделями являются сила трения, сила сопротивления и многие другие силы.

В ряде учебников имеет место тенденция выделять НЬЮТОНОВСКИЕ силы - силы, удовлетворяющие третьему началу Ньютона и описывающие непооредственные элементарные взаимодействия. Вряд ли этой нивонировке следует придавать серьезное значение.

6. Классический принцип причинности

Классический принцип причинности является математическим следствием второго начала Ньютона. К аксиоматике он отнесен исключительно из-за оумественной и в чем-то роковой роли, которую он сыграл в неприятии физиками квантовой механики.

Запишем уравнение движения - уравнение Ньютона в виде (6')

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, t).$$

Это - векторное дифференциальное уравнение второго порядка. Оно эквивалентно трем скалярным дифференциальным уравнениям того же порядка. А следовательно, его общее решение - закон движения - содержит шесть ($2 \times 3 = 6$) произвольных постоянных:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \quad (9)$$

Для того чтобы из полученного множества решений выделить конкретно реализующийся закон движения, необходимо определять константы C_i ($i = \overline{1, 6}$). Это делается тривиально. Дифференцируя соотношение (9), получим

$$\vec{V} = \vec{V}(t, C_1, C_2, \dots, C_6).$$

Аддитивные константы, естественно, исчезнут. В результате имеем систему двух векторных (шести скалярных) алгебраических соотношений

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(t, C_1, \dots, C_6), \\ \vec{V} = \vec{V}(t, C_1, \dots, C_6). \end{cases}$$

Разрешая эту систему относительно C_i как неизвестных, находим

$$C_i = C_i(t, \vec{r}, \vec{V}) \quad i = 1 \dots 6.$$

Но $C_i = \text{const}$ по определению. Конкретное значение C_i может быть найдено, если известно, что в момент $t = t_0$ $\vec{r} = \vec{r}_0$ и $\vec{V} = \vec{V}_0$. Тогда

$$C_i = C_i(t_0, \vec{r}_0, \vec{V}_0) \quad i = 1 \dots 6.$$

Подставляя в (9), получим

$$\vec{r} = \vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0, \vec{V}_0).$$

Переопределяя $t \rightarrow t - t_0$, то есть выбирая t_0 за начало отсчета, имеем

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_0, \vec{V}_0). \quad (10)$$

Величины $\vec{r}_0$, $\vec{V}_0$ носят название НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ.

Теперь можно сформулировать КЛАССИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ -

⚠ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ЗАДАННОМ ПОЛЕ СИЛ ОДНОЗНАЧНО ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ. ⊖ К.М.

Запрет использования классического принципа причинности в микромире естествен, ведь в микромире невозможно однозначно получить информации о значениях $\vec{r}$ и $\vec{V}$, а следовательно, невозможно задать начальные условия.

▲ Почему же казалось бы вполне невинное математическое следствие поодулило причиной многочисленных драм неприятия квантовой механики?

▲ Видно тому, решающую негативную роль сыграли сделанные на классическом о понимании причинности философские обобщения. Астроном Лаплас и философ Кант расширили классический принцип причинности, придав ему смысл всеобщего ПРИНЦИПА КЛАССИЧЕСКОГО ДЕТЕРМИНИЗМА (определенности). Согласно принципу классического детерминизма Канта - Лапласа знания начальных условий позволяет однозначно (детерминированно) предсказать будущее и восстановить прошлое.

Такая ситуация действительно имеет место в астрономии, где классическая небесная механика позволяет по измеренным положениям и скоростям планет предсказать их будущее движение. На классическом принципе причинности основаны, в частности, абсолютно достоверные прогнозы солнечных и лунных затмений, противостояний планет и так далее.

Эта детерминированность описания движения вошла в привычку. Случаи, когда такое описание оказывалось невозможным, например в статистической физике, объяснялись практическими трудностями определения начальных условий для сложной системы многих частиц.

Поэтому, столкнувшись в микромире со статистической причинностью, когда прогнозы имеют только вероятностный характер - известны варианты возможного поведения системы в будущем и вероятности реализации каждого варианта, - физики не вдруг, не сразу и не все сумели преодолеть привычное убеждение в детерминированности природы.

До сих пор не прекратились попытки найти детерминированное описание движения микрочастицы с помощью так называемых скрытых параметров. Возражения против этой модели реальны и уместны на фоне квантовой механики и бесполезны в данном изложении.

▲ Однако возможен другой, более естественный для классической механики подход к обсуждению обязательности или ограниченности классического принципа причинности. Вспомним, какая экспериментальная база использовалась для определения второго начала Ньютона, породившего веру в детерминизм. Во всех эко-

периментах Ньютона никогда не фигурировали задачи о "развилке", то есть такие, когда движение могло реализоваться в нескольких вариантах.

? Но, может быть, многовариантность в классике неосуществима?

Где-то в конце 19-го века ректором Сорбонны был ученый охотник Бурдидан, оставивший потомкам полную глубокого смысла притчу о бурдидановом осле. Содержание притчи - элементарная задача. Перед очень и очень голодным ослом установлены на совершенно одинаковом расстоянии от его морды две совершенно одинаковые кормушки с совершенно одинаковыми порциями овса. Какую кормушку выберет осел для начала трапезы?

Бурдиданов осел оказался фанатиком принципа классического детерминизма - он одолен от голода, но выбора сделать не смог. Не правда ли, условия задачи абсолютно классические, микромира нет и в помине? Но нет и классического детерминированного решения. Нормальный неученый осел выберет для начала любую из двух кормушек с вероятностью 50%. Фифти - фифти, как говорят англичане.

Р Но, может быть, причина вероятностного подхода в биологической сущности оола? Вовсе нет! Можно построить изящный механический аналог знаменитого животного. Пусть в однородном поле тяжести (рис. 5) установлен желоб, по которому окатывается шарик А.

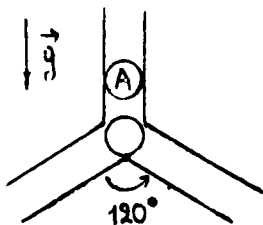


Рис. 5

шарик А. Допустим, что отенки желоба и шарик идеально отполированы, подогнаны и притерты, так что сила трения практически отсутствует. Тогда движение шарика в поле тяжести однозначно определяется начальным положением - вершина желоба, куда опускается шарик, и начальной скоростью его движения. Очевидно,

что можно вычислить с жесткой определенностью, в какой точке желоба будет находиться шарик в любой последующий за начальным момент времени.

Теперь "подложим шарiku овинья" - пристроим к желобу развилку: два желоба, абсолютно идентичных исходному, расходящи-

еся оимметрично в разные стороны под углом 120° . Шарик, попав на "острие" развилки, имеет полную возможность скатиться вправо или влево с одинаковой вероятностью. Так оно, разумеется, и происходит на деле. Однако принцип классического детерминизма требует, чтобы шарик либо остался "стоять" на развилке (при неупругом взаимодействии с острием), либо подпрыгнул вверх (в результате упругого соударения) и продолжал прыгать до бесконечности - ведь силы трения по условию отсутствуют. Учет сил трения во втором варианте возвращает шарик к первому варианту поведения. И он остается на острие, "раздумывая", куда же ему двигаться дальше, ведь начальные условия, которые описаны выше, не могут обеспечить выбора на развилке одного из двух возможных путей.

⚠ Этот нехитрый механический аналог буриданова осла показывает, что преолнутый детерминизм обусловлен выбором экспериментальной базы, в которой НЕТ МЕСТА ДЛЯ "ЗАДАЧ С РАЗВИЛКАМИ". Включить их в механику, то есть опираться теорию, можно только путем введения ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ АКСИОМ. Проще всего для этой цели использовать теорию вероятности. Разговоры же о том, что теория вероятности - это только прагматический прием, позволяющий избавиться от изучения и учета огромного количества мелких случайных воздействий, корректный учет которых мог бы привести к однозначному прогнозу, - сладкий самообман. Физика как наука экспериментальная может оперировать только о той информацией, которую может получить в измерениях. Надежды же на информацию, которую может предоставить бог или дьявол, вряд ли следует считать научными. К тому же никем не доказано, что "старик не играет в кости" согласно убеждению А.Эйнштейна и что детальный учет "всего и вся" приведет обязательно к детерминированному решению.

7. Принцип относительности

Принцип относительности является обобщением эксперимента, согласно которому равномерное и прямолинейное движение системы отсчета S , в которой находится наблюдатель, не может быть обнаружено ИЗНУТРИ системы. Нужен контакт с "внешним миром" - другой системой отсчета S' , нужно наблюдение ОТНО-

СИТЕЛЬНОГО перемещения обеих систем.

Принцип относительности формулируется так:

ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ ИНВАРИАНТНЫ В ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТ-
СЧЕТА, то есть в системах, движущихся друг относительно дру-
га с $\vec{V} = \text{const}$ - равномерно и прямолинейно.

В математике используются два термина:

КОВАРИАНТНОСТЬ - одинаковость формы записи уравнений в си-
стемах S и S' и

ИНВАРИАНТНОСТЬ - когда к условию ковариантности добавляется
требование одинаковости функциональных зависимостей в систе-
мах S и S' .

Невозможность экспериментально обнаружить движение с $\vec{V} =$
 $= \text{const}$ само по себе, безотносительно к другой системе - "аб-
солютное" движение - требует именно инвариантности законов
механики. То есть, если в S $m\vec{v} = \vec{F}(\vec{r})$ и $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r})$, то

$$\text{в } S' \quad m'\vec{v}' = \vec{F}'(\vec{r}') \text{ и } \vec{F}'(\vec{r}') = \vec{f}'(\vec{r}').$$

В противном случае, если бы $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{r}$, а $\vec{F}'(\vec{r}') = (\vec{r}')^2\vec{r}'$, физики
без труда сумели бы разобраться, в какой из двух систем S
или S' они находятся без "взгляда в окошко".

Получим теперь математические преобразования, описываю-
щие переход из системы S к системе S' . Из евклидовости си-
стем S и S' имеем

$$\vec{r}' = \vec{r}_0' + \vec{r}.$$

Откуда, дифференцируя, получаем классический закон сложения
скоростей

$$\vec{v}' = \vec{v}_0 + \vec{v}.$$

Здесь $\vec{v}_0 = \text{const}$ - скорость относительного движения S' и S .
Очевидно, что $\vec{r}_0' = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$. Начало отсчета времени всегда
можно выбрать так, чтобы $\vec{r}_0 = 0$. Тогда

$$\vec{r}' = \vec{v}_0 t + \vec{r}.$$

Добавляя к этому соотношению условие $t' = t$, получаем
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ

$$\textcircled{-} \text{ р.м. } \begin{cases} \vec{r}' = \vec{v}_0 t + \vec{r} \\ t' = t. \end{cases} \quad (11)$$

Принцип относительности можно теперь переформулировать так: ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ ИНВАРИАНТНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГАЛИЛЕЯ. (—) Р.М.

△ Вопросны ли обе приведенные формулировки? Или же одна верна, а другая уже?

Конечно же первая формулировка — инвариантность законов механики в инерциальных системах отсчета — ШИРЬ, ибо в ней не используется конкретная модель перехода от S к S' — преобразования Галилея. А эти преобразования неверны при релятивистских скоростях относительного движения. Вместе с ними запрещена в релятивистской механике и вторая формулировка принципа относительности, которая должна быть переформулирована и записана как требование инвариантности законов механики относительно преобразований Лоренца. Первая же формулировка — инвариантность законов механики в инерциальных системах отсчета — остается верной и при переходе к релятивистским скоростям.

Р Членское СЛЕДСТВИЕ из преобразования Галилея может быть получено путем двукратного дифференцирования уравнения

$$\vec{r}' = \vec{v}_0 t + \vec{r}.$$

Первое дифференцирование дает $\vec{v}' = \vec{v}_0 + \vec{v}$ — уже упоминавшийся закон сложения скоростей. Второе дифференцирование в силу $\vec{v}_0 = \text{const}$ приводит к условию

$$\vec{w}' = \vec{w},$$

то есть к совпадению ускорения в инерциальных системах отсчета.

Если к тому же вспомнить, что согласно принципу относительности, в системах S и S' уравнения движения ковариантны

$$m\vec{w} = \vec{F} \quad \text{и} \quad m'\vec{w}' = \vec{F}',$$

то при традиционном предположении $m = m'$ находим

$$\vec{F}' = \vec{F}.$$

Так что в инерциальных системах отсчета сила, так же как и

ускорение, оказывается абсолютной характеристикой.

Р Принцип относительности провозглашает по сути дела РАВНОПРАВЬЕ всех инерциальных систем отсчета. Тем самым он оказывается в оппозиции представлениям об абсолютном пространстве, впрочем, утверждавшие возможность существования избранной, привилегированной системы отсчета. Противоборство между принципом равноправия инерциальных систем отсчета и настоячивыми пристрастиями привилегированной, абсолютной такой системы характерно для физики от Галилея до Эйнштейна. Все это время принцип относительности рассматривался как: случайная, присущая только механике частная закономерность, такая нелюбимая физическая "падчерица". Абсолютное же пространство притягивало и манило физиков, как чаща святого Грааля рыцарей короля Артура.

Ни логических, ни тем более физических объяснений этому феномену нет. Можно предположить только, что в эпоху становления национальных государств, упрочнения абсолютных монархий, провозглашения единого государственного законодательства, введения единой монеты, единой системы мер, подчинения всех и вся единой королевской власти психологически естественно представление о существовании привилегированного, выделенного "от бога", абсолютного пространства. И психологически непонятна и неприемлема идея равноправия хотя бы всего навсего инерциальных систем отсчета. Физик, даже самый гениальный, остается человеком своей эпохи. На его научные представления оказывают давление воспитание, политические и религиозные убеждения и даже бытующие предрассудки.

Поэтому не только опыт Майкельсона передвинул стрелку веков научного "одобрения" в сторону принципа относительности, но и вся политическая обстановка Европы конца XIX века, ветер идей свободы, равенства и братства, развевавший знамена буржуазных революций. И принцип относительности, принцип РАВНОПРАВЬЯ инерциальных систем отсчета оказался психологически приемлемым и естественно верным для физиков двадцатого века. Хотя как раз физика двадцатого века в состоянии признать привилегии абсолюта системе отсчета, связанной с точкой первоначального Великого взрыва.

§ 3. ПРОИЗВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

Под производными понятиями будем понимать такие физические характеристики, которые выражаются через уже известные простейшие, основные понятия, то есть производные понятия вводятся ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ. Разумеется, принципиальной разницы между основными и производными понятиями нет, ибо понятия, принимаемые за основные, можно выбирать по-разному. Вспомним соперничество между массой и силой, домогавшихся "должности" основного понятия. Рассматриваемый вариант аксиоматики и выбор основных понятий соответствуют традициям классической механики.

В этом параграфе вводятся понятия для одной материальной точки. Поскольку очевидно, что границы применимости производных понятий НЕ ШИРЕ границ применимости основных понятий, через которые они определяются, знаки запрета и ограничения будут использоваться только в нетривиальных случаях.

1. Импульс

В классической механике ИМПУЛЬСОМ - количеством движения $\vec{p}$ материальной точки - называется произведение массы m на скорость $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (12)$$

О том, что такое определение естественно рассматривать, как эмпирическое соотношение

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{p}, \quad (13)$$

справедливое только в узкой области, уже говорилось выше

Если использовать определение (12), то второе начало Ньютона при условии $m = \text{const}$ может быть записано в виде закона изменения импульса

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (14)$$

Эта форма записи оказывается более общей, чем традиционная. В частности, она верна и в случае движения тела с переменной

массой $\triangle$.

2. Момент силы

МОМЕНТОМ СИЛЫ относительно начала координат (начала системы отсчета) называется векторное произведение радиовектора $\vec{r}$ на вектор силы $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (15)$$

Понятие момента силы позволяет выделить очень важную категорию сил, для которых $\vec{M} = 0$, поскольку $\vec{F} \parallel \vec{r}$. Такие силы называются ЦЕНТРАЛЬНЫМИ.

ПРИМЕРЫ: силы тяготения, электростатические кулоновские.

3. Момент импульса

МОМЕНТОМ ИМПУЛЬСА относительно начала координат (начала системы отсчета) называется векторное произведение радиовектора $\vec{r}$ на вектор импульса $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (16)$$

В некоторых, особенно в старых, учебниках момент импульса называется моментом количества движения.

Заметим, что используя второе начало Ньютона, из выражения для момента силы можно получить

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) - \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \frac{d\vec{L}}{dt} - \vec{v} \times \vec{p} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

поскольку по определению импульса $\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \vec{p} \parallel \vec{v}$.

Полученное соотношение - ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

является аналогом второго начала Ньютона и дублирует информацию, содержащуюся в этом последнем.

Как видно из закона изменения момента импульса, при $\vec{M} = 0$ $\vec{L} = \text{const}$. В этом случае движение происходит в одной плоскости - ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ. Действительно, если

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.}$$

то $\vec{r} \perp \vec{l}$ - некоторому постоянному вектору, а стало быть, всегда лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{l}$.

Для плоского движения часто используются полярные координаты: угол φ , образуемый радиус-вектором точки A с осью x , и его длина ρ (рис. 5).

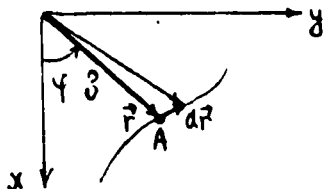


Рис. 5.

Можно ввести понятие угловой скорости ω , определяя её как

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi}.$$

Этой скалярной характеристике часто придается векторный смысл, а именно; рассматривается вектор

$$\vec{\omega} = \omega \vec{n}_z,$$

где орт $\vec{n}_z$ направлен вдоль оси z , параллельной постоянному вектору $\vec{l}$. Эта ось является, так сказать, "осью вращения".

4. Секторная скорость

Рассмотрим рис. 7. Материальная точка A движется по траектории BB' . Изменение радиус-вектора $\vec{r}$ за время dt равно $d\vec{r}$.

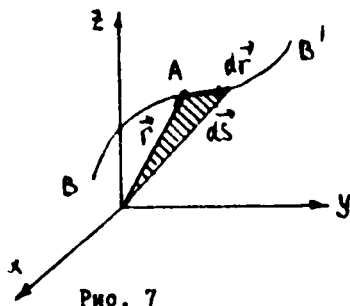


Рис. 7

СЕКТОРНОЙ СКОРОСТЬЮ $\vec{s}$ называется скорость обегания (ометания) радиус-вектором $\vec{r}$ поверхности конуса с вершиной в начале координат, направляющей которого служит траектория.

Нетрудно видеть, что

$$\vec{s} = \frac{d\vec{S}}{dt}. \quad (47)$$

На рисунке площадка $d\vec{S}$ заштрихована. Величина этой площадки от нуля до бесконечно малых второго порядка совпадает с половиной площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}$ и $d\vec{r}$, и определяется их векторным произведением

$$d\vec{s} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r}^2.$$

Следовательно,

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m} \vec{r} \times \vec{p} = \frac{\vec{L}}{2m}.$$

При $\vec{M} = 0$ момент импульса $\vec{L} = \text{const}$ и $\vec{\omega} = \text{const}$. Закон сохранения секторной скорости при $\vec{M} = 0$ носит название ЗАКОНА ПЛОЩАДИ: площади, описываемые радиус-вектором за равные времена, равны.

Для плоского движения можно провести любопытное сопоставление трех характеристик движения (рис. 8):

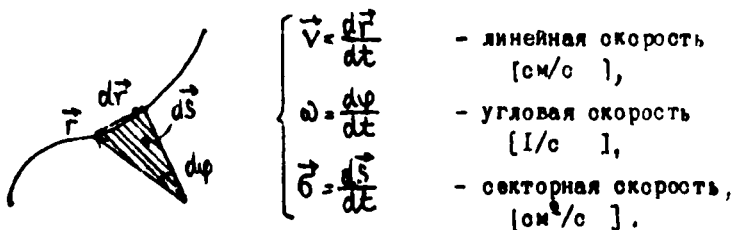


Рис. 8

5. Работа и энергия

РАБОТА A силы $\vec{F}$ на пути от точки 1 с радиус-вектором $\vec{r}_1$ до точки 2 с радиус-вектором $\vec{r}_2$ определяется как

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (18)$$

Заметим, что величину $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ - элементарную работу - в общем случае НЕЛЬЗЯ рассматривать как полный дифференциал. Для краткости записи индексами 1 и 2, обозначающие начальное и конечное положения материальной точки, опускаются, и предполагается, что начальное положение соответствует моменту $t = 0$.

С понятием работы связаны следующие понятия:

1) КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

В выражении для работы перейдем к интегрированию по скорости

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int m \dot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = \int d \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} = \int dT =$$

$$= T_2 - T_1.$$

Величина $T = \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$ называется КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИЕЙ материальной точки.

2) Потенциальная энергия

Запишем снова выражение для работы

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Введем понятие потенциальных сил: сила $\vec{F}$ называется ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ, если существует скалярная функция $U(\vec{r}, t)$, такая, что

$$\vec{F} = -\nabla U.$$

Здесь ∇ (набла) $\equiv \text{grad}$ (градиент) - это векторный оператор с компонентами в декартовой системе координат

$$\nabla \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

То есть оператор градиента имеет смысл оператора дифференцирования по радиус-вектору

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}.$$

Заметим, что центральные силы всегда потенциальны. Действительно, центральную силу можно записать в виде

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{r}}{r} f(r, t) = f(r, t) \nabla r = \left(\frac{\partial}{\partial r} \int f(r, t) dr \right) \nabla r =$$

$$= \nabla \int f(r, t) dr.$$

Следовательно,

$$U(r, t) = - \int f(r, t) dr.$$

Часто используемое понятие потенциал имеет смысл "удельной" потенциальной энергии, приходящейся на единицу "заряда".

ПРИМЕРЫ

Поле	Потенциальная энергия	Потенциал	"Заряд"
Электростатическое поле	$e\varphi$	φ	e
Кулоновское поле взаимодействия двух одинаковых зарядов	$\frac{e^2}{r}$	$\frac{e}{r}$	e
Однородное гравитационное поле	mgh	gh	m

Вычисляем работу потенциальных сил

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int \nabla U \cdot d\vec{r} = - \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) =$$

$$= - \int \left(dU - \frac{\partial U}{\partial t} dt \right).$$

Аналогично,

$$dU(\vec{r}, t) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt = \nabla U \cdot d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

Откуда

$$\nabla U \cdot d\vec{r} = dU - \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

Таким образом,

$$A = - \int dU + \int \frac{\partial U}{\partial t} dt = -(U_2 - U_1) + \int \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

Для стационарных полей, когда $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, работа потенциальных сил на замкнутом пути равна нулю:

$$A = U_1 - U_2 = 0.$$

3) Полная энергия

Для потенциальных сил можно сопоставить два выражения для работы.

Во-первых $A = \int dT$. Здесь T - кинетическая энергия.

Во-вторых, $A = -\int du + \int \frac{\partial u}{\partial t} dt$. Здесь u - потенциальная энергия.

Приравнявая эти выражения, получим

$$\int dT = -\int du + \int \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

или

$$\int d(T+u) = \int \frac{d(T+u)}{dt} dt = \int \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Сумма кинетической и потенциальной энергии

$$T+u = E$$

называется ПЛНМ механической энергией.

Полученное выше соотношение можно переписать в виде

$$\int \frac{dE}{dt} dt = \int \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

Дифференцируя по верхнему пределу, приходим к дифференциальному соотношению

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (19)$$

выражающему ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ПЛНМ ЭНЕРГИИ в поле потенциальных сил. Очевидно, что при $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ $E = \text{const}$.

Силы поля, для которых выполняется закон сохранения энергии, принято называть КОНСЕРВАТИВНЫМИ (от conserve (лат.) - сохранять).

4) Диссипативные силы

Под ДИССИПАТИВНЫМИ силами $\vec{F}^d$ понимаются любые силы, приводящие к диссипации - рассеянию полной механической энергии. Чаще всего это силы трения, силы сопротивления среды, например воздуха, и так далее. Рассеяние энергии имеет

омся перехода энергии механического движения в другую форму - обычно в тепловую энергию (энергию молекулярно-кинетического движения).

Для диссипативных сил, как вообще для любых непотенциальных сил

$$A^d = \int \vec{F}^d \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}^d \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int \vec{F}^d \cdot \vec{v} dt.$$

Следовательно,

$$\frac{dA^d}{dt} = \vec{F}^d \cdot \vec{v}.$$

Поэтому если на материальную точку наряду с потенциальными силами действуют непотенциальные, диссипативные силы, то закон изменения полной энергии следует выводить из условия баланса

$$\int dT = A^{\text{потен}} + A^d,$$

то есть

$$\int dT = -\int dU + \int \frac{\partial U}{\partial t} dt + \int \vec{F}^d \cdot \vec{v} dt$$

или

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{F}^d \cdot \vec{v} \quad (20).$$

- ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ при учете ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ.

Заметим, что система сил, действующих на материальную точку, может считаться консервативной ($E = \text{const}$), если

$$a) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \vec{F}^d = 0$$

- диссипативные силы отсутствуют, потенциальные силы стационарны;

$$б) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -\vec{F}^d \cdot \vec{v}.$$

- изменение потенциальной энергии со временем ("подкачка") компенсирует потери энергии на диссипацию (рассеяние).

6. Функция Лагранжа

В традиционной механике Ньютона ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА

$$\mathcal{L} = T - U \quad (21)$$

- некая "прекрасная незнакомка", появление которой имеет смысл разве что с точки зрения математического преобразования: перехода от переменных T, U к переменным $E = T + U$, $\mathcal{L} = T - U$.

Осмысленность и обязательность использования функции Лагранжа будет показана в аналитической механике.

Итак, для одной материальной точки имеем следующие производные понятия:

импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$
момент импульса	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
момент силы	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
работа	$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$
кинетическая энергия	$T = \frac{m\vec{v}^2}{2}$
потенциальная сила	$\vec{F} = -\nabla U$
полная энергия	$E = T + U$
функция Лагранжа	$\mathcal{L} = T - U$

При этом

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \implies \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{F} \cdot \vec{v}$$

- законы изменения импульса, момента импульса и полной энергии одной материальной точки.

§ 4. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

I. Конфигурационное пространство

Рассмотрим систему N материальных точек (частиц). Перенумеруем эти частицы индексом $i = 1 \dots N$. Тем самым мы постулируем ПРИНЦИП РАЗЛИЧИМОСТИ ЧАСТИЦ $\ominus$ К.М. $\triangle$

В классической механике всегда подразумевается, что можно, образно говоря, взять надерко о краской и "написать" на каждой частице присвоенный ей номер так, как это делается на лыжных, конькобежных и прочих соревнованиях. Пересчитать можно любые, даже тождественные частицы, например бильiardные шары или молекулы одноатомного газа. В микромире эта возможность исключается не только из-за того, что микрочастицы нельзя пересчитать впрямую, но и потому, что нельзя использовать понятие траектории - невозможно определить, где именно будет находиться микрочастица, зафиксированная в точке $\vec{r}$ t секунд назад.

Пересчитав классические частицы индексом i , будем приписывать этот индекс всем физическим характеристикам частиц. Так, i -я частица будет находиться в момент времени t в точке, определяемой радио-вектором $\vec{r}_i$, обладать массой m_i , импульсом $\vec{p}_i$, моментом импульса $\vec{L}_i$, кинетической энергией T_i и так далее. Ее движение будет описываться законом движения $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$, а множество точек $\{\vec{r}_i\}$ - определять ее траекторию в трехмерном евклидовом пространстве. Движение всех N частиц системы представляется как наложение N "картинок", так что изображение всех траекторий напоминает причудливо запутанный клубок линий.

Такое описание оказывается неудобным в целом ряде задач, особенно когда существенно различие во взаиморасположении (конфигурации) частиц, обладающих одинаковыми характеристиками, - тождественных частиц. Так, чрезвычайно трудно изобра-



Рис. 9

зять траектории частиц равной массой, движущихся до и после столкновения по одной прямой (рис. 9), даже в предположении, что одна из частиц, например № 2, до столкновения покоилась.

Намного нагляднее оказывается описание движения системы N частиц в так называемом КОНФИГУРАЦИОННОМ пространстве. Что это такое?

Запишем координаты всех N частиц в обычном трехмерном евклидовом пространстве (порядок перечисления, вообще говоря, безразличен) и сопоставим каждому элементу записанного множества "координату" u_j ($j = 1, 2, \dots, N$) $3N$ - мерного пространства:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} x_1 & y_1 & z_1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_3 & y_3 & z_3 & \dots & x_N & y_N & z_N \\ \downarrow & & & & & & & & & & & & & \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & \dots & & & & u_{3N} \end{array}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $3N$ - мерное пространство $\{u_j\}$ координат всех N частиц называется КОНФИГУРАЦИОННЫМ ПРОСТРАНСТВОМ. Расположение (конфигурация) частиц системы в любой момент времени соответствует одна точка конфигурационного пространства. Изменение взаиморасположения описывается траекторией в конфигурационном пространстве.

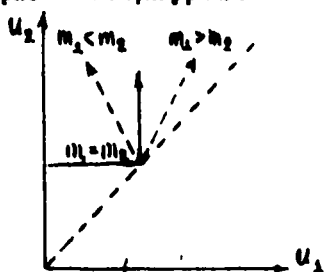


Рис. 10

Задача о столкновении двух частиц изображается в конфигурационном пространстве с исчерпывающей наглядностью (рис. 10). Сплошная линия - график столкновения частиц равной массы, пунктир - результат столкновения частиц с различными массами. Эту последнюю ситуацию изобразить в одномерном пространстве практически невозможно.

2. Проблема многих тел и пути её решения

Запишем уравнения движения - уравнения Ньютона для всех частиц системы. Получим систему уравнений

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^{in}$$

Здесь $\vec{F}_i^e$ - внешняя сила;

$\vec{F}_i^{in}$ - внутренняя сила (сила взаимодействия).

Смысл этих понятий поясняет рис. II. Частицы системы обозначены крестиками. Круточками отмечены частицы, не входящие в систему. Если движение этих частиц мало меняется при движе-

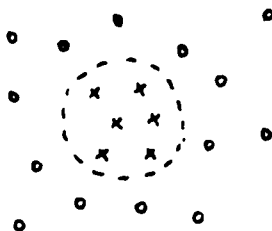


Рис. II

нии частиц выделенной системы, то взаимодействие частиц системы с "внешним миром" можно описать с помощью модели внешней силы $\vec{F}_i^e$ так, как это делалось при обсуждении третьего начала Ньютона. Остальные взаимодействия - внутренние взаимодействия частиц друг о другом. В результате этих взаимодействий на i -ю частицу будет дей-

ствовать сила

$$\vec{F}_i^{in} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}(\vec{r}_{ji}, t) = \vec{F}_i^{in}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь $\vec{F}_{ji}(\vec{r}_{ji}, t)$ - сила взаимодействия. i - я и j - я частицы.

[Р] Примером системы многих тел может служить студенческая группа. Внешние "силы" выступают в лице ректората, деканата, студентов других групп и потоков, общественных организаций и так далее. Внутренние силы - взаимодействия студентов группы между собой.

Записывая аргументы в выражениях для сил $\vec{F}_i^e$ и $\vec{F}_i^{in}$, получим систему уравнений

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^e(\vec{r}_i, t) + \vec{F}_i^{in}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \quad i = 1, \dots, N. \quad (22)$$

Система типа (22) в математике называется системой ЗАЦЕПЛЯЮЩИХСЯ уравнений - в каждое уравнение в i входят как аргу-

менты $\vec{F}_i^{in}$ переменные из всех других уравнений. Очевидно, что именно это обстоятельство затрудняет решение задачи - для произвольной системы зацепляющихся уравнений решение не известно.

Как и всегда, когда "буксует" математический аппарат, приходится искать физически омысленные упрощения и приближения. Заметим прежде всего, что "перепутывание" переменных происходит из-за силы взаимодействия. Таким образом, проблема многих тел - это проблема учета взаимодействия. Отсюда вытекают и идеи физических приближений и методов решения - путей учета взаимодействия.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ МНОГИХ ТЕЛ

1) Приближение отсутствия взаимодействия - одночастичное приближение

Если взаимодействие между частицами пренебрежимо мало по сравнению с внешними силами ($F_{ji} \ll F_i^e$), то ими можно пренебречь и система (22) превращается в систему N уравнений с разделенными переменными

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^e(\vec{r}_i, t) \quad i = 1 \dots N.$$

В этом случае решение сводится к N - кратному решению уравнений движения для ОДНОЙ частицы. Отсюда и название - одночастичное приближение.

ПРИМЕРЫ: идеальный газ, электроны в металле.

2) Моделирование одночастичного приближения

В некоторых ситуациях возможно заменить систему взаимодействующих реальных частиц системой не взаимодействующих модельных "квазичастиц". Условие замены - близость поведения модельной и моделируемой системы по какому-нибудь признаку или ряду признаков. Квазичастицы модельной системы иногда называют элементарными возбуждениями.

ПРИМЕРЫ: модель фононов - гармонических колебаний, одноэлектронное приближение в квантовой теории твердого тела.

3) Приближение слабой связи. Метод возмущений

Реализуется в случае, когда $F_i^{in} \ll F_i^e$, но пренебречь взаимодействием нельзя, необходимо более точное решение. Такая ситуация имеет место, например, при вычислении движения

планет солнечной системы. В роли внешней силы выступает взаимодействие планеты с Солнцем, в роли сил взаимодействия - взаимодействия планет друг с другом. Эта астрономическая задача решается по методу последовательных приближений. Учет влияния взаимодействия (возмущения) проводится в серии последовательных приближений - уточнений.

 Код решения

НУЛЕВОЕ приближение (решение невозмущенной задачи)

Подадим $\vec{F}_i^0 = 0$. Из решения системы

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^0(\vec{r}_i, t) \quad i = 1, N$$

определяются законы движения нулевого приближения

$$\vec{r}_i^0 = \vec{r}_i^0(t) \quad i = 1, N.$$

ПЕРВОЕ приближение

Сила взаимодействия (возмущение) берется в виде

$$\vec{F}_i^1(\vec{r}_1^0(t), \vec{r}_2^0(t), \dots, \vec{r}_N^0(t), t) \equiv \vec{f}_{i1}(t) \quad i = 1, N.$$

Система уравнений движения принимает вид

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^0(\vec{r}_i, t) + \vec{f}_{i1}(t)$$

- системы N уравнений с разделяющимися переменными. Из решения этой системы определяются законы движения первого приближения

$$\vec{r}_i^1 = \vec{r}_i^1(t) \quad i = 1, N.$$

ВТОРОЕ приближение

Сила взаимодействия (возмущение) берется в виде

$$\vec{F}_i^2(\vec{r}_1^1(t), \vec{r}_2^1(t), \dots, \vec{r}_N^1(t), t) \equiv \vec{f}_{i2}(t) \quad i = 1, N.$$

Система уравнений движения принимает вид

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^0(\vec{r}_i, t) + \vec{f}_{i2}(t) \quad i = 1, N.$$

Из решения этой системы определяются законы движения второго приближения

$$\vec{r}_i^2 = \vec{r}_i^2(t) \quad i = 1, N$$

и так далее вплоть до достижения требуемой точности, когда два последовательных приближения совпадают с точностью до некоторой заданной величины ε :

$$|\vec{r}_i^n - \vec{r}_i^{n+1}| \leq \varepsilon$$

Возможная разумная точность приближения определена достижимой точностью измеряемых экспериментальных параметров, входящих в уравнения движения — гравитационная постоянная, массы, начальные положения и скорости планет. Но, что вычисление законов движения с большей точностью просто абсурдно, а достигаемая "сверхточность" — фиктивна.

Ограничение метода последовательных приближений случаем МАЛОГО возмущения обусловлено тем, что только в этом случае, как доказывает математика, последовательность решений $\vec{r}_i^n(t)$ оказывается сходящейся. Для больших возмущений сходимость отсутствует и нет никакой гарантии, что $(n+1)$ -е приближение будет вычислять в точности по уравнению о $n - m$.

4) Задача двух тел

Существует точное решение задачи в случае $N=2$ при условии $\vec{r}_i^0 = 0$. Этот случай будет подробно рассмотрен в главе II. Как оказывается, задача двух тел сводится к задаче о движении частицы с приведенной массой $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

5) Приближение сильной связи. Движение системы как целого

В случае сильной связи, когда " $F_i^* \ll F_i^{in}$ ", движение части системы друг относительно друга мало по сравнению с общим, совокупным движением всей системы. Система как бы оказывается в этом случае в роли "увеличенной" материальной точки. Можно выделить и изучить совместное движение части системы — движение "микроматериальной точки". Такое совокупное движение оказывается зачастую более существенным для прогнозирования, чем накладывавшийся на него "фон" индивидуального движения части системы.

ПРИМЕРЫ: движение тайфунов или ураганов, перемещение облаков, выбросов дыма, содержащих вредные примеси, перемещение косяков рыбы и стад диких и домашних животных, перемещение

отудентов из аудитории в аудиторию согласно расписанию и так далее.

Очевидно, что для такого совокупного описания, когда в пределе система моделируется макроматериальной точкой, необходимо ввести суммарные, совокупные характеристики системы.

Естественны и приняты следующие "собственные" характеристики системы и её движения:

Полная масса $M \equiv \sum_i m_i$

Полный импульс $\vec{P} \equiv \sum_i \vec{p}_i$

Полный момент импульса $\vec{L} \equiv \sum_i \vec{l}_i$

Полная кинетическая энергия $T \equiv \sum_i T_i$

Внешние воздействия на систему могут быть описаны следующими характеристиками:

Главный вектор сил $\vec{F}^e \equiv \sum_i \vec{F}_i^e(\vec{r}_i)$

Главный момент сил $\vec{M}^e \equiv \sum_i \vec{M}_i^e(\vec{r}_i) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e(\vec{r}_i)$

Работа внешних сил $A^e \equiv \sum_i \int \vec{F}_i^e \cdot d\vec{r}_i$

В случае, когда внешние силы ПОТЕНЦИАЛЬНЫ, то есть когда $\vec{F}_i^e = -\nabla U_i^e$, работа внешних сил запишется в виде

$$A^e = \sum_i \int \vec{F}_i^e \cdot d\vec{r}_i = - \sum_i \int \nabla U_i^e \cdot d\vec{r}_i = - \sum_i \int du_i^e + \sum_i \int \frac{\partial U_i^e}{\partial t} dt.$$

Здесь использовано полученное ранее выражение

$$\nabla U \cdot d\vec{r} = dU - \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

для каждого $i = 1 \dots N$.

Внося суммирование (конечное!) под знак интегрирования и вводя понятие ПОЛНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ системы во внешнем поле $U^e \equiv \sum_i U_i^e$,

имеем

$$A^e = - \int dU^e + \int \frac{\partial U^e}{\partial t} dt$$

в полной аналогии с выражением для работы ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ сил, полученным для одной частицы (материальной точки).

§ 5. СУММАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВНЕШНИХ СИЛ.

ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим совокупность главного вектора и главного момента некоторой, вообще говоря, произвольной системы векторов. Для конкретности пусть это будет совокупность векторов внешних сил, приложенных к материальным точкам системы (рис. 12).

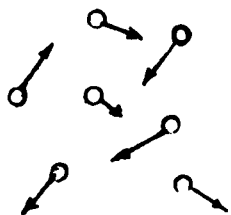


Рис. 12

По определению $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$, где $\vec{F}_i$ - векторы, приложенные в точках, определенных радиус-векторами $\vec{r}_i$. Спознается, как следует понимать формальную сумму $\vec{F}$ и где находится "точка приложения" вектора $\vec{F}$. В математике предлагается следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ КАК

ВЕКТОР, ПРОЕКЦИИ КОТОРОГО РАВНЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММЕ ПРОЕКЦИЙ ВЕКТОРОВ СЛАГАЕМЫХ. Точка приложения такого вектора произвольна, то есть главный вектор является СВОБОДНЫМ ВЕКТОРОМ. Напомним, что векторы $\vec{F}_i$ определяются как СКОЛЬЗЯЩИЕ ВЕКТОРЫ, точку приложения которых можно переносить только вдоль вектора $\vec{F}_i$.

Из приведенного определения следует, что формальная сумма $\vec{F}$ может быть получена при обычном векторном суммировании векторов $\vec{F}_i$, перенесенных в ЛЮБУЮ выбранную точку путем параллельного переноса, когда перенесенный вектор совпадает с исходным по длине и по направлению.

Системы векторов, полученные из данной путем параллельного переноса, называются ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ системами векторов (системами векторов, эквивалентных исходной). Эквивалентные системы векторов реализуются при запряжке лошадей ужом и веревкой (тройкой), когда каждая лошадь тянет свой собственный груз.

Полученный результат кажется парадоксальным - просуммировав векторы, приложенные вдоль направлений, проходящих через

определенные точки $\vec{r}_i$, мы получили вектор, точка приложения которого вообще произвольна. Парадокс снимается, как только мы вспомним, что система векторов описывается не только главным вектором, но и главным моментом, а операция переноса точки приложения главного вектора приводит к изменению главного момента.

Действительно, перенесем точку приложения главного вектора на вектор $\vec{R}$. Эта операция равноценна переносу начала системы координат. Пусть $\vec{r}_i$ - радиус-векторы положения частиц (точек приложения векторов $\vec{F}_i^e$) в системе координат S ; $\vec{\rho}_i$ - радиус-векторы положения частиц в системе S' . Положение начала O' системы S' в системе S определяет - оя радиус-вектором $\vec{R}$. Тогда

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i \quad i = 1, N.$$

Система S имеет смысл неподвижной системы отсчета - Н.С.О.

Например, это лабораторная система отсчета - Л.С. Система

S' - подвижная система отсчета - П.С.О., связанная с выбором начала O' (точки $\vec{R}$).

Нетрудно видеть, что по определению

$$\vec{F}^e = \sum_i \vec{F}_i^e(\vec{r}_i) = \sum_i \vec{F}_i^e(\vec{R} + \vec{\rho}_i) = \vec{F}_R^e,$$

ибо точки, в которых вычисляются векторы $\vec{F}_i^e$, остаются теми же самыми. В то же время

$$\begin{aligned} \vec{M}^e &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e = \sum_i \vec{R} \times \vec{F}_i^e + \sum_i \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i^e = \vec{R} \times \vec{F}^e + \sum_i \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i^e = \\ &= \vec{R} \times \vec{F}^e + \vec{M}_R^e. \end{aligned}$$

Здесь $\vec{M}_R^e = \sum_i \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i^e$ - момент сил, приложенных к частицам системы, относительно нового начала (точки O').

Итак,

$$\vec{M}^e = \vec{R} \times \vec{F}^e + \vec{M}_R^e, \quad (23)$$

где $\vec{R} \times \vec{F}^e$ - момент главного вектора, приложенного в точке O' относительно начала отсчета в системе S . Этот момент и выступает как "плата" за параллельный перенос.

Появление момента (пары сил) при параллельном переносе иллюстрирует рис. 13 . Для суммирования векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в



Рис. 13

точке приложения вектора $\vec{a}$, построены два вектора $\vec{b}'$ и $-\vec{b}$, такие, что $\vec{b}' \parallel \vec{b}$ и $\vec{b}' = \vec{b}$. Полученную систему векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{b}'$, $-\vec{b}$, эквивалентную системе векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно разбить на подсистему векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}'$, приложенных в одной точке, и подсистему векторов $\vec{b}$ и $-\vec{b}$, образующих пару векторов, эквива-

лентную моменту этой пары. Итак, мы имели векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приложенные в разных точках, и получили векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}'$, приложенные в одной точке, и пару $\vec{b}$, $-\vec{b}$.

Воспользуемся соотношением (23), чтобы провести классификацию систем векторов.

1) Пусть система такова, что главный вектор равен нулю: $\vec{F}^e = 0$. Тогда $\vec{M}^e = \vec{M}_A^e$ и главный момент системы не зависит от выбора начала подвижной системы отсчета. Система векторов сводится к ПАРЕ векторов (главному моменту).

Р Таким образом можно встретить, наблюдая за действиями муравьев, которые таскают гусеницу в муравейник. Тогда суммарные действия муравьиной команды оказываются равны нулю, перемещаемая гусеница начинает крутиться на одном месте.

2) Пусть система такова, что $\vec{F}^e \neq 0$, но $\vec{F}^e \perp \vec{M}^e$. Тогда всегда существует точка O' такая, что момент сил относительно этой точки равен нулю: $\vec{M}_{A'}^e = 0$, и система векторов полностью определяется ГЛАВНЫМ ВЕКТОРОМ. Очевидно, что радиус-вектор $\vec{R}$ этой точки может быть найден из уравнения

$$\vec{M}^e = \vec{R} \times \vec{F}^e$$

Решение этого уравнения возможно, ибо по условию $\vec{F}^e \perp \vec{M}^e$. Определяемый вектор $\vec{R}$ также перпендикулярен $\vec{M}^e$ (как множитель в векторном произведении и само это произведение). Тем же свойством будет обладать и любая точка R' , удов-

являющаяся уравнению прямой

$$\vec{R}' = \vec{R} + \vec{b},$$

где $\vec{b}$ - произвольный вектор, параллельный $\vec{F}^e$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линия, относительно которой главный момент системы векторов равен нулю, параллельная главному вектору этой системы, называется центральной осью системы векторов.

Мы видим, что в рассматриваемом случае $\vec{F}^e \perp \vec{M}^e$ система векторов сводится к главному вектору $\vec{F}^e$, приложенному вдоль центральной оси. Реализуется чистое поступательное движение. Таким образом, чтобы избавиться от сопутствующих вращений, необходимо так прикладывать силы, чтобы главный вектор сил был направлен вдоль центральной оси.

Р Например, забивая гвоздь, желательно так координировать удары молотка, чтобы центральная ось прикладываемых сил была направлена вдоль гвоздя. Вдоль центральной оси должно быть приложено и тяговое усилие (внешняя сила), если нас интересует именно и только поступательное перемещение некоторого объекта.

ПРИМЕР. Рассмотрим систему частиц с массами m_i в однородном поле тяжести, когда

$$\vec{F}_i^e = m_i \vec{E}.$$

Тогда

$$\vec{F}^e = \sum_i m_i \vec{E} = M \vec{E}.$$

Здесь $M \equiv \sum_i m_i$ - суммарная масса системы частиц.

Аналогично находим

$$\vec{M}^e = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{E} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{E} \frac{M}{M} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{F}^e.$$

Следовательно, $\vec{M}^e \perp \vec{F}^e$, а значит, можно найти центральную ось системы из условия

$$\vec{M}^e = \vec{R} \times \vec{F}^e.$$

Сравнивая выражения для $\vec{M}^e$, видим, что вектор

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad (24)$$

определяет положение центральной оси системы векторов в одно-

родном поле тяжести. Точка, заданная радиус-вектором $\vec{R} = \sum m_i \vec{r}_i$, называется центром тяжести, или центром масс, или ЦЕНТРОМ ИНЕРЦИИ. В этой точке (на линии центральной оси) $\vec{M}_R^e = 0$ и вращательные эффекты отсутствуют. 

3) В общем случае, когда $\vec{F}^e \not\perp \vec{M}^e$ и $\vec{F}^e \neq 0$, вектор $\vec{M}^e$ можно разложить на сумму векторов, направленных вдоль $\vec{F}^e$ ($\vec{M}_{||}^e$) и перпендикулярно $\vec{F}^e$ ($\vec{M}_{\perp}^e$):

$$\vec{M}^e = \vec{M}_{||}^e + \vec{M}_{\perp}^e.$$

Тогда

$$\vec{M}^e = \vec{M}_{\perp}^e + \vec{M}_{||}^e = \vec{R} \times \vec{F}^e + \vec{M}_R^e.$$

Выбирая $\vec{R}$ на линии "центральной" оси из условия

$$\vec{M}_{\perp}^e = \vec{R} \times \vec{F}^e,$$

находим

$$\vec{M}_{||}^e = \vec{M}_R^e.$$

Система векторов сводится к ГЛАВНОМУ ВЕКТОРУ и ГЛАВНОМУ МОМЕНТУ, параллельному центральной оси (главному вектору). Такая система векторов называется ДИНАМА (винт).

ПРИМЕР динами - действие отвертки при закручивании шурупа, пов.

ЗАМЕЧАНИЯ

1) Скалярное произведение $\vec{F}^e \cdot \vec{M}^e = \vec{F}^e \cdot \vec{M}_{||}^e = \vec{F}^e \cdot \vec{M}_R^e$

является инвариантом системы векторов, то есть не зависит от выбора начала П.О.О. (вектора $\vec{R}$). Это второй инвариант. Первым инвариантом является главный вектор.

2) Главный момент, вычисленный относительно радиус-вектора центральной оси, минимален. Действительно, $\vec{M}_R^e = \vec{M}_{||}^e$, а во всех других точках $\vec{M}^e = \vec{M}_{||}^e + \vec{M}_{\perp}^e = \vec{M}_R^e + \vec{M}_{\perp}^e > \vec{M}_R^e$.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

1) Система векторов характеризуется главным вектором и главным моментом векторов системы. Это значит, что если для материальной точки импульс и момент импульса, сила и момент силы являлись в некотором смысле дублирующими характеристиками, то для системы материальных точек существенны обе группы ха-

рактиотик; $\vec{P}$, $\vec{F}^2$ и $\vec{L}$, $\vec{M}$ $\triangle$

2) Центральная ось однородного поля тяжести проходит через центр инерции

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i.$$

Привилегированность, выделенность центра инерции вытекает также из теорем о центре инерции.

§6. СУММАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМЫ О ЦЕНТРЕ ИНЕРЦИИ

В предыдущем параграфе мы ввели две системы отсчета: неподвижную (лабораторную) и подвижную, начало которой определяет радиус-вектор $\vec{R}$. Будем теперь предполагать, что

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i,$$

то есть подвижная система отсчета является системой центра инерции (Ц.С.) или, как её иногда называют, центральной системой отсчета. Рассмотрим теперь, как можно записать полный импульс $\vec{P}$, полный момент импульса $\vec{L}$ и кинетическую энергию системы материальных точек T .

Пусть $\vec{r}_i$ - радиус-вектор i -й частицы в Л.С. - неподвижной системе отсчета,

$\vec{\rho}_i$ - радиус-вектор i -й частицы в Ц.С. - подвижной системе отсчета.

Тогда

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i, \quad (25)$$

причем
$$\sum_i m_i \vec{\rho}_i = 0, \quad (26)$$

ибо в Ц.С. радиус-вектор центра инерции равен нулю: центр инерции находится в начале координат. Очевидно, что также

$$\sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0. \quad (27)$$

Подставим в выражения для $\vec{P}$, $\vec{L}$, T значения $\vec{r}_i$ из (25) и воспользуемся условиями (26) и (27).

1. ТЕОРЕМА О ПОЛНОМ ИМПУЛЬСЕ

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$$

Следовательно,

$$\vec{P} = \sum_i m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho}}_i) = \sum_i m_i \dot{\vec{R}} + \sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i = M \dot{\vec{R}}$$

Итак,

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}} = M \vec{V} \quad (28)$$

- полный импульс системы материальных точек (частиц) равен импульсу материальной точки массой M , движущейся со скоростью движения центра инерции $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$.

Именно эта теорема лежит в основе модели материальной точки - поступательное движение системы материальных точек, рассматриваемой как некое единое целое, определяется поступательным движением макроматериальной точки с массой, равной массе системы, и находящейся в центре инерции.

2. ТЕОРЕМА О ПОЛНОМ МОМЕНТЕ ИМПУЛЬСА

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i (\vec{R} + \vec{\rho}_i) \times m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho}}_i) = \\ &= \sum_i \vec{R} \times m_i \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{R} \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i + \sum_i m_i \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i. \end{aligned}$$

Второе и третье слагаемые равны нулю в силу условий (25) и (27). Поэтому

$$\vec{L} = \vec{R} \times M \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

Но $M \dot{\vec{R}} = \vec{P}$ по первой теореме о центре инерции, а второе слагаемое имеет смысл полного момента импульса относительно центра инерции. Его принято обозначать $\vec{L}$ - собственный или внутренний момент импульса:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i \quad (29)$$

Итак,

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L} \quad (30)$$

и полный момент импульса складывается из момента импульса макроматериальной точки, находящейся в центре инерции, и собственного момента импульса системы $\vec{L}$. Заметим, что при $\vec{P} = 0$ $\vec{L} = \vec{L}^*$. Отсюда и название вектора $\vec{L}^*$.

3. ТЕОРЕМА О КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ - ТЕОРЕМА КЭНИГА

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i (m_i (\vec{R} + \dot{\vec{\rho}}_i)^2) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{R}^2 + \\ + \sum_i m_i \vec{R} \cdot \dot{\vec{\rho}}_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2.$$

Второе слагаемое равно нулю в силу (27), а третье имеет смысл кинетической энергии движения относительно центра инерции - кинетической энергии внутреннего движения

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2. \quad (31)$$

Поэтому

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + T. \quad (32)$$

Кинетическая энергия системы материальных точек складывается из кинетической энергии движения макроматериальной точки, "находящейся" в центре инерции, и кинетической энергии внутреннего движения.

⚠ ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

$$\begin{cases} \vec{P} = M \vec{V} = M \dot{\vec{R}} \\ \vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}^* \\ T = \frac{M V^2}{2} + T^* \end{cases}$$

Выделялось движение системы как целого - макроматериальной точки с массой M , положение которой определяет радиус-вектор центра инерции, и внутреннее движение - движение точек системы относительно центра инерции.

§ 7. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ПОЛНОГО ИМПУЛЬСА, ПОЛНОГО МОМЕНТА ИМПУЛЬСА И ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Законы изменения полного импульса, полного момента импульса и полной энергии системы материальных точек получим исходя из известных законов изменения импульса, момента импульса и полной энергии каждой из частиц системы. Мы знаем, что для i -й частицы

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^{in}, \quad \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i^e + \vec{M}_i^{in}, \quad i = 1 \dots N,$$

$$\int d\vec{r}_i = \int \vec{F}_i^e \cdot d\vec{r}_i + \int \vec{F}_i^{in} \cdot d\vec{r}_i.$$

Здесь, как отмечалось выше,

$\vec{F}_i^e$ — сила, действующая на i -ю частицу, внешняя по отношению ко всей системе; $\vec{M}_i^e = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e$;

$\vec{F}_i^{in} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ — суммарная сила взаимодействия i -й частицы со всеми остальными коллегами по системе (внутренние силы); $\vec{M}_i^{in} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{in}$.

I. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ПОЛНОГО ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК и уравнение движения центра инерции.

Для i -й частицы имеем

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^{in} \quad i = 1 \dots N.$$

Просуммируем все N уравнений. Суммирование по конечному числу частиц проходит под знак дифференцирования, где

$$\sum_i \vec{p}_i \equiv \vec{P}.$$

Далее, по определению $\sum_i \vec{F}_i^e \equiv \vec{F}^e$. Следовательно, получаем

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^e + \vec{F}^{in},$$

где

$$\vec{F}^{in} = \sum_i \vec{F}_i^{in} \quad , \quad \text{но} \quad \vec{F}_i^{in} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \quad .$$

Поэтому

$$\vec{F}^{in} = \sum_i \vec{F}_i^{in} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \quad .$$

Здесь использовано обозначение $\sum_{j \neq i}' \equiv \sum_{j \neq i}$ при условии $i \neq j$.

Но $\triangle \sum_i \sum_{j \neq i}' \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \left(\sum_i \sum_{j \neq i}' \vec{F}_{ji} + \sum_j \sum_{i \neq j}' \vec{F}_{ji} \right).$

Во втором слагаемом, стоящем в скобках, переобозначим индекс суммирования (это "наиме" индексом, и их можно обозначать как угодно $\triangle$), а именно: обозначим i через j , а j через i . Тогда

$$\sum_i \sum_{j \neq i}' \vec{F}_{ji} = \sum_j \sum_{i \neq j}' \vec{F}_{ji} = - \sum_j \sum_{i \neq j}' \vec{F}_{ij} \quad .$$

В последнем равенстве использованы третье начало Ньютона - $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ и произвольность порядка суммирования.

Подставляя полученный результат в исходное выражение, находим

$$\vec{F}^{in} = \frac{1}{2} \left(\sum_i \sum_{j \neq i}' \vec{F}_{ji} - \sum_j \sum_{i \neq j}' \vec{F}_{ji} \right) = \frac{1}{2} \sum_i \left(\vec{F}_{ji} - \vec{F}_{ji} \right) = 0 \quad .$$

Итак, $\vec{F}^{in} = 0$ в силу третьего начала Ньютона, и ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ПОЛНОГО ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК имеет вид

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^e \quad (33)$$

$\triangle$ ЗАМЕЧАНИЯ

1) Полученное выражение формально имеет вид как на изменение импульса макроматериальной точки, моделирующей всю систему. Поскольку по первой теореме о центре инерции $\vec{P} = M\vec{R}$, уравнение (33) может быть переписано в виде

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^e \quad .$$

имеет смысл уравнения движения центра инерции (материальной точки массой M , находящейся в центре инерции).

2) Как видно из (33), при $\vec{F}^e = 0$ $\vec{P} = \text{const}$ и оны взаимно-

действия не в состоянии повлиять на характер движения системы. Этот момент настолько акцентируется в научных учебниках и в научно-популярной литературе, что создается своеобразное психологическое табу на способность внутренних сил изменять полный импульс системы, а следовательно, и положение ее центра инерции.

3) Рассмотрим случай, когда $\vec{F}^e \neq 0$ и $\vec{P} \neq \text{const}$. Могут ли силы взаимодействия в этом случае влиять на изменение полного импульса? Нормально в уравнение движения (3) силы взаимодействия не входят: $\vec{F}^{in} = 0$.

Однако любой велосипедист прекрасно знает, что он перемещается за счет своих собственных усилий - если не крутить педали, велосипед не поедет. В таком же положении находится и автомобиль, колеса которого вращает работающий двигатель, установленный ВНТРИ автомобиля. Опять-таки движение происходит за счет внутренних сил.

Внешней силой $\vec{F}^e \neq 0$ в обоих случаях является сила трения - сила сцепления колес с поверхностью земли. При отсутствии трения, когда $\vec{F}^e = 0$, колеса будут прокручиваться вхолостую, пробуксовывать. Автомобиль при этом будет оставаться на месте, несмотря на полную работу двигателя, а велосипедист, потеряв равновесие, просто упадет.

В чем дело? Почему при $\vec{F}^e \neq 0$ силы взаимодействия получают возможность влиять на изменение движения?

По определению

$$\vec{F}^e \equiv \sum \vec{F}_i^e(\vec{r}_i),$$

где величина силы $\vec{F}_i^e$ вычисляется в ТОЧКЕ $\vec{r}_i$, где находится i -я частица системы. Но положения частиц определяются из решения системы уравнений движения

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^e(\vec{r}_i) + \vec{F}_i^{in}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \quad i = 1, N,$$

куда входят, естественно, и силы взаимодействия. Поэтому силы взаимодействия, изменяя положение частиц (конфигурацию системы), могут изменять и значения $\vec{F}_i^e$ и $\vec{F}^e$. Тем самым силы взаимодействия косвенным образом влияют на изменение

полного импульса системы $\triangle 1$.

Ситуация получается; как в некоторых парламентах, когда некая часть депутатов, будучи подкупленной, например мафией, проводит угодную ей политику, хотя сами мафиози в парламент и не входят.

Поэтому парадокс Имххаузена, вытащившего самого себя за волосы из болотной трясины, не так уж нелеп, как кажется на первый взгляд. И уж во всяком случае его нелепость нельзя объяснять, как это иногда делается, неспособностью внутренних сил влиять на изменение полного импульса системы и положение её центра инерции.

2. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ПОЛНОГО МОМЕНТА ИМПУЛСА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Для i -й частицы имеем

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i^e + \vec{M}_i^{in} \quad i = 1 \dots N.$$

Просуммируем все N уравнений. Суммирование по конечному числу частиц проходит под знаком дифференцирования, где

$$\sum_i \vec{L}_i \equiv \vec{L}.$$

Далее, по определению $\sum_i \vec{M}_i^e \equiv \vec{M}^e$. Следовательно, получаем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e + \vec{M}^{in},$$

где $\vec{M}^{in} \equiv \sum_i \vec{M}_i^{in}$. Но $\vec{M}_i^{in} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{in} = \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$.

Поэтому

$$\vec{M}^{in} = \sum_i \vec{M}_i^{in} = \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \sum_{ij}' \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}.$$

Вдвое снова использовано обозначение $\sum_{ij}' \equiv \sum_{ij}$ при $i \neq j$.

$\triangle 1$ Так же, как и в предыдущем расчете, разбиваем полученное выражение на полусумму двух одинаковых слагаемых:

$$\vec{M}^{in} = \frac{1}{2} \left(\sum_{ij}' \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \sum_{ij}' \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right),$$

и преобразуем второе слагаемое, переобозначая индекс суммирования ("немые" индексы) $i \rightarrow j, j \rightarrow i$, а также используя третье начало Ньютона $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Тогда

$$\sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \sum_{ji} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = -\sum_{ij} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \vec{M}^{in} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} - \sum_{ij} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right) = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{r}_{ji} \times \vec{F}_{ji}, \end{aligned}$$

ибо по определению $\vec{r}_{ji} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$. Очевидно, что $\vec{M}^{in} = 0$, только если $\vec{F}_{ji} \parallel \vec{r}_{ji}$, то есть для ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. Как правило, элементарные взаимодействия оказываются центральными, сила взаимодействия направлена вдоль линии, соединяющей взаимодействующие частицы.

Итак, $\vec{M}^{in} = 0$ для центральных сил взаимодействия в силу третьего начала Ньютона, и закон ИЗМЕНЕНИЯ ПОЛНОГО МОМЕНТА ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК имеет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e. \quad (34)$$

ЗАМЕЧАНИЯ

I) Полученное уравнение (34) имеет вид закона изменения момента импульса макроматериальной точки. Однако в отличие от аналогичного уравнения для одной материальной точки закон изменения полного момента импульса системы не дублирует и не следует из закона изменения полного импульса системы. Действительно, $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}$ и $\vec{M}^e = \vec{R} \times \vec{F}^e + \vec{M}_R^e$. Подставляя в (34), получаем

$$\frac{d}{dt}(\vec{R} \times \vec{P}) + \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F}^e + \vec{M}_R^e$$

или

$$\vec{R} \times \dot{\vec{P}} + \vec{R} \times \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F}^e + \vec{M}_R^e.$$

Но $\vec{P} = M\vec{V} = M\vec{R} \Rightarrow \vec{P} \parallel \vec{R}$, и первое слагаемое равно нулю. Таким образом, имеем

$$\vec{R} \times \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F}^e + \vec{M}_R^e,$$

в то время как из закона изменения полного импульса

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^e$$

следует только

$$\vec{R} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F}^e.$$

Оставшееся после учета закона изменения полного импульса соотношение

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_R^e \quad (34')$$

- закон изменения СОБСТВЕННОГО МОМЕНТА ИМПУЛЬСА. Напомним, что входящий в (34') момент внешних сил также вычисляется относительно центра инерции.

2) Как видно из (34'), при $\vec{M}^e = 0$ $\vec{L} = \text{const}$ и силы взаимодействия не в состоянии изменить величину полного момента импульса.

3) Естественно, возникает вопрос о возможности внезапительства сил взаимодействия в изменение полного момента импульса при $\vec{M}^e \neq 0$. В закон изменения полного момента импульса силы взаимодействия (центральные!) формально не входят, $\vec{M}^{\text{ин}} = 0$ 

Р Тем не менее общеизвестная процедура раскачивания качели наглядно демонстрирует, как внутренние силы изменяют полный момент импульса. Каждый, когда-либо имевший дело с качелями, знает, что раскачаться из квазиравновесного положения чрезвычайно трудно, а из равновесного положения раскачаться вообще невозможно, ибо при $\vec{M}^e = 0$ $\vec{L} = \text{const}$. Опытный завоеватель, угадав свою подружку на оканты, старается вывести качели из положения равновесия как можно дальше и лихо заекает "на ходу". Грациозно извиваясь, умелец изменяет по-

ложение своего тела, а следовательно, и конфигурации "материальных точек" системы. Качели раскачиваются все сильнее и сильнее. Говорят, в старину, когда на парковых качелях не было ограничителя, особенно отчаянные дикари раскачивались до того, что качели переворачивались вокруг оси подвеса.

2) В чем же дело? Почему отличный от нуля момент внешних сил допускает вмешательство внутренних сил, формально "изгнанных" из закона изменения момента импульса?

По определению $\vec{M}^e = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e(\vec{r}_i)$, так что момент внешних сил зависит от расположения (конфигурации) материальных точек ЯВНО, а не только через аргументы внешних сил. Силы взаимодействия, изменяя расположение частиц системы, изменяют и значение $\vec{M}^e$.

Р) снова мы имеем дело с влиянием "мафии" на "политику" через "подкупленных депутатов парламента". Теперь ясно, зачем надо выводить качели из равновесного положения: в равновесии $\vec{M}^e = 0$ и внутренние силы "доступа в парламента" не имеют. При отклонении от равновесия появляется $\vec{M}^e \neq 0$, возрастающий с возрастанием отклонения. "Депутаты подкуплены", и внутренние силы могут диктовать свою "политику" — качели начинают раскачиваться. Изменение момента $\vec{M}^e$ происходит за счет изменения конфигурации частиц системы под действием внутренних сил. Изменяя положение тела, качающийся на качелях создает как бы добавочный момент сил, приводящий к увеличению момента импульса системы.

4) Для системы материальных точек следует четко различать понятия **ОРИЕНТАЦИЯ ОРБИТЫ** и **ОРИЕНТАЦИЯ СИСТЕМЫ**. **ОРИЕНТАЦИЯ ОРБИТЫ**, как и в случае одной материальной точки, определяется направлением вектора момента импульса $\vec{L}$. **ОРИЕНТАЦИЯ СИСТЕМЫ** характеризуется положением в пространстве некоторой линии, проходящей через какие-нибудь, желательно фиксированные, точки системы. Переориентация системы определяется как изменение положения этой линии относительно неподвижной системы отсчета (лаборатории).

В случае $\vec{M}^e = 0$ $\vec{L} = \text{const}$. Силы взаимодействия (внутренние) не могут изменить ориентации орбиты, но могут изменить ориентацию системы за счет изменения её конфигурации и

отдельных частичных моментов импульса $\vec{\ell}_i$ при сохранении их суммы

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \dots + \vec{\ell}_N = \text{const.}$$

Такую переориентацию осуществляет, например, лекционный демонстратор, когда, стоя на скамье Жуковского, он поворачивается из положения "носом к аудитории" в положение "затылком к аудитории".

[Р] В учебнике Гудовицкого "Электричество и магнетизм" этот эффект описывается совершенно разумно и по сути неверно: "закон сохранения момента количества движения проявляется в известном факте поворота падающей кошки в воздухе, вследствие чего она падает на ноги, а не на спину". В описанном "факте" "проявляется" вовсе не закон сохранения момента импульса, хотя он и имеет место, а именно возможность ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ системы частиц за счет внутренних сил. Эту возможность используют не только кошки, но и парашютисты, а также артисты цирка и спортсмены при исполнении различного рода сальто во время прыжков.

К материальной точке понятие ориентации СИСТЕМЫ, естественно, неприменимо, законно говорить о переориентации только её орбиты, возможном исключительно при $\vec{M}^e \neq 0$.

3. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ системы материальных точек

Для i -й частицы имеем

$$\int dT_i = A_i^e + A_i^{in} + A_i^d \quad i = 1, N.$$

Здесь внешние силы подразделены на потенциальные, работа которых дает вклад A_i^e , и диссипативные, не потенциальные, работа которых равна A_i^d . A_i^{in} - работа сил взаимодействия, внутренних.

Просуммируем все N уравнения. Суммирование по конечному числу частиц может быть внесено под знаки интегрирования и дифференцирования. Тогда по определению $\sum_i T_i \equiv T$. Следовательно, имеем

$$\int dT = A^e + A^{in} + A^d,$$

где обозначено

$$A^e \equiv \sum_i A_i^e ; A^d \equiv \sum_i A_i^d ; A^{in} \equiv \sum_i A_i^{in}.$$

Как было показано выше, для потенциальных сил

$$A^e = \sum_i A_i^e = - \int dU^e + \int \frac{\partial U^e}{\partial t} dt. \quad (35)$$

Здесь $U^e \equiv \sum_i U_i^e$ - потенциальная энергия системы во внешнем поле.

Для диссипативных сил получаем

$$\begin{aligned} A^d &= \sum_i A_i^d = \sum_i \int \vec{F}_i^d \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \int \vec{F}_i^d \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} dt = \\ &= \sum_i \int \vec{F}_i^d \cdot \vec{v}_i dt = \int \left(\sum_i \vec{F}_i^d \cdot \vec{v}_i \right) dt. \end{aligned} \quad (36)$$

Наконец, для сил взаимодействия имеем

$$\begin{aligned} A^{in} &= \sum_i A_i^{in} = \sum_i \int \vec{F}_i^{in} \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \int \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i = \int \sum_{ij} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i = \\ &= \int \frac{1}{2} \left(\sum_{ij} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{ij} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j \right) \Delta \end{aligned}$$

Здесь снова использован прием, когда вычисляемая величина представляется в виде полу суммы двух одинаковых слагаемых. Преобразуем второе слагаемое, отящее в скобках, а именно: переобозначим индекс суммирования $i \rightarrow j$, $j \rightarrow i$, и воспользуемся третьим началом Ньютона $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Тогда

$$\sum_{ij} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{ji} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j = - \sum_{ij} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j.$$

Для работы A^{in} находим

$$A^{in} = \int \frac{1}{2} \left(\sum_{ij} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i - \sum_{ij} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j \right) = \frac{1}{2} \int \sum_{ij} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i ;$$

ибо $d\vec{r}_i - d\vec{r}_j = d\vec{r}_{ji}$.

Итак,

$$A^{in} = \frac{1}{2} \int \sum_{ij} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} \neq 0 \quad \Delta$$

Мы видим, что в отличие от главного вектора и главного момента внутренних сил, которые равны нулю в силу третьего начала Ньютона, и предположения о центральном характере сил взаимодействия РАБОТА ВНУТРЕННИХ СИЛ ОТЛИЧНА ОТ НУЛЯ $\triangle$

Р Наша политика "изгнания" сил взаимодействия из "рая" уравнений движения системы материальных точек неожиданно обнаруживает сходство с политикой страуса, спрятавшего голову в песок. Увы! Куда деваться от взаимодействия, если оно существует?!

Выше мы ввели ограничение на силы взаимодействия, которые предполагаются центральными, а следовательно потенциальными. В рамках этого предположения можно считать, что существует скалярная функция U_{ji} такая, что $\vec{F}_{ji} = -\nabla U_{ji}$. Величина $U_{ji} = U_{ij}$ имеет смысл ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ i -й и j -й частиц.

Вспомня, что $\nabla U \cdot d\vec{r} = dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt$, находим

$$\vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_{ji} = -\nabla U_{ji} \cdot d\vec{r}_{ji} = -dU_{ji} + \frac{\partial U_{ji}}{\partial t} dt.$$

Тогда

$$A^{in} = \frac{1}{2} \int \sum_{ij}' \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_{ji} = \frac{1}{2} \int \sum_{ij}' \left(-dU_{ji} + \frac{\partial U_{ji}}{\partial t} dt \right).$$

Пронеся конечное суммирование под знак дифференцирования и вводя обозначение

$$U^{in} = \frac{1}{2} \sum_{ij}' U_{ji}$$

для потенциальной энергии взаимодействия всех частиц системы, имеем

$$A^{in} = -\int dU^{in} + \int \frac{\partial U^{in}}{\partial t} dt \quad (37)$$

в полной аналогии с (35). Направляется объединение (35) и (37). Введем понятие ПОЛНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ системы материальных точек (частиц)

$$U \equiv U^e + U^{in} = \sum_i U_i^e + \frac{1}{2} \sum_{ij}' U_{ji}$$

и переписем условие баланса энергии

$$\int dT = A^e + A^d + A^{in} = -\int du^e + \int \frac{\partial u^e}{\partial t} dt + \int \sum_i \vec{F}_i^d \cdot \vec{V}_i dt + \\ -\int du^{in} + \int \frac{\partial u^{in}}{\partial t} dt = -\int du + \int \frac{\partial u}{\partial t} dt + \int \sum_i \vec{F}_i^d \cdot \vec{V}_i dt.$$

По аналогии с одной материальной точкой введем понятие ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ системы материальных точек

$$E = T + U.$$

Тогда наше уравнение будет иметь вид

$$\int d(T+U) = \int dE = \int \frac{dE}{dt} dt = \int \frac{\partial U}{\partial t} dt + \int \sum_i \vec{F}_i^d \cdot \vec{V}_i dt.$$

Дифференцируя по верхнему пределу, находим закон изменения полной энергии системы материальных точек

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_i \vec{F}_i^d \cdot \vec{V}_i. \quad (38)$$

ЗАМЕЧАНИЯ

1) Формально уравнение (38) напоминает аналогичное уравнение для одной материальной точки.

2) В отличие от таких скалярных характеристик системы материальных точек, как P , L , T , потенциальная U и полная E энергии НЕ АДДИТИВНЫ. Эта неаддитивность обусловлена существованием ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ (потенциальной энергии взаимодействия $U^{in} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} U_{ij}$).

3) Говорят, что рассматриваемая система материальных точек находится в поле консервативных сил, если $E = \text{const}$. Как видно из (38), это может быть, если

$$a) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \vec{F}_i^d = 0 \quad i = 1, N$$

- диссипативные силы отсутствуют, а потенциальные силы стационарны;

$$b) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -\sum_i \vec{F}_i^d \cdot \vec{V}_i$$

- потери энергии на рассеяние компенсируются изменением внешнего поля ("подкачка").

ГЛАВА II

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§1. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Интегралами движения называются произвольные функции от радиус-векторов материальных точек, их скоростей и времени, которые остаются постоянными во время движения:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N, t) = \text{const.}$$

Естественно, возникает вопрос - сколько НЕЗАВИСИМЫХ интегралов движения может иметь система N материальных точек?

Запишем уравнения движения - уравнения Ньютона:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \quad i = 1 \dots N.$$

Общее решение системы N векторных (или $3N$ скалярных) дифференциальных уравнений второго порядка может быть записано в виде

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, C_1, \dots, C_{6N}) \quad i = 1 \dots N, \quad (39)$$

где C_j ($j = 1 \dots 6N$) - произвольные постоянные (каждому

скалярному уравнению соответствуют две произвольные постоянные, а таких уравнений $3N \Rightarrow 2 \times 3N = 6N$.

Продифференцируем решения (39) по времени. Вместе с (39) получим систему $2N$ векторных или $6N$ скалярных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_i(t, C_1, \dots, C_{6N}) \\ \vec{v}_i = \vec{v}_i(t, C_1, \dots, C_{6N}) \end{cases} \quad i = \overline{1, N}. \quad (40)$$

Разумеется константы, входившие в $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, C_1, \dots, C_{6N})$ аддитивно, при дифференцировании исчезают.

Решая систему алгебраических уравнений (40), имеем

$$C_j = C_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t) \quad j = \overline{1, 6N}.$$

Конкретные значения констант C_j могут быть получены из начальных условий.

Найденные $6N$ интегралов движения $C_j = C_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t)$ называются ПЕРВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ДВИЖЕНИЯ. Это - дифференциальные уравнения первого порядка, ибо $\vec{v}_i = d\vec{r}_i/dt$. Проведено как бы одно, первое интегрирование уравнений движения. Отсюда и название - ПЕРВЫЕ интегралы движения.

Если из $3N$ первых интегралов движения

$$C_j = C_j(t, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N) \quad j = \overline{1, 3N}$$

Найти скорости $\vec{v}_i$ ($i = \overline{1, N}$):

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i(t, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, C_1, \dots, C_{3N}),$$

и подставить полученные функции $\vec{v}_i$ в остальные $6N - 3N = 3N$ первых интегралов движения, то в результате будем иметь

$$C_j' = C_j'(t, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, C_1, \dots, C_{3N}) \quad j = \overline{1, 3N}$$

$3N$ интегралов движения, которые определяют непосредственно законы движения

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, C_1, \dots, C_{3N}, C_1', \dots, C_{3N}') \quad i = \overline{1, N}.$$

Такие интегралы движения, не зависящие от скоростей $\vec{v}_i$, но зависящие от $3N$ произвольных постоянных, называют ВТОРЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ДВИЖЕНИЯ. Они могут быть найдены непосредственно из законов движения

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, C_1, \dots, C_{6N}) \quad i = 1 \dots N,$$

а стало быть получаются в результате ДВУКРАТНОГО интегрирования уравнений движения, отсюда и название - ВТОРЫЕ интегралы движения. Мы видим, что знание $3N$ вторых интегралов движения или $6N$ первых интегралов движения эквивалентно решению системы уравнений движения - определению законов движения.

ПРИМЕР

Рассмотрим движение материальной точки массой m в поле постоянной силы $\vec{F} = \text{const}$. Выберем ось $x \parallel \vec{F}$. Тогда в проекциях на оси декартовой системы координат уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F, \\ m\ddot{y} = 0, \\ m\ddot{z} = 0. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений немедленно получаем:

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{y}_0 = \text{const}, & y = \dot{y}_0 t + y_0, \\ \dot{z} = \dot{z}_0 = \text{const}, & z = \dot{z}_0 t + z_0. \end{cases}$$

Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся вдоль осей y и z вместе с материальной точкой, где $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$, и выберем начало отсчета в этой системе так, чтобы $y_0 = z_0 = 0$. В такой системе отсчета материальная точка движется только вдоль оси x согласно уравнению движения

$$m\ddot{x} = F.$$

После ПЕРВОГО интегрирования получаем

$$m\dot{x} = Ft + C_1$$

Откуда

$$C_1 = m\dot{x} - Ft = C_1(t, \dot{x}).$$

Это - один из двух первых интегралов движения. ВТОРОЙ интегрирование дает

$$mx = \frac{1}{2} Ft^2 + C_1 t + C_2.$$

Откуда

$$C_2 = mx - C_1 t - \frac{1}{2} Ft^2 = C_2(t, x, C_1)$$

- второй интеграл движения.

Недостающим первым интегралом движения является интеграл энергии

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x).$$

Действительно, потенциальная энергия материальной точки в поле $\vec{F} = \text{const}$ при нашем выборе системы отсчета равна

$$U = -Fx \quad \left(-\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(-Fx) = F \right).$$

Согласно закону изменения энергии

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(-Fx) = 0 \Rightarrow E = \text{const}.$$

Таким образом,

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} - Fx = E(x, \dot{x}) = \text{const}$$

- тоже первый интеграл движения.

Итак, имеем

$$\begin{cases} C_1 = m\dot{x} - Ft, \\ E = \frac{m\dot{x}^2}{2} - Fx \end{cases}$$

- два первых и

$$C_2 = mx - C_1 t - \frac{1}{2} Ft^2$$

- один второй интеграл движения в полном соответствии с усло-

дом интегралов движения для одномерной задачи.

Покажем, как можно получить второй интеграл движения (закон движения) с помощью двух первых интегралов движения. Используем один из первых интегралов для того, чтобы найти $\dot{x}$.

$$\dot{x} = \frac{C_1}{m} + \frac{F}{m} t.$$

Подставим полученное выражение в другой первый интеграл

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1}{m} + \frac{F}{m} t \right)^2 - Fx.$$

Умножим записанное соотношение на m/F . Получим

$$\frac{Em}{F} = \frac{m^2}{2F} \left(\frac{C_1^2}{m^2} + 2 \frac{C_1 F}{m^2} t + \frac{F^2}{m^2} t^2 \right) - mx$$

или

$$\frac{Em}{F} = \frac{C_1^2}{2F} + C_1 t + \frac{F t^2}{2} - mx.$$

Переносим первое слагаемое влево и меняя знаки по обе стороны равенства, найдем

$$\frac{C_1^2}{2F} - \frac{Em}{F} = C_2 = mx - C_1 t - \frac{F t^2}{2}$$

- уже известный второй интеграл движения.

Преимущество алгебраического способа вычисления вторых интегралов фиктивно - ведь для этого надо знать все первые интегралы движения! Но получить такую информацию бывает иногда намного сложнее, чем выполнить второе интегрирование. Так, первые интегралы $\dot{y} = A = \text{const}$, $\dot{z} = B = \text{const}$ рассмотренного примера после элементарного интегрирования приводят к законам движения $y = At + a$, $z = Bt + b$ (соответственно вторыми интегралами являются $a = y - At$, $b = z - Bt$). Догадаться же, что осуществит независимые первые интегралы

$$a = y - \dot{y}t, \quad b = z - \dot{z}t,$$

не зная вторых интегралов, можно только по озарению свыше.

⚠ Заметим, наконец, что интегралы движения представляют собой некоторые сохраняющиеся величины. Эти величины могут соответствовать каким-либо физическим характеристикам. И наобо-

пот - сохраняющиеся физические величины всегда являются интегралами движения. Это значит, что законы сохранения позволяют получать информацию об интегралах движения.

Из законов изменения полного импульса, полного момента импульса и полной энергии системы материальных точек

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^e, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_i \vec{F}_i^e \cdot \vec{V}_i$$

следует, что

$$\vec{P} = \text{const}, \quad \text{если } \vec{F}^e = 0,$$

$$\vec{L} = \text{const}, \quad \text{если } \vec{M}^e = 0.$$

$$E = \text{const}, \quad \text{если } \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_i \vec{F}_i^e \cdot \vec{V}_i = 0.$$

Нетрудно видеть, что условия $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}_i = \text{const}$, $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i = \text{const}$ и $E = \sum_i \frac{m_i}{2} \vec{V}_i^2 + U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = \text{const}$ определяют 7 (3+3+1) ПЕРВЫХ интегралов движения (два векторных и один скалярный).

Поскольку, как было показано выше, $\vec{P} = M\vec{V} = M\vec{R}$, из первого интеграла $\vec{P} = \text{const}$ немедленно получается закон движения центра инерции

$$\vec{R} = \vec{V}t + \vec{R}_0,$$

а следовательно, и второй интеграл движения

$$\vec{R}_0 = \vec{R} - \vec{V}t,$$

называемый иногда интегралом движения центра инерции.

Два векторных ($\vec{P} = \text{const}$ и $\vec{L} = \text{const}$) и один скалярный ($E = \text{const}$) в совокупности дают семь первых интегралов движения, а один векторный $\vec{R}_0 = \text{const}$ - три вторых интеграла движения. Перечисленные 7+3 = 10 интегралов движения считаются стандартными. Они имеют четкий физический смысл, следуют из законов сохранения известных физических величин и могут быть найдены из условий выполнения этих законов.

Р Определение нестандартных интегралов движения - операция не формализуемая, алгоритма не имеет и подвержена капризам фортуны в гораздо большей степени, чем достижение нового мирового рекорда в спорте. Зато и оценивается соответственно!

§ 2. УСЛОВИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЯХ И ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ СИММЕТРИЯ

1. Закон сохранения импульса и однородность пространства

Из закона изменения полного импульса $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^e$ очевидно, что $\vec{P} = \text{const}$, если $\vec{F}^e = 0$. В потенциальных полях

$$\vec{F}^e = \sum_i \vec{F}_i^e = -\sum_i \nabla U_i^e = -\nabla \sum_i U_i^e = -\nabla U^e,$$

а следовательно, в компонентах

$$P_x = \text{const}, \text{ если } \frac{\partial U^e}{\partial x} = 0,$$

$$P_y = \text{const}, \text{ если } \frac{\partial U^e}{\partial y} = 0,$$

$$P_z = \text{const}, \text{ если } \frac{\partial U^e}{\partial z} = 0.$$

Сохранение x - проекции импульса P_x имеет место, если потенциальная энергия U^e не зависит ЯВНО от x , то есть система обладает симметрией относительно любых трансляций вдоль оси x , все точки вдоль x - направления обладают одинаковыми свойствами, принципиально неразличимы, пространство ОДНОРОДНО в x - направлении. Выполнение аналогичных требований обеспечивает сохранение проекций $P_y = \text{const}$ и $P_z = \text{const}$.

Таким образом, условием выполнения законов сохранения проекций импульса является пространственная однородность в направлении сохраняющейся проекции. Сохранение вектора импульса $\vec{P}$ имеет место при полной (в любом направлении) ОДНОРОДНОСТИ ПРОСТРАНСТВА. $\triangle$

Для того чтобы определить, сохраняется ли проекция импульса на какое-либо направление, надо мысленно провести трансляцию системы (или системы отсчета) в рассматриваемом направлении и посмотреть, изменилось ли что-либо после такой трансляции? Если нет, то есть если проведенная трансляция является операцией симметрии, то данная проекция сохраняется.

$\triangle$ Для тренировки рассмотрим несколько мысленных мини-задачек. Будем задавать симметрию источника поля (природа поля не существенна; это может быть и поле тяжести, и электростатическое поле). Произволя мысленно смещения вдоль трех направле-

ний осей декартовых координат x, y, z и устанавливая, какое из этих движений является операцией симметрии, наделен сохраняющиеся компоненты импульса.

ЗАДАЧИ. Источником поля являются:

- 1) Бесконечная однородная плоскость, совпадающая с координатной плоскостью $z=0$.
- 2) Бесконечная однородная нить, натянутая вдоль оси z ($x=y=0$).
- 3) Силовой центр, находящийся в начале координат ($x=y=z=0$).

Проводим мысленные трансляции вдоль осей x, y, z . Думаем Определяем, какие проекции импульса сохраняются:

$P_x ? P_y ? P_z ? \dots$

ОТВЕТЫ

- 1) $P_x = \text{const}, P_y = \text{const}, P_z \neq \text{const}.$
- 2) $P_z = \text{const}, P_x, P_y \neq \text{const}.$
- 3) $P_x, P_y, P_z \neq \text{const}.$

Заметим, что сохранение полного импульса или его проекций обеспечиваются трансляционной симметрией не только потенциальной энергии во внешнем поле $U^e(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$, но и собственной потенциальной энергией $U = U^e + U^{\text{int}}$. Это связано с тем, что потенциальная энергия взаимодействия определяется только взаиморасположением (конфигурацией) частиц системы и не зависит ни от выбора начала системы координат, ни от трансляции этого начала любом направлении.

Условие инвариантности потенциальной энергии относительно трансляций (условие трансляционной симметрии) может быть записано в виде

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = U(\dots, \vec{r}_i \dots) = U(\dots, \vec{r}_i + \delta \vec{r}_i \dots).$$

Здесь $\delta \vec{r}_i$ — ОДИНАКОВОЕ для всех частиц системы БЕСКОНЕЧНО МАЛОЕ смещение (смещение начала координат); зависимость потенциальной энергии от времени не отмечена для простоты записи.

ЗАМЕТИМ, что требование симметрии, относительно любых, в том числе и бесконечно малых, трансляций существенно. Симметрия системы (поля) относительно конечных трансляций (например, симметрия кристаллической решетки) к закону сохранения

импульса не приводит. Так, электрон, находящийся в поле цепочки ионов, имеет одинаковую потенциальную энергию при смещении на постоянную (период) решетки. Однако такое перемещение сопровождается изменением потенциальной энергии электрона, и стало быть о законе сохранения импульса не может быть и речи.

2. Закон сохранения момента импульса и изотропность пространства

Из закона изменения полного момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e$$

очевидно, что $\vec{L} = \text{const}$, если $\vec{M}^e = 0$. В потенциальных полях

$$\vec{M}^e = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e = - \sum_i \vec{r}_i \times \nabla U_i^e.$$

Рассмотрим подробнее одно из слагаемых $\vec{M}_i^e$, опустив для упрощения записи индекс i и e :

$$\vec{M} = -\vec{r} \times \nabla U = - \begin{vmatrix} \vec{F}_x & \vec{r}_y & \vec{r}_z \\ x & y & z \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Проекция M_z может быть записана в виде

$$M_z = - \left[x \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial x} \right].$$

Перейдем к цилиндрическим координатам, выбирая в качестве оси z цилиндрических координат ось z . Тогда

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Покажем, что $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = x \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial x} = -M_z$.

Действительно, рассматривая U как сложную функцию перемен-

ных ρ , φ , z , имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Но

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -y \sin \varphi = -y, \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi = x, \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0. \end{cases}$$

А следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = -M_z,$$

что и требовалось доказать.

Величину M_z можно вычислить и "в лоб", переходя к переменным цилиндрической системы координат в производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Однако эти расчеты намного длиннее проделанных.

Таким образом,

$$M_z^e = \sum_i M_{iz}^e = - \sum_i \frac{\partial u_i^e}{\partial \varphi_z} = - \frac{\partial}{\partial \varphi_z} \sum_i u_i^e = - \frac{\partial u^e}{\partial \varphi_z}.$$

Здесь индекс z подчеркивает, что поворот на угол φ_z совершается вокруг оси z .

Аналогично, выбирая в качестве оси z цилиндрической системы координат оси x и y , находим

$$M_x^e = - \frac{\partial u^e}{\partial \varphi_x}, \quad M_y^e = - \frac{\partial u^e}{\partial \varphi_y}.$$

Здесь индексом x и y указывают, что повороты на углы φ_x , φ_y совершаются вокруг осей x , y соответственно.

Итак, имеем

$$M_x^e = - \frac{\partial u^e}{\partial \varphi_x}, \quad M_y^e = - \frac{\partial u^e}{\partial \varphi_y}, \quad M_z^e = - \frac{\partial u^e}{\partial \varphi_z}.$$

Теперь условия выполнения законов сохранения проекций момента импульса на оси x , y , z могут быть записаны в виде

$$L_x = \text{const}, \text{ если } M_x^e = -\frac{\partial U^e}{\partial \varphi_x} = 0,$$

$$L_y = \text{const}; \text{ если } M_y^e = -\frac{\partial U^e}{\partial \varphi_y} = 0,$$

$$L_z = \text{const}, \text{ если } M_z^e = -\frac{\partial U^e}{\partial \varphi_z} = 0.$$

Мы видим, что $L_x = \text{const}$, если U^e не зависит НТНО от φ_x — система обладает симметрией относительно поворотов вокруг оси x , имеет место "осевая" пространственная изотопия — эквивалентность, неразличимость направлений, перпендикулярных оси x .

Выполнение аналогичных требований обеспечивает сохранение проекций момента L_y и L_z .

Таким образом, условием сохранения проекции момента L на некоторое направление является инвариантность потенциальной энергии U^e при вращениях системы (системы координат) вокруг этого направления. Сохранение вектора момента импульса имеет место при инвариантности потенциальной энергии относительно вращения вокруг любых направлений (осей), то есть при полной ИЗОТРОПНОСТИ пространства. 

Для того чтобы определить, сохраняется ли проекция момента импульса на какое-либо направление, надо мысленно провести поворот системы (или системы отсчета) вокруг рассматриваемого направления и проверить, изменилось ли что-либо после такого поворота. Если нет, то есть если проведенное вращение (поворот) является операцией симметрии, то данная проекция момента импульса сохраняется.

 Для тренировки рассмотрим несколько мини-задачек. Будем задавать симметрию источника поля так же, как мы это делали, анализируя закон сохранения импульса. Проводя мысленно вращения вокруг направлений декартовых осей координат x, y, z и устанавливая, какое из этих вращений является операцией симметрии, найдем сохраняющиеся компоненты момента импульса.

 ЗАДАЧИ. Источником поля является:

- 1) Бесконечная однородная плоскость $z=0$.
- 2) Бесконечная однородная нить, натянутая вдоль оси z ($x=y=0$).

3) Силовой центр, находящийся в начале координат ($X=Y=Z=0$).

Проводим мысленно вращения вокруг осей $X, Y, Z \dots$

Думаем... Определяем, какие проекции момента импульса сохраняются: $L_x ? L_y ? L_z ?$

ОТВЕТЫ

1) $L_z = \text{const}$, $L_x, L_y \neq \text{const}$.

2) $L_z = \text{const}$, $L_x, L_y \neq \text{const}$

3) $\vec{L} = \text{const}$ - сохраняется проекция вектора $\vec{L}$ на любое направление.

Заметим, что сохранение момента импульса или его проекций обеспечиваются симметрией не только потенциальной энергии системы во внешнем поле $U^e(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$, но и полной потенциальной энергии $U = U^e + U^{\text{вз}}$. Это связано с тем, что потенциальная энергия взаимодействия определяется только взаиморасположением (конфигурацией) частиц системы и не зависит ни от выбора направления осей системы координат, ни от порога этой системы в любом направлении.

Условие инвариантности потенциальной энергии относительно вращений (условие осевой или сферической симметрии) может быть записано в виде

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = U(\dots \vec{r}_i \dots) = U(\dots \vec{r}_i + \delta \vec{r}_i \dots),$$

где $\delta \vec{r}_i$ согласно рис. 14 может быть представлено как

$$\delta \vec{r}_i = \vec{r}_i \delta \varphi = r_i \sin \theta_i \delta \varphi \Rightarrow$$

$$\delta \vec{r}_i = \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_i.$$



Рис. 14

где $\delta \vec{\varphi}$ - вектор, направленный вдоль оси вращения, длиной $\delta \varphi$.

Итак, получаем следующее условие инвариантности потенциальной энергии:

$$U(\dots \vec{r}_i \dots) = U(\dots \vec{r}_i + \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_i \dots).$$

$\delta \varphi$ - одинаков для всех точек системы БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫЙ ПОВОРОТ

(поворот системы координат). Зависимость потенциальной энер-

гии от времени не отмечена для упрощения записи.

△ Заметим, что требование симметрии относительно любых, в том числе и бесконечно малых, поворотов — существенно. Ибо симметрия системы (поля) относительно конечных вращений (например, когда источником поля является однородная бесконечная трехгранная призма) к закону сохранения момента импульса или его компонент не приводит. Перемещение (вращение) между точками с одинаковой потенциальной энергией происходит с изменением т.коковой, приводящим к отличному от нуля моменту внешних сил.

3. Закон сохранения энергии и однородность времени

В потенциальных полях закон изменения полной энергии имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Откуда немедленно следует, что

$$E = \text{const} \quad , \quad \text{если} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad —$$

потенциальная энергия не зависит от времени ЯЕНО, все моменты времени эквивалентны, неразличимы; имеет место ОДНОРОДНОСТЬ ВРЕМЕНИ. △

Условие инвариантности потенциальной энергии относительно смещений во времени элементарно:

$$U(t) = U(t + \delta t).$$

Зависимость потенциальной энергии от пространственных переменных опущена для упрощения записи.

Заметим, что для выполнения закона сохранения энергии существенно инвариантность потенциальной энергии относительно любых смещений во времени, в том числе и бесконечно малых. Симметрия относительно конечных смещений во времени (например, в случае переменного электромагнитного поля) обуславливает только периодическое повторение значений энергии, а вовсе не её сохранение.

△ Любопытно отметить, что однородность пространства приводит к изотропности пространства, так что если $\vec{r} = \omega \omega t$, то и

$\vec{L} = \text{const}$. Однако хотя однородность времени тоже приводит к его изотропности (симметрии относительно замены знака $t \rightleftharpoons -t$), закона сохранения, связанного с изотропностью времени, не существует. Дело в том, что преобразование $t \rightarrow -t$ не является непрерывным преобразованием и не может быть бесконечно малым преобразованием. А как мы видели, законы сохранения оказывались связанными обязательно с симметрией относительно бесконечно-малых преобразований — так называемых НЕПРЕРЫВНЫХ преобразований симметрии. Инверсия времени ($t \rightarrow -t$) — конечное преобразование, в то время как инверсия пространственной координаты (например, $X \rightarrow -X$) может быть осуществлена с помощью бесконечно-малых поворотов вокруг оси Y или Z . В главе IV мы рассмотрим теорему Нетер, устанавливающую связь между существованием симметрии относительно непрерывных преобразований и законами сохранения.

В конечном итоге получаем таблицу



Сохраняющаяся величина	Условия сохранения	Преобразование симметрии	Условие инвариантности потенциальной энергии
$\vec{p}$	Однородность пространства	Бесконечно малые трансляции	$U(\dots \vec{r}_i \dots) = U(\dots \vec{r}_i + \delta \vec{r}_i \dots)$
$\vec{L}$	Изотропность пространства	Бесконечно малые повороты	$U(\dots \vec{r}_i \dots) = U(\dots \vec{r}_i + \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_i \dots)$
E	Однородность времени	Бесконечно малые смещения во времени	$U(t) = U(t + \delta t)$

Все семь первых и три вторых стандартных интеграла движения оказываются, таким образом, следствиями пространственно-временной симметрии системы.

4. Некоторые вопросы терминологии

Связь законов сохранения с симметрией пространства - времени позволяет легко и просто определить, какие из стандартных интегралов движения реализуются в рассматриваемой задаче. Изящный и безошибочный прием проверки пространственно-временной симметрии потенциальной энергии системы - достижение двадцатого века. В учебниках по курсу общей физики, за исключением немногих новейших изданий, используются старинная терминология и приемы. Поскольку при этом встречаются некоторые нечеткости определений, остановимся на этом моменте.

Как уже говорилось выше, системы с сохраняющейся энергией и силовое поле, описывающее взаимодействия этой системы с внешним миром, принято называть **КОНСЕРВАТИВНЫМИ**. В случае потенциальных полей

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

и консервативными будут системы, для которых $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$.

Под **ЗАМКНУТОЙ** системой в общей физике понимается система, **НЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩАЯ** с внешним миром. При этом отсутствие взаимодействия понимается иногда в смысле отсутствия (равенства нулю) внешних сил, когда

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{F}^e = -\nabla U^e = 0$$

и сохраняется полный импульс системы.

Направляется такое сопоставление:

$$\begin{aligned} \text{система консервативна} &\Rightarrow E = \text{const}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \\ \text{система замкнута} &\Rightarrow \vec{F} = \text{const}, \quad \nabla U = 0 \end{aligned}$$

Однако в теоретической физике ∇ замкнутость системы понимается в смысле постоянства потенциальной энергии U в пространстве, так и во времени. Для замкнутой системы

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \nabla U = 0,$$

так что условие замкнутости обеспечивает выполнение всех стандартных законов сохранения.

*) Смотри, например, курсы Ландау и Лифшица.

Замена термина "замкнутая система" на "изолированная система", предлагаемая Ольховиком, ровно ничего не меняет по существу путаницы.

Но может быть законы сохранения энергии и импульса обязаны друг с другом и из условия $\nabla U = 0$ следует условие $\frac{dU}{dt} = 0$ и наоборот? Отнюдь нет.

Рассмотрим два изящных примера:

1) $\frac{dU}{dt} = 0, \nabla U \neq 0$

Возьмем плоский бесконечный однородный конденсатор. Зарядим его пластины так, как это указано на рис. 15. Как известно, электрическое поле ВНЕ конденсатора отсутствует:

$$\vec{F} = -\nabla U = 0.$$

Рассмотрим электрон, движущийся справа от конденсатора перпендикулярно его пластинам. Для этого электрона

$$\vec{p}_1 = e\omega t, T_1 = e\omega t.$$

Рис. 15

Пусть в пластинах конденсатора, как раз на пути движения электрона, проделаны дырки настолько маленькие, чтобы не изменить электростатическое поле конденсатора, но достаточно большие, чтобы движение электрона происходило по законам классической, а не квантовой механики. Влетев в зазор между пластинами, электрон ускоряется электрическим полем и выскакивает из конденсатора с большим значением импульса $\vec{p}_2$ и кинетической энергии T_2 . Дальнейшее движение электрона происходит при сохранении новых импульса и кинетической энергии: $\vec{p}_2 = e\omega t, T_2 = e\omega t$.

Вопрос: сохраняется ли полная энергия электрона при его движении через конденсатор, и почему?

Электрон конечно же взаимодействует с конденсатором, и всякие попытки сконструировать "замкнутую" систему оказываются неудачными "архитектурными излишествами". Элементарный анализ показывает, что потенциальная энергия ЯВНО от времени не зависит, $\frac{dU}{dt} = 0$, а следовательно, $E = e\omega t$.

Сохранение энергии обеспечивается за счет перехода потенциальной энергии в кинетическую, что очевидно видно на энергетической схеме рис. 15.

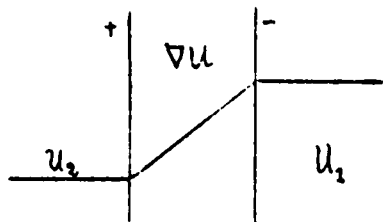


Рис. 15

В самом деле, коль скоро между пластинами конденсатора существует градиент потенциальной энергии, её постоянные значения справа и слева от конденсатора различны, $U_1 \neq U_2$, хотя $U_1 = \text{const}$ и $U_2 = \text{const}$. Рассматриваемая задача аналогична общеизвестной механической

задаче, когда шарик катится по горизонтальной плоскости (перпендикулярно вектору $\vec{g}$ ускорения силы тяжести) с $\vec{P}_1 = \text{const}$, затем скатывается с горки, приобретает импульс $\vec{P}_2 > \vec{P}_1$ и движется снова по горизонтальной плоскости с импульсом $\vec{P}_2 = \text{const}$. Эта механическая задачка повсеместно используется для демонстрации сохранения полной энергии при превращении потенциальной энергии в кинетическую.

Итак, ситуация, когда $\vec{P} \neq \text{const}$ ($\nabla U \neq 0$), а $E = \text{const}$ ($\frac{\partial U}{\partial t} = 0$), реально существует.

2) $\frac{\partial U}{\partial t} \neq 0$, $\nabla U = 0$.

Попробуем осуществить обратную ситуацию на той же мысленной экспериментальной установке. Не будем портить лабораторное имущество и дырять пластины конденсатора. А для того чтобы он не мешал движению электрона, предположим, что электрон движется параллельно пластинам справа от конденсатора (рис. 17).

Для нашего электрона $\vec{P} = \text{const}$, $T = \text{const}$. Будем теперь перезаряжать конденсатор (например, включим его в колебательный контур). При этом появляется временной градиент потенциальной энергии $\frac{\partial U}{\partial t} \neq 0$ и $E \neq \text{const}$, поскольку $U \neq \text{const}$. На энергетической схеме перезарядка конденсатора приводит к сдвигу уровней U_1 и U_2 , которые через полпериода $T/2$ меняются местами (рис. 18).

Очевидно, что переастройка не будет нарушать условие $\nabla U = 0$ вне пластин конденсатора, только если скорость электрона мала по сравнению со скоростью распространения электромагнитного поля C . Если конечность скорости света C осуществлен-

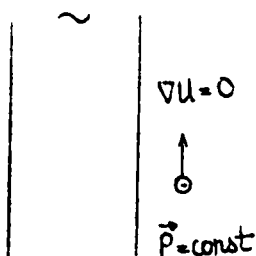


Рис. 17

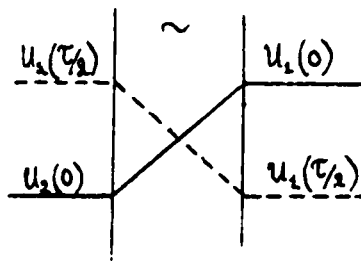


Рис. 18

на, наличие временного градиента $\frac{\partial U}{\partial t} \neq 0$ обусловит появление пространственного градиента $\nabla U \neq 0$. Однако в классической механике о её представлениях о мгновенном распространении взаимодействия $C = \infty$ и $\nabla U = 0$ при $\frac{\partial U}{\partial t} \neq 0$.

Механическим аналогом рассмотренного примера, впрочем весьма неудачным, может служить движение шарика массы m в гравитационном поле однородного массивного цилиндра, когда шарик движется внутри цилиндра вдоль его оси, а масса цилиндра изменяется со временем одновременно по всей длине цилиндра.

⚠ Оба примера наглядно показывают, что взаимосвязь пространства и времени, пространственных и временных характеристик, немедленно проявляется, как только мы принимаем во внимание конечность скорости распространения взаимодействия. При $C = \infty$ нет связи пространства и времени, при $C \neq \infty$ пространство и время связаны между собой. В условиях классического эксперимента, когда скорости движения подопытных тел $\ll C$, естественно предполагать $C = \infty$, игнорируя связь пространства и времени.

§3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ)

Как хорошо известно любому физику, получить уравнения движения-это еще даже не полдела. Цель физика - найти закон движения. Для этого надо проинтегрировать уравнения движения. А поскольку общей теории интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка не существует, физики порой оказываются в положении лисицы, облизывающей на недоступный виноград. Бывает грустный анекдот о том, что один известный французский механик, получив в итоге грандиозного труда серию изящных уравнений движения, сопроводил публикацию возлем отчаяния: *integre qui peut* (интегрируй кто может)!

Однако существуют серия задач, где специфика внешнего поля, в котором движется материальная точка (частица), такова, что можно проинтегрировать уравнения движения и получить закон движения. Эти задачи в теоретической физике играют роль стандартных деталей, позволяющих с помощью различных ухищрений и допущений сконструировать решение для весьма широкого круга задач - физических ситуаций.

Знание этих "штампов" для грамотного специалиста обязательно. В противном случае он может оказаться в роли ужасца - фанатика, делающего велосипед или радиоприемник собственноручно от нуля при наличии в продаже готовых деталей. Теоретическая физика давно уже уподобилась "заводскому производству", в котором квалифицированное использование готовых штампов сочетается со свободой конструкторской мысли "на высшем уровне". Кроме того, результаты, полученные при обсуждении стандартных решений, давно вошли в кодс с физического мировоззрения. Знание их обязательно для любого серьезного физика и теоретика, и экспериментатора.

Класс стандартных задач выделяется особенностями внешнего поля. Поэтому рассматриваемая серия штампов описывает движение частиц в полях. Внешнее поле определяется видом функции $U(\vec{r}, t)$. Будем задавать зависимость $U(\vec{r}, t)$, начиная от простейшей.

1. Свободное движение: $U(\vec{r}, t) = \text{const}$.

△ Какую можно выбрать, простейшую зависимость $U(\vec{r}, t)$? ... Конечно! Простейшая возможность - $U(\vec{r}, t) = \text{const}$. Интегралы движения в таком поле совпадают со стандартными:

$$\begin{cases} \vec{p} = \text{const} \Rightarrow \vec{r} = \frac{\vec{p}}{m}t + \vec{r}_0, \\ \vec{L} = \text{const}, \\ E = \text{const}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что независимым первым интегралом являются только интегралы $\vec{p} = \text{const}$. Из него немедленно следует второй интеграл, соответствующий закону движения $\vec{r} = \frac{\vec{p}}{m}t + \vec{r}_0$. Интегралы $\vec{L} = \text{const}$ и $E = \text{const}$ удовлетворяются в силу $\vec{p} = \text{const}$, $U = \text{const}$. Для энергии это очевидно, для $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ имеем

$$\dot{\vec{L}} = \left(\frac{\vec{p}}{m}t + \vec{r}_0 \right) \times \dot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{p} + \vec{r}_0 \times \vec{p} = \vec{r}_0 \times \vec{p} = \vec{L}_0 = \text{const}.$$

Примером более сложных задач, использующих рассмотренный штатчик, могут служить задачи, в которых анализируются движения частицы при перемещении между областями пространства, где ее потенциальная энергия $U_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots$ - номер области пространства ($U_1 \neq U_2 \neq U_3 \dots$). Здесь относятся, в частности, задача о прохождении луча света через среды с разной оптической плотностью (например, преломление светового луча на границе вода - воздух).

2. Одномерное движение $U = U(x)$

△ Попробуем теперь чуточку усложнить поле. Какое усложнение будет простейшим? ... Конечно! Потенциальная энергия изменяется только в одном направлении, выбираемом в качестве оси X декартовой системы координат.

Интегралами движения (вспомним мини-задачи!) являются

$$\begin{cases} p_y = \text{const}, \\ p_z = \text{const}, \\ L_x = \text{const}, \\ E = \text{const}. \end{cases}$$

В помощь первым двум интегралам выбираем инерциальную систе-

му отчета таков, что $p_y = p_z = 0$, $y = z = 0$, где интеграл $\ell_x = y p_z - z p_y = 0$ выполняется тривиально. Движение частицы в такой системе отчета происходит только вдоль оси x (отсюда и название - одномерное движение).

Единственный оставшийся интеграл - интеграл энергии - может быть записан в виде

$$E = \frac{m \dot{x}^2}{2} + U(x) = \text{const.}$$

Откуда

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))},$$

а следовательно,

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}}$$

и.

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

Постоянными интегрирования здесь являются E и t_0 .

Ясно, что отстоящая справа кватрата определяется видом функции $E - U(x)$. Проанализируем создавшуюся ситуацию.

Пусть $U(x)$ имеет вид, приведенный на рис. 19. Поскольку

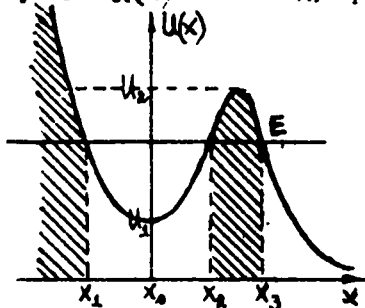


Рис. 19

$E - U(x) = T \geq 0$ по определению кинетической энергии $T = \frac{m \dot{x}^2}{2}$, то движение возможно только при таких значениях x , когда

$$E \geq U(x).$$

Область пространства, где $E < U(x)$, называется ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ БАРЬЕРОМ. Область, где $E \geq U(x)$, ограниченная справа и слева потенциальными барьерами, называется ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМОЙ. Движение частицы

в потенциальной яме называется ФИНИТНЫМ, частица удерживается в конечной области пространства. В области, где $E \geq U(x)$ вплоть до $x = +\infty$ ($x = -\infty$), движение частицы называется ИНФИНИТНЫМ, частица может "уйти" на бесконеч-

ность.

△ Точки x_1, x_2, x_3 , где $U(x_i) = E$, называются ТОЧКАМИ ОСТАНОВКИ (в них $T=0$, $\dot{x}=0$) или ТОЧКАМИ ПОВОРОТА (направление движения меняет знак на обратный).

Движение в потенциальной яме (финитное) - периодическое с периодом

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \right|,$$

определяемым как время движения от точки x_1 до точки x_2 и обратно от точки x_2 до точки x_1 . Изменение значения

$E = \text{const}$ приводит к изменению областей финитного, инфинитного и запрещенного движения. Так, при $E > U_2$ или $E < U_1$ (см. рис. 19) возможно только инфинитное движение соответственно в областях $x > x_1$, $x > x_3$. При $E = U_1$ частица может покоиться на "дне" потенциальной ямы в точке x_0 , определяемой условием совпадения точек поворота $x_1 = x_2$ или из условия минимума потенциальной энергии $U(x)$.

△ Необходимо выделить некоторые особенности классического одномерного движения, которые не имеют места в случае одномерного движения МИКРОЧАСТИЦЫ.

Введем понятие коэффициента отражения от барьера R , определяемого как отношение числа частиц, отразившихся от барьера, к полному числу налетающих частиц. Аналогично D - коэффициент прохождения - будет определяться как отношение числа частиц, прошедших через барьер, к общему числу налетающих частиц. Очевидно, что $R + D = 1$.

Для КЛАССИЧЕСКОЙ частицы обязательно выполняются следующие четыре правила (=) К.М.

- 1) Движение НАД барьером происходит беспрепятственно: $R=0$, $D=1$.
- 2) Движение ПОД барьером невозможно: $R=1$, $D=0$.
- 3) Частица может находиться НА ДНЕ потенциальной ямы.
- 4) Частица "захватывается" любой потенциальной ямой.

Последнее утверждение надо понимать так: если полная энергия частицы $E < U_1 \leq U_2$, где U_1, U_2 - "высота" стенок потенциальной ямы, и частица попадает в область пространства $[x_1, x_2]$,

соответствующую потенциальную яму, то она будет оставаться в этой области около угодно долго, независимо от "формы" потенциальной ямы (вида зависимости $U(x)$).

Нарушение этих четырех, естественных и бесспорных для классики, особенностей одномерного движения для микрочастиц послужило камнем преткновения для многих физиков классической школы и трамплином для развития и осмысливания новой, квантовой механики.

Действительно, для КВАНТОВОЙ частицы "все наоборот", а именно:

1) При движении НАД барьером $D < 1$, $R \neq 0$! Имеется некоторая малая вероятность отражения частицы от барьера, над которым она пролетает. Это явление было известно в физике волновых процессов - волна как бы "чувствует" камень или мель, над которыми она проходит.

2) Возможно движение ПОД барьером: $R < 1$, $D \neq 0$. Это явление получило название ТУННЕЛЬНОГО ЭФЕКТА и было обнаружено при исследовании радиоактивного α -распада. Как показывают измерения, энергия вылетающей α -частицы меньше "высоты" преодолеваемого ею потенциального барьера. Сей невероятный с точки зрения классики факт (частица под барьером имеет кинетическую энергию $T < 0$, то есть движется с мнимой скоростью) взорвал цитадель устоявшихся представлений и породил великое смятение умов.

3) Частица не может находиться (покоиться) на дне потенциальной ямы. Наимизшее разрешенное законами квантовой механики значение полной энергии $E = E_0$ частицы, находящейся в потенциальной яме $U(x)$, всегда больше минимального значения потенциальной энергии $U_{\min}(x) = U(x_0) = U_0$, $E_0 > U_0$.

4) Существуют потенциальные ямы, которые не могут удерживать (захватывать) частицы. Наимизшее разрешенное значение энергии "связанного" состояния E_0 в квантовой механике зависит от вида потенциальной ямы - вида $U(x)$. Для широких и низких (типа барьера) и глубоких, но очень узких (типа ямы) потенциальных ям E_0 всегда больше высоты "отенок" ямы, и частица, попавшая в область $[x_1, x_2]$ потенциальной ямы, проходит "над" ямой.

Δ Объяснение этих парадоксов связано прежде всего с тем,

что в микромасштабе такие характеристики движения частицы, как полная энергия E , потенциальная U и кинетическая T , не могут быть использованы одновременно. Это является следствием того обстоятельства, что кинетическая энергия $T = p^2/2m$ является функцией импульса частицы, а потенциальная — её координаты. Эти же две характеристики (x, p) для микрочастицы "не совместны" — не могут быть одновременно точно измерены. Использование классических "картинок" потенциальной ямы, барьера и т. д. — дань классической традиции. Они наглядны и удобны, если, разумеется, не пытаются понимать их буквально, в классическом смысле. Точно так же, не мудрствуя лукаво, используют мореплаватели и путешественники плоские карты, изображающие выпуклую поверхность Земли.

3. Движение в поле центральных сил: $U = U(r)$

Потенциальная энергия зависит только от расстояния до начала координат, которое играет роль "силового центра". В случае элементарных взаимодействий — гравитация, электростатическое кулоновское взаимодействие — источником поля является сферически симметричный "заряд" с "центром" в точке $\vec{r} = 0$. Отсюда и название — поле центральных сил. Однако сферической симметрией может обладать и искусственно созданное поле многих источников, когда в точке $\vec{r} = 0$ никакого реального источника центра нет.

Интегралами движения (вспомним мини-задачи!) являются

$$\begin{cases} \vec{r} = c \sin t, \\ E = c \cos t. \end{cases}$$

Как уже отмечалось выше, из условия сохранения момента импульса следует, что движение частицы происходит в плоскости, перпендикулярной $\vec{L}$ (плоское движение). Выберем ось z вдоль вектора $\vec{L}$ и перейдем к цилиндрическим координатам (рис.

20):

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z = 0. \end{cases}$$

Здесь учтено, что при $z=0$ $\vartheta=z$. Тогда

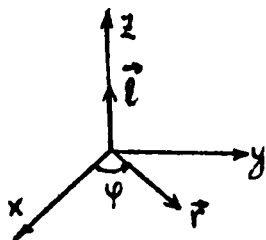


Рис. 20

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$$

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{V} = m \begin{vmatrix} \vec{n}_x & \vec{n}_y & \vec{n}_z \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = m (\dot{x}y - y\dot{x}) \vec{n}_z,$$

$$L_z = L = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m r^2 \dot{\varphi},$$

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U(z) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r).$$

Из интеграла момента находим $\dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2}$.

Подставим полученное выражение в интеграл энергии

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} \frac{r^2 \dot{\varphi}^2}{m^2 (r^2)^2} + U(r) =$$

$$= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{2 m r^2} + U(r) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{эфф}}(r),$$

где $U_{\text{эфф}}(r) = \frac{\dot{\varphi}^2}{2 m r^2} + U(r)$.

Радиальное движение сводится к ОДНОМЕРНОМУ движению в эффективном потенциальном поле $U_{\text{эфф}}(r)$. Роль координаты x выполняет длина радиус-вектора r . Как говорят математики, задача сведена к предыдущей и можно воспользоваться результатами, найденными выше.

Р Правда, те же математики любят шутливо предупреждать, что не всегда сведение задачи к предыдущей сокращает работу. В качестве примера приводятся две задачи. Первая — надеть пальто, висящее на вешалке. Способ решения на математическом уровне тождественно совпадает с обыденным. Вторая — надеть пальто, которое математику подает жена. Для решения этой за-

дачи математик вешает пальто обратно на вешалку, тем самым задача сводится к предыдущей.

Итак, "повесим пальто на вешалку" и рассмотрим одномерное движение в поле $U_{эфф}(r)$. Как было показано в предыдущей задаче, движение возможно только для таких r , когда

$$E \geq U_{эфф}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r).$$

Закон движения находится из квадратуры одномерного движения с заменой $x \rightarrow r$, $U(x) \rightarrow U_{эфф}(r)$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{эфф}(r)}} + t_0$$

и условия

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \frac{\ell}{mr^2},$$

откуда имеем

$$dr = \frac{\ell}{mr^2} dt = \frac{\ell}{mr^2} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{эфф}(r)}},$$

так что

$$\varphi = \frac{\ell}{\sqrt{2}m} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{эфф}(r)}} + \varphi_0.$$

Вторая квадратура определяет траекторию движения законом $\varphi = \varphi(r)$, а первая - закон радиального движения $t = t(r) \Rightarrow r = r(t)$. Вместе взятые квадратуры $t(r)$ и $\varphi(r)$ определяют закон движения в полярных координатах

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \quad z = 0,$$

при этом постоянными интегрирования являются константы E, ℓ, t_0, φ_0 .

Точки поворота определяются из условия $E = U_{эфф}(r)$, аналогичного такому же условию в случае одномерного движения. Однако в отличие от одномерного движения точки поворота при движении в поле центральных сил не будут точками остановки, ибо при $\dot{r} = 0, \dot{\varphi} \neq 0$  Это точки именно ПОВОРОТА, соответствующие экстремумам траектории.

Возможные варианты движения в поле центральных сил можно обсудить, анализируя $U_{\text{эфф}}(r)$. По определению $U_{\text{эфф}}(r)$ состоит из двух слагаемых:

$$U_{\text{эфф}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r),$$

первое из которых, так называемая ЦЕНТРОБЕЖНАЯ ЭНЕРГИЯ $-U_{\text{цб}} = \frac{L^2}{2mr^2}$, определяет потенциальный барьер вокруг силового центра $r=0$

(рис. 21). Поэтому в зависимости от вида потенциальной энергии $U(r)$ возможны такие случаи:

1) $U(r)$ — отталкивание или слабое притяжение. Вид $U_{\text{эфф}}(r)$ приведен на рис. 22. Движение инфинитное для всех L , $E > 0$. Единственная точка поворота определяется условием

$$E = U_{\text{эфф}}(r_{\min}).$$

2) $U(r)$ — сравнительно слабое притяжение. Вид $U_{\text{эфф}}(r)$ приведен на рис. 23. Имеет место финитное движение в потенциальной яме $U_{\text{эфф}}(r)$ между двумя точками поворота

$$\begin{cases} E = U_{\text{эфф}}(r_1), \\ E = U_{\text{эфф}}(r_2). \end{cases}$$

3) $U(r)$ — очень сильное притяжение, способное "слопать" силовой барьер центробежной энергии вокруг $r=0$. Вид $U_{\text{эфф}}(r)$ приведен на рис. 24. Частичка не может уйти на бесконечность при конечной E . Зато она может беспрепятственно достичь "силового центра" в начале координат. Имеет место ПАДЕНИЕ НА ЦЕНТР. На



Рис. 21

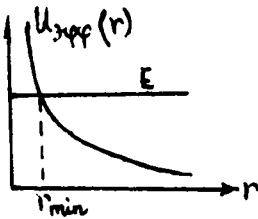


Рис. 22

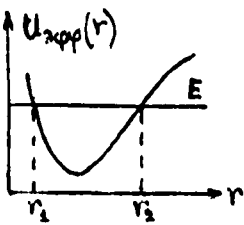


Рис. 23

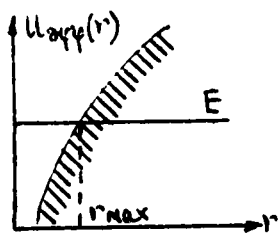


Рис. 24

траектории одна точка поворота — $r_{\max}$, определяемая из усло-

вия

$$E = U_{\text{эфф}}(r_{\text{max}}).$$

Сопоставим полученным энергетическим схемам траектории движения частиц в каждом случае.

1) Инфинитное движение

На рис. 25, а представлена траектория движения частицы в поле отталкивания, на рис. 25, б - в поле притяжения.

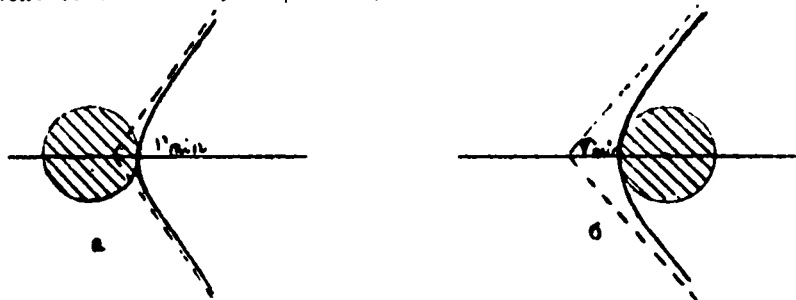


Рис. 25

Область радиуса r_{min} , соответствующая потенциальному барьеру вокруг центра, заштрихована. Линия, проходящая через начало координат и точку поворота r_{min} , называется АПСИДОЙ. Как видно из рис. 25, инфинитному движению соответствуют траектории с ОДНОЙ точкой поворота и ОДНОЙ апсидой. Траектории симметричны относительно апсиды, что обусловлено симметрией относительно инверсии времени (замены $t \rightarrow -t$). В случае поля отталкивания (рис. 25, а) окружность радиуса r_{min} лежит "ВНЕ" траектории. В случае поля притяжения (рис. 25, б) траектория огибает область радиуса r_{min} , которая лежит как бы "ВНУТРИ" траектории.

2) Финитное движение

Траектория движения частицы представлена на рис. 26. Заштрихованная окружность радиуса r_{min} соответствует потенциальному барьеру вокруг центра. Заштрихованная граница r_{max} определяет потенциальный барьер (внетний), обусловленный притяжением. Линии, проходящие через начало координат (начало координат) и точки поворота r_{min} и r_{max} , - АПСИДЫ. Как

видно из рисунка, траектория в общем случае незамкнутая, имеет бесконечно много апсид и точек поворота, так что со временем траектория проходит через все точки кольца между окружностью радиуса $r_{\min}$ и окружностью радиуса $r_{\max}$. Отрезки траектории между двумя соседними одностипными точками поворота ($r_{\min} - r_{\min}$ или $r_{\max} - r_{\max}$) симметричны относительно соответствующих апсид.

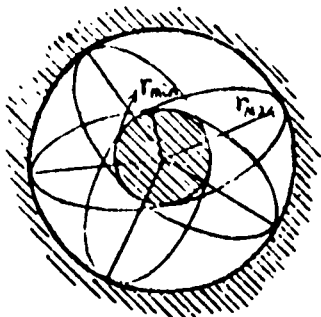


Рис. 25

Траектория будет замкнутой, если за n облетов от $r_{\max}$ до $r_{\max}$ ($r_{\min}$ до $r_{\min}$) угол $\Delta\varphi$ между апсидами составит величину, кратную 2π :

$$n\Delta\varphi = 2\pi k$$

(рис. 27).

Изменение угла $\Delta\varphi$ определяется квадратурой

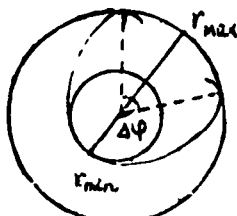


Рис. 27

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{2m}} \left| \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}} \right|.$$

Поэтому условие замкнутости может быть записано в виде

$$2\pi k = n \frac{2\pi}{\sqrt{2m}} \left| \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}} \right|.$$

Условие замкнутости траектории выполняется в частности

для $\begin{cases} U(r) = -\frac{\alpha}{r} & \text{— кулоновское поле,} \\ U(r) = \alpha r^2 & \text{— гармонический осциллятор.} \end{cases}$

Период движения по замкнутой траектории определяется временем, затраченным на облет от $r_{\max}$ до $r_{\min}$ и снова до $r_{\max}$:

$$T_0 = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \left| \int_{r_{\max}}^{r_{\min}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}} \right|.$$

Откуда период $T = nT_0$, и частица облетает вокруг силового центра k раз.

3) Падение на центр

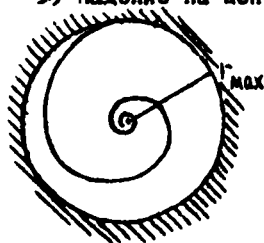


Рис. 28

Возможная траектория представлена на рис. 28. Заштрихованная граница - окружность радиуса $r_{\max}$ - определяет внешний потенциальный барьер. Заметим, что время падения на центр, определяемое как

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}} \left| \int_{r_{\max}}^0 \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}} \right|.$$

может быть и бесконечно большим.

Сломать потенциальный барьер центробежной энергии может только очень сильное поле притяжения. Поэтому падение на центр реализуется, только если при $r \rightarrow 0$ выполняется условие

$E \geq U_{\text{эф}}(r)$, обеспечивающее возможность движения в области малых r . Рассмотрим его подробно:

$$E \geq \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r).$$

Оценивать это условие при $r \rightarrow 0$ неудобно, поэтому умножим обе части неравенства на заведомо положительную величину r^2 . Имеем

$$E r^2 \geq \frac{\ell^2}{2m} + r^2 U(r).$$

При $r \rightarrow 0$ потенциальная энергия $U(r)$ должна удовлетворять условию

$$r^2 U(r) \Big|_{r \rightarrow 0} \leq -\frac{\ell^2}{2m}.$$

Это и есть условие падения на центр. При $\ell=0$ ($\dot{\varphi}=0$), когда движение вырождается в одномерное, условие падения сводится к требованию $U(r) < 0$, то есть падение на центр возможно в ЛЮБОМ поле притяжения.

При $\ell \neq 0$ требование $U(r) < 0$ сохраняется, хотя условие падения на центр выполняется не для всякого поля притяжения. Предположим, что в окрестности $r=0$ $U(r)$ может быть представлена как $-\frac{\alpha}{r^n}$ ($\alpha > 0$). Тогда из условия падения имеем

$$-\alpha \frac{r^2}{r^n} \Big|_{r \rightarrow 0} \leq -\frac{\ell^2}{2m}$$

или

$$\frac{2}{r^{n-2}} \Big|_{r \rightarrow 0} \geq \frac{\ell^2}{2m}.$$

При $n > 2$ падение возможно при любых ℓ .
 При $n < 2$ падение невозможно при любых ℓ .
 При $n = 2$ падение возможно при ℓ таких, что $\alpha > \frac{\ell^2}{2m}, \ell^2 \leq 2m\alpha$.

Р А теперь попробуем понять, почему на Земле тела, брошенные с $\ell \neq 0$, так-таки падают на Землю. Ведь поле тяготения соответствует потенциальной энергии

$$U = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

Здесь M - масса Земли; γ - постоянная тяготения, а $n = 1 < 2$.

? Какие могут быть предложены объяснения?
???

Конечно же все дело в том, что падение на Землю не имеет ничего общего с падением на центр, кроме самого слова "падение". Тела, брошенные с $\ell \neq 0$ в кулоновском поле тяготения Земли, движутся по траекториям финитного движения.

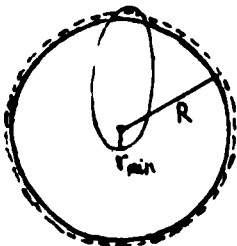


Рис. 29

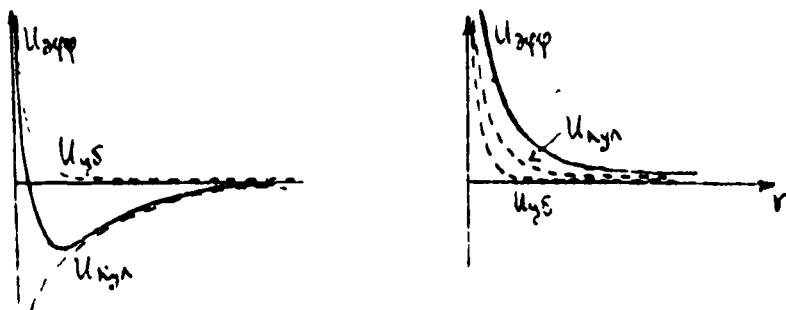
Пересечение таких траекторий с поверхностью Земли и определяет падение тела НА Землю. Для того чтобы брошенное с $\ell \neq 0$ тело НЕ УПАЛО на поверхность Земли - радиуса R , его траектория должна иметь $r_{\min} \geq R$. Это условие определяет так называемую первую космическую скорость - скорость, обеспечивающую выход спутника на круговую орбиту (рис. 29).

4. Движение в кулоновском поле (задача Кеплера)

Кулоновское поле $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ - частный случай поля центральных сил. Детальный анализ этого поля желаете эн, ибо кулоновское поле - самый распространенный вид элементарных взаимодействий. Это и поле тяготения (задача Кеплера о движении планет вокруг Солнца), и электростатическое поле взаимодей-

отвущих зарядов. При $d > 0$ реализуется притяжение ($U < 0$), при $d < 0$ - отталкивание ($U > 0$).

Графики $U_{\text{эф}}(r)$ при $d \geq 0$ приведены на рис. 30



а

Рис. 30

б

В случае $d > 0$ - притяжение - $U(r) = -\frac{d}{r} < 0$ и медленнее изменяется с расстоянием, чем $U_0 = e^2/2\pi\epsilon_0 r^2$. Поэтому при малых r $|U_0| \gg |U(r)|$, $U_{\text{эф}} > 0$ и $U_{\text{эф}} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. Наоборот, при больших r $|U_0| \ll |U(r)|$, $U_{\text{эф}} < 0$ и $U_{\text{эф}} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. В целом график зависимости $U_{\text{эф}}(r)$ имеет вид, приведенный на рис. 30, а.

В случае $d < 0$ - отталкивание - и $U(r) > 0$, и $U_0 > 0$ и $U_{\text{эф}} > 0$. Все три функции стремятся к нулю при $r \rightarrow \infty$ и к бесконечности при $r \rightarrow 0$ (см. рис. 30, б).

Как видно из рис. 30, а, в случае притяжения возможно как инфинитное движение (при $E > 0$), так и финитное (при $E < U_0$). В случае отталкивания (рис. 30, б) реализуется только инфинитное движение при $E > 0$.

СЛУЧАЙ $d > 0$. ПРИТЯЖЕНИЕ

Исследуем подробнее функцию $U_{\text{эф}}(r) = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{d}{r}$ (рис. 31). Определим параметры U_0 и r_0 - точки экстремума $U_{\text{эф}}(r)$. Из условия

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{2e^2}{2\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{d}{r^2} = 0$$

имеем $\frac{1}{r^3} = 0$, $-\frac{e^2}{\pi\epsilon_0} + d r = 0$.

Экстремумы реализуются при

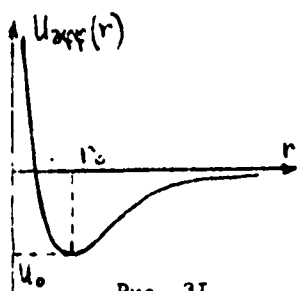


Рис. 31

$$\begin{cases} r = c^2 \\ r = \frac{\ell^2}{m\alpha} \rho \end{cases} \text{ параметр орбиты.}$$

Подставляя значение $r_0 = \rho$ в $U_{\text{эфф}}(r)$, найдем

$$U_0 = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{\left[\frac{\ell^2}{m\alpha}\right] \frac{1}{\rho^2}}{2} - \frac{\alpha}{\rho} = -\frac{\alpha}{2\rho}.$$

Итак, $U_0 = -\frac{\alpha}{2\rho}$.

Точки поворота определяем из

условия

$$E = U_{\text{эфф}}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{d\rho}{2r^2} - \frac{1}{r}.$$

Умножая на r^2/E и перенося все слагаемые в одну сторону, получаем

$$r^2 - \frac{d\rho}{2E} + \frac{\alpha}{E}r = 0.$$

Откуда

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -\frac{d}{2E} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 + \frac{d}{2E}\rho} = \\ &= -\frac{d}{2E} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2E}{\alpha}\rho} \right). \end{aligned}$$

Обозначим $e = \sqrt{1 + \frac{2E}{\alpha}\rho}$ - эксцентриситет орбиты. Тогда точки поворота

$$r_{1,2} = -\frac{d}{2E} (1 \pm e).$$

Траекторию движения в кулоновском поле найдем с помощью стандартной квадратуры

$$\varphi = \varphi(r) = \varphi_0 + \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}}.$$

Используем снова прием выделения параметра орбиты

$$\frac{\ell}{\sqrt{2m}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{\ell^2}{m\alpha}\right] \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\alpha \rho}{2}},$$

$$\begin{aligned}
 E - \frac{p^2}{2mr^2} + \frac{d}{r} &= E - \frac{\left[\frac{p^2}{2mr^2}\right]d}{\frac{p^2}{2mr^2}} + \frac{d}{r} = \\
 &= E - \frac{dp}{2r^2} + \frac{d}{r} = E - \frac{dp}{2} \left(\frac{1}{r^2} - 2\frac{1}{r} \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} \right) = \\
 &= \frac{dp}{2} \left[\frac{2E}{dp} + \frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{dp}{2} \left[\frac{1}{p^2} \left(1 + \frac{2E}{d} p \right) - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{dp}{2} \left[\frac{1}{p^2} e^2 - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \varphi_0 + \sqrt{\frac{dp}{2}} \int \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{dp}{2}} \sqrt{\frac{e^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2}} = \\
 &= \varphi_0 + \int \frac{-d\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{\frac{e^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2}} = \varphi_0 + \arccos \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{e^2/p^2}}
 \end{aligned}$$

или

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{p}{e} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right), \quad e \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{p}{r} - 1,$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Выбирая начало отсчета углов от $r = r_{\min}$, имеем $\varphi_0 = 0$ и уравнение для траектории приобретает вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad \boxed{P}$$

Это - уравнение конического сечения с фокусом в начале координат (в силовом центре). При $e > 1$ это гипербола, при $e = 1$ - парабола, при $e < 1$ - эллипс, при $e = 0$ - окружность.

Полученный результат - обобщение третьего закона Кеплера: планеты движутся по эллиптическим траекториям с Солнцем в фокусе.

Очевидно, что

$$\text{при } \varphi = 0 \quad r = \frac{p}{1+e} = r_{\min},$$

$$\text{при } \varphi = \frac{\pi}{2} \quad r = p,$$

$$\text{при } \varphi = \pi \quad r = \frac{p}{1-e} = r_{\max}, \text{ если } e < 1. \text{ В противном случае (} e > 1 \text{) точка поворота } r_{\max} \text{ отсутствует или находится на бесконечности (при } e = 1 \text{).}$$

Исследуем полученные траектории.

1) В случае ИНФИНИТНОГО движения, когда $E > 0$,

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E}{\alpha} p} > 1$$

и траекторией является гипербола. При $\varphi = 0 \quad r = r_{\min} = \frac{p}{1+e}$. Из двух точек поворота

$$r_{1,2} = -\frac{1}{\frac{2E}{\alpha}} (1 \pm e)$$

реализуется только

$$r_{\min} = \frac{1}{\frac{2E}{\alpha}} (e - 1).$$

Для второго корня $r = -\frac{1}{\frac{2E}{\alpha}} (1 + e) < 0$, что невозможно, ибо $r > 0$ по определению. Обозначим $a \equiv \frac{1}{\frac{2E}{\alpha}} > 0$.

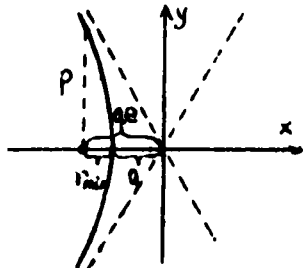


Рис. 32

Тогда

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(e-1).$$

Реализуется только одна, отбрасываемая силовым центром (фокус) ветвь гиперболы (рис. 32).

2) В случае ИНФИНИТНОГО движения, когда $E = 0$,

$$e = 1.$$

траекторией является парабола (рис. 33). При $\varphi = 0$ $r_{min} = \frac{P}{2}$,

$r_{max} = \infty$. При движении по параболе при $r = \infty$ $U(\infty) = 0$, имеем

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + U(0) = \frac{mv_0^2}{2} = 0. \quad \triangle$$

Таким образом, $V_0 = 0$. Это никак не означает, что при движении по параболе $\dot{r} = \dot{\omega} = 0$. Действительно, $\dot{r} = m(rV)_{\dot{\omega}}$ представляет собой неопределенность вида $\infty \cdot 0$, которая может принимать любое значение.

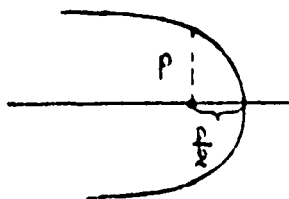


Рис. 33

3) В случае УЧИНТНОГО движения, когда $0 > E > U_0$,

$$e < 1$$

и траекторией является эллипс. Тогда

$$r_{min} = \frac{P}{1+e} = \left(-\frac{d}{2E}\right)(1-e) = a(1-e),$$

$$r_{max} = \frac{P}{1-e} = \left(-\frac{d}{2E}\right)(1+e) = a(1+e).$$

Здесь введено обозначение

$$u \equiv -\frac{d}{2E} > 0.$$

Заметим, что $r_{min} + r_{max} = 2a$ - большая ось эллипса (рис. 34). Таким образом, a - большая полуось эллипса. Малую полуось эллипса найдем, сопоставляя известное из аналитической геометрии выражение для эксцентриситета

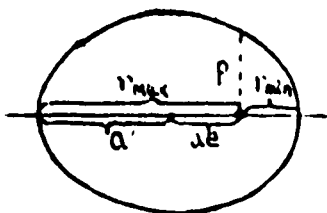


Рис. 34

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

с введенным выше

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E}{d}P} = \sqrt{1 - \left(-\frac{2E}{d}\right)P} = \sqrt{1 - \frac{Pa}{a^2}}.$$

Следовательно, $b^2 = \rho a$ и

$$b^2 = \frac{\alpha}{2|E|} \frac{\ell^2}{m\alpha} = \frac{\ell^2}{2m|E|}.$$

Итак,

$$\begin{cases} a = \frac{\alpha}{2|E|} = a(E), \\ b = \sqrt{\frac{\ell^2}{2m|E|}} = b(E, \ell). \end{cases}$$

Величина большой полуоси не зависит от значения момента импульса ℓ и полностью определяется значением энергии E . Поскольку при заданном E  величина момента импульса ℓ может принимать любое значение, существует бесчисленное множество траекторий с одной и той же большой полуосью и различными значениями малой полуоси.

4) В случае финитного движения, когда $E = U_0 = -\frac{d}{2\rho}$,

$$E = 0$$

и траекторией является окружность:

$$r_{\min} = r_{\max} = \rho, \quad a = -\frac{d}{2E} = -\frac{d}{2U_0} = \frac{d}{2\alpha} 2\rho = \rho.$$

Период движения по финитной траектории удобнее вычислить из закона площадей (второй закон Кеплера - закон сохранения секторной скорости при движении в поле центральных сил). Вспоминая, что

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{2m} = \frac{ds}{dt},$$

находим

$$ds = \frac{\ell}{2m} dt.$$

Откуда, интегрируя, получаем

$$S_{\text{эллипса}} = \pi a b = \frac{\ell}{2m} T.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi m}{\ell} a \sqrt{\frac{\ell^2}{2m|E|}} = 2\pi \sqrt{\frac{m\alpha}{2|E|\alpha}} a = 2\pi a \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{3/2}. \end{aligned}$$

Итак, $T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}}$.

Поскольку $\frac{m}{\alpha} \approx \text{const}$ для всех планет Солнечной системы, то полученное соотношение позволяет сформулировать третий закон Кеплера: квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей.

СЛУЧАЙ $\alpha < 0$. ОТТАЛКИВАНИЕ

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} = \frac{|\alpha|}{r}.$$

Результаты в случае кулоновского поля отталкивания можно получить, формально заменяя $\alpha \rightarrow -|\alpha|$ во всех формулах, относящихся к случаю притяжения. Тогда параметр

$$p = \frac{e^2}{m\alpha} = -\frac{e^2}{m|\alpha|} = -|p|.$$

Эксцентриситет

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E}{\alpha} p} = \sqrt{1 + \frac{2E|p|}{m\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E}{|\alpha|} |p|}$$

и не зависит от знака α !



Уравнение для траектории

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}{\sqrt{e^2/p^2}} = \arccos \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{|p|}}{\sqrt{e^2/|p|^2}}.$$

А следовательно,

$$e \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{|p|}{r} + 1$$

и

$$r = \frac{|p|}{-1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Выбирая $\varphi_0 = 0$, что соответствует началу отсчета углов от $r = r_{\min}$, получим

$$r = \frac{|p|}{-1 + e \cos \varphi}.$$

Это снова уравнение конического сечения с фокусом в центре. Так как для $\alpha < 0$ возможно только инфинитное движение с $E > 0$, то $e > 1$ и траекторией является гипербола (рис. 35). Поскольку мы имеем дело с отталкиванием, это будет вторая ветвь гиперболы (сравните с рис. 32).

При $\varphi = 0$, $r = r_{\min} = \frac{|p|}{e-1}$.

Используя полученные ранее выражения для точек поворота

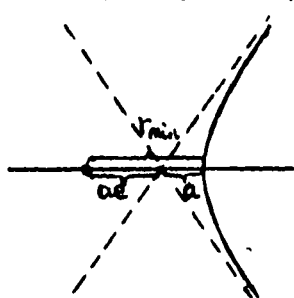


Рис. 35

$$r_{1,2} = -\frac{a}{2E}(1 \pm e) = \frac{|a|}{2E}(1 \pm e),$$

Видим, что реализуется только один корень

$$r = \frac{|a|}{2E}(1+e) = a(1+e),$$

где $a = \left| \frac{a}{2E} \right|$, так что

$$r_{\min} = a(e-1) = \frac{|p|}{e-1}.$$

При этом угол $\varphi \in [0, \varphi_{\max}]$, соответственно $r \in [r_{\min}, \infty]$.

Направление асимптоты гиперболы

(угла $\varphi_{\max}$) определяется условием $\varphi_{\max} = \varphi(r=\infty)$. Из уравнения траектории

$$r = \frac{|p|}{-1 + e \cos \varphi}$$

получено, что $\varphi = \varphi_{\max}$, когда $e \cos \varphi - 1 = 0$, то есть $\cos \varphi_{\max} = \frac{1}{e}$. Но:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E}{|a|}|p|}, \quad e^2 = 1 + \frac{2E}{|a|}|p| = \frac{1}{\cos^2 \varphi_{\max}},$$

$$\frac{2E}{|a|}|p| = \frac{1}{\cos^2 \varphi_{\max}} - 1 = \operatorname{tg}^2 \varphi_{\max}.$$

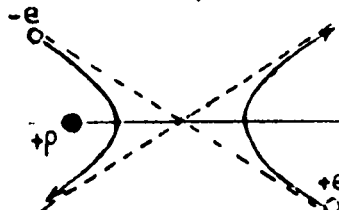
Откуда

$$\varphi_{\max} = \arctg \sqrt{\frac{2E}{|a|}|p|}.$$

Таким образом, в кулоновском поле реализуются все возможные варианты конического сечения - окружность, эллипс, парабола и огибающая ветвь гиперболы - в случае притяжения и вторая ветвь гиперболы - в случае отталкивания.

⚠ Почему-то студенты систематически упускают из виду, что при движении в кулоновском поле отталкивания силовой центр находится в фокусе огибающей ветви гиперболы, соответствующей траектории движения в поле притяжения. Привлечь внимание к этому моменту позволяет нехитрая аналогия из жизни элементарных частиц.

Реша да был красавец юнга Позитрон. И полюбил он красавицу Электрону, единственную дочь могучего богатыря Протона. Хотя и прятал Протон свою дочь далеко-далеко ($r = \infty$), сумела Электрона узнать о любви красавца Позитрона и ответила ему взаимностью. Юнга навстречу друг другу с разной скоростью устроились влюбленные, чтобы сгореть в ярком пламени своих чувств. Но не допустил Протон гибели своей дочери в огне аннигиляции, встал на пути влюбленных. Знал своего куло-



новского поля (рис. 35) искривил Протон траектории влюбленных. И помчались они по двум разным гиперболам, и умчались дальше, к бесконечности, хотя и по одной прямой, да в разные стороны.

Рис. 35

5. Интеграл Рунге-Ленца

В кулоновском поле кроме интегралов движения $E = \text{const}$ и $\vec{L} = \text{const}$, реализующихся в любом поле центральных сил, имеется дополнительный интеграл движения. В теоретической физике его принято называть интегралом (вектором Рунге-Ленца). В некоторых книгах этот интеграл называют интегралом Лапласа.

Вектор Рунге-Ленца имеет вид

$$\vec{q} = \vec{v} \times \vec{L} - \frac{1}{r} \vec{r} = \text{const}, \quad \alpha \geq 0. \quad *)$$

Реша физика Ленца упоминается уже в школьной физике, а физик Рунге - родня тому, чьим делом занимался Итириц. Для запоминания формулы можно использовать такой мнемонический прием. Во-первых, конечно, читали приключения капитана Врунгеля фамилия которого созвучна фамилии Рунге, а её начальная буква В определяет множитель $\frac{1}{r}$ слагаемого $\frac{1}{r} \vec{r}$. Второй множитель $\vec{L}$ определяется начальной буквой Л фамилии Ленца. Второе слагаемое - энергия кулоновского поля $U(r) = -\frac{1}{r}$, "взятая" в наклонении $\vec{r}$, ибо кулоновское поле - центральное. Возможно, речтеемся, и простое визуализирование.

Докажем прежде всего, что введенный вектор сохраняется по движению частицы в кулоновском поле. Для этого покажем, что $\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0$, если $U(r) = -\frac{q}{r}$.

Непосредственное дифференцирование дает

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{\ell} + \vec{r} \times \dot{\vec{\ell}} - \frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \vec{r}.$$

Кулоновское поле — центральное, следовательно, $\vec{\ell} = \text{const}$, $\dot{\vec{\ell}} = 0$! Производная $\dot{\vec{r}}$ представляет собой проекцию производной $\dot{\vec{r}}$ на направление вектора $\vec{r}$, то есть $\dot{\vec{r}} = \dot{r} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\dot{r}}{r} \vec{r}$,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{\ell} - \frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}}{r} \right) \vec{r}.$$

Следовательно, учитывая, что $\vec{\ell} = \vec{r} \times m\vec{v}$, имеем

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times m\vec{v}) - \frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{d}{dt} \frac{\dot{r}}{r} \vec{r}.$$

Раскрывая двойное векторное произведение по правилу "бац минус цап", получим

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{r} (\dot{\vec{r}} \cdot m\vec{v}) - m\vec{v} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) - \frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{d}{dt} \frac{\dot{r}}{r} \vec{r}.$$

Собирая коэффициенты при $\vec{r}$ и $\vec{v}$, находим

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{r} \left[m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + \frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}}{r} \right] - \vec{v} \left[m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} + \frac{d}{dt} \frac{\dot{r}}{r} \right].$$

Множители в квадратных скобках можно записать в виде

$$\begin{cases} m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + \frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}}{r} = (m\dot{\vec{v}} + \frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{r}}}{r}) \cdot \vec{v} \quad \text{и} \\ m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} + \frac{d}{dt} \frac{\dot{r}}{r} = (m\dot{\vec{r}} + \frac{d}{dt} \frac{\dot{r}}{r}) \cdot \vec{r}. \end{cases}$$

Стоящие в круглых скобках векторы

$$m\dot{\vec{v}} + \frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \vec{r}$$

в кулоновском поле равны нулю в силу уравнения движения — закона Ньютона:

$$m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\nabla U = -\nabla \left(-\frac{q}{r} \right) = -\frac{q}{r^3} \nabla r^2 = -\frac{q}{r^3} \vec{r}.$$

Таким образом, каждое слагаемое в $\frac{d\vec{Q}}{dt}$ в кулоновском поле (и только в кулоновском поле!) равно нулю и $\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0$, $\vec{Q} = \text{const}$

Величину и направление вектора Рунге-Ленца (интеграла движения в кулоновском поле) найдем, вычислив $\vec{q}$ в наиболее удобной для расчетов точке траектории - точке r_{min} . Это можно сделать, ибо $\vec{q} = \omega \vec{r} \times \vec{v}$ сохраняется вдоль траектории. В точке поворота r_{min} имеем $\dot{r} = 0$ и $\vec{v} \perp \vec{r}$ (рис. 37). Вектор $\vec{v}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{v}$, $\vec{r}$, а вектор $\vec{v} \times \vec{r}$ направлен вдоль апсиды. Такое же направление имеет и вектор $-\frac{d}{r} \vec{r}$. Следовательно, вдоль апсиды направлен и вектор $\vec{q}$.

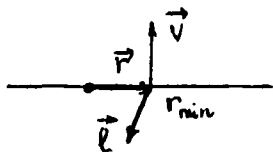


Рис. 37

Если $\alpha < 0$, то оба слагаемые больше нуля и $\vec{q}$ направлен от силового центра к r_{min} .

Если $\alpha > 0$, то, вычисляя величину

$$|\vec{v} \times \vec{r}| - |\alpha \frac{\vec{r}}{r}| = |\vec{v} \times \vec{r}| - \alpha = v l - \alpha$$

в точке $r = r_{min}$, находим

$$\begin{aligned} \vec{q} &= v l - \alpha = v m v r - \alpha = \frac{m v^2}{2} 2r - \alpha = 2r \left(\frac{m v^2}{2} - \frac{\alpha}{2r} \right) = \\ &= 2r \left(\frac{m v^2}{2} - \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{2r} \right) = 2r \left(\frac{m v^2}{2} - \frac{\alpha}{2r} \right) = 2r E + \alpha. \end{aligned}$$

Но в случае $\alpha > 0$ $r_{min} = \frac{P}{1+e} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} q &= 2 \frac{P}{1+e} E + \alpha = \alpha \left(\frac{2E}{\alpha} \frac{1}{1+e} + 1 \right) = \alpha \left(\frac{e^2 - 1}{1+e} + 1 \right) = \\ &= \alpha (e - 1 + 1) = \alpha e. \end{aligned}$$

Здесь использовано определение эксцентриситета

$$e^2 = 1 + \frac{2E}{\alpha} P.$$

Итак, $\vec{q} = \alpha e \vec{n}$, где $\vec{n}$ - единичный вектор, направленный по апсиде от силового центра к r_{min} .

6. Некоторые интересные особенности движения в кулонов- ском поле, особо существенные в квантовой механике

Мы выяснили, что интегралами движения в кулоновом поле являются:

{ интеграл энергии $E = \text{const}$ (время однородно),
интеграл момента $\vec{L} = \text{const}$ (пространство изотропно),
интеграл Рунге-Ленца $\vec{q} = \text{const}$ (поле - кулоновское).

Первые два интеграла существуют в силу симметрии пространства - времени. Третий интеграл - в силу особенности поля или, как принято говорить, в силу ДИНАМИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.

Все величины E , $\vec{L}$, $\vec{q}$ могут принимать некоторый непрерывный ряд (спектр) значений.

Какие характеристики орбиты определяют эти интегралы движения?

Интеграл E - большую полуось a .

Интеграл $\vec{L}$ - ориентацию плоскости орбиты и вместе с

Интегралом $\vec{q}$ - форму орбиты в этой плоскости ($\vec{q} = a\epsilon\vec{n}$).

Как уже говорилось выше, каждому значению энергии E соответствует бесчисленное множество орбит с разным $\vec{q}$, различно ориентированных в пространстве. В квантовой механике в аналогичной ситуации принято говорить о ВЫРОЖДЕНИИ энергии.

Энергия E вырождена как по $\vec{q}$, так и по $\vec{L}$, ибо конкретная орбита определяется заданием не только энергии, но и значения векторов $\vec{q}$ и $\vec{L}$ (точнее, проекции L_z вектора $\vec{L}$ на некоторое фиксированное направление) и "видом" орбиты -- её эксцентриситетом и направлением большой полуоси (апериды)

$\vec{n}$. При нарушении симметрии интегралы движения перестают быть таковыми и вырождение снимается. Так, нарушение кулоновского характера взаимодействия, когда $\vec{q} \neq \text{const}$, приводит к тому, что траектория в плоскости, перпендикулярной $\vec{L}$, перестаёт быть замкнутой и превращается в "розетку" типа изображенной на рис. 26. Движение можно рассматривать как движение по эллипсу, вращающемуся вокруг фокуса - силового центра в плоскости, перпендикулярной $\vec{L}$. Нарушение сферической симметрии, когда $\vec{L} \neq \text{const}$, превращает плоскую орбиту в "кувыркающуюся" в пространстве. При этом энергия частицы оказывается связанной со всеми характеристиками орбиты

Как известно, первая модель атома - атом Бора - Зоммерфельда была основана на предположениях Резерфорда о движении электронов в кулоновском поле протона, аналогичном движению планет в кулоновском поле тяготения Солнца (планетарная модель атома). Согласно Бору разрешенными, устойчивыми орбиты законам электродинамики являются только некоторые орбиты, которые можно перенумеровать так называемыми квантовыми числами. При этом ГЛАВНОЕ квантовое число n нумерует значения полной энергии E и определяет "удаленность" орбиты от силового центра (протона). НАЧАЛЬНОЕ квантовое число n_l нумерует значения проекции l_z момента $\vec{L}$ на заданное направление и определяет плоскость орбиты. Наконец, ОРБИТАЛЬНОЕ квантовое число l нумерует тип орбиты в плоскости движения и определяет эксцентриситет орбиты.

Нетрудно видеть, что квантовые числа соответствуют интегралам движения кулоновского поля:

$$\begin{aligned} n &\longleftrightarrow E, \\ n_l &\longleftrightarrow \vec{L}^2(l^2), \\ l &\longleftrightarrow \vec{L} \cdot \vec{e} (n, l). \end{aligned}$$

Поскольку орбита, заданная квантовыми числами n, l, m , определяет движение с энергией $E = E(n)$, имеет место вырождение энергии. Снятие вырождения приводит к расщеплению уровней энергии:

$$E(n) \longrightarrow E(n, l, m).$$

В классике в силу непрерывности спектра значений энергии расщепления уровней никак не проявляется (омерзевшие значения совпадают с другими возможными значениями энергии). В квантовой же механике при дискретном спектре энергии расщепление уровней соответствует появлению НОВЫХ уровней, которых прежде не бы. А так как переходы электрона с одного уровня энергии на другой приводят к излучению, то появление новых, омерзевших уровней приводит к расщеплению линий излучаемого спектра, легко наблюдаемому экспериментально.

Так, нарушение кулоновского характера взаимодействия (переход от атома водорода к водородоподобным атомам, в которых кулоновское поле протона искажено внутренними электронами - K, Na и т.д.), приводит к снятию вырождения по l . Расщепление уровней (появление дополнительных линий) легко

наблюдается при сравнении спектров таких атомов со спектром атома водорода.

Нарушение сферической симметрии реализуется при помещении атомов в магнитное поле, обладающее только осевой симметрией (симметрией цилиндра). Снятие вырождения по m ($l \neq 0$) обуславливает расщепление спектральных линий в магнитном поле - так называемый эффект Зеемана.

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ

§ I. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

В предыдущей главе изучалось движение частиц в полях, то есть по сути дела рассматривалось движение ОДНОЙ частицы (одного тела) в заданном поле сил. Способ образования этого поля и движение источника поля не рассматривались, хотя свойства самого поля, например его симметрия, существенным образом определяли характер решения. В этой главе анализируются задачи, в которых исследуется совокупное движение ДВУХ тел при отсутствии внешних по отношению к этим телам источников поля. Тем самым решается простейшая задача проблемы многих тел.

Р Задача о движении двух тел во внешнем поле по сути представляет собой вариант задачи о движении трех тел. Решение её осуществимо только для очень узкого класса внешних полей.* Это и послужило источником мрачной шутки, что классическая механика - наука о движении двух тел, а третий уже лишний.

Итак, рассмотрим ситуацию, когда $N=2$, $\vec{r}^e=0$ (внешнее поле отсутствует) и потенциальная энергия сводится к энергии парного взаимодействия: $U = U_{12}$.

* Олховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. М.: Изд-во МГУ, 1970.

Пусть $\begin{cases} m_1, \vec{r}_1 \\ m_2, \vec{r}_2 \end{cases}$ — массы и радиус-векторы частиц и по третьему закону Ньютона $\vec{F}_{21} = \vec{F}$, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}$. Тогда уравнения движения запишутся в виде

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}, \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}. \end{cases}$$

Согласно общей теории системы многих тел разделим совокупное движение системы (движение её центра инерции) и внутреннее движение частиц (движение относительно центра инерции). Обозначая по традиции радиус-вектор центра инерции через $\vec{R}$, имеем

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i \quad i = 1, 2,$$

где $\vec{r}_i$ — радиус-векторы частиц системы в лабораторной системе отсчета (Л.С.), $\vec{\rho}_i$ — радиус-векторы частиц в системе центра инерции (Ц.С.).

Задача решается поэтапно.

1. Движение центра инерции в Л.С.

Поскольку по условию $\vec{F}^e = 0$, то $\dot{\vec{R}} = \vec{V} = \text{const}$. Центр инерции движется по инерции по закону

$$\vec{R} = \vec{V}t + \vec{R}_0.$$

Здесь $\vec{V}$ — скорость движения центра инерции в Л.С.

2. Относительное движение частиц в Ц.С.

По принципу относительности Галилея, в силу инерциального характера Ц.С. (см. п. I) уравнения движения частиц в Ц.С. имеют тот же вид, как в Л.С., то есть

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{\rho}}_1 = \vec{F}, \\ m_2 \ddot{\vec{\rho}}_2 = -\vec{F}. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на m_2 , а второе на m_1 и вычитая второе уравнение из первого, находим

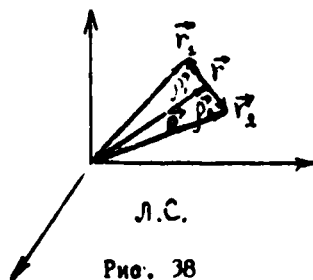
$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{\rho}}_1 - \ddot{\vec{\rho}}_2) = \vec{F} (m_1 + m_2). \quad (41)$$

Введем ПРИВЕДЕННУЮ МАССУ $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ и радиус-вектор

относительного расположения частиц $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$
(рис. 38). Тогда (I) принимает вид

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}),$$

ибо силы взаимодействия двух тел определяются их взаимным расположением. Как правило, $\vec{F} \parallel \vec{r}$, и мы имеем уравнение дви-



жения частицы с приведенной массой в поле центральных сил взаимодействия. При этом осяевой "центр" находится в точке $\vec{r} = \vec{c}$, то есть в центре инерции.

Итак, задача двух тел сводится к задаче о движении тела с приведенной массой μ в поле центральных сил взаимодействия.

Мы снова оказываемся в ситуации, когда "пальто вешается на гвоздик" - задача сводится к предыдущей. Заменяем в результатах, полученных в главе II,

$$\begin{cases} m \rightarrow \mu, \\ \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \\ E \rightarrow E \equiv \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + U_{\text{эф}}, \end{cases}$$

где $U_{\text{эф}} \equiv \frac{\lambda^2}{2\mu r^2} + U(r),$

а $\vec{r}$ имеет смысл радиус-вектора частицы о приведенной массой. Теперь можно записать квадратуры

$$\begin{cases} t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}}, \\ \varphi - \varphi_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}}, \end{cases} \quad (42)$$

которые дают траекторию движения частицы с приведенной массой и её закон движения в Ц.М.:

$$r = r(\varphi), \quad r = r(t).$$

3. Движение реальных частиц в Ц.С.

Поскольку в Ц.С. радиус-вектор центра инерции, определенный формулой $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$, равен нулю, то $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$. Добавим к этому условию определение $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Получим систему двух уравнений для величин $\vec{r}_i$:

$$\begin{cases} m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0, \\ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}. \end{cases}$$

Откуда $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}$, $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r} = 0$,

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \left(\frac{m_2}{M} - 1 \right) \vec{r} = -\frac{m_1}{M} \vec{r}.$$

Итак,

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r} = \frac{\mu}{m_1} \vec{r}, \\ \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r} = -\frac{\mu}{m_2} \vec{r}. \end{cases}$$

△ ТРАЕКТОРИИ РЕАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ ПОДОБНЫ ДРУГ ДРУГУ И ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦ С ПРИВЕДЕННОЙ МАССОЙ.

Очевидно, что

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_1 = \frac{\mu}{m_1} \dot{\vec{r}}, \\ \dot{\vec{r}}_2 = -\frac{\mu}{m_2} \dot{\vec{r}}. \end{cases}$$

Обозначая $\dot{\vec{r}}_i \equiv \vec{v}_i$, а $m_i \dot{\vec{r}}_i = m_i \vec{v}_i \equiv \vec{p}_i$, находим

$$\vec{p}_1 = \mu \dot{\vec{r}} \equiv \vec{p}_0,$$

$$\vec{p}_2 = -\mu \dot{\vec{r}} \equiv -\vec{p}_0.$$

Здесь $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v}_0$ - скорость движения частицы с приведенной массой, а $\vec{p}_0$ - её импульс. Таким образом, в Ц.С. ИМПУЛЬСЫ РЕАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ РАВНЫ ДРУГ ДРУГУ ПО ВЕЛИЧИНЕ И НАПРАВЛЕННЫ В ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СТОРОНЫ. Это обстоятельство является прямым следствием условия равенства нулю полного импульса системы в Ц.С.;

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_{10} + \vec{p}_{20} = 0.$$

Кинетическая энергия нуклонной пары в Ц.С.

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = \frac{p_{10}^2}{2m_1} + \frac{p_{20}^2}{2m_2} = \frac{p_0^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \\ &= \frac{p_0^2}{2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{p_0^2}{2M} \end{aligned}$$

и совпадает с кинетической энергией частицы с приведенной массой.

4. Движение частиц в Л.С.

Переход к лабораторной системе триггера:

$$\vec{r}_i = \vec{R}(t) + \vec{r}_i(t).$$

А следовательно,

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R}(t) + \frac{m_2}{M} \vec{r}(t), \\ \vec{r}_2 = \vec{R}(t) - \frac{m_1}{M} \vec{r}(t) \end{cases},$$

где $\vec{R}(t) = \frac{1}{M} \vec{V}t + \vec{R}_0$,

а $\vec{r}(t)$ определяется квадратурами (42). Аналогичное соотношение имеем для скоростей частиц:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{V} + \frac{m_2}{M} \vec{v}_0(t), \\ \vec{v}_2 = \vec{V} - \frac{m_1}{M} \vec{v}_0(t). \end{cases}$$

Здесь $\vec{v}_0(t)$ - скорость движения частицы с приведенной массой, совпадающая со скоростью относительного движения частиц

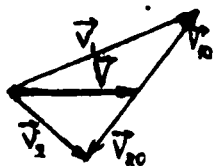


Рис. 39

$$\vec{v}_0(t) = \vec{v}_1 - \vec{v}_0 = \vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}.$$

Закон сложения скоростей иллюстрирует рис. 39:

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_{i0},$$

$$i = 1, 2.$$

ПРИМЕРЫ

Рассмотрим случай кулоновского взаимодействия частиц $U_{12} = -\frac{\alpha}{r}$.

1) Пусть $\alpha > 0$ и $E < 0$, так что частица с приведенной массой движется в Ц.С. по эллиптической траектории. Тогда реальные частицы тоже движутся по эллиптическим траекториям с фокусом в общем центре инерции.

Если $m_1 \approx m_2$, то $\begin{cases} \vec{r}_1 \approx \frac{1}{2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 \approx -\frac{1}{2} \vec{r} \end{cases}$ (рис. 40). Такая ситуация реализуется в системах двойных звезд. Траектория частицы с приведенной массой обозначена пунктиром. Частицы все время находятся в "противостоянии" друг другу, разделяемые центром инерции, вокруг которого они согласованно движутся.

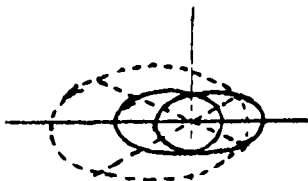


рис. 40

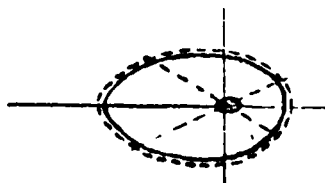


Рис. 41

Если $m_1 \ll m_2$, то $m_1 + m_2 \approx m_2$ и $\begin{cases} \vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r} = \frac{m_1 + m_2}{M} \vec{r} \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \vec{r} \\ \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r} \approx -\frac{m_1}{m_2} \vec{r} \end{cases}$

Эта ситуация описывает систему звезда - планета (рис. 41)... Пунктир - траектория частицы с приведенной массой - практически совпадающая с траекторией планеты. Звезда - частица с большей массой - движется по очень маленькому эллипсу, размеры которого могут быть меньше диаметра самой звезды.

2) Пусть $\alpha < 0$, $E > 0$, так что частица с приведенной массой движется в Ц.С. по гиперболической траектории в поле отталкивания. Тогда реальные частицы тоже движутся по гиперболическим траекториям с фокусом в центре инерции.

Если $m_1 \approx m_2$, то, как и в случае притяжения,

$$\begin{cases} \vec{r}_1 \approx \frac{1}{2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 \approx -\frac{1}{2} \vec{r} \end{cases}$$

Траектория частицы с приведенной массой (рис. 42) обозначена пунктиром. Частицы все время находятся в "противостоянии" по разные стороны от центра инерции. Асимптоты обеих гипербол параллельны асимптотам гиперболы частицы с приведенной массой и расположены симметрично по обе стороны от центра инерции на расстоянии δ друг от друга (расстояние между траекториями обходящихся частиц 2δ взаимодействия).

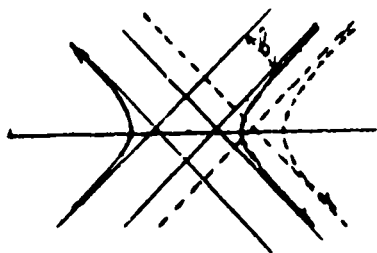


Рис. 42

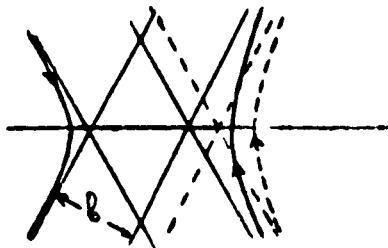


Рис. 43

Если $m_1 < m_2$, то, как и в случае притяжения,

$$\begin{cases} \vec{S}_1 \approx (1 - \frac{m_1}{m_2}) \vec{r}, \\ \vec{S}_2 \approx -\frac{m_1}{m_2} \vec{r} \end{cases}$$

(рис. 43). Траектория частицы с приведенной массой обозначена пунктиром. С ней практически совпадает траектория частицы с меньшей массой. Ситуация соответствует рассеянию легкой частицы на массивном практически неподвижном центре.

⚠ Выводы

Во всех задачах двух тел:

- 1) Используются две системы отсчета: Ц.С. и Л.С.
- 2) Предполагается, что центр инерции системы движется по инерции.
- 3) Частицы (материальные точки) движутся в плоскости, проходящей через центр инерции, перпендикулярно вектору $\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v}$.
- 4) Траектории частицы в Ц.С. подобны друг другу и траектории частицы с приведенной массой, движущейся в поле сил взаимодействия с центром в центре инерции.

Теория столкновений описывает распад частиц, упругие столк-

- новения и рассеяние частиц. Все эти задачи (не от хорошей жизни') так или иначе оводятся к задаче двух тел. При этом:
- 1) Движение чаотиц предполагается инфинитным.
 - 2) Специфика взаимодействия в больтинстве задач откладывает-ся в "черный ядик"ж)
 - 3) Параметры движения "ДО" и "ПОСЛЕ" процессов взаимодейст-вия связываются законами сохранения.

Р Информация к размышлению. Задача трех тел. жж)

В астрономии актуальный интерес представляет так называемая "задача трех тел" – задача о движении трех свободных материальных точек, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона. Общее решение такой задачи в приемлемом виде еще не найдено. Обращение к ЭВМ казывается бесполезным, ибо пока не существует таких численных методов, которые позволили бы получить информацию, удовлетворяющую запросам астрономии.

Частные решения задачи трех тел были найдены Эйлером, Лагранжем и Лапласом. Наиболее интересным считается решение Лагранжа, когда три материальные точки с разными массами находятся в вершинах равностороннего треугольника, который, изменяясь, всегда остается подобным исходному.

Эйлером было получено частное решение задачи трех тел для случая, когда три точки всегда располагаются на одной прямой.

И в олучае Эйлера, и в олучае Лагранжа все три точки описывают конические сечения с общим фокусом в центре инерции.

ж) "Черный ядик" – неоднократно выносился к игрокам клуба "Знатоков" (Что? Где? Когда?). Содержимое неизвестно. В физику вошел о легкой руки кибернетиков. Имеет омысл материального икса.

жж) Петкевич В.В. Теоретическая механика М.: Наука, 1981 .

Дубонин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы М.: Наука, 1975 .

Дубонин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1978.

§ 2. РАСПАД ЧАСТИЦ

Физика этого явления такова: ИСХОДНЫЕ, ПЕРВИЧНЫЕ частицы СПОНТАННО (самостоятельно) распадаются на ВТОРИЧНЫЕ, распадающиеся частицы. Согласно общим положениям теории столкновений движение распадающихся частиц рассматривается при полном прекращении процесса, приведшего к распаду. Таким образом, сам процесс распада оказывается в "черном ящике". Нам же надлежит установить связь между характеристиками движения первичной и вторичных частиц "ДО" и "ПОСЛЕ" распада.

Будем пользоваться обозначениями традиционными для задачи двух тел. Пусть:

$\vec{V}$ - скорость движения центра инерции системы, совпадающей с первичной частицей в Л.С.,

$\vec{V}_i$ - скорости движения распадающихся частиц с массами m_i в Л.С.,

$\vec{V}_{ic}$ - скорости движения распадающихся частиц в Ц.С.

Как и всегда, $\vec{V}_i = \vec{V} + \vec{V}_{ic} \quad i = 1, 2$.

⚠ Распад на три частицы классическая механика описать не умеет. В таких случаях предполагается распад на две частицы, одна из которых тут же распадается тоже на две частицы. По такой же схеме, используя цепочку превращений - актов распада на две частицы, можно описать и распад на любое число частиц $N > 2$.

Поскольку в задачах двух тел всегда предполагается $\vec{F} = 0$, имеем два интеграла движения:

$$\begin{cases} \vec{P} = \text{const}, \\ E = \text{const}. \end{cases}$$

I. Система центра инерции - Ц.С.

Как было показано в задаче двух тел,

$$\begin{cases} \vec{P}_0 = \vec{P}_0, \\ \vec{P}_{20} = -\vec{P}_0. \end{cases}$$

Суммарный импульс в Ц.С. $\vec{P}_0 = 0$ и, разумеется, сохраняется.

Используем условие $E = \text{const}$. До распада $E = E_{\text{вн}}$ - внутренней энергии распадавшейся первичной частицы. После распада $E = E_{\text{вн1}} + E_{\text{вн2}} + T$. Здесь $E_{\text{вн1}}$ - внутренние энергии распадных частиц; T - их полная кинетическая энергия. Как было показано в задаче двух тел, $T = p_0^2 / 2\mu$. Таким образом, закон сохранения энергии приводит к соотношению

$$E_{\text{вн}} = E_{\text{вн1}} + E_{\text{вн2}} + \frac{p_0^2}{2\mu}.$$

Обозначая $U = E_{\text{вн}} - E_{\text{вн1}} - E_{\text{вн2}}$ - ЭНЕРГИЯ РАСПАДА, имеем

$$U = \frac{p_0^2}{2\mu}.$$

а следовательно,

$$p_0 = \sqrt{2\mu U}.$$

Направление вектора $\vec{p}_0$ остается в "черном ящике" и определяется конкретным законом взаимодействия в процессе распада.

2'. Лабораторная система отсчета Л.С.

В лабораторной системе, как уже говорилось выше,

$$\vec{V}_i = \vec{V} + \vec{V}_{ic}.$$

Величины $\vec{V}_{ic} = \vec{p}_{i0} / m_i$ - константы распада, определяемые энергией распада U (типом реакции распада). Направление вектора $\vec{V}_{ic}$ неизвестно - "черный ящик" распада. Конец вектора $\vec{V}_{ic}$ может лежать где угодно на окружности радиуса V_{ic} . Поскольку

$$\vec{V}_{ic} = \vec{V}_i - \vec{V},$$

то

$$V_{ic}^2 = V_i^2 + V^2 - 2V_i V \cos \theta_i \quad i = 1, 2,$$

где θ_i - измеренный в Л.С. угол отклонения распадной частицы от направления движения первичной частицы - первоначально-го направления движения.

Аналогично угол отклонения в Ц.С. θ_{i0} - это угол меж-

ду векторами $\vec{V}_{i0}$ и $\vec{V}$ (рис. 44, схематически изображающий процесс распада).

МЕТОД ДИАГРАММ

Рис. 44 лежит в основе МЕТОДА ДИАГРАММ, позволяющего свести задачу пересчета информации из Ц.С. в Л.С. и обратно к чисто геометрической. Теоретические расчеты удобнее вы-

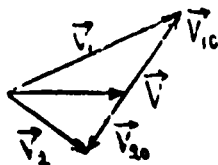


Рис. 44



Рис. 45

полнять в Ц.С. Эксперимент проводится, естественно, в Л.С. Поэтому пересчет информации из Ц.С. в Л.С. и обратно нужен для сопоставления теоретических и экспериментальных данных.

На рис. 45 приведена ДИАГРАММА РАСПАДА для случая $V_{i0} > V$. Информация о значении угла θ_{i0} находится в "черном ящике". Поэтому угол отклонения θ_{i0} может быть любым. Величина - длина - вектора $\vec{V}_{i0}$ - константа распада. Следовательно, конец вектора $\vec{V}_{i0}$ (точка С) - любая точка окружности радиуса $OC = V_{i0}$. Вектор AO совпадает с вектором $\vec{V}$ скорости первичной частицы. Таким образом, диаграмма распада является геометрическим изображением закона сложения скоростей $\vec{V}$ и $\vec{V}_{i0}$. Для диаграммы рассматриваемого типа характерны однозначные соответствия между скоростями и углами отклонения частиц в Л.С. и Ц.С.:

$$V_i \longleftrightarrow V_{i0} \quad \theta_i \longleftrightarrow \theta_{i0}.$$

Углы отклонения θ_i , θ_{i0} могут изменяться в интервале $[0, \pi]$.

На рис. 46 приведена ДИАГРАММА РАСПАДА для случая $V_{i0} < V$. Точка А в этом случае лежит ВНЕ окружности, и значения

скоростей и углов отклонения в Ц.С. и Л.С. связаны неоднозначно:

$$\triangle V_{10} \rightarrow V_i, V_i', \quad \theta_i \rightarrow \theta_{i0}, \theta_{i0}',$$

поскольку при заданном значении θ_i возможно построить ДВЕ точки С и С' пересечения вектора, направленного под углом θ_i к скорости движения первичной частицы, о: окружности радиуса V_{10} . Усложняется и область определения углов,

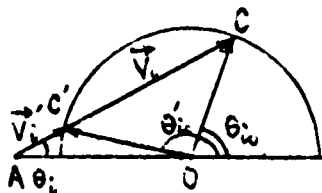


Рис. 45

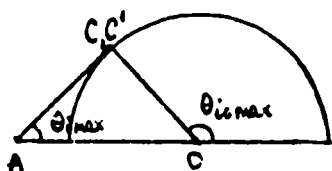


Рис. 47

Так, угол θ_{i0} изменяется в пределах $[0, \theta_{i0_{\max}}]$,

угол θ_{i0}' изменяется в пределах $[\theta_{i0_{\max}}, \pi]$,

а угол θ_i изменяется в пределах $[0, \theta_{i_{\max}}]$,

где угол $\theta_{i_{\max}}$ определяется условием

$$\sin \theta_{i_{\max}} = V_{10} / V, \quad \theta_{i0_{\max}} = \frac{\pi}{2} + \theta_{i_{\max}},$$

когда точки С и С' сливаются и секущая АС'С превращается в касательную АС (рис. 47).

Связь между углами отклонения θ_i и θ_{i0} в Л.С. и Ц.С. может быть записана и аналитически. Действительно (рис. 48),

опустим перпендикуляр CD на линию АО. Тогда

$$\tan \theta_i = \frac{CD}{AO}.$$

Но $CD = V_{10} \sin \theta_{i0}$.

и $AO = V + V_{10} \cos \theta_{i0}$,

то есть

$$\tan \theta_i = \frac{V_{10} \sin \theta_{i0}}{V + V_{10} \cos \theta_{i0}}.$$

Полученная формула позволяет однозначно вычислить угол θ_i

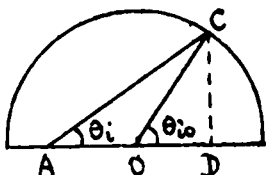


Рис. 48

по известному углу θ_{10} . Обратное соотношение для определения θ_{10} через θ_1 *) получается как решение квадратного уравнения, что и соответствует неоднозначности перехода от Л.С. к Ц.С. в случае $V > V_{10}$.

Все построенные выше диаграммы описывают только одну из распадных частиц. Учет ооветственного поведения распадных час-

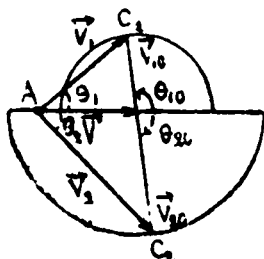


Рис. 49а

тиц осуществляется путем объединения диаграмм (рис. 49а). Поскольку $\theta_{10} + \theta_{20} = \pi$ - оокороти $\vec{V}_{10}$ и $\vec{V}_{20}$ направлены диаметрально противоположно - объединение диаграмм приносит дополнительную информацию и может, в частности, исключить неоднозначность определения угла θ_{10} в олучае $V > V_{10}$,

как это показано на рисунке.

Приведенной охеме ооответствует реальная картина распада (рис. 49б), которая может быть зафиксирована в толстослой-

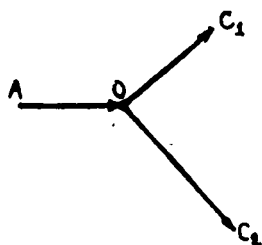


Рис. 49б

ной фотопластинке или в камере Вильсона. Здесь OC_1 , OC_2 , AO - треки распадных и исходной частиц.

*) См., например: Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Механика, М.: Наука, 1988.

§ 3. УПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

В курсах общей физики под упругими столкновениями понимаются столкновения, при которых остаются неизменными внутренние состояния частиц. Напротив, при неупругих столкновениях внутренние состояния частиц изменяются. Очевидно, что сохранение внутренних параметров частиц связано с выполнением закона сохранения механической энергии $E = \sum m_i v_i^2$. Условие сохранения энергии намного четче и проще условия неизменности трудно измеряемых и проверяемых "внутренних состояний". Поэтому в теоретической физике УПРУГИМИ СТОЛКНОВЕНИЯМИ называются столкновения, при которых $E = \sum m_i v_i^2$, НЕУПРУГИМИ — происходящие с нарушением закона сохранения механической энергии.

⚠ Само слово СТОЛКНОВЕНИЯ — условное обозначение любого запертого в "черный ящик" процесса взаимодействия (рис. 50), при котором неопределенное соприкосновение может вообще не иметь места.



Рис. 50

Введем обозначения по следующей схеме:

	Ц.С.	Л.С.
до	$\vec{v}_{i0}$	$\vec{v}_i$
после	$\vec{v}'_{i0}$	$\vec{v}'_i$

Скорости в Ц.С. связаны со скоростями в Л.С. известным соотношением

$$\begin{cases} \vec{v}_i = \vec{v}_{i0} + \vec{V}, \\ \vec{v}'_i = \vec{v}'_{i0} + \vec{V}. \end{cases}$$

Интегралами движения являются полный импульс и полная энергия системы (по определению упругих столкновений).

1. Система центра инерции Ц.С.

Из задачи двух тел имеем



ДО СТОЛКНОВЕНИЯ

$$\begin{cases} \vec{p}_{10} = \vec{p}_0, \\ \vec{p}_{20} = -\vec{p}_0, \end{cases} \quad E = \frac{p_0^2}{2M}.$$

ПОСЛЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

$$\begin{cases} \vec{p}'_{10} = \vec{p}'_0 = p'_0 \vec{n}_0, \\ \vec{p}'_{20} = -\vec{p}'_0 = -p'_0 \vec{n}_0, \end{cases} \quad E' = \frac{p_0'^2}{2M}.$$

Из закона сохранения энергии получим $E = E' \Rightarrow p_0 = p'_0$.

Импульс частицы с приведенной массой после столкновения изменяется только по направлению.

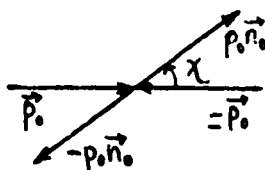


Рис. 5I

Схематически ситуация представлена на рис. 5I. Угол χ - угол отклонения частицы с приведенной массой от первоначального направления движения. По определению он совпадает с углом отклонения частицы номер I. Угол отклонения частицы номер 2 от первоначального направления движения частицы с приведенной массой

, которое выбирается за "начало отсчета", равен $\pi - \chi$. Мы видим, что линия движения частицы как бы поворачивается на угол χ

2. Лабораторная система отсчета Л.С.

После столкновения имеем

$$\vec{v}'_i = \vec{v}'_{i0} + \vec{V} \quad i = 1, 2.$$

Умножая на m_i ($i = 1, 2$) получим

$$\vec{p}'_i = \vec{p}'_{i0} + m_i \vec{V} = \vec{p}'_{i0} + \frac{m_i}{M} \vec{P} \quad i = 1, 2.$$

Здесь $M = m_1 + m_2$ - суммарная масса сталкивающихся частиц. Подставим значения $\vec{p}'_{i0}$, найденные выше. Тогда

$$\begin{cases} \vec{p}_1' = \frac{m_1}{M} \vec{P} + p_0 \vec{n}_0, \\ \vec{p}_2' = \frac{m_2}{M} \vec{P} - p_0 \vec{n}_0. \end{cases}$$

Направление вектора $\vec{n}_0$ определяется конкретным типом взаимодействия при столкновении и находится на данном этапе анализа в "черном ящике". Величина импульса $p_0 = \mu V_0$ - константа столкновения, V_0 - скорость относительного движения частиц.

МЕТОД ДИАГРАММ

Пересчеты между Ц.С. и Л.С. удобнее проводить, используя диаграммы столкновения. Радиус полуокружности $OC = p_0 = \mu V_0$, направление диаметра "основания" диаграммы - направление полного импульса $\vec{P}$ системы до столкновения (рис. 52).

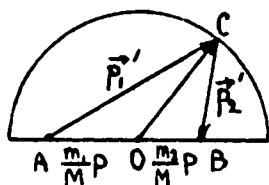


Рис. 52

Точки A и B удалены от точки O на расстояния $\frac{m_1}{M} P$ и $\frac{m_2}{M} P$ соответственно. Если радиус OC направлен вдоль вектора $\vec{n}_0$, то векторы AC и CB имеют смысл импульсов частиц $\vec{p}_1'$ и $\vec{p}_2'$ после столкновения в Л.С. Нетрудно увидеть, что диаграмма описывает закон сохранения импульса, ибо вектор AB равен

$$\frac{m_1}{M} \vec{P} + \frac{m_2}{M} \vec{P} = \vec{P}, \quad \text{а} \quad \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}' = \vec{P}.$$

Как правило, диаграммы столкновений анализируются для ряда экспериментально реализуемых частных случаев.

1. Одна из частиц - мишень - до столкновения покоилась в Л.С.

$$\vec{V}_2 = 0.$$

Тогда

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1,$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1 = m_1 \vec{V}_1 = m_1 \vec{V}_0.$$

Направление вектора $\vec{P}$ - направление удара (направление движения налетающей частицы). Вектор OB равен

$$\frac{m_1}{M} \vec{P} = \frac{m_1}{M} m_1 \vec{V}_0 = \mu \vec{V}_0 = \vec{p}_0.$$

Но $\vec{p}_0$ - первоначальный импульс частицы номер 1, а также частицы с приведенной массой в Ц.С. Мы видим, что он направлен вдоль линии удара и совпадает по величине с радиусом окружности $OC = \mu V_0 = p_0$. Таким образом, точка B оказывается на окружности (рис. 53).

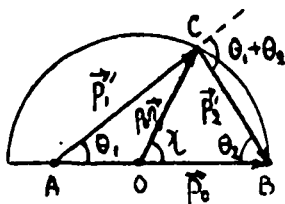


Рис. 53

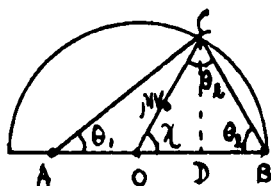


Рис. 54

Теперь оказывается возможным ввести углы отклонения в Ц.С. - χ и в Л.С. - θ_i ($i = 1, 2$). А именно, угол χ образован направлением $\vec{p}_0$ радиуса OC с направлением $\vec{p}_0$ радиуса OB . Углы θ_i образованы $\vec{p}_1'$ и $\vec{p}_2'$ с направлением удара $\vec{P}$ (линия AB). Угол $\theta_1 + \theta_2$ - угол разлета частиц в Л.С.

Связь между углами отклонения в Л.С. и в Ц.С. устанавливается соотношениями (рис. 54)

$$\theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2},$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{CD}{AD} = \frac{\mu V_0 \sin \chi}{\frac{m_1}{M} m_1 V_0 + \mu V_0 \cos \chi} = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}.$$

Заметим, что рис. 53 и 54 соответствуют случаю, когда $m_1 < m_2$, $AO = \frac{m_1}{M} p$. $OB = \frac{m_2}{M} p \Rightarrow AO < OB$ и точка A находится внутри полуокружности.

В этом случае угол разлета $\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$ (угол $\angle ACB$ опирается на отрезок AB , который меньше диаметра). Углы χ и θ_1 изменяются в пределах $[0, \pi]$, угол θ_2 - в пределах $[\frac{\pi}{2}, 0]$, а связь между углами (импульсами) в Ц.С. и Л.С. однозначна.

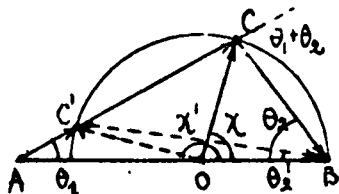
$\triangle$ В случае, когда $m_1 > m_2$ (рио. 55), точка A оказывается вне окружности, $AO = \frac{m_1}{M} R$, $OB = \frac{m_2}{M} R \Rightarrow AO > OB$. Угол разлета в этом случае $\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ (угол $\angle ACB$ опирается на отрезок AB , который больше, чем диаметр окружности). Связь между углами (импульсами) в Ц.С. и Л.С. неоднозначна. Одному и тому же углу θ_1 в Л.С. соответствует два возможных значения угла отклонения в Ц.С. - χ и χ' (две точки пересечения с окружностью линии, проведенной из точки A под углом θ_1 к линии AB).

Угол $\begin{cases} \chi \in [0, \chi_{\max}] \\ \chi' \in [\pi, \chi_{\max}] \end{cases}$

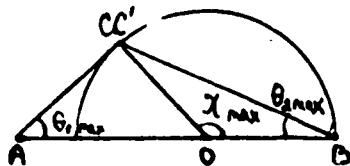
Соответственно углы

$$\begin{cases} \theta_1 \in [0, \theta_{1\max}] \\ \theta_2 \in [\frac{\pi}{2}, \theta_{2\max}] \\ \theta'_2 \in [0, \theta_{2\max}] \end{cases}, \quad \begin{aligned} 2\theta_2 &= \pi - \chi, \\ 2\theta'_2 &= \pi - \chi'. \end{aligned}$$

Угол $\theta_{1\max}$ определяется условием, когда секущая превращается в касательную $AC'C \Rightarrow AC$ (рио. 56).



Рио. 55



Рио. 56

Как видно из рио. 56, $\sin \theta_{1\max} = \frac{m_2 v_0}{m_1 m_2 v_0} = \frac{m_2}{m_1}$

и максимальное значение угла θ_1

$$\theta_{1\max} = \arcsin \frac{m_2}{m_1}$$

Здесь m_2 - масса мишени; m_1 - масса налетающей, более тяжелой частицы;

$$\chi_{\max} = \frac{\pi}{2} - \theta_{1\max}, \quad \text{а} \quad 2\theta_{2\max} = \pi - \chi_{\max} = \frac{\pi}{2} - \theta_{1\max}.$$

В случае, когда $m_1 = m_2$ (рис. 57), радиус $AO = \frac{m_1}{m_1} R, OB = \frac{m_2}{m_2} R$, $AO = OB$ и точка A тоже лежит на окружности. Поэтому угол разлета частиц в Л.С.

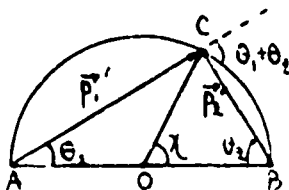


Рис. 57

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Угол } \theta_1 = \chi/2, \quad \text{угол } \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}.$$

Р у билиардистов такой удар, когда столкнувшиеся шары разлетаются под прямым углом почему-то называется "штаны".

2. Частицы до и после столкновения движутся вдоль линии, соединяющей их "центры". Реализуется ЛОБОВОЕ или ЦЕНТРАЛЬНОЕ (терминология общей физики) столкновение.

? То-же, предполагается, что до столкновения мишень покоится в Л.С. и точка B лежит на окружности справа от её центра. /словие лобового столкновения - угол отклонения $\chi = \pi$, так что точка C лежит на окружности и на линии удара олова от центра окружности.

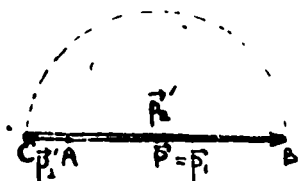


Рис. 58

Рис. 58 иллюстрирует лобовое столкновение в случае $m_1 < m_2$. Точка A лежит на линии удара правее точки C . Вектор AB определяет вектор $\vec{P} = \vec{P}_2$. Вектор AC - $\vec{P}_1'$, вектор CB - $\vec{P}_2'$. В силу параллельности всех векторов согласно рис. 58 имеем

$$P_1 = P_1' - P_2'.$$

Угол разлета $\theta_1 + \theta_2 = \pi$.

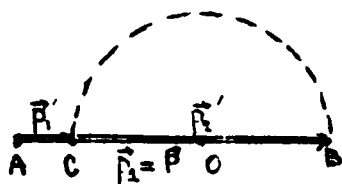


Рис. 59

Угол разлета $\theta_1 + \theta_2 = \pi$. Налетающая частица после столкновения движется следом за мишенью.

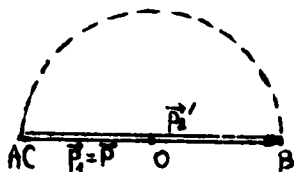


Рис. 60

Рис. 59 иллюстрирует лобовое столкновение в случае $m_1 > m_2$. Точка А лежит на линии удара левее точки С. Вектор АВ определяет вектор $\vec{p} = \vec{p}_1$, вектор АС - $\vec{p}_1'$, вектор СВ - $\vec{p}_2'$. В силу параллельности векторов согласно рис. 59 имеем

$$p = p_1 = p_1' + p_2'$$

Рис. 60 соответствует случаю $m_1 = m_2$, когда точки А и С сливаются:

$$\begin{cases} p_1 = p, & p_2' = 0, \\ p_2 = 0, & p_1' = p \end{cases}$$

- происходит обмен импульсами, хорошо известный любителям бильярда.

Р Истоки теории столкновений ясно проглядывают в обобщении движения сталкивающихся бильярдных шаров. И вряд ли математики, заложившие фундамент теории "веселого досуга", подозревали, что их исследования послужат для объяснения теплового движения атомов и молекул, рассеяния света, космических лучей, превращений элементарных частиц и множества других эффектов в микромире.

Прежде, от классической теории рассеяния зачастую приходится переходить к квантовой. Однако при этом изменяется только техника расчетов. Основные определения и смысл измеряемых характеристик наследуются из "доброй, старой" классической теории столкновений.

§ 4. РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ НА НЕПОДВИЖНОМ ЦЕНТРЕ

Попробуем заглянуть в "черный ящик" и выяснить, чем и как определяется величина угла отклонения χ .

Поскольку в Ц.С. траектории реальных частиц подобны траектории частицы с приведенной массой, достаточно рассмотреть траекторию этой частицы в поле сил взаимодействия при "рассеянии" на "силовом центре", находящемся в центре инерции. На рис. 61 сплошная гиперболоподобная линия - траектория рассеиваемой частицы. Угол отклонения от первоначального направления движения

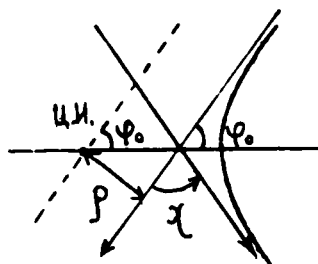


Рис. 61

$$\chi = \pi - 2|\varphi_0|.$$

Угол φ_0 в соответствии с результатами, полученными при исследовании движения в поле центральных сил, определяется квадратурой

$$\varphi_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}},$$

где

$$U_{\text{эфф}}(r) = \frac{\lambda^2}{2\mu r^2} + U(r);$$

E - полная энергия частицы с приведенной массой; $U(r)$ - потенциальная энергия взаимодействия.

В экспериментах оказывается удобнее вместо характеристик λ и E (момента импульса и полной энергии) использовать характеристики: ρ - прицельное расстояние и V_{∞} - скорость частицы, налетающей на мишень.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРИЦЕЛЬНОЕ РАССТОЯНИЕ ρ - это расстояние, на котором частица прошла бы мимо силового центра при отсутствии взаимодействия.

Очевидно, что

$$\begin{cases} \lambda = \mu V_{\infty} \rho, \\ E = \frac{\mu V_{\infty}^2}{2}. \end{cases}$$

При: $V_2 = C$ (мгнень до столкновения покоится) $V_\infty = V_0(\infty) = V_{0-0}$ - скорости налетающей частицы до взаимодействия.

Преобразуем квадратуру, определяющую угол φ_0 , к новым переменным:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2\mu}} = \frac{\mu V_{0-0}}{\sqrt{2\mu}} = \sqrt{\frac{\mu V_{0-0}^2}{2}} \rho = \sqrt{\varepsilon} \rho,$$

$$\begin{aligned} U_{\text{эф}} &= \frac{\lambda^2}{2\mu r^2} + U(r) = \frac{\mu^2 V_{0-0}^2 \rho^2}{2\mu r^2} + U(r) = \frac{\rho^2}{r^2} \varepsilon + U(r) = \\ &= \varepsilon \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^2 + \frac{U(r)}{\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{n^2 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 - (\rho/r)^2 - U(r)/\varepsilon}} = \\ &= \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{d(-\rho/r)}{\sqrt{1 - (\rho/r)^2 - U(r)/\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Откуда

$$\chi = \pi - 2 \left| \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{-d(\rho/r)}{\sqrt{1 - (\rho/r)^2 - U(r)/\varepsilon}} \right|.$$

Как правило, в обоих опытах экспериментатор имеет дело не с одной частицей, а с целым пучком одинаковых по массе и скорости V_∞ частиц. Друг от друга частицы пучка отличаются значением прицельного расстояния ρ . Таким образом,

$$\chi = \chi(\rho).$$

Параметрическая зависимость угла отклонения от прицельного расстояния определяет характер и определяется характером взаимодействия.

Оказывается удобным ввести следующую характеристику взаимодействия; называемую дифференциальным эффективным сечением.

Δ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ЭФФЕКТИВНЫМ СЕЧЕНИЕМ называется отношение

$$d\sigma = \frac{dN}{n}$$

где dN - число частиц, отклонившихся за единицу времени на угол, лежащий в интервале $[\chi, \chi + d\chi]$;

n - плотность потока частиц, то есть число частиц, проходящих за единицу времени через единичную площадку поперечного сечения потока - перпендикулярно скорости V_{∞} .

Теоретически дифференциальное эффективное сечение может быть вычислено, если $\chi(\rho)$ - монотонная функция и повторные столкновения отсутствуют. Тогда углам отклонения из интервала $[\chi, \chi + d\chi]$ можно однозначно сопоставить прицельные расстояния из интервала $[\rho, \rho + d\rho]$. А следовательно, $dN = n dS$, где S - площадь кольца толщиной $d\rho$, радиуса ρ (рис. 52) $S = 2\pi\rho d\rho$. Откуда

$$dN = n 2\pi\rho d\rho$$

и

$$d\sigma = \frac{dN}{n} = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi$$

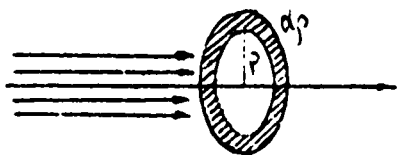


Рис. 52

Для измерений удобнее относить сечение $d\sigma$ не к линейному малому интервалу углов $d\chi$, а к телесному малому углу $d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$. Смысл

$d\Omega$ - площадь поверхности шара единичного радиуса между "лиротными" кругами χ и $\chi + d\chi$. При этом лиротные углы χ отсчитываются не от "экватора", а от "полюса". Тогда

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| \left| \frac{\sin\chi}{\sin\chi} \right| d\chi = \rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| \left| \frac{d\Omega}{\sin\chi} \right|$$

Для расчетов оказывается удобной формула

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left| \frac{d\rho^2}{d\chi} \right| \frac{d\Omega}{\sin\chi}$$

В том случае, когда взаимодействие имеет ограниченный ра-

диус, то есть практически отсутствует при $\vartheta = \vartheta_{\max}$, можно ввести понятие ПОЛНОГО ЭФФЕКТИВНОГО СЕЧЕНИЯ

$$\sigma = \int_0^{\vartheta_{\max}} \sigma d\vartheta = \pi \vartheta_{\max}^2.$$

Р При отстрелбе по мишени — полное сечение совпадает с площадью диска мишени, дифференциальные — с concentрическими кольцами (восьмерка, девятка и т.д.) и центральным кругом — "яблочком".

Если вычисленное в Ц.С. дифференциальное эффективное сечение может быть записано в виде

$$d\sigma = f(\chi) d\Omega = f(\chi) 2\pi \sin\chi d\chi,$$

то для перехода в Л.С. для сравнения с экспериментом необходимо выразить угол χ через лабораторные углы θ_1 и θ_2 — мишень тоже рассеивается. Телесный угол $d\Omega$ также следует выразить через телесные углы $d\Omega_1 = 2\pi \sin\theta_1 d\theta_1$ и $d\Omega_2 = 2\pi \sin\theta_2 d\theta_2$. Поскольку при $V_1=0$ $2\theta_2 = \pi - \chi$, то $\chi = \pi - 2\theta_2$, и, отбрасывая несущественный минус,

$$\begin{aligned} d\Omega(\theta_2) &= 2\pi \sin(\pi - 2\theta_2) 2d\theta_2 = 2\pi 2\sin\theta_2 \cos\theta_2 2\theta_2 = \\ &= 4\cos\theta_2 d\Omega_2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$d\sigma_2 = f(\pi - 2\theta_2) 4\cos\theta_2 d\Omega_2 = f_2(\theta_2) d\Omega_2 \quad (43)$$

Дифференциальное эффективное сечение $d\sigma_2$ в общем случае получить невозможно в силу сложной зависимости угла θ_2 от χ . Строя диаграммы в экспериментально интересных случаях $m_1 \ll m_2$ и $m_1 \approx m_2$, получаем (рис. 63 и 64)

1) $m_1 \ll m_2$, $\theta_2 \approx \chi$,
а следовательно,

$$d\Omega \approx d\Omega_1$$

и

$$d\sigma_1 \approx f(\theta_1) d\Omega_1. \quad (44)$$

2) $m_1 \approx m_2$, $\theta_2 \approx \chi/2$, $\chi \approx 2\theta_1$,

а следовательно,

$$d\Omega(\theta_1) = 2\pi 2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 2 d\theta_1 = 4 \cos\theta_1 d\Omega_1$$

и.

$$d\sigma_1 = f(2\theta_1) 4 \cos\theta_1 d\Omega_1 = f_1(\theta_1) d\Omega_1 \dots \quad (45)$$

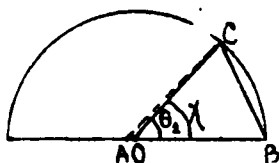


Рис. 63

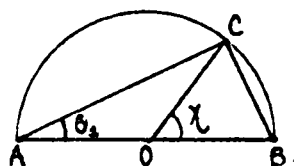


Рис. 64

§ В том случае, когда равенство масс обусловлено рассеянием тождественных частиц друг на друге, рассеявшиеся частицы пучка экспериментально неотличимы от рассеявшихся частиц мишени. Измеряемая на опыте величина соответствует сумме $d\sigma_1 + d\sigma_2$, то есть

$$d\sigma_{\text{нас}} = d\sigma_1 + d\sigma_2 = f(2\theta_1) 4 \cos\theta_1 d\Omega_1 + \\ + \int (\pi - 2\theta_2) 4 \cos\theta_2 d\Omega_2$$

Углы θ_1 и θ_2 в этой формуле перенумерованы чисто условно. Обозначая $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, находим $d\Omega_1 = d\Omega_2 = d\Omega$,

$$d\sigma_{\text{нас}} = [f(2\theta) + f(\pi - 2\theta)] 4 \cos\theta d\Omega \quad (46)$$

§ 5. ФОРМУЛА РИЗЕРФОРДА (РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ)

Как было показано во второй главе, траекторией частицы, движущейся в кулоновском поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ ($\alpha \geq 0$), является коническое сечение

$$r = \frac{P}{\pm 1 + e \cos \varphi} ,$$

где знак плюс соответствует $\alpha > 0$, знак минус — $\alpha < 0$.

Найдем угол отклонения χ в кулоновском поле как функцию от прицельного расстояния ρ . Очевидно, что $\varphi_0 = \varphi(\infty)$. Но $r = \infty$ при

$$e \cos \varphi_0 = \pm 1 .$$

Значит, $\cos \varphi_0 = \pm \frac{1}{e}$.

Но $\chi = \pi - 2\varphi_0$, $\varphi_0 = \frac{\pi - \chi}{2}$.

Поэтому имеем

$$\cos \varphi_0 = \sin \frac{\chi}{2} , \quad \sin^2 \frac{\chi}{2} = \frac{1}{e^2} = \frac{1}{1 + \frac{2E}{\alpha} \rho} .$$

Откуда находим

$$\begin{aligned} \frac{2E}{\alpha} \rho &= \frac{mv_{\infty}^2}{\alpha} \frac{\lambda^2}{\mu} = \frac{v_{\infty}^2 (mv_{\infty} \rho)^2}{\alpha^2} = (mv_{\infty}^2)^2 \left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^2 = \\ &= -1 + \frac{1}{\sin^2 \chi/2} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2} . \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\rho^2 = \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2} .$$

Выше было получено, что

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left| \frac{d\rho^2}{d\chi} \right| \frac{d\Omega}{\sin \chi} .$$

Подставляя ρ^2 в это соотношение, имеем

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{mv_{\infty}^2} \right)^2 2 \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} \frac{1}{\sin^2 \chi/2} \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{\sin \chi} =$$

$$= \left(\frac{d}{mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{\cos \chi/2}{\sin^3 \chi/2} \frac{d\Omega}{2 \sin \chi/2 \cos \chi/2} = \left(\frac{d}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \chi/2}.$$

Полученное выражение для дифференциального эффективного сечения рассеяния в кулоновском поле в Л.С.

$$d\sigma = \left(\frac{d}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \chi/2}$$

носит название формулы РЕЗЕРФОРДА.

⚠ Заметим, что значение $d\sigma$ не зависит от знака d - рассеяние происходит одинаково, как в поле притяжения, так и в поле отталкивания.

⚠ Переход к Л.С. рассмотрен выше. Используем готовый "рецепт". В случае кулоновского поля функция

$$f(\chi) = \left(\frac{d}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \chi/2}.$$

Для рассеяния мюони согласно (43) получаем

$$d\sigma_2 = \int (\pi - 2\theta_2) 4 \cos \theta_2 d\Omega_2 =$$

$$= \left(\frac{d}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{4 \cos \theta_2 d\Omega_2}{\sin^4 \frac{\pi - 2\theta_2}{2}} = \left(\frac{d}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{4 \cos \theta_2 d\Omega_2}{\cos^4 \theta_2}.$$

Итак,

$$d\sigma_2 = \left(\frac{d}{mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{1}{\cos^3 \theta_2} \cos \theta_2 d\Omega_2.$$

Для рассеяния нелетающей частицы в рассмотренных частных случаях находим:

Для $m_1 \ll m_2$ согласно (44)

$$d\sigma_1 = f(\theta_1) d\Omega_1 = \left(\frac{d}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{d\Omega_1}{\sin^4 \theta_1/2}.$$

При этом $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m_1$, V_∞ - скорость движения налетающей частицы массы m_1 . Мы получили формулу РЕЗЕРЖУРДА для сечения в Л.С.

$$d\sigma_1 = \left(\frac{d}{2m_1 V_\infty^2} \right)^2 \frac{dQ_1}{\sin^4 \frac{\Theta_1}{2}}.$$

Для $m_1 \approx m_2$ согласно (45)

$$d\sigma_1 = \int (2b_1) 4 \cos \Theta_1 dQ_1.$$

Поэтому

$$d\sigma_1 = \left(\frac{d}{2\mu V_\infty^2} \right)^2 \frac{4 \cos \Theta_1 dQ_1}{\sin^4 \Theta_1}.$$

Для тождественных частиц в лабораторной системе отсчета согласно (46) имеем

$$d\sigma_A = d\sigma_1 + d\sigma_2 = \left(\frac{d}{2\mu V_\infty^2} \right)^2 4 \left(\frac{1}{\cos^2 \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \right) \cos \Theta dQ.$$

Поскольку в этом случае $\mu \approx \frac{m m}{m + m} = \frac{m}{2}$, то

$$d\sigma_A = \left(\frac{2d}{m V_\infty^2} \right)^2 \cos \Theta \left(\frac{1}{\cos^2 \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \right) dQ.$$

Этот результат описывает сечение рассеяния электронов на электронах, протонах на протонах и так далее.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	3
Введение. Размышления о некоторых особенностях теоретического метода исследования	7
ГЛАВА I. Аксиоматика классической механики	25
§ 1. Некоторые уточнения и соглашения	25
§ 2. Основные понятия	28
§ 3. Производные понятия	55
§ 4. Общие принципы механики системы материальных точек	64
§ 5. Суммарные характеристики внешних сил. Главный вектор и главный момент системы векторов	71
§ 6. Суммарные характеристики системы. Теоремы о центре инерции	76
§ 7. Законы изменения полного импульса, полного момента импульса и полной энергии системы материальных точек	79
ГЛАВА II. Интегрирование уравнений движения	90
§ 1. Интегралы движения	90
§ 2. Условия выполнения законов сохранения в потенциальных полях и пространственно-временная симметрия	96
§ 3. Интегрирование уравнений движения одной материальной точки (движение частиц в полях)	108
ГЛАВА III. Теория столкновений	135
§ 1. Задача двух тел	135
§ 2. Распад частиц	143
§ 3. Упругие столкновения	148
§ 4. Рассеяние частиц на неподвижном центре	155
§ 5. Формула Резерфорда (рассеяние частиц в кулоновском поле)	160

Нина Всеволодовна Кудрявцева

ЛЕКЦИИ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Часть I

Учебное пособие

ИБ 1498

Редактор Г.Г.Иланова

Подписано в печать 06.03.02. Формат 60х84 1/16. Бумага
типографская № 2. Печать офсетная. Печ.л. 10,25. Усл.-п-печ.
л. 9,53. Уч.-изд.л. 6,6. Тираж 100 экз. Заказ 328

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул.Никитина, 4.

Ротапринт ТГУ, 634029, Томск, ул.Никитина, 4.

