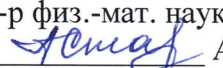


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики и компьютерного моделирования

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК

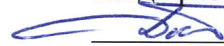
Руководитель ООП
д-р физ.-мат. наук, профессор
 А. В. Старченко
« 10 » июня 2019 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

АНАЛИЗ КВАНТОВОГО ГРАФА ДЛЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРА

по основной образовательной программе подготовки магистров
направление подготовки 01.04.01 – Математика

Лещинский Дмитрий Викторович

Научный руководитель ВКР
канд. физ.-мат. наук, доцент
 Е. А. Данилкин
подпись
« 10 » июня 2019 г.

Автор работы
студент группы № 04702 (м)
 Д. В. Лещинский
подпись

РЕШЕНИЕ

об объеме предоставления текста магистерской диссертаций «Анализ квантового графа для интерферометра» магистранта Лещинского Д. В.

по направлению подготовки 01.04.01 «Математика», содержащие закрытую информацию (с изъятием некоторых разделов или в форме развернутой аннотации), в Электронной библиотеке (репозитории) ТГУ.

На основании представленной служебной записки научного руководителя к.ф.-м.н. Данилкина Е. А. магистру в связи с оригинальностью результатов и возможностью их коммерческого применения, прошу разрешить размещение на сайте библиотеки ВКР в сокращенном виде.

Руководитель ООП по программе
подготовки магистров «Математический
анализ и моделирование» по
направлению 01.04.01 «Математика»,
д-р физ.-мат. наук, профессор

А. В. Старченко

1 Introduction

In this paper, we apply quantum graph analysis to the theory of scattering to calculate the eigenfunctions zeros of quantum graphs. We consider the scattering of waves on a system with two different wavelengths L and l . This device is an interferometer [8], [7]. Interferometer - is a device for measuring the wavelength, the action of which is based on the phenomenon of interference (scattering). The principle of operation of the interferometer is that the ray of electromagnetic radiation is spatially divided into two or more coherent rays, each of them goes through different optical paths directed to the screen, creating an interference pattern by which, you can set the phase difference of the interfering rays at a given point in the picture. Such device is being used to detect gravitational waves predicted by the general theory of relativity in big international experiment, which called The Virgo experiment [4], [6], [11]. The Virgo interferometer is a large interferometer designed to detect gravitational waves. Virgo is a Michelson interferometer that is isolated from external disturbances: its mirrors and instrumentation are suspended and its laser beam operates in a vacuum.

Gravitational waves are changes in the gravitational field that propagate like waves. They were proposed by Henri Poincare in 1905 and subsequently predicted in 1916 by Albert Einstein on the basis of his general theory of relativity. Gravitational waves transport energy as gravitational radiation, a form of radiant energy similar to electromagnetic radiation. The Virgo interferometer is a large interferometer designed to detect gravitational waves.

Metric graphs, also known as “quantum graphs,” are a growing subfield

of mathematical physics, which covers a wide range of applications, such as Anderson localization, universality of spectral statistics, nodal statistics, scattering and resonances, and etc [2]. Metric graphs are a good thing to move from a complex physical problem to a simplified graphs model [1], [5].

The standard theory of interferometer is well studied. There are a lot of types of interferometers, which are also observed in this theory, however in this paper we will study on the special type of the interferometer, which includes the scattering solution and the bound states. We will try to apply the quantum graph analysis to it. After finding the poles of the reflection and transmission coefficients (R and T), we will examine in detail the obtained singularities, their zeros, properties and conditions. The results will be compared with the standard theory [10].

2 The model

We consider the electrical network, constructed by two infinite lines connected by two lines of respective lengths L and l as shown in Fig. 1. The orientations are arbitrary. This device is an interferometer, what means that one part of the energy is transmitted and another one is reflected.

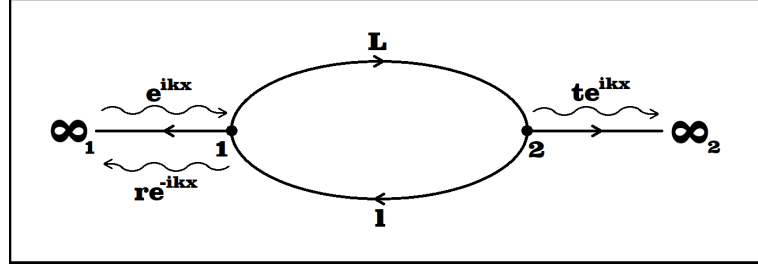


Figure 1: Schematic drawing of the interferometer device.

In each branch, the equation describing the model is

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} = 0. \quad (2.1)$$

At the interfaces, we have continuity of ψ and Kirchhoff law. Since the problem is linear we write $\psi = e^{-ikt}\phi$ and get the Helmolzt equation:

$$\phi_{xx} = -k^2\phi. \quad (2.2)$$

Part of an incident wave will be reflected and part will be transmitted. To describe this scattering process, we write the solution as:

$$\begin{aligned} \infty_1 : \phi_-(x) &= e^{ikx} + Re^{-ikx}, \\ 1 - 2 : \phi_1(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \\ 2 - 1 : \phi_2(x) &= Ce^{ikx} + De^{-ikx}, \\ \infty_2 : \phi_+(x) &= Te^{ikx}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

To solve (2.3) we use the interface conditions (continuity and Kirchhoff) yield a system of linear equations satisfied by the unknown parameters:

A, B, C, D, R, T . At the left end of the loop we have:

$$\phi_-(0) = \phi_1(0), \quad \phi_-(0) = \phi_2(l), \quad \phi'_-(0) + \phi'_1(0) - \phi'_2(l) = 0. \quad (2.4)$$

At the right end of the loop we have:

$$\phi_+(0) = \phi_2(0), \quad \phi_+(0) = \phi_1(L), \quad \phi'_+(0) + \phi'_2(0) - \phi'_1(L) = 0. \quad (2.5)$$

Using (2.4) and (2.5), we get the following linear system:

$$\begin{cases} 1 + R = A + B \\ 1 + R = Ce^{ikl} + De^{-ikl} \\ 1 - R + A - B - Ce^{ikl} + De^{-ikl} = 0 \\ T = C + D \\ T = Ae^{ikL} + Be^{-ikL} \\ T + C - D - Ae^{ikL} + Be^{-ikL} = 0 \end{cases}. \quad (2.6)$$

We will use Macsyma computer algebra system [9] to solve this linear system. For it, write this system (2) in the matrix form:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{ikl} & e^{-ikl} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -e^{ikl} & e^{-ikl} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -e^{ikL} & -e^{-ikL} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -e^{ikL} & e^{-ikL} & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ R \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

The solution of this system is:

$$A = \frac{1}{E}(6e^{-ikl}e^{-ikL} + 2e^{ikl}e^{-ikL} + 4), \quad (2.8)$$

$$B = -\frac{1}{E}(2e^{-ikl}e^{ikL} - 2e^{ikl}e^{ikL} + 4), \quad (2.9)$$

$$C = \frac{1}{E}(4e^{-ikl}e^{ikL}e^{-ikL} + 2e^{-ikL} + 2e^{ikL}), \quad (2.10)$$

$$D = \frac{1}{E}(4e^{ikl}e^{ikL}e^{-ikL} - 6e^{-ikL} + 2e^{ikL}), \quad (2.11)$$

$$R = \frac{1}{E}(e^{-ikl}(3e^{-ikL} + e^{ikL}) + e^{ikl}(e^{-ikL} - e^{ikL}) + 4), \quad (2.12)$$

$$T = \frac{1}{E}(4e^{-ikl}e^{ikL}e^{-ikL} + 4e^{ikl}e^{ikL}e^{-ikL} - 4e^{-ikL} + 4e^{ikL}), \quad (2.13)$$

where E is the denominator, which is equal to:

$$E = e^{-ikl}(3e^{-ikL} - 3e^{ikL}) + e^{ikl}(e^{-ikL} + 3e^{ikL}) - 4. \quad (2.14)$$

To detect what happens in solution field, we are interested in the reflection and transmission coefficients (R and T).

References

- [1] R. Band and G. Berkolaiko. Universality of the momentum band density of periodic networks. *Phys. Rev. Lett.*, 111:130404, 2013.
- [2] G. Berkolaiko. An elementary introduction to quantum graphs. *arXiv:1603.07356v2*, 2016.
- [3] G. Berkolaiko and B. Winn. Relationship between scattering matrix and spectrum of quantum graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* 362 (2010), *arXiv:0801.4104*.
- [4] V. Boschi. Modeling and Simulation of Seismic Attenuation Systems for Gravitational Wave Interferometers. PhD Thesis. University of Pisa. 2010. <https://tds.virgo-gw.eu/ql/?c=13955>.
- [5] Y. Burman. Operators of rank one and graph Laplacians. *arXiv* 1205.1123, 2012.
- [6] E. Capocasa. Optical and noise studies for Advanced Virgo and filter cavities for quantum noise reduction in gravitational-wave interferometric detectors. PhD thesis. Université Sorbonne Paris Cité. Université Paris Diderot. 2017. <https://tds.virgo-gw.eu/ql/?c=13249>.
- [7] Ivo Verovnik and Andrej Likar. The Michelson interferometer—how to detect invisible interference patterns. *European Journal of Physics*. 2004. 801–806. 10.1088/0143-0807/25/6/012.
- [8] Langangen, Oystein and Skagerstam, Bo-Sture and Vaskinn. Interference of Light in Michelson-Morley Interferometer: A QuantumOptical Approach. *International Journal of Optics*. 2012. 10.1155/2012/408067.

- [9] Paulo Ney de Souza, Richard J. Fateman, Joel Moses, Cliff Yapp.
The Maxima Book. 2003
- [10] A.C. Scott, Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structures. Oxford Texts in Applied and Engineering Mathematics, 1999.
- [11] G. Vajente. Analysis of sensitivity and noise sources for the Virgo gravitational wave interferometer. Ph.D. Thesis 2008. Scuola Normale Superiore di Pisa. <https://tds.virgo-gw.eu/ql/?c=7469>.

Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: 360flip182@gmail.com / ID: 6869993

Проверяющий: 360flip182@gmail.com / ID: 6869993

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»- <http://users.antiplagiat.ru>

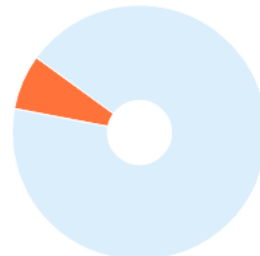
ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 1
Начало загрузки: 09.06.2019 21:14:09
Длительность загрузки: 00:00:01
Имя исходного файла: гар
Размер текста: 582 кБ
Символов в тексте: 22197
Слов в тексте: 3810
Число предложений: 158

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 09.06.2019 21:14:10
Длительность проверки: 00:00:01
Комментарии: не указано
Модули поиска: Модуль поиска Интернет

ЗАИМСТВОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
7,22% 	0% 	92,78% 



Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.

Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.

Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.

Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа.

Заимствования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Источник	Ссылка	Актуален на	Модуль поиска
[01]	4,49%	An elementary introduction to quantum graphs	http://arxiv.org	26 Мар 2017	Модуль поиска Интернет
[02]	0,97%	Gravitational wave	http://en.wikipedia.org	10 Апр 2018	Модуль поиска Интернет
[03]	0,69%	Performance of the Virgo interferometer longitudinal control system during ...	https://doi.org	03 Сен 2018	Модуль поиска Интернет

Еще источников: 3

Еще заимствований: 1,06%