Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Физический факультет
Кафедра теоретической физики (ТФ)

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
профессор
____________ О.Н. Чайковская
«04» ____июня____ 2019 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

ОПЕРАТОРЫ СИММЕТРИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В (2+1) ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

по основной образовательной программе подготовки бакалавров
направление подготовки
03.03.02 – Физика

Сараева Анастасия Александровна

Руководитель ВКР
доцент, кандидат физ.-мат. наук
____________ А.И. Бреев
подпись
«04» ____июня____ 2019 г.

Автор работы
Студент группы №0554
____________ А.А. Сараева
подпись

Томск-2019

Содержание

1 Введение

Релятивистское уравнение Дирака для заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле - основа релятивистской квантовой механики и квантовой электродинамики. Точные решения уравнения представляют особый физический интерес, так как они, определяя, в основном, картину движения частиц со спином 1/2 во внешнем электромагнитном поле, являются в то же время базой для получения с помощью квантовой электродинамики точной картины движения такой частицы. В квантовой электродинамике точные решения уравнение Дирака необходимы для построения взаимодействия с внешним полем и взаимодействия фотонов в рамках картины Фарри.

Наиболее известные решения уравнения Дирака появились в такой последовательности: стационарная волновая функция в кулоновском поле - в 1928 году [1, 2], в постоянном и однородном магнитном поле - в 1930 [3], решение в плоской электромагнитной волне - в 1935; а, когда волна распространяется вдоль постоянного и однородного магнитного поля - в 1965 году [4].

Исследование точных решений уравнений Дирака в электромагнитном поле наиболее полно представлено в монографии [5], а движение дираковской частицы в постоянном магнитном поле анализировалось в сравнительно многочисленных публикациях, в том числе в [6 - 9].

Уравнение Дирака в $(2 + 1)$-мерном пространстве-времени активно изучалось последние три десятилетия многими исследователями. Примем во внимание то обстоятельство, что при исследовании его свойств симметрии возникают некоторые новые отличительные моменты от уравнения Клейна-Гордона-Фока, связанные с многокомпонентностью волновой функции. Способ описать симметрию на языке алгебр Ли позволяет добиться ясности и математической строгости изложения с использованием относительно несложных выкладок, а также пригоден для описания симметрии, не связанной с преобразованиями пространства-времени.

В настоящей работе рассматривается уравнение Дирака в $(2+1)$-мерном искривленном пространстве-времени с внешним электромагнитным потенциалом и исследуется алгебра симметрии уравнения. Как известно, уравнение Дирака описывает частицу с массой m и спином 1/2 - это массивный случай. Этот случай безошибочно формулируется на языке теории представлений групп и алгебр Ли. Также известен случай, когда масса равна 0, тогда уравнение описывает безмассовое поле со спиральностью $\pm 1/2$. Симметрия такого уравнения оказывается более широкой, чем в случае с массой.

Актуальной проблемой в релятивистской квантовой теории является самосопряженное расширение гамильтониана Дирака во внешних сингулярных потенциалах. Уравнение Дирака в магнитном поле соленоида лежит в основе теории Ахаронова-Бома и как в $(3+1)$, так и в $(2+1)$-мерном случае [10-12]. В [13] рассмотрено уравнение Дирака в $(2+1)$-мерном пространстве для релятивистского заряженного безмассового фермиона в потенциалах Кулона и Ахаронова-Бома в контексте самосопряжённого расширения. Задача самосопряженного расширения в квантовой механике подробно исследовалась Гитманом, Тютиным и Вороновым [14]. Также уравнение Дирака представляет интерес для плоской гравитации и черной дыры БТЗ [15, 16] (исследование поведения поля Дирака на фоне БТЗ [17]).

Новый интерес к различным эффектам в двумерных квантовых системах появился после успешного получения монослоя графита (графена). При низких энергиях динамика электрона в графене описывается двухкомпонентным уравнением Дирака для фермионов с нулевой массой, поэтому электроны в графене дают интересные реализации квантовой электродинамики в $(2+1)$-измерениях. Можно отметить, что в физике конденсированных сред $(2+1)$ уравнение Дирака при наличии внешнего электромагнитного потенциала используется при теоретическом изучении электронных свойств графена [18-20], графеновых квантовых точек [21].

Обобщая сказанное, мы видим, что разработка математических методов для обнаружения новых точных решений для уравнения $(2+1)$ Дирака имеет важное значение в связи с расширением применения релятивистских квантовых уравнений в актуальных задачах квантовой теории. Данная работа основана на статье [22] и является ее логическим продолжением.

2 Уравнение Дирака в $(2+1)$-мерном пространстве Римана

2.1 $(2+1)$-мерное пространство-время Римана

Будем применять условные обозначения, используемые в уравнениях Дирака в искривленном пространстве-времени, которое описывается как $(2+1)$-мерное псевдо-риманово многообразие $(\mathcal{M}, (g_{\mu\nu}))$, где $g_{\mu\nu}(x)$ - это ковариантные компоненты псевдо-римановой метрики $g_{\mu\nu}$ в локальных координатах $x = (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2)$ в $\mathcal{M}$ $(\mu, \nu, \alpha, ... = 0, 1, 2)$.

Контравариантные компоненты метрического тензора записываются в виде $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha$ [1], где δ^μ_α - символ Кронекера ($\delta^\mu_\nu = 1$ если $\mu = \nu$ и 0 в противоположном случае).

Связность Леви-Чивиты в касательном расслоении $T\mathcal{M}$ описывается символами Кристоффеля

$$\Gamma^\mu_{\nu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} \right). \tag{2.1}$$

Тензор кривизны Римана выражается с помощью символов Кристоффеля и представляется в виде выражения

$$-R^\sigma_{.\alpha\nu\mu} = \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\sigma_{\beta\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\mu} - \Gamma^\sigma_{\beta\mu} \Gamma^\beta_{\alpha\nu}. \tag{2.2}$$

Тензор Риччи $R_{\nu\mu}$ и скалярная кривизна R записываются

$$R_{\nu\mu} = R^\alpha_{.\nu\alpha\mu}, \qquad R = R^\mu_\mu. \tag{2.3}$$

Тензор кривизны (2.2) в (2+1)-мерном многообразии $\mathcal{M}$ однозначно определяется через метрику, скалярную кривизну и тензор Риччи (2.3) как

$$R_{\nu\mu\alpha\beta} = R_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} - R_{\nu\beta} g_{\mu\alpha} + R_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} - R_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + \frac{R}{2} (g_{\nu\beta} g_{\mu\alpha} - g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta}). \tag{2.4}$$

Ковариантное дифференцирование контравариантного вектора V^μ и ковариантного вектора V_μ записывается как $\nabla_\nu V^\mu = V^\mu_{;\nu} = V^\mu,_\nu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} V^\alpha$ и $\nabla_\nu V_\mu = V_{\mu;\nu} = V_\mu,_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} V_\alpha$ соответственно. Здесь точка с запятой обозначает ковариантную производную по координатным индексам, а запятая означает частную производную. Связность $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}$ согласована с метрикой, т.е. $g_{\alpha\beta;\mu} = 0$.

Для определения спинорной связности в (2+1)-мерном пространстве-времени необходим набор из трёх ортонормированных векторных полей $e^a_\mu(x)$ чтобы диагонализировать

[1] Здесь и далее будет использоваться Эйнштейновское правило суммирования.

метрику:

$$g_{\mu\nu}(x) = e^a_\mu(x) e^b_\nu(x) \eta_{ab}, \tag{2.5}$$

где η_{ab} - метрика Минковского, $(\eta_{ab}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$. Индексы, обозначенные латинскими буквами, пробегают значения $a, b = 0, 1, 2$. Также справедливы равенства $e^{\mu a}(x) = g^{\mu\nu} e^a_\nu(x)$, $e^\mu_a(x) = g^{\mu\nu} e^b_\nu(x) \eta_{ab}$, $\eta^{ac}\eta_{cb} = \delta^a_b$.

В (3+1)-мерном пространстве в общей теории относительности ортонормированные векторные поля, описанные ранее, называются тетрада, но в (2+1)-мерном пространстве-времени мы используем термин триада для $e^a_\mu(x)$, а a, b, c станут называться индексами триады.

В дальнейшем нам понадобится антисимметричный тензор Леви-Чивиты $e_{\mu\nu\alpha}(x)$ на (2+1)-мерном многообразии $(\mathcal{M}, g)$, который определяется как

$$e_{\mu\nu\alpha}(x) = \det(e^\alpha_\mu(x)) \varepsilon_{\mu\nu\alpha}. \tag{2.6}$$

Через $\varepsilon_{\mu\nu\alpha}$ обозначим антисимметричный символ Леви-Чивиты, который определяется как $\varepsilon_{012} = 1$. Также заметим очевидные равенства:

$$e^{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta\gamma}(x) = 6, \quad e^{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\beta\gamma}(x) = 2\delta^\alpha_\mu, \quad e^{\alpha\mu\nu} e_{\alpha\beta\gamma}(x) = \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\gamma - \delta^\mu_\gamma \delta^\nu_\beta. \tag{2.7}$$

2.2 Уравнение Дирака

Уравнение Дирака в $(2 + 1)$-мерном пространстве-времени определяется путем введения соответствующих матриц Дирака, спинорной связности и обобщенного оператора импульса.

Матрицы Дирака

В (2+1)-мерном пространстве-времени γ-матрицы имеют особый вид:

$$\gamma^\mu(x) = e^\mu_\alpha(x) \hat{\gamma}^\alpha, \tag{2.8}$$

где

$$\hat{\gamma}^0 = \sigma_3, \quad \hat{\gamma}^1 = is\sigma_1, \quad \hat{\gamma}^2 = \sigma_2, \tag{2.9}$$

и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ матрицы Паули [2]. Четыре матрицы

$$\gamma^\mu(x),\ I \tag{2.12}$$

[2] Матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

образуют базис для множества матриц размером 2×2, где I-единичная матрица.

Алгебраические свойства γ-матриц (2.8) в (2+1)-мерном пространстве:

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2g^{\alpha\beta}, \tag{2.13}$$

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu = g^{\alpha\mu} - ise^{\alpha\mu\sigma}\gamma_\sigma, \tag{2.14}$$

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2ise^{\mu\nu\sigma}\gamma_\sigma, \tag{2.15}$$

где $[A, B] = AB - BA$ - коммутатор, а $\{A, B\} = AB + BA$ - антикоммутатор A и B.

Спинорная связность

Спинорная связность Γ_μ обеспечивает ковариантное дифференцирование спиноров: если ψ-это спинор, тогда $\nabla_\mu \psi + \Gamma_\mu \psi = \psi_{;\mu} + \Gamma_\mu \psi$ также является спинором. Матрицы Γ_μ предполагаются бесследовыми, т.е.

$$\mathrm{Sp}(\Gamma_\mu) = 0. \tag{2.16}$$

Для спинор-ковариантной производной матриц Дирака γ^μ имеем:

$$[\nabla_\alpha + \Gamma_\alpha, \gamma^\mu] = 0 \quad \text{или} \quad \gamma^\mu_{;\alpha} = -[\Gamma_\alpha, \gamma^\mu]. \tag{2.17}$$

Действительно, поскольку Γ_ν бесследна (2.16), мы можем разложить Γ_ν по базису (2.12) как $\Gamma_\nu = a^\alpha_\nu \gamma_\alpha$ с постоянными коэффициентами разложения a^α_ν. Подставляя значение Γ_ν в (2.17) получим: $\gamma^\mu_{;\nu} + a^\alpha_\nu(\gamma_\alpha \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_\alpha) = 0$. Теперь умножим это равенство на γ_μ и просуммируем по μ, получая в результате $\gamma^\mu_{;\nu}\gamma_\mu + 4a^\alpha_\nu \gamma_\alpha = 0$ и, сделав соответствующую замену на Γ_ν, получаем:

$$\Gamma_\nu = -\frac{1}{4}\gamma^\alpha_{;\nu}\gamma_\alpha. \tag{2.18}$$

Обобщенный оператор импульса

Компоненты $\mathcal{P}_\mu$ обобщенного оператора импульса определяются как:

$$\mathcal{P}_\nu = p_\nu - A_\nu, \quad p_\nu = i(\nabla_\nu + \Gamma_\nu), \tag{2.19}$$

где A_ν-компоненты векторного потенциала внешнего электромагнитного поля. Компоненты тензора электромагнитного поля:

$$F_{\nu\mu} = \nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}. \tag{2.20}$$

Они эрмитовы, бесследовы и имеют следующие свойства:

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2. \tag{2.11}$$

Теорема 2.1. *Коммутатор компонент обобщенного оператора импульса $\mathcal{P}_\nu$ имеют вид:*

$$[\mathcal{P}_\nu, \mathcal{P}_\mu] = -[\nabla_\nu, \nabla_\mu] - \frac{i}{4}\, s\, R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\beta} e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^\sigma - iF_{\nu\mu}. \tag{2.21}$$

Доказательство. Запишем коммутатор $\mathcal{P}_\nu$ и $\mathcal{P}_\mu$ и упростим:

$$\begin{gathered}[\mathcal{P}_\nu, \mathcal{P}_\mu] = [i(\nabla_\nu + \Gamma_\nu) - A_\nu, i(\nabla_\mu + \Gamma_\mu) - A_\mu] = \\ = -[\nabla_\nu + \Gamma_\nu, \nabla_\mu + \Gamma_\mu] - i[\nabla_\nu + \Gamma_\nu, A_\mu] - i[A_\nu, \nabla_\mu + \Gamma_\mu] + [A_\nu, A_\mu] = \\ = -[\nabla_\nu, \nabla_\mu] - [\nabla_\nu, \Gamma_\mu] - [\Gamma_\nu, \nabla_\mu] - [\Gamma_\nu, \Gamma_\mu] - i[\nabla_\nu, A_\mu] - i[A_\nu, \nabla_\mu] = \\ = -[\nabla_\nu, \nabla_\mu] - (\Gamma_{\mu;\nu} - \Gamma_{\nu;\mu}) - [\Gamma_\nu, \Gamma_\mu] - iF_{\nu\mu},\end{gathered} \tag{2.22}$$

где

$$\Gamma_{\mu;\nu} - \Gamma_{\nu;\mu} = -\frac{1}{4}\gamma^\alpha R^\beta_{\cdot\,\alpha\nu\mu}.$$

Определим оператор

$$\hat{G}_{\nu\mu} = -(\Gamma_{\mu;\nu} - \Gamma_{\nu;\mu} + [\Gamma_\nu, \Gamma_\mu])$$

и перепишем наш коммутатор (2.22) в виде:

$$[\mathcal{P}_\nu, \mathcal{P}_\mu] = -[\nabla_\nu, \nabla_\mu] + \hat{G}_{\nu\mu} - iF_{\nu\mu}. \tag{2.23}$$

Из того, что Γ_μ бесследна (2.16) мгновенно следует следующее равенство:

$$\mathrm{Sp}(\hat{G}_{\mu\nu}) = 0. \tag{2.24}$$

Также заметим, что из (2.17) следует $[[\mathcal{P}_\nu, \mathcal{P}_\mu], \gamma^\alpha] = 0$. Следовательно (2.23) превращается после подстановки в

$$-[[\nabla_\nu, \nabla_\mu], \gamma^\alpha] + [\hat{G}_{\nu\mu}, \gamma^\alpha] = 0. \tag{2.25}$$

Вычислим коммутатор из предыдущего выражения:

$$[[\nabla_\nu, \nabla_\mu], \gamma^\alpha] = \gamma^\alpha_{;\mu\nu} - \gamma^\alpha_{;\nu\mu} = R^{\beta\alpha}_{\cdot\cdot\nu\mu}\gamma_\beta.$$

Тогда (2.25) примет вид

$$R_{\mu\nu\beta\cdot}^{\ \ \ \ \alpha}\gamma^\beta + [\hat{G}_{\nu\mu}, \gamma^\alpha] = 0. \tag{2.26}$$

Подставляя в (2.26) формулу для разложения $\hat{G}_{\nu\mu}$ в терминах базиса (2.12) с использованием (2.24)

$$\hat{G}_{\nu\mu} = a_{\nu\mu\beta}\gamma^\beta, \tag{2.27}$$

мы находим

$$R_{\mu\nu\beta\cdot}^{\ \ \ \ \alpha}\gamma^\beta + a_{\nu\mu\beta}[\gamma^\beta, \gamma^\alpha] = 0.$$

Заменяя соответствующее выражение коммутатора из (2.14) в (2.2), мы имеем

$$R_{\mu\nu\beta\cdot}{}^{\alpha}\gamma^{\beta} - 2is\, a_{\nu\mu\beta}\, e^{\beta\alpha\sigma}\gamma_{\sigma} = 0 \tag{2.28}$$

и используя формулы (2.7) получаем

$$a_{\nu\mu\alpha} = -\frac{i}{4}\, s\, e_{\alpha\sigma\beta} R^{\sigma\beta}{}_{\cdot\cdot\,\nu\mu}\,. \tag{2.29}$$

Наконец, подставляя (2.28) и (2.27) в уравнение (2.23), мы находим (2.22). □

Получив достаточные знания из нужной нам теории мы можем записать уравнение Дирака для частицы массы m в (2+1)-мерном псевдо-римановом многообразии $\mathcal{M}$ с внешним электромагнитным потенциалом A_ν следующим образом:

$$H\psi = 0, \quad H = \gamma^{\nu}\mathcal{P}_{\nu} - m. \tag{2.30}$$

3 Оператор симметрии первого порядка

Разделение переменных в уравнении Дирака (2.30) включает линейный дифференциальный оператор X первого порядка с матричными коэффициентами:

$$X = X^{\nu}\mathcal{P}_{\nu} + \chi, \tag{3.1}$$

который переводит каждое решение (2.30) в решение этого уравнения, где X^{ν} и χ - матричные функции от x.

Определяющее уравнение для оператора симметрии X можно записать в виде

$$[X, H] = \Psi H. \tag{3.2}$$

Здесь через Ψ обозначили множитель оператора Лагранжа, имеющий вид

$$\Psi = \Psi^{\nu}\mathcal{P}_{\nu} + \bar{\Psi}, \tag{3.3}$$

где Ψ^{ν} и $\bar{\Psi}$ - это матричные функции от x.

Правая и левая части уравнения (3.2) действуют на гладкие скалярные функции от x из общей области определения операторов X и H.

Оператор (3.1), которые удовлетворяют уравнениям (3.2), образуют алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Ясно, что любой оператор $Y = RH$ является решением (3.2) с $\Psi = [R, H]$, где R - это линейный дифференциальный оператор. Множество таких операторов Y образует идеал $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$:

$$[Y, X] = ([R, X] - R\Psi)\, H.$$

Операторы Y из идеала $\mathfrak{h}$ не несут никакой информации об уравнении (2.30) и его решениях. Такие симметрии будем называть тривиальными. Нас интересуют элементы фактор-алгебры $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, которые мы будем называть нетривиальными симметриями.

Подставляя данные выражения (3.1) и (3.3) в (3.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mathcal{P}_{\mu}$, мы приходим к следующему результату:

Лемма 3.1. *Определяющее уравнение (3.2) эквивалентно следующей системе уравнений для X^{ν}, χ и Ψ^{μ}, $\bar{\Psi}$:*

$$[\gamma^{\mu}, X^{\nu}] + [\gamma^{\nu}, X^{\mu}] = \Psi^{\nu}\gamma^{\mu} + \Psi^{\mu}\gamma^{\nu}, \tag{3.4}$$

$$[\gamma^{\mu}, \chi] + \gamma^{\nu}[X^{\mu}, \mathcal{P}_{\nu}] = \bar{\Psi}\gamma^{\mu} - m\Psi^{\mu}, \tag{3.5}$$

$$\gamma^{\nu}[\chi, \mathcal{P}_{\nu}] + \frac{1}{2}\{\gamma^{\nu}, X^{\mu}\}[\mathcal{P}_{\mu}, \mathcal{P}_{\nu}] = \frac{1}{2}\Psi^{\mu}\gamma^{\nu}[\mathcal{P}_{\mu}, \mathcal{P}_{\nu}] - m\bar{\Psi}. \tag{3.6}$$

Также стоит отметить, что лемма (3.1) верна не только для $(2+1)$ уравнения Дирака (2.30), но и для $(3+1)$.

Разложим матричные функции X^ν, χ, Ψ^ν, $\bar\Psi$ по базису (2.12):

$$X^\nu = \xi^\nu + \gamma^\alpha X^\nu_{.\alpha}, \quad \chi = \varphi + \varphi^\alpha\gamma_\alpha, \tag{3.7}$$

$$\Psi^\nu = \Psi^\nu_{.\alpha}\gamma^\alpha + \bar\Psi^\nu, \quad \bar\Psi = \bar\Psi^\nu_0\gamma_\nu + \bar\Psi_0, \tag{3.8}$$

где

$$\xi^\nu, \quad X^\nu_{.\alpha}, \quad \varphi, \quad \varphi^\alpha, \quad \Psi^\nu_{.\alpha}, \quad \bar\Psi^\nu, \quad \bar\Psi^\nu_0, \quad \bar\Psi_0 \tag{3.9}$$

это гладкие скалярные функции от x.

Уравнения (3.4) – (3.6) для матричных коэффициентов X^ν, χ и Ψ^ν, $\bar\Psi$ оператора симметрии (3.1) и множителя Лагранжа, соответственно, приводят к соответствующим уравнениям для скалярных функций (3.9), которые приведены ниже в терминах следующих лемм.

Лемма 3.2. *Из уравнения (3.4) следует*

$$\Psi^{\mu\nu} = 2X^{\mu\nu} - \frac{2}{3}\,\mathrm{Sp}(X)g^{\mu\nu}, \quad \bar\Psi^\nu = 0, \tag{3.10}$$

$$X^{\mu\nu} + X^{\nu\mu} = \frac{2}{3}\,\mathrm{Sp}(X)g^{\mu\nu}, \quad \mathrm{Sp}(X) = X^\mu_{.\mu}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Подставим (3.7) и (3.8) в уравнение (3.4) и разложим его по базису (2.12) с помощью известных формул (2.13)–(2.15):

Левая часть:

$$[\gamma^\mu, X^\nu] + [\gamma^\nu, X^\mu] = [\gamma^\mu, \xi^\nu + \gamma^\alpha X^\nu_{.\alpha}] + [\gamma^\nu, \xi^\mu + \gamma^\alpha X^\mu_{.\alpha}] =$$
$$= [\gamma^\mu, \xi^\nu] + [\gamma^\mu, \gamma^\alpha X^\nu_{.\alpha}] + [\gamma^\nu, \xi^\mu] + [\gamma^\nu, \gamma^\alpha X^\mu_{.\alpha}] =$$
$$= \gamma^\alpha[\gamma^\mu, X^\nu_{.\alpha}] + [\gamma^\mu, \gamma^\alpha]X^\nu_{.\alpha} + \gamma^\alpha[\gamma^\nu, X^\mu_{.\alpha}] + [\gamma^\nu, \gamma^\alpha]X^\mu_{.\alpha} =$$
$$= -2ise^{\mu\alpha\sigma}\gamma_\sigma X^\nu_{.\alpha} - 2ise^{\nu\alpha\rho}\gamma_\rho X^\mu_{.\alpha} = -2is(e^{\mu\alpha\sigma}\gamma_\sigma X^\nu_{.\alpha} + e^{\nu\alpha\sigma}\gamma_\sigma X^\mu_{.\alpha}).$$

Правая часть:

$$\Psi^\nu\gamma^\mu + \Psi^\mu\gamma^\nu = (\Psi^\nu_{.\alpha}\gamma^\alpha + \bar\Psi^\nu)\gamma^\mu + (\Psi^\mu_{.\alpha}\gamma^\alpha + \bar\Psi^\mu)\gamma^\nu =$$
$$= \Psi^\nu_{.\alpha}\gamma^\alpha\gamma^\mu + \bar\Psi^\nu\gamma^\mu + \Psi^\mu_{.\alpha}\gamma^\alpha\gamma^\nu + \bar\Psi^\mu\gamma^\nu =$$
$$= \Psi^\nu_{.\alpha}(g^{\alpha\mu} - ise^{\alpha\mu\sigma}\gamma_\sigma) + \bar\Psi^\nu\gamma^\mu + \Psi^\mu_{.\alpha}(g^{\alpha\nu} - ise^{\alpha\nu\sigma}\gamma_\sigma) + \bar\Psi^\mu\gamma^\nu =$$
$$= \Psi^{\nu\mu} - ise^{\alpha\mu\sigma}\gamma_\sigma\Psi^\nu_{.\alpha} + \bar\Psi^\nu\gamma^\mu + \Psi^{\mu\nu} - ise^{\alpha\nu\sigma}\gamma_\sigma\Psi^\mu_{.\alpha} + \bar\Psi^\mu\gamma^\nu.$$

Приравнивая, получаем:

$$-is\left(e^{\alpha\nu\sigma}(2X^{\mu}_{\cdot\alpha} - \Psi^{\mu}_{\cdot\alpha}) + e^{\alpha\mu\sigma}(2X^{\nu}_{\cdot\alpha} - \Psi^{\nu}_{\cdot\alpha})\right)\gamma_\sigma = \Psi^{\mu\nu} + \Psi^{\nu\mu} + \overline{\Psi}^{\mu}\gamma^{\nu} + \overline{\Psi}^{\nu}\gamma^{\mu}. \tag{3.12}$$

Из (3.12) мы также можем заметить, что $\Psi^{\mu\nu} = -\Psi^{\nu\mu}$ и при $\nu = \mu$ в (3.12) получаем:

$$-is\left(e^{\alpha\mu\sigma}(2X^{\mu}_{\cdot\alpha} - \Psi^{\mu}_{\cdot\alpha}) + e^{\alpha\mu\sigma}(2X^{\mu}_{\cdot\alpha} - \Psi^{\mu}_{\cdot\alpha})\right)\gamma_\sigma = \overline{\Psi}^{\mu}\gamma^{\mu} + \overline{\Psi}^{\mu}\gamma^{\mu},$$

$$-ise^{\alpha\mu\sigma}(2X^{\mu}_{\cdot\alpha} - \Psi^{\mu}_{\cdot\alpha}) = \overline{\Psi}^{\mu}g^{\mu\sigma}.$$

Домножим на $g_{\mu\sigma}$, тогда

$$0 = 3\overline{\Psi}^{\mu},$$

т.е. $\overline{\Psi}^{\mu} = 0$ и:

$$-ise^{\alpha\mu\sigma}(2X^{\mu}_{\cdot\alpha} - \Psi^{\mu}_{\cdot\alpha}) = 0,$$

$$-is2e^{\alpha\mu\sigma}X^{\mu}_{\cdot\alpha} = -ise^{\alpha\mu\sigma}\Psi^{\mu}_{\cdot\alpha},$$

$$\Psi^{\mu}_{\cdot\alpha} = 2X^{\mu}_{\cdot\alpha}. \tag{3.13}$$

В свою очередь для произвольных индексов μ и α мы можем подставить все полученные нами результаты и выполнить преобразования:

$$-is\left(e^{\alpha\nu\sigma}(2X^{\mu}_{\cdot\alpha} - \Psi^{\mu}_{\cdot\alpha}) + e^{\alpha\mu\sigma}(2X^{\nu}_{\cdot\alpha} - \Psi^{\nu}_{\cdot\alpha})\right) = 0.$$

Суммируя по индексу α, плюс учитывая (3.13) мы получим:

$$(e^{\mu\nu\sigma}(2X^{\mu}_{\cdot\mu} - \Psi^{\mu}_{\cdot\mu}) + e^{\nu\mu\sigma}(2X^{\nu}_{\cdot\nu} - \Psi^{\nu}_{\cdot\nu})) = 0,$$
$$e^{\mu\nu\sigma}((2X^{\mu}_{\cdot\mu} - \Psi^{\mu}_{\cdot\mu}) - (2X^{\nu}_{\cdot\nu} - \Psi^{\nu}_{\cdot\nu})) = 0,$$

которое будет равно 0 при условии равенства нулю скобки. Приравняем $2X^{\mu}_{\cdot\mu} - \Psi^{\mu}_{\cdot\mu} = \Theta$ (здесь по μ нет суммирования).

Ищем след:

$$Sp(2X - \Psi) = 3\Theta,$$

След Ψ равен 0 в силу условия $\Psi^{\mu\nu} = -\Psi^{\nu\mu}$.

$$2Sp(X) = 3\Theta.$$

$$\Psi^{\mu}_{\cdot\alpha} = \begin{cases} 2X^{\mu}_{\cdot\alpha}, & \text{если } \mu \neq \alpha; \\ 2X^{\mu}_{\cdot\mu} - \frac{2}{3}Sp(X), & \text{если } \mu = \alpha. \end{cases}$$

Объединяя всё в одно выражение, получаем

$$\Psi^{\mu\nu} = 2X^{\mu\nu} - \frac{2}{3}\operatorname{Sp}(X)g^{\mu\nu}, \tag{3.14}$$

что и требовалось.

Подставив (3.14) в условие $\Psi^{\mu\nu} = -\Psi^{\nu\mu}$, получим

$$2X^{\mu\nu} - \frac{2}{3}\operatorname{Sp}(X)g^{\mu\nu} = \frac{2}{3}\operatorname{Sp}(X)g^{\nu\mu} - 2X^{\nu\mu},$$

$$X^{\mu\nu} + X^{\nu\mu} = \frac{2}{3}\operatorname{Sp}(X)g^{\mu\nu}.$$

□

3.1 Исследование нетривиальных симметрий

Учитывая лемму (3.2), мы получаем, что симметричный оператор (3.7) принимает вид $X = X^{\nu}\mathcal{P}_{\nu} + \chi = (\xi^{\nu} + \gamma^{\alpha}X^{\nu}_{\cdot\alpha})\mathcal{P}_{\nu} + \chi = \xi^{\nu}\mathcal{P}_{\nu} + \frac{1}{2}\Psi^{\nu}_{\alpha}\gamma^{\alpha}\mathcal{P}_{\nu} + \chi$, если $\nu \neq \alpha$.

$X = \xi^{\nu}\mathcal{P}_{\nu} + \frac{1}{2}\Psi^{\nu}_{\nu}\gamma^{\nu}\mathcal{P}_{\nu} + \chi = \xi^{\nu}\mathcal{P}_{\nu} + \frac{1}{2}\Psi^{\nu}_{\nu}(H+m) + \chi = \xi^{\nu}\mathcal{P}_{\nu} + \frac{1}{3}\operatorname{Sp}(X)(H+m) + \chi$, если $\nu = \alpha$.

$$X = \begin{cases} \xi^{\nu}\mathcal{P}_{\nu} + \frac{1}{2}\Psi^{\nu}_{\alpha}\gamma^{\alpha}\mathcal{P}_{\nu} + \chi, & \text{если } \nu \neq \alpha; \\ \xi^{\nu}\mathcal{P}_{\nu} + \frac{1}{3}\operatorname{Sp}(X)(H+m) + \chi, & \text{если } \nu = \alpha. \end{cases}$$

Объединяя всё в одно выражение, получаем

$$X = \left(\xi^{\alpha} + \frac{1}{2}\Psi^{\alpha}{}_{\beta}\gamma^{\beta}\right)\hat{\mathcal{P}}_{\alpha} + \frac{1}{3}\operatorname{Sp}(X)\hat{H} + \left(\chi + \frac{1}{3}\operatorname{Sp}(X)m\right). \tag{3.15}$$

Нас интересуют нетривиальные симметрии операторов, поэтому факторизуя их по элементам идеала $\mathfrak{h}$, не ограничивая общности положим

$$\operatorname{Sp}(X) = 0. \tag{3.16}$$

Теперь, принимая к сведению (3.16), перепишем оператор симметрии X в следующем виде

$$X = (\xi^{\alpha} - \frac{is}{2}X_{\mu\nu}e^{\mu\nu\alpha})\hat{\mathcal{P}}_{\alpha} + (\frac{is}{2}X^{\mu\nu}e_{\mu\nu\alpha}\gamma^{\alpha})\hat{H} + (\chi + m\frac{is}{2}X^{\mu\nu}e_{\mu\nu\alpha}\gamma^{\alpha}).$$

Таким образом без потери общности мы можем изучать только те операторы симметрии, чьи коэффициенты при производной являются единичными матрицами. Другими словами, мы можем положить $X_{\mu\nu} = 0$.

Лемма 3.3. *Из уравнения (3.5) получаем*

$$\overline{\Psi}_0 = -\frac{i}{3}\xi^{\mu}{}_{;\mu}, \quad \overline{\Psi}_{0\mu} = 0, \tag{3.17}$$

$$\varphi_\alpha = -\frac{s}{4}\xi^{\mu;\sigma}e_{\mu\sigma\alpha}, \tag{3.18}$$

$$\xi^{\mu;\sigma} + \xi^{\sigma;\mu} = \frac{2}{3}\xi^{\alpha}{}_{;\alpha}g^{\mu\sigma}. \tag{3.19}$$

Доказательство. Подставим (3.7) и (3.8) в уравнение (3.5), разложим его по базису (2.12) и получим систему уравнений, не забыв учесть предыдущие полученные нами результаты в виду леммы и следующих из неё равенств

Левая часть:

$$[\chi, \gamma^\mu] + \gamma^\nu[X^\mu, \mathcal{P}_\nu] = [\varphi + \varphi^\alpha\gamma_\alpha, \gamma^\mu] + \gamma^\nu[\xi^\mu + \gamma^\alpha X^{\mu}_{.\alpha}, i(\nabla_\nu + \Gamma_\nu) - A_\nu] =$$
$$= \varphi^\alpha g_{\kappa\alpha}[\gamma^\alpha, \gamma^\mu] + i\gamma^\nu[\xi^\mu, \nabla_\nu] = \varphi^\alpha g_{\kappa\alpha}(-2ise^{\kappa\mu\sigma}\gamma_\sigma) - i\gamma^\nu\xi^{\mu}{}_{;\nu} =$$
$$= -2is\varphi_\kappa e^{\kappa\mu\sigma}\gamma_\sigma - i\gamma^\nu\xi^{\mu}{}_{;\nu}.$$

Правая часть:

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu - m\Psi^\mu = (\bar{\Psi}^{\nu}_{0}\,\gamma_\nu + \bar{\Psi}_0)\gamma^\mu - m(\Psi^{\mu}_{.\alpha}\gamma^\alpha + \bar{\Psi}^\mu) = \bar{\Psi}^{\nu}_{0}\,\gamma_\nu\gamma^\mu + \bar{\Psi}_0\gamma^\mu =$$
$$= \bar{\Psi}^{\nu}_{0}\,g_{\lambda\nu}(g^{\lambda\mu} - ise^{\lambda\mu\sigma}\gamma_\sigma) + \bar{\Psi}_0\gamma^\mu =$$
$$= \bar{\Psi}^{\mu}_{0} - is\bar{\Psi}_{\lambda 0}\,e^{\lambda\mu\sigma}\gamma_\sigma + \bar{\Psi}_0\gamma^\mu.$$

Приравнивая, получаем:

$$-2is\varphi_\kappa e^{\kappa\mu\sigma}\gamma_\sigma - i\gamma^\nu\xi^{\mu}{}_{;\nu} = \bar{\Psi}^{\mu}_{0} - is\bar{\Psi}_{\lambda 0}\,e^{\lambda\mu\sigma}\gamma_\sigma + \bar{\Psi}_0\gamma^\mu.$$

Немедленно следует $\bar{\Psi}^{\mu}_{0} = 0$.

$$-2is\varphi_\kappa e^{\kappa\mu\sigma} - i\xi^{\mu}{}_{;\nu}g^{\nu\sigma} = \bar{\Psi}_0 g^{\mu\sigma}. \tag{3.20}$$

Свёртка уравнения (3.20) и $g_{\mu\sigma}$ даёт выражение (3.17)

$$\bar{\Psi}_0 = -\frac{i}{3}\xi^{\mu}_{;\mu}.$$

Свёртка уравнения (3.20) и $e_{\tau\mu\sigma}$ даёт выражение (3.18)

$$-4is\varphi_\tau - i\xi^{\mu;\sigma}e_{\tau\mu\sigma} = 0,$$

$$\varphi_\alpha = -\frac{s}{4}\xi^{\mu;\sigma}e_{\mu\sigma\alpha}.$$

Получим последнее уравнение из следующих соображений. Поменяем индексы μ и σ местами в (3.20):

$$2is\varphi_\kappa e^{\kappa\mu\sigma} - i\xi^{\sigma}{}_{;\nu}g^{\nu\mu} = \bar{\Psi}_0 g^{\mu\sigma}. \tag{3.21}$$

Сложим уравнение (3.20) и (3.21) и получим последнее равенство из нашей леммы

$$2\bar{\Psi}_0 g^{\mu\sigma} = -i(\xi^{\mu;\sigma} + \xi^{\sigma;\mu}),$$

$$\xi^{\mu;\sigma} + \xi^{\sigma;\mu} = \frac{2}{3}g^{\mu\sigma}\xi^{\alpha}_{;\alpha}. \tag{3.22}$$

□

Подставляя (3.7) и (3.8) в уравнение (3.6) с учётом Лемм 3.2 и 3.3 и при условии (3.16), мы получаем лемму

Лемма 3.4. *Из уравнения (3.6) следует*

$$\varphi_{,\beta} = \frac{i}{3}\xi^{\nu}{}_{;\nu\beta} - F_{\beta\mu}\xi^{\mu}, \tag{3.23}$$

$$m\xi^{\mu}{}_{;\mu} = 0. \tag{3.24}$$

Доказательство. Для начала перепишем уравнение (3.6) в виде

$$\gamma^\nu[\chi, \mathcal{P}_\nu] + \frac{1}{2}(\{\gamma^\nu, X^\mu\} - \frac{1}{2}\Psi^\mu\gamma^\nu)[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\nu] = -m\bar{\Psi}.$$

Раскрываем скобки и приводим подобные.

Левая часть:

$$\begin{gathered}
\gamma^\nu[\chi, \mathcal{P}_\nu] + \frac{1}{2}(\{\gamma^\nu, X^\mu\} - \frac{1}{2}\Psi^\mu\gamma^\nu)[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\nu] = -i\gamma^\nu(\varphi_{;\nu} + \varphi_{\alpha;\nu}\gamma^\alpha) + 2\frac{1}{2}\xi^\mu\gamma^\nu[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\nu] = \\
= -i\gamma^\nu\varphi_{;\nu} - i\varphi_{\alpha;\nu}(g^{\nu\alpha} - ise^{\nu\alpha\beta}\gamma_\beta) + \xi^\mu\gamma^\nu(-\frac{is}{4}R_{\mu\nu}{}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^\sigma - iF_{\mu\nu}) = \\
= -i\gamma^\nu\varphi_{;\nu} - i\varphi^{\nu}_{;\nu} - s\varphi_{\alpha;\nu}e^{\nu\alpha\beta}\gamma_\beta - \frac{is}{4}\xi^\mu\gamma^\nu R_{\mu\nu}{}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^\sigma - i\xi^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} = \\
= -i\gamma^\nu\varphi_{;\nu} + \frac{1}{4}e^{\nu\alpha\beta}\gamma_\beta e_{\mu\sigma\alpha}\xi^{\mu;\sigma}_{;\nu} - \frac{is}{4}\xi^\mu R_{\mu}{}^{\cdot\,\sigma\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma} - \frac{1}{4}\xi^\mu R_{\mu\nu}{}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}\gamma_\delta e_{\alpha\beta\sigma}e^{\nu\sigma\delta} - i\xi^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} = \\
= -i\gamma^\nu\varphi_{;\nu} + \frac{1}{4}\xi^{\mu;\sigma}_{;\nu}\gamma^\beta g_{\beta\beta'}(\delta^\nu_\sigma\delta^{\beta'}_\mu - \delta^\nu_\mu\delta^{\beta'}_\sigma) - \frac{1}{4}\xi^\mu R_{\mu\nu}{}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}\gamma_\delta(\delta^\delta_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\delta_\beta\delta^\nu_\alpha) - i\xi^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} = \\
= -i\gamma^\nu\varphi_{;\nu} + \frac{1}{4}\gamma^\beta\xi^{\mu;\nu}_{;\nu}g_{\beta\mu} - \frac{1}{4}\gamma^\beta\xi^{\nu;\beta'}_{;\nu}g_{\beta\beta'} - \frac{1}{4}\xi^\mu R_{\mu\nu}{}^{\cdot\,\cdot\,\delta\nu}\gamma_\delta + \frac{1}{4}\xi^\mu R_{\mu\nu}{}^{\cdot\,\cdot\,\nu\delta}\gamma_\delta - i\xi^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} = \\
= -i\gamma^\nu\varphi_{;\nu} + \frac{1}{4}\gamma^\beta\xi^{\cdot\,\cdot\,;\nu}_{\beta;\nu} - \frac{1}{4}\gamma^\beta\xi^{\nu}_{\cdot;\beta\nu} - \frac{1}{2}\gamma^\delta\xi^\mu R^{\nu}{}_{\cdot\,\delta\nu\mu} - i\xi^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}.
\end{gathered}$$

При умножении на i получаем выражение:

$$\gamma^\nu \varphi_{;\nu} + \frac{i}{4}\gamma^\beta \xi^{..;\nu}_{\beta;\nu} - \frac{i}{4}\gamma^\beta \xi^\nu_{.;\beta\nu} - \frac{i}{2}\gamma^\delta \xi^\mu R^\nu_{.\delta\nu\mu} + \xi^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} = 0. \tag{3.25}$$

Члены без γ-матриц:

$$-i\varphi^\nu_{;\nu} = \frac{im}{3}\xi^\mu_{.;\mu},$$

$$\varphi^\nu_{;\nu} = -\frac{s}{4}\xi^{\mu;\sigma}_{.;\nu} e_{\mu\sigma}^{\;\cdot\;\cdot\;\nu} = -\frac{m}{3}\xi^\mu_{.;\mu}.$$

Распишем:

$$\begin{aligned}\xi_{\sigma;\beta\delta}e^{\delta\sigma\beta} = \xi_{\sigma;\beta\delta}e^{\sigma\beta\delta} = \frac{1}{2}(\xi_{\sigma;\beta\delta}e^{\sigma\beta\delta} - \xi_{\sigma;\delta\beta}e^{\sigma\delta\beta}) + \frac{1}{2}(\xi_{\sigma;\beta\delta}e^{\sigma\beta\delta} + \xi_{\sigma;\delta\beta}e^{\sigma\delta\beta}) = \\ = \frac{1}{2}(\xi_{\sigma;\beta\delta} - \xi_{\sigma;\delta\beta})e^{\sigma\beta\delta} = \frac{1}{2}R^\alpha_{\;\cdot\;\sigma\beta\delta}\xi_\alpha e^{\sigma\beta\delta} = 0.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Получаем равенство: $m\xi^\mu_{.;\mu} = 0$.

Преобразуем (3.25) и получим окончательное выражение:

$$\varphi_{,\beta} = \frac{i}{2}\xi^\mu R_{\mu\beta} - \xi^\mu F_{\mu\beta} + \frac{i}{4}(\xi^\nu_{.;\beta\nu} - \xi^{..;\nu}_{\beta;\nu}), \tag{3.27}$$

которое можно переписать и получить законченный вид.

Используя равенство $\omega^i_{.;kl} - \omega^i_{.;lk} = \omega^j R^i_{.jkl}$ заметим, что:

$$\xi^\nu_{.;\beta\nu} = \xi^\nu_{.;\nu\beta} + \xi^\mu R^\nu_{\mu\beta\nu} = \xi^\nu_{.;\nu\beta} - \xi^\mu R_{\mu\beta},$$

$$\begin{aligned}\xi^{..;\nu}_{\alpha;\nu} = g_{\alpha\beta}\xi^{\beta;\nu}_{..;\nu} = g_{\alpha\beta}(\frac{2}{3}g^{\beta\nu}\xi^\rho_{;\rho} - \xi^{\nu;\beta})_{;\nu} = -\xi^\nu_{.;\alpha\nu} + \frac{2}{3}\xi^\rho_{;\rho\alpha} = \\ = -(\xi^\nu_{.;\nu\alpha} - \xi^\mu R_{\mu\alpha}) + \frac{2}{3}\xi^\nu_{;\nu\alpha} = \xi^\mu R_{\mu\alpha} - \frac{1}{3}\xi^\nu_{.;\nu\alpha}.\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в (3.27) и приводя подобные, получим:

$$\varphi_{,\beta} = \frac{i}{2}\xi^\mu R_{\mu\beta} - \xi^\mu F_{\mu\beta} + \frac{i}{4}(\xi^\nu_{.;\nu\beta} - \xi^\mu R_{\mu\beta} - \xi^\mu R_{\mu\beta} + \frac{1}{3}\xi^\nu_{.;\nu\beta}) = \frac{i}{3}\xi^\nu{}_{;\nu\beta} - F_{\beta\mu}\xi^\mu.$$

□

Теперь обобщим все полученные результаты в следующую теорему.

Теорема 3.5. *Оператор симметрии (3.1) уравнения Дирака (2.30) принимает вид*

$$\hat{X} = \xi^\mu \hat{\mathcal{P}}_\mu - \frac{s}{4}\xi^{\mu;\nu}e_{\mu\nu\alpha}\gamma^\alpha + \varphi, \tag{3.28}$$

где ξ^μ это векторное поле, которое определяется системой уравнений (3.22) и (3.24). Функцию φ находим из уравнения (3.23).

Доказательство. Подставляем ранее найденные значения:

$$X = X^{\mu}\mathcal{P}_{\mu} + \chi = \xi^{\mu}\mathcal{P}_{\mu} - \frac{s}{4}\xi^{\mu;\sigma}e_{\mu\sigma}{}^{\cdot\cdot\alpha}\gamma_{\alpha} + \varphi = \xi^{\mu}\mathcal{P}_{\mu} - \frac{s}{4}\xi^{\mu;\nu}e_{\mu\nu\alpha}\gamma^{\alpha} + \varphi.$$

□

Теперь условие (3.24) приводит к изучению отдельно массивного случая ($m \neq 0$) и безмассового случая ($m = 0$).

В настоящей работе мы имели дело с массивным случаем. Теперь Лемма (3.4) примет вид

$$\hat{\Psi} = -i\xi^{\mu}{}_{;\mu} = 0. \tag{3.29}$$

Заметим, что векторные поля Киллинга ξ^{μ} обладают свойством:

$$\xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = 0. \tag{3.30}$$

Другими словами, для уравнения (2+1)-мерного Дирака оператор симметрии X первого порядка, коммутирующий с оператором Дирака H вида (2.30), имеет только скалярные коэффициенты при производных векторных полей Киллинга. Эта ситуация отличается от случая уравнения $(3+1)$-мерного Дирака, когда оператор симметрии имеет как скалярные, так и матричные коэффициенты при первых производных. Здесь под скалярными коэффициентами мы имеем в виду скалярные функции, умноженные на единичную матрицу.

4 Оператор симметрии второго порядка

Для обнаружения новых точных решений уравнения Дирака в (2+1)-пространстве-времени будем использовать оператор симметрии второго порядка с матричными коэффициентами в виде:

$$Y = \mathcal{P}_\mu Y^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + Y^\mu\mathcal{P}_\mu + \tau, \tag{4.1}$$

где $Y^{\mu\nu} = Y^{\nu\mu}$. Подставляя данный оператор и множитель Лагранжа

$$\Psi = \mathcal{P}_\mu \Psi^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + \Psi^\mu\mathcal{P}_\mu + \tau, \tag{4.2}$$

где $\Psi^{\mu\nu} = \Psi^{\nu\mu}$ в определяющее уравнение

$$[Y, H] = \Psi H, \tag{4.3}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mathcal{P}_\mu$, мы получим определяющие уравнения для такого оператора. Сначала подставим значения и распишем:

$$[Y, H] = [\mathcal{P}_\mu Y^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + Y^\mu\mathcal{P}_\mu + \chi, \gamma^\delta\mathcal{P}_\delta - m] = [\mathcal{P}_\mu Y^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu, \gamma^\delta\mathcal{P}_\delta] + [Y^\mu\mathcal{P}_\mu, \gamma^\delta\mathcal{P}_\delta] + [\chi, \gamma^\delta\mathcal{P}_\delta],$$

$$\Psi H = \mathcal{P}_\nu\Psi^{\nu\delta}\mathcal{P}_\delta\gamma^\mu\mathcal{P}_\mu - m\mathcal{P}_\nu\Psi^{\nu\delta}\mathcal{P}_\delta + \Psi^\nu\mathcal{P}_\nu\gamma^\mu\mathcal{P}_\mu - m\Psi^\nu\mathcal{P}_\nu + \bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{P}_\mu - m\bar{\Psi}.$$

Для простоты вычислений вычислим каждый коммутатор в отдельности:

$$[\mathcal{P}_\mu Y^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu, \gamma^\delta\mathcal{P}_\delta] = \mathcal{P}_\mu Y^{\mu\nu}\gamma^\delta[\mathcal{P}_\nu, \mathcal{P}_\delta] + \mathcal{P}_\mu\gamma^\delta[Y^{\mu\nu}, \mathcal{P}_\delta]\mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}_\mu[Y^{\mu\nu}, \gamma^\delta]\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\nu +$$
$$+\gamma^\delta[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\delta]Y^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + [\mathcal{P}_\nu, \gamma^\delta]\mathcal{P}_\delta Y^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu,$$

$$[Y^\mu\mathcal{P}_\mu, \gamma^\delta\mathcal{P}_\delta] = Y^\mu\gamma^\delta[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\delta] + \gamma^\delta[Y^\mu, \mathcal{P}_\delta]\mathcal{P}_\mu + [Y^\mu, \gamma^\delta]\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\mu,$$

$$[\chi, \gamma^\delta\mathcal{P}_\delta] = \gamma^\delta[\chi, \mathcal{P}_\delta] + [\chi, \gamma^\delta]\mathcal{P}_\delta.$$

Приравняем полученные нами результаты и запишем окончательное единое равенство.

$$\mathcal{P}_\mu Y^{\mu\nu}\gamma^\delta[\mathcal{P}_\nu, \mathcal{P}_\delta] + \mathcal{P}_\mu\gamma^\delta[Y^{\mu\nu}, \mathcal{P}_\delta]\mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}_\mu[Y^{\mu\nu}, \gamma^\delta]\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\nu + \gamma^\delta[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\delta]Y^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + [\mathcal{P}_\nu, \gamma^\delta]\mathcal{P}_\delta Y^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu +$$
$$+Y^\mu\gamma^\delta[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\delta] + \gamma^\delta[Y^\mu, \mathcal{P}_\delta]\mathcal{P}_\mu + [Y^\mu, \gamma^\delta]\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\mu + \gamma^\delta[\chi, \mathcal{P}_\delta] + [\chi, \gamma^\delta]\mathcal{P}_\delta =$$
$$= \mathcal{P}_\nu\Psi^{\nu\delta}\mathcal{P}_\delta\gamma^\mu\mathcal{P}_\mu - m\mathcal{P}_\nu\Psi^{\nu\delta}\mathcal{P}_\delta + \Psi^\nu\mathcal{P}_\nu\gamma^\mu\mathcal{P}_\mu - m\Psi^\nu\mathcal{P}_\nu + \bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{P}_\mu - m\bar{\Psi}.$$

Теперь нам нужно провести симметризацию данного уравнения, выписать члены при одинаковых степенях обобщенного оператора импульса и таким образом получить определяющие уравнения.

$$\mathcal{P}_\mu Y^{\mu\nu}\gamma^\delta[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta] = iY^{\mu\nu}{}_{;\mu}\gamma^\delta[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta] + Y^{\mu\nu}\gamma^\delta[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]\mathcal{P}_\mu + Y^{\mu\nu}\gamma^\delta[\mathcal{P}_\mu,[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]],$$

$$\mathcal{P}_\mu\gamma^\delta[Y^{\mu\nu},\mathcal{P}_\delta]\mathcal{P}_\nu = -i\gamma^\delta Y^{\mu\nu}{}_{;\delta}\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu + \gamma^\delta Y^{\mu\nu}{}_{;\delta\mu}\mathcal{P}_\nu = -\frac{i}{2}\gamma^\delta(Y^{\mu\nu}{}_{;\delta} + Y^{\nu\mu}{}_{;\delta})\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu -$$
$$-i\gamma^\delta Y^{\mu\nu}{}_{;\delta}[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\nu] + \gamma^\delta Y^{\mu\nu}{}_{;\delta\mu}\mathcal{P}_\nu,$$

$$\mathcal{P}_\mu[Y^{\mu\nu},\gamma^\delta]\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\nu = i[Y^{\mu\nu}{}_{;\mu},\gamma^\delta]\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\nu + [Y^{\mu\nu},\gamma^\delta]\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\nu =$$
$$= \frac{i}{2}([Y^{\mu\nu}{}_{;\mu},\gamma^\delta] + [Y^{\mu\delta}{}_{;\mu},\gamma^\nu])\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\nu + \frac{i}{2}[Y^{\mu\nu}{}_{;\mu},\gamma^\delta][\mathcal{P}_\delta,\mathcal{P}_\nu] + [Y^{\mu\nu},\gamma^\delta]\mathcal{P}_\mu(\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_\delta - [\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]) =$$
$$= \frac{i}{2}([Y^{\mu\nu}{}_{;\mu},\gamma^\delta] + [Y^{\mu\delta}{}_{;\mu},\gamma^\nu])\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\nu + \frac{i}{2}[Y^{\mu\nu}{}_{;\mu},\gamma^\delta][\mathcal{P}_\delta,\mathcal{P}_\nu] + [Y^{\mu\nu},\gamma^\delta]\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_\delta - [Y^{\mu\nu},\gamma^\delta]\mathcal{P}_\mu[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta] +$$
$$+[Y^{\nu\delta},\gamma^\mu]\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_\delta - [Y^{\nu\delta},\gamma^\mu][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\nu]\mathcal{P}_\delta - [Y^{\nu\delta},\gamma^\mu]\mathcal{P}_\nu[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta] + [Y^{\delta\mu},\gamma^\nu]\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_\delta -$$
$$-[Y^{\delta\mu},\gamma^\nu]\mathcal{P}_\mu[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta] - [Y^{\delta\mu},\gamma^\nu][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]\mathcal{P}_\nu =$$
$$= \frac{i}{2}([Y^{\mu\nu}{}_{;\mu},\gamma^\delta] + [Y^{\mu\delta}{}_{;\mu},\gamma^\nu])\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\nu + \frac{i}{2}[Y^{\mu\nu}{}_{;\mu},\gamma^\delta][\mathcal{P}_\delta,\mathcal{P}_\nu] + [Y^{\mu\nu},\gamma^\delta]\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_\delta + [Y^{\nu\delta},\gamma^\mu]\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_\delta -$$
$$-[Y^{\nu\delta},\gamma^\mu][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\nu]\mathcal{P}_\delta + [Y^{\delta\mu},\gamma^\nu]\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_\delta -$$
$$-[Y^{\delta\mu},\gamma^\nu][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]\mathcal{P}_\nu - [Y^{\mu\nu},\gamma^\delta][\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]\mathcal{P}_\mu - [Y^{\mu\nu},\gamma^\delta][\mathcal{P}_\mu,[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]] -$$
$$-[Y^{\nu\delta},\gamma^\mu][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]\mathcal{P}_\nu - [Y^{\nu\delta},\gamma^\mu][\mathcal{P}_\nu,[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]] - [Y^{\delta\mu},\gamma^\nu][\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]\mathcal{P}_\mu - [Y^{\delta\mu},\gamma^\nu][\mathcal{P}_\mu,[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]],$$

$$[Y^\mu,\gamma^\delta]\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\mu + Y^\mu\gamma^\delta[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta] = \frac{1}{2}([Y^\mu,\gamma^\delta] + [Y^\delta,\gamma^\mu])\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\mu + \frac{1}{2}[Y^\mu,\gamma^\delta][\mathcal{P}_\delta,\mathcal{P}_\mu] +$$
$$+\frac{1}{2}(Y^\mu\gamma^\delta + \gamma^\delta Y^\mu)[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta] + \frac{1}{2}(Y^\mu\gamma^\delta - \gamma^\delta Y^\mu)[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta] =$$
$$= \frac{1}{2}([Y^\mu,\gamma^\delta] + [Y^\delta,\gamma^\mu])\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\mu + \frac{1}{2}(Y^\mu\gamma^\delta + \gamma^\delta Y^\mu)[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta],$$

$$\mathcal{P}_\nu\Psi^{\nu\delta}\mathcal{P}_\delta\gamma^\mu\mathcal{P}_\mu = i\Psi^{\nu\delta}{}_{;\nu}\gamma^\mu\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\mu + \Psi^{\nu\delta}\gamma^\mu\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\mu =$$
$$= \frac{i}{2}(\Psi^{\nu\delta}{}_{;\nu}\gamma^\mu + \Psi^{\nu\mu}{}_{;\nu}\gamma^\delta)\mathcal{P}_\delta\mathcal{P}_\mu + \frac{i}{2}\Psi^{\nu\delta}{}_{;\nu}\gamma^\mu[\mathcal{P}_\delta,\mathcal{P}_\mu] + \Psi^{\nu\delta}\gamma^\mu\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_\delta - \Psi^{\nu\delta}\gamma^\mu[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\nu]\mathcal{P}_\delta -$$
$$-\Psi^{\nu\delta}\gamma^\mu[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]\mathcal{P}_\nu - \Psi^{\nu\delta}\gamma^\mu[\mathcal{P}_\nu,[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]] + \Psi^{\delta\mu}\gamma^\nu\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_\delta - \Psi^{\delta\mu}\gamma^\nu[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]\mathcal{P}_\mu -$$
$$-\Psi^{\delta\mu}\gamma^\nu[\mathcal{P}_\mu,[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]] - \Psi^{\delta\mu}\gamma^\nu[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]\mathcal{P}_\nu + \Psi^{\mu\nu}\gamma^\delta\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_\delta,$$

$$m\mathcal{P}_\nu \Psi^{\nu\delta}\mathcal{P}_\delta = im\Psi^{\nu\delta}{}_{;\nu}\mathcal{P}_\delta + \frac{m}{2}(\Psi^{\nu\delta}+\Psi^{\delta\nu})\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_\delta + \frac{m}{2}\Psi^{\nu\delta}[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta],$$

$$\Psi^\nu \mathcal{P}_\nu \gamma^\mu \mathcal{P}_\mu = \frac{1}{2}(\Psi^\nu\gamma^\mu + \Psi^\mu\gamma^\nu)\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}_\mu + \frac{1}{2}\Psi^\nu\gamma^\mu[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\mu].$$

Лемма 4.1. *Определяющее уравнение (4.3) эквивалентно следующей системе уравнений для $Y^{\mu\nu}$, Y^μ, τ, Ψ^μ и $\bar\Psi$:*

$$[Y^{\mu\nu},\gamma^\delta] + [Y^{\nu\delta},\gamma^\mu] + [Y^{\delta\mu},\gamma^\nu] = \Psi^{\mu\nu}\gamma^\delta + \Psi^{\nu\delta}\gamma^\mu + \Psi^{\delta\mu}\gamma^\nu, \tag{4.4}$$

$$-i\gamma^\delta(Y^{\sigma\rho}{}_{;\delta} + Y^{\rho\sigma}{}_{;\delta}) + i([Y^{\mu\rho}{}_{;\mu},\gamma^\sigma] + [Y^{\mu\sigma}{}_{;\mu},\gamma^\rho]) + ([Y^\rho,\gamma^\sigma] + [Y^\sigma,\gamma^\rho]) = \tag{4.5}$$
$$= i(\Psi^{\nu\sigma}{}_{;\nu}\gamma^\rho + \Psi^{\nu\rho}{}_{;\nu}\gamma^\sigma) + (\Psi^\sigma\gamma^\rho + \Psi^\rho\gamma^\sigma) + m(\Psi^{\sigma\rho} + \Psi^{\rho\sigma}),$$

$$Y^{\sigma\nu}\gamma^\delta[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta] + \gamma^\delta Y^{\mu\sigma}{}_{;\delta\mu} - [Y^{\nu\sigma},\gamma^\mu][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\nu] - [Y^{\delta\mu},\gamma^\sigma][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta] - \tag{4.6}$$
$$-[Y^{\sigma\nu},\gamma^\delta][\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta] - [Y^{\sigma\delta},\gamma^\mu][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta] - [Y^{\delta\sigma},\gamma^\nu][\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta] + \gamma^\delta[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]Y^{\mu\sigma} + \gamma^\delta[Y^\sigma,\mathcal{P}_\delta] + [\chi,\gamma^\sigma] =$$
$$= -\Psi^{\nu\sigma}\gamma^\mu[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\nu] - \Psi^{\sigma\delta}\gamma^\mu[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta] - \Psi^{\delta\sigma}\gamma^\nu[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta] - \Psi^{\delta\mu}\gamma^\sigma[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta] + im\Psi^{\nu\sigma}{}_{;\nu} - m\Psi^\sigma + \bar\Psi\gamma^\sigma,$$

$$iY^{\mu\nu}{}_{;\mu}\gamma^\delta[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta] + Y^{\mu\nu}\gamma^\delta[\mathcal{P}_\mu,[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]] - i\gamma^\delta Y^{\mu\nu}{}_{;\delta}[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\nu] + \frac{i}{2}[Y^{\mu\nu}{}_{;\mu},\gamma^\delta][\mathcal{P}_\delta,\mathcal{P}_\nu] - \tag{4.7}$$
$$-[Y^{\mu\nu},\gamma^\delta][\mathcal{P}_\mu,[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]] - [Y^{\nu\delta},\gamma^\mu][\mathcal{P}_\nu,[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]] - [Y^{\delta\mu},\gamma^\nu][\mathcal{P}_\mu,[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]] + \frac{1}{2}(Y^\mu\gamma^\delta + \gamma^\delta Y^\mu)[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta] +$$
$$+\gamma^\delta[\chi,\mathcal{P}_\delta] = \frac{i}{2}\Psi^{\nu\delta}{}_{;\nu}\gamma^\mu[\mathcal{P}_\delta,\mathcal{P}_\mu] - \Psi^{\nu\delta}\gamma^\mu[\mathcal{P}_\nu,[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]] - \Psi^{\delta\mu}\gamma^\nu[\mathcal{P}_\mu,[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]] +$$
$$+\frac{m}{2}\Psi^{\nu\delta}[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta] + \frac{1}{2}\Psi^\nu\gamma^\mu[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\mu] - m\bar\Psi.$$

Также стоит отметить, что лемма (4.1) верна не только для $(2+1)$ уравнения Дирака (2.30), но и для $(3+1)$.

Разложим матричные функции $Y^{\mu\nu}$, Y^μ, χ, $\Psi^{\mu\nu}$, Ψ^μ, $\bar\Psi$ по базису (2.12):

$$Y^{\mu\nu} = \xi^{\mu\nu} + \gamma^\alpha Y^{\mu\nu}{}_{\cdot\,\alpha}, \quad Y^\mu = \xi^\mu + \gamma^\alpha Y^\mu_{\cdot\,\alpha}, \quad \chi = \varphi + \varphi^\alpha\gamma_\alpha, \tag{4.8}$$

$$\Psi^{\mu\nu} = \Psi^{\mu\nu}{}_{\cdot\,\alpha}\gamma^\alpha + \bar\Psi^{\mu\nu}, \quad \Psi^\mu = \Psi^\mu_{\cdot\,\alpha}\gamma^\alpha + \bar\Psi^\mu, \quad \bar\Psi = \bar\Psi^\mu_0\gamma_\mu + \bar\Psi_0, \tag{4.9}$$

где

$$\xi^{\mu\nu}, \quad \xi^\mu, \quad Y^{\mu\nu\cdot}{}_\alpha, \quad Y^\mu_{\cdot\alpha}, \quad \varphi, \quad \varphi^\alpha, \quad \Psi^{\mu\nu\cdot}{}_\alpha, \quad \Psi^\mu_{\cdot\alpha}, \quad \bar\Psi^{\mu\nu}, \quad \bar\Psi^\mu, \quad \bar\Psi^\mu_0, \quad \bar\Psi_0 \tag{4.10}$$

это гладкие скалярные функции от x.

Уравнения (4.4) – (4.7) для матричных коэффициентов $Y^{\mu\nu}$, Y^μ, χ и $\Psi^{\mu\nu}$, Ψ^μ, $\bar\Psi$ оператора симметрии (4.1) и множителя Лагранжа, соответственно, приводят к соответствующим уравнениям для скалярных функций (4.10), которые приведены ниже в терминах следующих лемм.

Теорема 4.2. *Двойной коммутатор компонент обобщённого оператора импульса $\mathcal{P}_\nu$ имеют вид:*

$$[\mathcal{P}_\nu, [\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\sigma]] = R^{\alpha}_{\cdot\,\mu\sigma\nu}\mathcal{P}_\alpha + \frac{s}{4}R_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot\,;\nu}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}e_{\alpha\beta\rho}\gamma^\rho + F_{\mu\sigma;\nu}. \tag{4.11}$$

Доказательство. Распишем коммутатор $\mathcal{P}_\nu$, $\mathcal{P}_\mu$ и $\mathcal{P}_\sigma$ и упростим:

$$[\mathcal{P}_\nu, [\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\sigma]] = -[\mathcal{P}_\nu, [\nabla_\mu, \nabla_\sigma]] - \frac{is}{4}[\mathcal{P}_\nu, R_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}e_{\alpha\beta\gamma}\gamma^\gamma] - i[\mathcal{P}_\nu, F_{\mu\sigma}]. \tag{4.12}$$

Вычислим каждый коммутатор в отдельности:

$$[\mathcal{P}_\nu, [\nabla_\mu, \nabla_\sigma]]\Psi = \mathcal{P}_\nu([\nabla_\mu, \nabla_\sigma]\Psi) - [\nabla_\mu, \nabla_\sigma](\mathcal{P}_\nu\Psi) =$$

$$= \Psi_{,\sigma\mu} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}\Psi_{,\alpha} - \Psi_{,\mu\sigma} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}\Psi_{,\alpha} - [\nabla_\mu, \nabla_\sigma](i(\nabla_\nu\Psi + \Gamma_\nu\Psi) - A_\nu\Psi) = -R^{\alpha}_{\cdot\,\mu\sigma\nu}\mathcal{P}_\alpha\Psi,$$

$$[\mathcal{P}_\nu, R_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}]\Psi = \mathcal{P}_\nu(R_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}\Psi) - R_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}(\mathcal{P}_\nu\Psi) =$$

$$= (i\nabla_\nu\Psi + i\Gamma_\nu\Psi - A_\nu\Psi)(R_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}\Psi) - R_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}((i\nabla_\nu\Psi + i\Gamma_\nu\Psi - A_\nu\Psi)\Psi) =$$

$$= i(R_{\mu\sigma,\nu\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta} - \Gamma_{\nu\mu}^{\cdot\,\cdot\,\kappa}R_{\kappa\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\kappa}R_{\mu\kappa\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta} + \Gamma_{\nu\kappa}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}R_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\kappa\beta} + \Gamma_{\nu\kappa}^{\cdot\,\cdot\,\beta}R_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\kappa})\Psi +$$

$$+ i\Psi_{,\nu}R_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta} + i\Gamma_\nu R_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}\Psi - A_\nu R_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}\Psi - iR_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}\Psi_{,\nu} - iR_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}\Gamma_\nu\Psi + A_\nu R_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}\Psi =$$

$$= iR_{\mu\sigma;\nu\,\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}\,\Psi,$$

$$[\mathcal{P}_\nu, F_{\mu\sigma}]\Psi = \mathcal{P}_\nu(F_{\mu\sigma}\Psi) - F_{\mu\sigma}(\mathcal{P}_\nu\Psi) = (i(\nabla_\nu + \Gamma_\nu) - A_\nu)(F_{\mu\sigma}\Psi) - F_{\mu\sigma}(i(\Psi_{,\nu} + \Gamma_\nu\Psi) - A_\nu\Psi) =$$

$$= i(F_{\mu\sigma,\nu}\Psi + F_{\mu\sigma}\Psi_{,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}F_{\alpha\sigma}\Psi - \Gamma_{\mu\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}F_{\alpha\nu}\Psi + \Gamma_\nu F_{\mu\sigma}\Psi) - A_\nu F_{\mu\sigma}\Psi -$$

$$- iF_{\mu\sigma}\Psi_{,\nu} - iF_{\mu\sigma}\Gamma_\nu\Psi + F_{\mu\sigma}A_\nu\Psi = iF_{\mu\sigma;\nu}\Psi.$$

Окончательно подставим все полученные выражения в (4.12) и получим искомое выражение:

$$[\mathcal{P}_\nu, [\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\sigma]] = R^{\alpha}_{\cdot\,\mu\sigma\nu}\mathcal{P}_\alpha + \frac{s}{4}R_{\mu\sigma\,\cdot\,\cdot\,;\nu}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}e_{\alpha\beta\rho}\gamma^\rho + F_{\mu\sigma;\nu}.$$

□

Лемма 4.3. *Из уравнения (4.4) следует*

$$\Psi^{\mu\nu\delta} = 2Y^{\mu\nu\delta} + \frac{1}{4}[(Sp(\Psi^\nu) - 2Sp(Y^\nu))g^{\mu\delta} + (Sp(\Psi^\mu) - 2Sp(Y^\mu))g^{\nu\delta}], \tag{4.13}$$

$$\mathrm{Sp}(Y^\mu) = Y^{\mu\nu}{}_{\nu}^{\cdot}, \quad \bar{\Psi}^{\mu\nu} = 0, \quad \mathrm{Sp}(\Psi^\mu) = \Psi^{\mu\nu}{}_{\nu}^{\cdot}, \tag{4.14}$$

$$Y^{\mu\nu\delta} + Y^{\nu\delta\mu} + Y^{\delta\mu\nu} = -\frac{1}{4}[(Sp(\Psi^\mu) - 2Sp(Y^\mu))g^{\nu\delta} + (Sp(\Psi^\nu) - 2Sp(Y^\nu))g^{\mu\delta} +$$

$$+ (Sp(\Psi^\delta) - 2Sp(Y^\delta))g^{\mu\nu}]. \tag{4.15}$$

Доказательство. Подставим (4.8) и (4.9) в уравнение (4.4) и разложим его по базису (2.12) с помощью известных формул (2.13)–(2.15):

Левая часть:

$$[Y^{\mu\nu},\gamma^\delta]+[Y^{\nu\delta},\gamma^\mu]+[Y^{\delta\mu},\gamma^\nu]=[\xi^{\mu\nu}+\gamma^\alpha Y^{\mu\nu\cdot}{}_{\alpha},\gamma^\delta]+[\xi^{\nu\delta}+\gamma^\alpha Y^{\nu\delta\cdot}{}_{\alpha},\gamma^\mu]+[\xi^{\delta\mu}+\gamma^\alpha Y^{\delta\mu\cdot}{}_{\alpha},\gamma^\nu]=$$
$$=-2ise^{\alpha\delta\sigma}\gamma_\sigma Y^{\mu\nu\cdot}{}_{\alpha}-2ise^{\alpha\mu\sigma}\gamma_\sigma Y^{\nu\delta\cdot}{}_{\alpha}-2ise^{\alpha\nu\sigma}\gamma_\sigma Y^{\delta\mu\cdot}{}_{\alpha}.$$

Правая часть:

$$\Psi^{\mu\nu}\gamma^\delta+\Psi^{\nu\delta}\gamma^\mu+\Psi^{\delta\mu}\gamma^\nu=(\Psi^{\mu\nu\cdot}{}_{\alpha}\gamma^\alpha+\bar\Psi^{\mu\nu})\gamma^\delta+(\Psi^{\nu\delta\cdot}{}_{\alpha}\gamma^\alpha+\bar\Psi^{\nu\delta})\gamma^\mu+(\Psi^{\delta\mu\cdot}{}_{\alpha}\gamma^\alpha+\bar\Psi^{\delta\mu})\gamma^\nu=$$
$$=\Psi^{\mu\nu\cdot}{}_{\alpha}(g^{\alpha\delta}-ise^{\alpha\delta\sigma}\gamma_\sigma)+\bar\Psi^{\mu\nu}g^{\sigma\delta}\gamma_\sigma+\Psi^{\nu\delta\cdot}{}_{\alpha}(g^{\alpha\mu}-ise^{\alpha\mu\sigma}\gamma_\sigma)+\bar\Psi^{\nu\delta}g^{\sigma\mu}\gamma_\sigma+$$
$$+\Psi^{\delta\mu\cdot}{}_{\alpha}(g^{\alpha\nu}-ise^{\alpha\nu\sigma}\gamma_\sigma)+\bar\Psi^{\delta\mu}g^{\sigma\nu}\gamma_\sigma.$$

Приравнивая, получаем:

$$-2ise^{\alpha\delta\sigma}\gamma_\sigma Y^{\mu\nu\cdot}{}_{\alpha}-2ise^{\alpha\mu\sigma}\gamma_\sigma Y^{\nu\delta\cdot}{}_{\alpha}-2ise^{\alpha\nu\sigma}\gamma_\sigma Y^{\delta\mu\cdot}{}_{\alpha}=\Psi^{\mu\nu\cdot}{}_{\alpha}(g^{\alpha\delta}-ise^{\alpha\delta\sigma}\gamma_\sigma)+\bar\Psi^{\mu\nu}g^{\sigma\delta}\gamma_\sigma+$$
$$+\Psi^{\nu\delta\cdot}{}_{\alpha}(g^{\alpha\mu}-ise^{\alpha\mu\sigma}\gamma_\sigma)+\bar\Psi^{\nu\delta}g^{\sigma\mu}\gamma_\sigma+\Psi^{\delta\mu\cdot}{}_{\alpha}(g^{\alpha\nu}-ise^{\alpha\nu\sigma}\gamma_\sigma)+\bar\Psi^{\delta\mu}g^{\sigma\nu}\gamma_\sigma. \tag{4.16}$$

Из (4.16) мы также можем заметить, что $\Psi^{\mu\nu\delta}+\Psi^{\nu\delta\mu}+\Psi^{\delta\mu\nu}=0$ и получаем выражение:

$$-2is(e^{\alpha\delta\sigma}Y^{\mu\nu\cdot}{}_{\alpha}+e^{\alpha\mu\sigma}Y^{\nu\delta\cdot}{}_{\alpha}+e^{\alpha\nu\sigma}Y^{\delta\mu\cdot}{}_{\alpha})\gamma_\sigma=$$
$$=-is(\Psi^{\mu\nu\cdot}{}_{\alpha}e^{\alpha\delta\sigma}+\Psi^{\nu\delta\cdot}{}_{\alpha}e^{\alpha\mu\sigma}+\Psi^{\delta\mu\cdot}{}_{\alpha}e^{\alpha\nu\sigma})\gamma_\sigma+(\bar\Psi^{\mu\nu}g^{\sigma\delta}+\bar\Psi^{\nu\delta}g^{\sigma\mu}+\bar\Psi^{\delta\mu}g^{\sigma\nu})\gamma_\sigma.$$

Перепишем в более компактном виде:

$$is(e^{\alpha\delta\sigma}(\Psi^{\mu\nu\cdot}{}_{\alpha}-2Y^{\mu\nu\cdot}{}_{\alpha})+e^{\alpha\mu\sigma}(\Psi^{\nu\delta\cdot}{}_{\alpha}-2Y^{\nu\delta\cdot}{}_{\alpha})+e^{\alpha\nu\sigma}(\Psi^{\delta\mu\cdot}{}_{\alpha}-2Y^{\delta\mu\cdot}{}_{\alpha}))=\bar\Psi^{\mu\nu}g^{\sigma\delta}+\bar\Psi^{\nu\delta}g^{\sigma\mu}+\bar\Psi^{\delta\mu}g^{\sigma\nu}. \tag{4.17}$$

Умножим (4.17) на $g_{\delta\sigma}$:

$$is(e^{\alpha\mu}{}_{\delta}(\Psi^{\nu\delta\cdot}{}_{\alpha}-2Y^{\nu\delta\cdot}{}_{\alpha})+e^{\alpha\nu}{}_{\delta}(\Psi^{\delta\mu\cdot}{}_{\alpha}-2Y^{\delta\mu\cdot}{}_{\alpha}))=\bar\Psi^{\mu\nu}dim(\mathcal{M})+\bar\Psi^{\nu\mu}+\bar\Psi^{\nu\mu}. \tag{4.18}$$

Так как выражение в скобках симметрично по μ и ν, а $dim(\mathcal{M})=n=3$, получим равенство на $\bar\Psi^{\mu\nu}$

$$\bar\Psi^{\nu\mu}n+2\bar\Psi^{\mu\nu}=\bar\Psi^{\mu\nu}n+2\bar\Psi^{\nu\mu}. \tag{4.19}$$

Из (4.19) видна симметричность по μ и ν: $\bar\Psi^{\mu\nu}=\bar\Psi^{\nu\mu}$.

Получаем следующее выражение на $\bar{\Psi}^{\mu\nu}$:

$$\bar{\Psi}^{\nu\mu} = -\frac{is}{5}(e^{\mu\alpha}{}_{\delta}(\Psi^{\delta\nu}{}_{\alpha} - 2Y^{\delta\nu}{}_{\alpha}) + e^{\nu\alpha}{}_{\delta}(\Psi^{\delta\mu}{}_{\alpha} - 2Y^{\delta\mu}{}_{\alpha})) =$$
$$= \frac{is}{5}(e^{\mu\delta\alpha}(\Psi^{\nu}_{.\delta\alpha} - 2Y^{\nu}_{.\delta\alpha}) + e^{\nu\delta\alpha}(\Psi^{\mu}_{.\delta\alpha} - 2Y^{\mu}_{.\delta\alpha})). \quad (4.20)$$

Умножим (4.17) на $g_{\mu\nu}$:

$$is(e^{\alpha\delta\sigma}g_{\mu\nu}(\Psi^{\mu\nu.}{}_{\alpha} - 2Y^{\mu\nu.}{}_{\alpha})) + e^{\sigma\mu\alpha}(\Psi^{\delta}_{\mu\alpha} - 2Y^{\delta}_{\mu\alpha}) = (\bar{\Psi}^{\mu\nu}g_{\mu\nu})g^{\sigma\delta} + \bar{\Psi}^{\sigma\delta} + \bar{\Psi}^{\delta\sigma},$$

$$-2ise^{\sigma\mu\alpha}(\Psi^{\delta}_{\mu\alpha} - 2Y^{\delta}_{\mu\alpha}) = -is(g_{\mu\nu}(\Psi^{\mu\nu.}{}_{\alpha} - 2Y^{\mu\nu.}{}_{\alpha}))e^{\alpha\delta\sigma} + (\bar{\Psi}^{\mu\nu}g_{\mu\nu})g^{\sigma\delta} + 2\bar{\Psi}^{\delta\sigma}. \quad (4.21)$$

Подставим (4.21) в (4.20):

$$-2\bar{\Psi}^{\nu\mu} = \frac{1}{5}(-isg_{\mu\nu}(\Psi^{\mu\nu.}{}_{\alpha} - 2Y^{\mu\nu.}{}_{\alpha})e^{\alpha\mu\nu} + (\bar{\Psi}^{\mu\nu}g_{\mu\nu})g^{\mu\nu} +$$
$$+2\bar{\Psi}^{\mu\nu} - isg_{\mu\nu}(\Psi^{\mu\nu.}{}_{\alpha} - 2Y^{\mu\nu.}{}_{\alpha})e^{\alpha\nu\mu} + (\bar{\Psi}^{\mu\nu}g_{\mu\nu})g^{\mu\nu} + 2\bar{\Psi}^{\mu\nu}) = \frac{1}{5}(4\bar{\Psi}^{\mu\nu} + Sp(\bar{\Psi})g^{\mu\nu}).$$

Из (4.18):

$$Sp(\bar{\Psi}) = \bar{\Psi}^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \frac{2is}{5}(e^{\mu\delta\alpha}(\Psi_{\mu\delta\alpha} - 2Y_{\mu\delta\alpha})) = 0,$$
$$-2\bar{\Psi}^{\mu\nu} = \frac{4}{5}\bar{\Psi}^{\mu\nu}.$$

Вытекает тождество: $\bar{\Psi}^{\mu\nu} = 0$.

Тогда (4.17) с учётом $\bar{\Psi}^{\mu\nu} = 0$ примет вид:

$$is(e^{\alpha\delta\sigma}(\Psi^{\mu\nu.}{}_{\alpha} - 2Y^{\mu\nu.}{}_{\alpha}) + e^{\alpha\mu\sigma}(\Psi^{\nu\delta.}{}_{\alpha} - 2Y^{\nu\delta.}{}_{\alpha}) + e^{\alpha\nu\sigma}(\Psi^{\delta\mu.}{}_{\alpha} - 2Y^{\delta\mu.}{}_{\alpha})) = 0.$$

Умножим предыдущее выражение на $\varepsilon_{\tau\delta\sigma}$:

$$2\delta^{\alpha}_{\tau}(\Psi^{\mu\nu.}{}_{\alpha} - 2Y^{\mu\nu.}{}_{\alpha}) + (\delta^{\alpha}_{\tau}\delta^{\mu}_{\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}\delta^{\mu}_{\tau})(\Psi^{\nu\delta.}{}_{\alpha} - 2Y^{\nu\delta.}{}_{\alpha}) + (\delta^{\alpha}_{\tau}\delta^{\nu}_{\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}\delta^{\nu}_{\tau})(\Psi^{\delta\mu.}{}_{\alpha} - 2Y^{\delta\mu.}{}_{\alpha}) = 0,$$
$$2(\Psi^{\mu\nu.}{}_{\tau} - 2Y^{\mu\nu.}{}_{\tau}) + (\Psi^{\nu\mu.}{}_{\tau} - 2Y^{\nu\mu.}{}_{\tau}) - (\Psi^{\nu\delta.}{}_{\delta} - 2Y^{\nu\delta.}{}_{\delta})\delta^{\mu}_{\tau} +$$
$$+(\Psi^{\nu\mu.}{}_{\tau} - 2Y^{\nu\mu.}{}_{\tau}) - (\Psi^{\delta\mu.}{}_{\delta} - 2Y^{\delta\mu.}{}_{\delta})\delta^{\nu}_{\tau} = 0,$$
$$\Psi^{\mu\nu.}{}_{\tau} = 2Y^{\mu\nu.}{}_{\tau} + \frac{1}{4}\left[(Sp(\Psi^{\nu}) - 2Sp(Y^{\nu}))\delta^{\mu}_{\tau} + (Sp(\Psi^{\mu}) - 2Sp(Y^{\mu}))\delta^{\nu}_{\tau}\right].$$

И окончательно:

$$\Psi^{\mu\nu\delta} = 2Y^{\mu\nu\delta} + \frac{1}{4}[(Sp(\Psi^{\nu}) - 2Sp(Y^{\nu}))g^{\mu\delta} + (Sp(\Psi^{\mu}) - 2Sp(Y^{\mu}))g^{\nu\delta}]. \quad (4.22)$$

Теперь условие $\Psi^{\mu\nu\delta} + \Psi^{\nu\delta\mu} + \Psi^{\delta\mu\nu} = 0$ умножим на $g_{\nu\delta}$:

$$\Psi^{\mu\nu\delta}g_{\nu\delta} + \Psi^{\nu\delta\mu}g_{\nu\delta} + \Psi^{\delta\mu\nu}g_{\nu\delta} = 0,$$
$$Sp(\Psi^{\mu}) + \Psi^{\nu\delta\mu}g_{\nu\delta} + Sp(\Psi^{\mu}) = 0,$$

где $Sp(\Psi^\mu) = \Psi^{\delta\mu\nu} g_{\nu\delta} = \Psi^{\mu\delta.}{}_{\delta}$. Откуда получаем:

$$Sp(\Psi^\mu) = -\frac{1}{2}\Psi^{\nu\delta\mu} g_{\nu\delta}.$$

Подставив (4.22) в условие $\Psi^{\mu\nu\delta} + \Psi^{\nu\delta\mu} + \Psi^{\delta\mu\nu} = 0$, получим

$$Y^{\mu\nu\delta} + Y^{\nu\delta\mu} + Y^{\delta\mu\nu} = -\frac{1}{4}[(Sp(\Psi^\mu) - 2Sp(Y^\mu))g^{\nu\delta} +$$
$$+(Sp(\Psi^\nu) - 2Sp(Y^\nu))g^{\mu\delta} + (Sp(\Psi^\delta) - 2Sp(Y^\delta))g^{\mu\nu}].$$

□

4.1 Исследование нетривиальных симметрий

Учитывая лемму (4.1), мы получаем, что симметричный оператор (4.1) принимает вид

$$Y = \mathcal{P}_\mu Y^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + Y^\mu \mathcal{P}_\mu + \tau = \mathcal{P}_\mu(\xi^{\mu\nu} + \gamma^\alpha Y^{\mu\nu\cdot}{}_{;\alpha})\mathcal{P}_\nu + (\xi^\mu + \gamma^\alpha Y^\mu_{\cdot\alpha})\mathcal{P}_\mu + \tau =$$
$$= \mathcal{P}_\mu \xi^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}_\mu \gamma^\alpha Y^{\mu\nu\cdot}{}_{;\alpha}\mathcal{P}_\nu + \xi^\mu \mathcal{P}_\mu + \gamma^\alpha Y^\mu_{\cdot\alpha}\mathcal{P}_\mu + \tau =$$
$$= \mathcal{P}_\mu \xi^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}_\mu \gamma^\alpha(\frac{1}{2}\Psi^{\mu\nu}{}_\alpha - \frac{1}{8}[(Sp(\Psi^\nu) - 2Sp(Y^\nu))\delta^\mu_\alpha + (Sp(\Psi^\mu) - 2Sp(Y^\mu))\delta^\nu_\alpha])\mathcal{P}_\nu +$$
$$+\xi^\mu \mathcal{P}_\mu + \gamma^\alpha Y^\mu_{\cdot\alpha}\mathcal{P}_\mu + \tau = \mathcal{P}_\mu \xi^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + \frac{1}{2}\mathcal{P}_\mu \gamma^\alpha \Psi^{\mu\nu}{}_\alpha \mathcal{P}_\nu - \frac{1}{8}\mathcal{P}_\mu \gamma^\alpha (Sp(\Psi^\nu) - 2Sp(Y^\nu))\delta^\mu_\alpha \mathcal{P}_\nu -$$
$$-\frac{1}{8}\mathcal{P}_\mu \gamma^\alpha (Sp(\Psi^\mu) - 2Sp(Y^\mu))\delta^\nu_\alpha \mathcal{P}_\nu + \xi^\mu \mathcal{P}_\mu + \gamma^\alpha Y^\mu_{\cdot\alpha}\mathcal{P}_\mu + \tau =$$
$$= \mathcal{P}_\mu \xi^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + \frac{1}{2}\mathcal{P}_\mu \gamma^\alpha \Psi^{\mu\nu}{}_\alpha \mathcal{P}_\nu - \frac{1}{8}(Sp(\Psi^\nu) - 2Sp(Y^\nu))(H + m)\mathcal{P}_\nu -$$
$$-\frac{1}{8}\mathcal{P}_\mu (Sp(\Psi^\mu) - 2Sp(Y^\mu))(H + m) + \xi^\mu \mathcal{P}_\mu + \gamma^\alpha Y^\mu_{\cdot\alpha}\mathcal{P}_\mu + \tau.$$

Нас интересуют нетривиальные симметрии, поэтому без ограничения общности можем положить член при гамильтониане равным нулю, то есть $Sp(\Psi^\mu) = 2Sp(Y^\mu)$. Тогда наш оператор симметрии перепишется в виде:

$$Y = \mathcal{P}_\mu \xi^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}_\mu \gamma^\alpha Y^{\mu\nu\cdot}{}_{;\alpha}\mathcal{P}_\nu + \xi^\mu \mathcal{P}_\mu + \gamma^\alpha Y^\mu_{\cdot\alpha}\mathcal{P}_\mu + \tau.$$

При $\nu = \alpha$ выражение для оператора примет вид:

$$Y = \mathcal{P}_\mu \xi^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}_\mu Y^{\mu\nu\cdot}{}_{;\nu}(H + m) + \xi^\mu \mathcal{P}_\mu + \gamma^\nu Y^\mu_{\cdot\nu}\mathcal{P}_\mu + \tau. \tag{4.23}$$

Также из (4.23) видно, что: $Sp(Y^\mu) = Y^{\mu\nu\cdot}{}_{;\nu} = 0$.

При $\mu = \alpha$ выражение для оператора примет вид:

$$Y = \mathcal{P}_\mu \xi^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}_\mu \gamma^\mu Y^{\mu\nu\cdot}{}_{;\mu}\mathcal{P}_\nu + \xi^\mu \mathcal{P}_\mu + \gamma^\mu Y^\mu_{\cdot\mu}\mathcal{P}_\mu + \tau. \tag{4.24}$$

Также из (4.24) видно, что: $Sp(Y^\nu) = Y^{\nu\mu\cdot}{}_{;\mu} = 0$ и $Sp(Y) = Y^\mu_{\cdot\mu} = 0$.

Представим оператор второго порядка в следующем виде:

$$Y = (\xi^{\mu\nu} + \gamma^\alpha Y_{\alpha}^{\cdot\,\mu\nu})\mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu + X,$$

где X это оператор симметрии первого порядка.

В общем виде симметрия не изменится, если добавить часть:

$$\begin{gathered}([Z^\beta + Z^{\beta}_{\cdot\,\alpha}\gamma^\alpha])\mathcal{P}_\beta + [Z + Z_\alpha\gamma^\alpha])H = ([Z^\beta + Z^{\beta}_{\cdot\,\alpha}\gamma^\alpha])\mathcal{P}_\beta + [Z + Z_\alpha\gamma^\alpha])\gamma^\mu\mathcal{P}_\mu = \\ = Z^\beta\gamma^\mu\mathcal{P}_\beta\mathcal{P}_\mu + Z^{\beta}_{\cdot\,\alpha}\gamma^\alpha\gamma^\mu\mathcal{P}_\beta\mathcal{P}_\mu + Z\gamma^\mu\mathcal{P}_\mu + Z_\alpha\gamma^\alpha\gamma^\mu\mathcal{P}_\mu = \\ = \gamma^\mu Z^\beta\mathcal{P}_\beta\mathcal{P}_\mu + Z^{\beta}_{\cdot\,\alpha}(g^{\alpha\mu} - ise^{\alpha\mu\delta}\gamma_\delta)\mathcal{P}_\beta\mathcal{P}_\mu + \gamma^\mu Z\mathcal{P}_\mu + Z_\alpha(g^{\alpha\mu} - ise^{\alpha\mu\delta}\gamma_\delta)\mathcal{P}_\mu = \\ = Z^{\beta\mu}\mathcal{P}_\beta\mathcal{P}_\mu + \gamma_\delta(g^{\delta\mu}Z^\beta - isZ^{\beta}_{\cdot\,\alpha}e^{\alpha\mu\delta})\mathcal{P}_\beta\mathcal{P}_\mu + Z\mathcal{P}^\mu\mathcal{P}_\mu + \gamma_\delta(g^{\delta\mu}Z - isZ_\alpha e^{\alpha\mu\delta})\mathcal{P}_\mu.\end{gathered} \tag{4.25}$$

У оператора симметрии Y мы хотим представить матричную часть в виде (4.25), тогда получаем уравнение

$$g^{\delta\mu}Z^\beta - isZ^{\beta}_{\cdot\,\alpha}e^{\alpha\mu\delta} = Y^{\beta\mu\delta}. \tag{4.26}$$

Поменяем μ и δ местами

$$g^{\delta\mu}Z^\beta + isZ^{\beta}_{\cdot\,\alpha}e^{\alpha\mu\delta} = Y^{\beta\delta\mu}. \tag{4.27}$$

Сложим (4.26) и (4.27) и умножим на $g_{\delta\mu}$

$$\begin{gathered}1)\quad 2g^{\delta\mu}Z^\beta = Y^{\beta\delta\mu} + Y^{\beta\mu\delta}, \\ 6Z^\beta = Y^{\beta\delta}_{\cdot\,\cdot\,\delta} + Y^{\beta\mu}_{\cdot\,\cdot\,\mu} = 2Y^{\beta\mu}_{\cdot\,\cdot\,\mu}, \\ Z^\beta = \frac{1}{3}Y^{\beta\mu}_{\cdot\,\cdot\,\mu} = \frac{1}{3}Sp(Y^\beta) = 0,\end{gathered}$$

$$0 = \frac{1}{2}(Y^{\beta\delta\mu} + Y^{\beta\mu\delta}).$$

Вычтем (4.26) и (4.27) и умножим на $e_{\sigma\mu\delta}$

$$\begin{gathered}2)\quad 2isZ^{\beta}_{\cdot\,\alpha}e^{\alpha\mu\delta} = Y^{\beta\delta\mu} - Y^{\beta\mu\delta}, \\ Z^{\beta}_{\cdot\,\alpha}e^{\alpha\mu\delta} = -isY^{\beta[\delta\mu]}, \\ 2Z^{\beta}_{\cdot\,\sigma} = -isY^{\beta[\delta\mu]}e_{\sigma\mu\delta}, \\ Z^{\beta}_{\cdot\,\sigma} = \frac{is}{2}Y^{\beta[\delta\mu]}e_{\sigma\delta\mu},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{is}{2}Y^{\beta[\rho\varrho]}e^{\alpha\mu\delta}e_{\alpha\rho\varrho} = -isY^{\beta[\delta\mu]}, \\ \frac{1}{2}(Y^{\beta[\mu\delta]} - Y^{\beta[\delta\mu]}) = -Y^{\beta[\delta\mu]}.\end{gathered}$$

Матричную часть можно отбросить по эквивалентности тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$Y^{\beta\mu\nu} = -Y^{\beta\nu\mu},$$

при этом $\quad Z^\beta = 0, \quad Z^{\beta}_{\ \cdot\,\sigma} = \frac{is}{2} Y^{\beta[\delta\mu]} e_{\sigma\delta\mu}.$

Тогда выражение принимает вид:

$$\gamma^\alpha Y^{\mu\nu}_{\ \cdot\ \cdot\ \alpha} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu = \gamma_\alpha Y^{\mu\nu\alpha} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu = \frac{1}{2}\gamma_\alpha (Y^{\mu\nu\alpha} - Y^{\mu\alpha\nu}) \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu + \\ + \frac{1}{2}\gamma_\alpha (Y^{\mu\nu\alpha} + Y^{\mu\alpha\nu}) \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu \sim \gamma_\alpha \widetilde{Y}^{\mu\nu\alpha} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu.$$

Используя два свойства:

$$\widetilde{Y}^{\mu\nu\alpha} = \widetilde{Y}^{\mu\alpha\nu},$$

$$\widetilde{Y}^{\mu\nu\alpha} = \widetilde{Y}^{\nu\mu\alpha}.$$

Из определяющего уравнения находим симметричную часть:

$$\widetilde{Y}^{\mu\nu\alpha} + \widetilde{Y}^{\alpha\mu\nu} + \widetilde{Y}^{\nu\alpha\mu} = \widetilde{Y}^{\mu\nu\alpha} + \widetilde{Y}^{\mu\alpha\nu} + \widetilde{Y}^{\nu\mu\alpha} = \widetilde{Y}^{\mu\nu\alpha} + \widetilde{Y}^{\mu\nu\alpha} + \widetilde{Y}^{\mu\nu\alpha} = 3\widetilde{Y}^{\mu\nu\alpha} = 0.$$

Таким образом, учитывая эквивалентность, мы отбрасываем антисимметричную часть $(Y^{\mu\nu\alpha} - Y^{\mu\alpha\nu})$, а симметричная часть с учетом определяющего уравнения $Y^{(\mu\nu\alpha)} = 0$ равна нулю. Следовательно, нетривиальные симметрии находятся в классе скалярных операторов второго порядка.

Лемма 4.4. *Из уравнения (4.5) следует*

$$\bar{\Psi}^\mu = 0, \tag{4.28}$$

$$\xi^{\sigma\rho}{}_{;\delta} + \xi^{\rho\sigma}{}_{;\delta} = 0. \tag{4.29}$$

Доказательство. Подставим (4.8) и (4.9) в уравнение (4.5) и разложим его по базису (2.12) с помощью известных формул (2.13)–(2.15):

Левая часть:

$$-i\gamma^\delta (Y^{\sigma\rho}{}_{;\delta} + Y^{\rho\sigma}{}_{;\delta}) + i([Y^{\mu\rho}{}_{;\mu}, \gamma^\sigma] + [Y^{\mu\sigma}{}_{;\mu}, \gamma^\rho]) + ([Y^\rho, \gamma^\sigma] + [Y^\sigma, \gamma^\rho]) = \\ = -i\gamma^\delta (\xi^{\sigma\rho}{}_{;\delta} + \gamma^\alpha Y^{\sigma\rho}{}_{\alpha;\delta} + \xi^{\rho\sigma}{}_{;\delta} + \gamma^\alpha Y^{\rho\sigma}{}_{\alpha;\delta}) + i([\xi^{\mu\rho}{}_{;\mu} + \gamma^\alpha Y^{\mu\rho}{}_{\alpha;\mu}, \gamma^\sigma] + [\xi^{\mu\sigma}{}_{;\mu} + \gamma^\alpha Y^{\mu\sigma}{}_{\alpha;\mu}, \gamma^\rho]) + \\ + ([\xi^\rho + \gamma^\alpha Y^{\rho}_{\ \cdot\,\alpha}, \gamma^\sigma] + [\xi^\sigma + \gamma^\alpha Y^{\sigma}_{\ \cdot\,\alpha}, \gamma^\rho]) = -i\gamma^\delta \xi^{\sigma\rho}{}_{;\delta} - i\gamma^\delta \xi^{\rho\sigma}{}_{;\delta}.$$

Правая часть:

$$i(\Psi^{\nu\sigma}{}_{;\nu}\gamma^{\rho}+\Psi^{\nu\rho}{}_{;\nu}\gamma^{\sigma})+(\Psi^{\sigma}\gamma^{\rho}+\Psi^{\rho}\gamma^{\sigma})+m(\Psi^{\sigma\rho}+\Psi^{\rho\sigma})=$$

$$=i(\Psi^{\nu\sigma}{}_{\alpha;\nu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\rho}+\bar{\Psi}^{\nu\sigma}{}_{;\nu}\gamma^{\rho}+\Psi^{\nu\rho}{}_{\alpha;\nu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\sigma}+\bar{\Psi}^{\nu\rho}{}_{;\nu}\gamma^{\sigma})+(\Psi^{\sigma}_{.\alpha}\gamma^{\alpha}\gamma^{\rho}+\bar{\Psi}^{\sigma}\gamma^{\rho}+\Psi^{\rho}_{.\alpha}\gamma^{\alpha}\gamma^{\sigma}+\bar{\Psi}^{\rho}\gamma^{\sigma})+$$

$$+m(\Psi^{\sigma\rho}{}_{\alpha}\gamma^{\alpha}+\bar{\Psi}^{\sigma\rho}+\Psi^{\rho\sigma}{}_{\alpha}\gamma^{\alpha}+\bar{\Psi}^{\rho\sigma})=\Psi^{\sigma}_{.\alpha}\gamma^{\alpha}\gamma^{\rho}+\bar{\Psi}^{\sigma}\gamma^{\rho}+\Psi^{\rho}_{.\alpha}\gamma^{\alpha}\gamma^{\sigma}+\bar{\Psi}^{\rho}\gamma^{\sigma}=$$

$$=\Psi^{\sigma}_{.\alpha}(g^{\alpha\rho}-ise^{\alpha\rho\tau}\gamma_{\tau})+\bar{\Psi}^{\sigma}\gamma^{\rho}+\Psi^{\rho}_{.\alpha}(g^{\alpha\sigma}-ise^{\alpha\sigma\tau}\gamma_{\tau})+\bar{\Psi}^{\rho}\gamma^{\sigma}=$$

$$=\Psi^{\sigma\rho}-is\Psi^{\sigma}_{.\alpha}e^{\alpha\rho\tau}\gamma_{\tau}+\bar{\Psi}^{\sigma}\gamma^{\rho}+\Psi^{\rho\sigma}-is\Psi^{\rho}_{.\alpha}e^{\alpha\sigma\tau}\gamma_{\tau}+\bar{\Psi}^{\rho}\gamma^{\sigma}.$$

Приравнивая, получаем:

$$-i\gamma^{\delta}\xi^{\sigma\rho}{}_{;\delta}-i\gamma^{\delta}\xi^{\rho\sigma}{}_{;\delta}=\Psi^{\sigma\rho}-is\Psi^{\sigma}_{.\alpha}e^{\alpha\rho\tau}\gamma_{\tau}+\bar{\Psi}^{\sigma}\gamma^{\rho}+\Psi^{\rho\sigma}-is\Psi^{\rho}_{.\alpha}e^{\alpha\sigma\tau}\gamma_{\tau}+\bar{\Psi}^{\rho}\gamma^{\sigma}. \tag{4.30}$$

Из (4.30) мы также можем заметить, что $\Psi^{\mu\nu}=-\Psi^{\nu\mu}$ $(Sp(\Psi)=\Psi^{\mu}_{.\mu}=0)$ и получаем выражение:

$$-i\gamma^{\delta}\xi^{\sigma\rho}{}_{;\delta}-i\gamma^{\delta}\xi^{\rho\sigma}{}_{;\delta}=-is\Psi^{\sigma}_{.\alpha}e^{\alpha\rho\tau}\gamma_{\tau}+\bar{\Psi}^{\sigma}\gamma^{\rho}-is\Psi^{\rho}_{.\alpha}e^{\alpha\sigma\tau}\gamma_{\tau}+\bar{\Psi}^{\rho}\gamma^{\sigma},$$

$$\gamma_{\tau}g^{\tau\delta}\xi^{\sigma\rho}{}_{;\delta}+\gamma_{\tau}g^{\tau\delta}\xi^{\rho\sigma}{}_{;\delta}=s\Psi^{\sigma}_{.\alpha}e^{\alpha\rho\tau}\gamma_{\tau}+i\bar{\Psi}^{\sigma}\gamma_{\tau}g^{\tau\rho}+s\Psi^{\rho}_{.\alpha}e^{\alpha\sigma\tau}\gamma_{\tau}+i\bar{\Psi}^{\rho}\gamma_{\tau}g^{\tau\sigma},$$

$$g^{\tau\alpha}(\xi^{\sigma\rho}{}_{;\alpha}+\xi^{\rho\sigma}{}_{;\alpha})=s(\Psi^{\sigma}_{.\alpha}e^{\alpha\rho\tau}+\Psi^{\rho}_{.\alpha}e^{\alpha\sigma\tau})+i(\bar{\Psi}^{\sigma}g^{\tau\rho}+\bar{\Psi}^{\rho}g^{\tau\sigma}). \tag{4.31}$$

Умножим (4.31) на $g_{\tau\delta}$, на $\varepsilon_{\kappa\rho\tau}$, на $\varepsilon_{\sigma\rho\tau}$, на $g_{\tau\rho}$ и на $g_{\sigma\rho}$:

1. $$\xi^{\sigma\rho}{}_{;\delta}+\xi^{\rho\sigma}{}_{;\delta}=s(\Psi^{\sigma}_{.\alpha}e^{\alpha\rho}_{..\delta}+\Psi^{\rho}_{.\alpha}e^{\alpha\sigma}_{..\delta})+i(\bar{\Psi}^{\sigma}\delta^{\rho}_{\delta}+\bar{\Psi}^{\rho}\delta^{\sigma}_{\delta}),$$

$$\xi^{\sigma\rho;\delta}+\xi^{\rho\sigma;\delta}=s(\Psi^{\sigma}_{.\alpha}e^{\alpha\rho\delta}+\Psi^{\rho}_{.\alpha}e^{\alpha\sigma\delta})+i(\bar{\Psi}^{\sigma}g^{\rho\delta}+\bar{\Psi}^{\rho}g^{\sigma\delta}). \tag{4.32}$$

Следствия из уравнения (4.32):

$$\xi^{\sigma\rho}_{..;\delta}+\xi^{\rho\sigma}_{..;\delta}=i(\bar{\Psi}^{\sigma}\delta^{\rho}_{\delta}+\bar{\Psi}^{\rho}\delta^{\sigma}_{\delta}), \tag{4.33}$$

$$\xi^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{;\delta}=i\bar{\Psi}^{\delta}. \tag{4.34}$$

2. $$\xi^{\sigma\rho}{}_{;\rho}+\xi^{\rho\sigma}{}_{;\rho}=s\Psi^{\rho}_{.\alpha}e^{\alpha\sigma}_{..\rho}+i(3\bar{\Psi}^{\sigma}+\bar{\Psi}^{\sigma}),$$

$$\xi^{\tau\rho}_{..;\rho}+\xi^{\rho\tau}_{..;\rho}=-s\Psi_{\rho\alpha}e^{\alpha\rho\tau}+4i\bar{\Psi}^{\tau}. \tag{4.35}$$

3. $$\xi^{\sigma\ \cdot\ ;\tau}_{\ \cdot\ \sigma} + \xi^{\rho\ \cdot\ ;\tau}_{\ \cdot\ \rho} = s(\Psi_{\rho\alpha}e^{\alpha\rho\tau} + \Psi_{\sigma\alpha}e^{\alpha\sigma\tau}) + i(\bar{\Psi}^{\tau} + \bar{\Psi}^{\tau}),$$

$$\xi^{\rho}_{\ \cdot\ \rho;\tau} = s\Psi_{\rho\alpha}e^{\alpha\rho}_{\ \cdot\ \cdot\ \tau} + i\bar{\Psi}_{\tau}. \tag{4.36}$$

Сложим уравнения (4.35) и (4.36):

$$\xi^{\tau\rho}_{\ \cdot\ \cdot\ ;\rho} + \xi^{\rho\tau}_{\ \cdot\ \cdot\ ;\rho} + \xi^{\rho\ \cdot\ ;\tau}_{\ \cdot\ \rho} = 5i\bar{\Psi}^{\tau}.$$

Откуда:

$$\bar{\Psi}^{\tau} = -\frac{i}{5}(\xi^{\tau\rho}_{\ \cdot\ \cdot\ ;\rho} + \xi^{\rho\tau}_{\ \cdot\ \cdot\ ;\rho} + \xi^{\rho\ \cdot\ ;\tau}_{\ \cdot\ \rho}). \tag{4.37}$$

Умножим (4.32) на $\varepsilon_{\mu\rho\delta}$ и подставим (4.37):

$$e_{\mu\rho\delta}(\xi^{\sigma\rho;\delta} + \xi^{\rho\sigma;\delta}) = se_{\mu\rho\delta}(\Psi^{\sigma}_{\ \cdot\alpha}e^{\alpha\rho\delta} + \Psi^{\rho}_{\ \cdot\alpha}e^{\alpha\sigma\delta}) + ie_{\mu\rho\delta}(\bar{\Psi}^{\sigma}g^{\rho\delta} + \bar{\Psi}^{\rho}g^{\sigma\delta}),$$

$$e_{\mu\rho\delta}(\xi^{\sigma\rho;\delta} + \xi^{\rho\sigma;\delta}) = s(2\Psi^{\sigma}_{\ \cdot\mu} + \Psi^{\sigma}_{\ \cdot\mu} - \Psi^{\rho}_{\ \cdot\rho}) + ie_{\mu\rho\delta}\bar{\Psi}^{\rho}g^{\sigma\delta},$$

$$e_{\mu\rho\delta}(\xi^{\sigma\rho;\delta} + \xi^{\rho\sigma;\delta}) = 3s\Psi^{\sigma}_{\ \cdot\mu} + \frac{1}{5}e_{\mu\rho}^{\ \cdot\ \cdot\ \sigma}(\xi^{\rho\nu}_{\ \cdot\ \cdot\ ;\nu} + \xi^{\nu\rho}_{\ \cdot\ \cdot\ ;\nu} + \xi^{\nu\ \cdot\ ;\rho}_{\ \cdot\ \nu}).$$

Откуда:

$$\Psi^{\sigma}_{\ \cdot\mu} = \frac{s}{3}e_{\mu\rho\delta}(\xi^{\sigma\rho;\delta} + \xi^{\rho\sigma;\delta}) - \frac{s}{15}e_{\mu\rho}^{\ \cdot\ \cdot\ \sigma}(\xi^{\rho\nu}_{\ \cdot\ \cdot\ ;\nu} + \xi^{\nu\rho}_{\ \cdot\ \cdot\ ;\nu} + \xi^{\nu\ \cdot\ ;\rho}_{\ \cdot\ \nu}).$$

Подставим в (4.35) найденную $\bar{\Psi}^{\mu}$:

$$\xi^{\tau\rho}_{\ \cdot\ \cdot\ ;\rho} + \xi^{\rho\tau}_{\ \cdot\ \cdot\ ;\rho} = \frac{4}{5}(\xi^{\tau\rho}_{\ \cdot\ \cdot\ ;\rho} + \xi^{\rho\tau}_{\ \cdot\ \cdot\ ;\rho} + \xi^{\rho\ \cdot\ ;\tau}_{\ \cdot\ \rho}).$$

Откуда:

$$\xi^{\tau\rho}_{\ \cdot\ \cdot\ ;\rho} + \xi^{\rho\tau}_{\ \cdot\ \cdot\ ;\rho} = 4\xi^{\rho\ \cdot\ ;\tau}_{\ \cdot\ \rho}. \tag{4.38}$$

Распишем (4.38) по индексам, а значения ξ будем брать из (4.33) и (4.34). Для начала берем $\tau = 0$:

$$\xi^{00}_{\ \cdot\ \cdot\ ;0} + \xi^{00}_{\ \cdot\ \cdot\ ;0} + \xi^{01}_{\ \cdot\ \cdot\ ;1} + \xi^{10}_{\ \cdot\ \cdot\ ;1} + \xi^{02}_{\ \cdot\ \cdot\ ;2} + \xi^{20}_{\ \cdot\ \cdot\ ;2} = 4(\xi^{0\ \cdot\ ;0}_{\ \cdot\ 0} + \xi^{1\ \cdot\ ;0}_{\ \cdot\ 1} + \xi^{2\ \cdot\ ;0}_{\ \cdot\ 2}),$$

$$2i\bar{\Psi}^{0} + i\bar{\Psi}^{0} + i\bar{\Psi}^{0} = 4(i\bar{\Psi}^{0} + i\bar{\Psi}^{0} + i\bar{\Psi}^{0}).$$

Откуда $\bar\Psi^0 = 0$. Аналогичные результаты получаются и при $\tau = 1$, и при $\tau = 2$. Откуда следует, что $\bar\Psi^\mu = 0$.

$$\xi^{10}{}_{..;0} + \xi^{01}{}_{..;0} + \xi^{11}{}_{..;1} + \xi^{11}{}_{..;1} + \xi^{12}{}_{..;2} + \xi^{21}{}_{..;2} = 4(\xi^{0\,.}{}_{.\,0}{}^{;1} + \xi^{1\,.}{}_{.\,1}{}^{;1} + \xi^{2\,.}{}_{.\,2}{}^{;1}),$$

$$2i\bar\Psi^1 + i\bar\Psi^1 + i\bar\Psi^1 = 4(i\bar\Psi^1 + i\bar\Psi^1 + i\bar\Psi^1),$$

$$\xi^{20}{}_{..;0} + \xi^{02}{}_{..;0} + \xi^{21}{}_{..;1} + \xi^{12}{}_{..;1} + \xi^{22}{}_{..;2} + \xi^{22}{}_{..;2} = 4(\xi^{0\,.}{}_{.\,0}{}^{;2} + \xi^{1\,.}{}_{.\,1}{}^{;2} + \xi^{2\,.}{}_{.\,2}{}^{;2}),$$

$$2i\bar\Psi^2 + i\bar\Psi^2 + i\bar\Psi^2 = 4(i\bar\Psi^2 + i\bar\Psi^2 + i\bar\Psi^2).$$

□

Лемма 4.5. *Из уравнения (4.6) следует*

$$\bar\Psi_0 = \frac{1}{3}(\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu\mu} - i\xi^{\mu}_{;\mu}), \quad \bar\Psi_0^\sigma = 0, \tag{4.39}$$

$$\varphi_\alpha = -\frac{is}{4}(\xi^{\mu\sigma}{}_{;\nu\mu} e_{\alpha\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\nu} - i\xi^{\sigma;\beta} e_{\alpha\sigma\beta} + \frac{1}{2}\xi_{\rho\delta} e_{\alpha}^{\cdot\,\rho\delta} R - 2\xi^{\mu\nu} R_{\mu\rho} e_{\alpha\,.\,\nu}^{\;\rho}), \tag{4.40}$$

$$\xi^{\sigma;\beta} + \xi^{\beta;\sigma} = \frac{2}{3}(\xi^{\mu}_{;\mu} + i\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu\mu}) g^{\beta\sigma} - i\xi^{\mu\sigma}{}_{;\nu\mu} g^{\beta\nu} - i\xi^{\mu\beta}{}_{;\nu\mu} g^{\sigma\nu}. \tag{4.41}$$

Доказательство. Подставим (4.8) и (4.9) в уравнение (4.6) и разложим его по базису (2.12) с помощью известных формул (2.13)–(2.15):

Правая часть:

$$-\Psi^{\nu\sigma}\gamma^\mu[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\nu] - \Psi^{\sigma\delta}\gamma^\mu[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\delta] - \Psi^{\delta\sigma}\gamma^\nu[\mathcal{P}_\nu, \mathcal{P}_\delta] - \Psi^{\delta\mu}\gamma^\sigma[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\delta] + im\Psi^{\nu\sigma}{}_{;\nu} - m\Psi^\sigma + \bar\Psi\gamma^\sigma =$$
$$= -(\Psi^{\nu\sigma}{}_{\alpha}\gamma^\alpha + \bar\Psi^{\nu\sigma})\gamma^\mu[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\nu] - (\Psi^{\sigma\delta}{}_{\alpha}\gamma^\alpha + \bar\Psi^{\sigma\delta})\gamma^\mu[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\delta] - (\Psi^{\delta\sigma}{}_{\alpha}\gamma^\alpha + \bar\Psi^{\delta\sigma})\gamma^\nu[\mathcal{P}_\nu, \mathcal{P}_\delta] -$$
$$-(\Psi^{\delta\mu}{}_{\alpha}\gamma^\alpha + \bar\Psi^{\delta\mu})\gamma^\sigma[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\delta] + im(\Psi^{\nu\sigma}{}_{\alpha;\nu}\gamma^\alpha + \bar\Psi^{\nu\sigma}{}_{;\nu}) - m(\Psi^\sigma_{.\alpha}\gamma^\alpha + \bar\Psi^\sigma) + (\bar\Psi^\mu_0\gamma_\mu + \bar\Psi_0)\gamma^\sigma =$$
$$= (\bar\Psi^\mu_0\gamma_\mu + \bar\Psi_0)\gamma^\sigma - m(\Psi^\sigma_{.\alpha}\gamma^\alpha + \bar\Psi^\sigma) = \bar\Psi_{\mu 0}\,(g^{\mu\sigma} - ise^{\mu\sigma\beta}\gamma_\beta) + \bar\Psi_0\gamma^\sigma - m(\Psi^\sigma_{.\alpha}\gamma^\alpha + \bar\Psi^\sigma) =$$
$$= \bar\Psi^\sigma_0 - is\bar\Psi_{\mu 0} e^{\mu\sigma\beta}\gamma_\beta + \bar\Psi_0\gamma^\sigma - m(\Psi^\sigma_{.\alpha}\gamma^\alpha + \bar\Psi^\sigma).$$

Левая часть:

$$Y^{\sigma\nu}\gamma^\delta[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]+\gamma^\delta Y^{\mu\sigma}{}_{;\delta\mu}-[Y^{\nu\sigma},\gamma^\mu][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\nu]-[Y^{\delta\mu},\gamma^\sigma][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]-[Y^{\sigma\nu},\gamma^\delta][\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]-$$
$$-[Y^{\sigma\delta},\gamma^\mu][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]-[Y^{\delta\sigma},\gamma^\nu][\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]+\gamma^\delta[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]Y^{\mu\sigma}+\gamma^\delta[Y^\sigma,\mathcal{P}_\delta]+[\chi,\gamma^\sigma]=$$
$$=(\xi^{\sigma\nu}+\gamma^\alpha Y^{\sigma\nu}{}_\alpha)\gamma^\delta[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]+\gamma^\delta(\xi^{\mu\sigma}{}_{;\delta\mu}+\gamma^\alpha Y^{\mu\sigma}{}_{\alpha;\delta\mu})-$$
$$-[\xi^{\nu\sigma}+\gamma^\alpha Y^{\nu\sigma}{}_\alpha,\gamma^\mu][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\nu]-[\xi^{\delta\mu}+\gamma^\alpha Y^{\delta\mu}{}_\alpha,\gamma^\sigma][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]-[\xi^{\sigma\nu}+\gamma^\alpha Y^{\sigma\nu}{}_\alpha,\gamma^\delta][\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]-$$
$$-[\xi^{\sigma\delta}+\gamma^\alpha Y^{\sigma\delta}{}_\alpha,\gamma^\mu][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]-[\xi^{\delta\sigma}+\gamma^\alpha Y^{\delta\sigma}{}_\alpha,\gamma^\nu][\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]+$$
$$+\gamma^\delta[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta](\xi^{\mu\sigma}+\gamma^\alpha Y^{\mu\sigma}{}_\alpha)+\gamma^\delta[\xi^\sigma+\gamma^\alpha Y^\sigma_{\cdot\alpha},\mathcal{P}_\delta]+[\varphi+\varphi^\alpha\gamma_\alpha,\gamma^\sigma]=\xi^{\sigma\nu}\gamma^\delta[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]+\gamma^\delta\xi^{\mu\sigma}{}_{;\delta\mu}-$$
$$-[\xi^{\nu\sigma},\gamma^\mu][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\nu]-[\xi^{\delta\mu},\gamma^\sigma][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]-[\xi^{\sigma\nu},\gamma^\delta][\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]-[\xi^{\sigma\delta},\gamma^\mu][\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]-[\xi^{\delta\sigma},\gamma^\nu][\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]+$$
$$+\gamma^\delta[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]\xi^{\mu\sigma}+\gamma^\delta[\xi^\sigma+\gamma^\alpha Y^\sigma_{\cdot\alpha},\mathcal{P}_\delta]+[\varphi+\varphi^\alpha\gamma_\alpha,\gamma^\sigma]=$$
$$=\xi^{\sigma\nu}\gamma^\delta[\mathcal{P}_\nu,\mathcal{P}_\delta]+\gamma^\delta\xi^{\mu\sigma}{}_{;\delta\mu}+\gamma^\delta[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\delta]\xi^{\mu\sigma}+\gamma^\delta[\xi^\sigma,\mathcal{P}_\delta]+\varphi_\alpha[\gamma^\alpha,\gamma^\sigma]=$$
$$=\xi^{\sigma\nu}\gamma^\delta(-\frac{i}{4}\,s\,R^{\cdot\,\cdot\,\rho\beta}_{\nu\delta\,\cdot\,\cdot}e_{\rho\beta\varrho}\gamma^\varrho-iF_{\nu\delta})+\gamma^\delta\xi^{\mu\sigma}{}_{;\delta\mu}+\gamma^\delta(-\frac{i}{4}\,s\,R^{\cdot\,\cdot\,\rho\beta}_{\mu\delta\,\cdot\,\cdot}e_{\rho\beta\varrho}\gamma^\varrho-iF_{\mu\delta})\xi^{\mu\sigma}-$$
$$-i\gamma^\delta\xi^\sigma_{\cdot;\delta}+\varphi_\alpha(-2ise^{\alpha\sigma\beta}\gamma_\beta)=-\xi^{\sigma\nu}\frac{i}{4}\,s\,R^{\cdot\,\cdot\,\rho\beta}_{\nu\delta\,\cdot\,\cdot}e_{\rho\beta\varrho}(g^{\delta\varrho}-ise^{\delta\varrho\beta}\gamma_\beta)-i\xi^{\sigma\nu}\gamma^\delta F_{\nu\delta}+\gamma^\delta\xi^{\mu\sigma}{}_{;\delta\mu}-$$
$$-\xi^{\mu\sigma}\frac{i}{4}\,s\,R^{\cdot\,\cdot\,\rho\beta}_{\mu\delta\,\cdot\,\cdot}e_{\rho\beta\varrho}(g^{\delta\varrho}-ise^{\delta\varrho\beta}\gamma_\beta)-i\gamma^\delta\xi^{\mu\sigma}F_{\mu\delta}-i\gamma^\delta\xi^\sigma_{\cdot;\delta}-2is\varphi_\alpha e^{\alpha\sigma\beta}\gamma_\beta=$$
$$=-\xi^{\sigma\nu}\frac{i}{4}\,s\,R^{\cdot\,\varrho\rho\beta}_{\nu\,\cdot\,\cdot\,\cdot}e_{\rho\beta\varrho}-\frac{1}{4}\xi^{\sigma\nu}R^{\cdot\,\cdot\,\rho\beta}_{\nu\delta\,\cdot\,\cdot}\delta^\delta_\rho\gamma_\beta-i\xi^{\sigma\nu}\gamma^\delta F_{\nu\delta}+\gamma^\delta\xi^{\mu\sigma}{}_{;\delta\mu}-$$
$$-\xi^{\mu\sigma}\frac{i}{4}\,s\,R^{\cdot\,\varrho\rho\beta}_{\mu\,\cdot\,\cdot\,\cdot}e_{\rho\beta\varrho}-\frac{1}{4}\xi^{\mu\sigma}R^{\cdot\,\cdot\,\rho\beta}_{\mu\delta\,\cdot\,\cdot}\delta^\delta_\rho\gamma_\beta-i\gamma^\delta\xi^{\mu\sigma}F_{\mu\delta}-i\gamma^\delta\xi^\sigma_{\cdot;\delta}-2is\varphi_\alpha e^{\alpha\sigma\beta}\gamma_\beta.$$

Приравнивая, получаем, при этом добавляя член, возникающий из двойного коммутатора обобщённого импульса:

$$-\xi^{\sigma\nu}\frac{i}{4}\,s\,R^{\cdot\,\varrho\rho\beta}_{\nu\,\cdot\,\cdot\,\cdot}e_{\varrho\rho\beta}-\frac{1}{4}\xi^{\sigma\nu}R^{\cdot\,\cdot\,\rho\beta}_{\nu\rho\,\cdot\,\cdot}\gamma_\beta-i\xi^{\sigma\nu}\gamma^\delta F_{\nu\delta}+\gamma^\delta\xi^{\mu\sigma}{}_{;\delta\mu}-\xi^{\mu\sigma}\frac{i}{4}\,s\,R^{\cdot\,\varrho\rho\beta}_{\mu\,\cdot\,\cdot\,\cdot}e_{\varrho\rho\beta}- \tag{4.42}$$
$$-\frac{1}{4}\xi^{\mu\sigma}R^{\cdot\,\cdot\,\rho\beta}_{\mu\rho\,\cdot\,\cdot}\gamma_\beta-i\gamma^\delta\xi^{\mu\sigma}F_{\mu\delta}-i\gamma^\delta\xi^\sigma_{\cdot;\delta}-2is\varphi_\alpha e^{\alpha\sigma\beta}\gamma_\beta+\xi^{\mu\nu}R^{\sigma\,\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,\nu\delta\mu}\gamma^\delta=$$
$$=\bar\Psi^\sigma_0-is\bar\Psi_{\mu0}e^{\mu\sigma\beta}\gamma_\beta+\bar\Psi_0\gamma^\sigma-m(\Psi^\sigma_{\cdot\alpha}\gamma^\alpha+\bar\Psi^\sigma).$$

Члены без γ-матриц:

$$-\xi^{\sigma\nu}\frac{i}{4}\,s\,R^{\cdot\,\varrho\rho\beta}_{\nu\,\cdot\,\cdot\,\cdot}e_{\varrho\rho\beta}-\xi^{\mu\sigma}\frac{i}{4}\,s\,R^{\cdot\,\varrho\rho\beta}_{\mu\,\cdot\,\cdot\,\cdot}e_{\varrho\rho\beta}=\bar\Psi^\sigma_0-m\bar\Psi^\sigma. \tag{4.43}$$

Распишем тензор Римана по формуле (2.4) и подставим в (4.43):

$$-\xi^{\sigma\nu}\frac{i}{4}\,s\,(R_{\nu\rho}g_{\varrho\beta}-R_{\nu\beta}g_{\varrho\rho}+R_{\varrho\beta}g_{\nu\rho}-R_{\varrho\rho}g_{\nu\beta}+\frac{R}{2}(g_{\nu\beta}g_{\varrho\rho}-g_{\nu\rho}g_{\varrho\beta}))e^{\varrho\rho\beta}-$$
$$-\xi^{\mu\sigma}\frac{i}{4}\,s\,(R_{\mu\rho}g_{\varrho\beta}-R_{\mu\beta}g_{\varrho\rho}+R_{\varrho\beta}g_{\mu\rho}-R_{\varrho\rho}g_{\mu\beta}+\frac{R}{2}(g_{\mu\beta}g_{\varrho\rho}-g_{\mu\rho}g_{\varrho\beta}))e^{\varrho\rho\beta}=\bar\Psi^\sigma_0-m\bar\Psi^\sigma.$$

Учитывая, что свёртка симметричного и антисимметричного тензора равна нулю, а также $R_{\mu\nu}=R_{\nu\mu}$, получим простое равенство:

$$\bar\Psi^\sigma_0=m\bar\Psi^\sigma=0.$$

Тогда выражение (4.42) примет вид :

$$-\frac{1}{4}\xi^{\sigma\nu}R_{\nu\rho\,\cdot\,\cdot}^{\,\cdot\,\cdot\,\rho\beta}\gamma_\beta-i\xi^{\sigma\nu}\gamma_\beta F_{\nu\delta}g^{\beta\delta}+\xi^{\mu\sigma}{}_{;\delta\mu}\gamma_\beta g^{\beta\delta}-\frac{1}{4}\xi^{\mu\sigma}R_{\mu\rho\,\cdot\,\cdot}^{\,\cdot\,\cdot\,\rho\beta}\gamma_\beta-i\xi^{\mu\sigma}F_{\mu\delta}\gamma_\beta g^{\beta\delta}-$$
$$-i\xi^{\sigma}_{\cdot\,;\delta}\gamma_\beta g^{\beta\delta}-2is\varphi_\alpha e^{\alpha\sigma\beta}\gamma_\beta+\xi^{\mu\nu}R^{\sigma}_{\cdot\,\nu\delta\mu}{}^{\cdot\,\cdot\,\cdot}\gamma_\beta g^{\beta\delta}=-is\bar{\Psi}_{\mu0}e^{\mu\sigma\beta}\gamma_\beta+\bar{\Psi}_0\gamma_\beta g^{\beta\sigma}-m\Psi^{\sigma}_{\cdot\alpha}\gamma_\beta g^{\beta\alpha},$$

$$-\frac{1}{4}\xi^{\sigma\nu}R_{\nu\rho\,\cdot\,\cdot}^{\,\cdot\,\cdot\,\rho\beta}-i\xi^{\sigma\nu}F_{\nu\delta}g^{\beta\delta}+\xi^{\mu\sigma}{}_{;\delta\mu}g^{\beta\delta}-\frac{1}{4}\xi^{\mu\sigma}R_{\mu\rho\,\cdot\,\cdot}^{\,\cdot\,\cdot\,\rho\beta}-i\xi^{\mu\sigma}F_{\mu\delta}g^{\beta\delta}-$$
$$-i\xi^{\sigma}_{;\delta}g^{\beta\delta}-2is\varphi_\alpha e^{\alpha\sigma\beta}+\xi^{\mu\nu}R^{\sigma}_{\cdot\,\nu\delta\mu}{}^{\cdot\,\cdot\,\cdot}g^{\beta\delta}=-is\bar{\Psi}_{\mu0}e^{\mu\sigma\beta}+\bar{\Psi}_0 g^{\beta\sigma}-m\Psi^{\sigma}_{\cdot\alpha}g^{\beta\alpha}. \tag{4.44}$$

Умножим выражение (4.44) на $g_{\beta\sigma}$:

$$-\frac{1}{4}\xi^{\sigma\nu}R_{\nu\rho\,\cdot\,\sigma}^{\,\cdot\,\cdot\,\rho}-i\xi^{\sigma\nu}F_{\nu\sigma}+\xi^{\mu\sigma}{}_{;\sigma\mu}-\frac{1}{4}\xi^{\mu\sigma}R_{\mu\rho\,\cdot\,\sigma}^{\,\cdot\,\cdot\,\rho}-i\xi^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma}-i\xi^{\sigma}_{;\sigma}+\xi^{\mu\nu}R^{\sigma}_{\cdot\,\nu\sigma\mu}{}^{\cdot\,\cdot\,\cdot}=3\bar{\Psi}_0.$$

Посчитаем значение тензора кривизны вида:

$$R_{\nu\mu\,\cdot\,\beta}^{\,\cdot\,\cdot\,\mu}=R_{\nu\mu\alpha\beta}g^{\alpha\mu}=R_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}g^{\alpha\mu}-R_{\nu\beta}g_{\mu\alpha}g^{\alpha\mu}+R_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}g^{\alpha\mu}-R_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g^{\alpha\mu}+$$
$$+\frac{R}{2}(g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha}g^{\alpha\mu}-g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}g^{\alpha\mu})=R_{\nu\alpha}\delta^\alpha_\beta-3R_{\nu\beta}+R_{\mu\beta}\delta^\mu_\nu-R^\mu_\mu g_{\nu\beta}+\frac{R}{2}(3g_{\nu\beta}-g_{\mu\beta}\delta^\mu_\nu)=$$
$$=R_{\nu\beta}-3R_{\nu\beta}+R_{\nu\beta}-R^\mu_\mu g_{\nu\beta}+\frac{R}{2}(3g_{\nu\beta}-g_{\nu\beta})=-R_{\nu\beta},$$

$$R^{\alpha}_{\cdot\,\mu\alpha\beta}{}^{\cdot\,\cdot\,\cdot}=R_{\nu\mu\alpha\beta}g^{\alpha\nu}=R_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}g^{\alpha\nu}-R_{\nu\beta}g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}+R_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}g^{\alpha\nu}-R_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g^{\alpha\nu}+$$
$$+\frac{R}{2}(g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}-g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}g^{\alpha\nu})=Rg_{\mu\beta}-R_{\mu\beta}+3R_{\mu\beta}-R_{\mu\beta}+\frac{R}{2}(g_{\mu\beta}-3g_{\mu\beta})=R_{\mu\beta}.$$

Откуда находим:

$$\bar{\Psi}_0=\frac{1}{12}(\xi^{\sigma\nu}R_{\nu\sigma}+\xi^{\mu\sigma}R_{\mu\sigma})-\frac{1}{3}(i\xi^{\sigma}_{;\sigma}-\xi^{\mu\sigma}{}_{;\sigma\mu}-\xi^{\mu\nu}R_{\nu\mu})=-\frac{1}{3}(i\xi^{\sigma}_{;\sigma}-\xi^{\mu\sigma}{}_{;\sigma\mu}).$$

Перепишем выражение (4.44) в упрощенном виде:

$$\frac{1}{4}(\xi^{\sigma\mu}+\xi^{\mu\sigma})R_{\mu\nu}g^{\beta\nu}-i(\xi^{\sigma\mu}+\xi^{\mu\sigma})F_{\mu\nu}g^{\beta\nu}+\xi^{\mu\sigma}{}_{;\nu\mu}g^{\beta\nu}-i\xi^{\sigma;\beta}-2is\varphi_\mu e^{\mu\sigma\beta}+$$
$$+\xi^{\mu\nu}R^{\sigma}_{\cdot\,\nu\delta\mu}{}^{\cdot\,\cdot\,\cdot}g^{\beta\delta}=\bar{\Psi}_0g^{\beta\sigma}-is\bar{\Psi}_{\mu0}e^{\mu\sigma\beta}-m\Psi^{\sigma\beta},$$

$$\xi^{\mu\sigma}{}_{;\nu\mu}g^{\beta\nu}-i\xi^{\sigma;\beta}-2is\varphi_\mu e^{\mu\sigma\beta}+\xi^{\mu\nu}R^{\sigma}_{\cdot\,\nu\delta\mu}{}^{\cdot\,\cdot\,\cdot}g^{\beta\delta}=\bar{\Psi}_0g^{\beta\sigma}. \tag{4.45}$$

Умножим (4.45) на $e_{\alpha\sigma\beta}$:

$$\xi^{\mu\sigma}{}_{;\nu\mu}e_{\alpha\sigma\beta}g^{\beta\nu}-i\xi^{\sigma;\beta}e_{\alpha\sigma\beta}-4is\varphi_\alpha+\xi^{\mu\nu}R^{\sigma}_{\cdot\,\nu\delta\mu}{}^{\cdot\,\cdot\,\cdot}e_{\alpha\sigma\beta}g^{\beta\delta}=0.$$

Откуда:

$$\varphi_\alpha=-\frac{is}{4}(\xi^{\mu\sigma}{}_{;\nu\mu}e_{\alpha\sigma\beta}g^{\beta\nu}-i\xi^{\sigma;\beta}e_{\alpha\sigma\beta}+\xi^{\mu\nu}R^{\sigma}_{\cdot\,\nu\delta\mu}{}^{\cdot\,\cdot\,\cdot}e_{\alpha\sigma\beta}g^{\beta\delta})=$$
$$=-\frac{is}{4}(\xi^{\mu\sigma}{}_{;\nu\mu}e_{\alpha\sigma}^{\,\cdot\,\cdot\,\nu}-i\xi^{\sigma;\beta}e_{\alpha\sigma\beta}+\frac{1}{2}\xi^{\rho\delta}e_{\alpha\rho\delta}R-2\xi^{\mu\nu}R_{\mu\rho}e_{\alpha\,\cdot\,\nu}^{\,\cdot\,\rho}).$$

Поменяем индексы β и σ в (4.45) местами:

$$\xi^{\mu\beta}{}_{;\nu\mu}g^{\sigma\nu} - i\xi^{\beta;\sigma} - 2is\varphi_\mu e^{\mu\beta\sigma} + \xi^{\mu\nu}R^{\beta}{}_{.\,\nu\delta\mu}^{\;\cdot\,\cdot\,\cdot}g^{\sigma\delta} = \bar{\Psi}_0 g^{\sigma\beta}. \tag{4.46}$$

Сложим (4.46) и (4.45) :

$$\xi^{\sigma;\beta} + \xi^{\beta;\sigma} = -i(\xi^{\mu\sigma}{}_{;\nu\mu}g^{\beta\nu} + \xi^{\mu\nu}R^{\sigma}{}_{.\,\nu\delta\mu}^{\;\cdot\,\cdot\,\cdot}g^{\beta\delta} + \xi^{\mu\beta}{}_{;\nu\mu}g^{\sigma\nu} + \xi^{\mu\nu}R^{\beta}{}_{.\,\nu\delta\mu}^{\;\cdot\,\cdot\,\cdot}g^{\sigma\delta} - 2\bar{\Psi}_0 g^{\beta\sigma}) =$$
$$= -i(\xi^{\mu\sigma}{}_{;\nu\mu}g^{\beta\nu} + \frac{1}{2}\xi^{\sigma\beta}R + \xi^{\mu\sigma}R^{\beta}{}_{.\,\mu} - \xi^{\mu\beta}R^{\sigma}{}_{.\,\mu} + \xi^{\mu\beta}{}_{;\nu\mu}g^{\sigma\nu} + \frac{1}{2}\xi^{\beta\sigma}R + \xi^{\mu\beta}R^{\sigma}{}_{.\,\mu} - \xi^{\mu\sigma}R^{\beta}{}_{.\,\mu} +$$
$$+\frac{2}{3}(i\xi^{\mu}_{;\mu} - \xi^{\mu\nu}{}_{;\nu\mu})g^{\beta\sigma}) = -i\xi^{\mu\sigma}{}_{;\nu\mu}g^{\beta\nu} - i\xi^{\mu\beta}{}_{;\nu\mu}g^{\sigma\nu} - \frac{2}{3}(-\xi^{\mu}_{;\mu} - i\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu\mu})g^{\beta\sigma}.$$

□

Лемма 4.6. *Из уравнения (4.7) следует*

$$m(\xi^{\mu\sigma}{}_{;\sigma\mu} - i\xi^{\sigma}_{;\sigma}) = \frac{3s}{2}\xi^{\mu}{}_{.\,\nu;\sigma}R_{\mu\alpha}e^{\alpha\nu\sigma} + \frac{3s}{8}\xi_{\beta\alpha;\sigma}e^{\alpha\beta\sigma}R+ \tag{4.47}$$
$$+\frac{3s}{4}(\xi^{\mu}{}_{\sigma;\nu\mu\delta}e^{\delta\sigma\nu} + \frac{1}{2}\xi_{\rho\mu}e^{\delta\rho\mu}R_{;\delta} - 2\xi^{\mu\nu}R_{\mu\rho;\delta}e^{\delta\rho}{}_{.\,.\,\nu}),$$

$$\varphi_{,\rho} = -\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}(iF_{\nu\rho} + R_{\nu\rho}) - \xi^{\mu\nu}(iF_{\nu\rho;\mu} + R_{\nu\rho;\mu}) - \frac{1}{2}\xi^{\mu}{}_{.\,\rho}^{\;\cdot\;;\alpha}R_{\mu\alpha} + \frac{1}{4}\xi^{\mu}{}_{.\,\rho;\mu}R - i\xi^{\mu\nu}{}_{.\,.\,;\rho}F_{\mu\nu} - \tag{4.48}$$
$$-\xi^{\mu}F_{\mu\rho} + \frac{1}{4}(\xi^{\mu}{}_{.\,\rho}^{\;\cdot\;;\nu}{}_{.\,;\mu\nu} - \xi^{\mu\sigma}{}_{.\,;\rho\mu\sigma}) + \frac{i}{3}\xi^{\sigma}{}_{.\,;\sigma\rho} + \frac{1}{4}\xi_{\rho}{}^{\cdot\,\mu}R_{;\mu} + \frac{1}{2}\xi^{\mu}{}_{.\,\rho}R_{\mu}{}^{\beta}{}_{.\,;\beta}.$$

Доказательство. Подставим (4.8) и (4.9) в уравнение (4.7) и разложим его по базису (2.12) с помощью известных формул (2.13)–(2.15):

Левая часть:

$$iY^{\mu\nu}{}_{;\mu}\gamma^{\delta}[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]+Y^{\mu\nu}\gamma^{\delta}[\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]-i\gamma^{\delta}Y^{\mu\nu}{}_{;\delta}[\mathcal{P}_{\mu},\mathcal{P}_{\nu}]+\frac{i}{2}[Y^{\mu\nu}{}_{;\mu},\gamma^{\delta}][\mathcal{P}_{\delta},\mathcal{P}_{\nu}]-$$
$$-[Y^{\mu\nu},\gamma^{\delta}][\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]-[Y^{\nu\delta},\gamma^{\mu}][\mathcal{P}_{\nu},[\mathcal{P}_{\mu},\mathcal{P}_{\delta}]]-[Y^{\delta\mu},\gamma^{\nu}][\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]+$$
$$+\frac{1}{2}(Y^{\mu}\gamma^{\delta}+\gamma^{\delta}Y^{\mu})[\mathcal{P}_{\mu},\mathcal{P}_{\delta}]+\gamma^{\delta}[\chi,\mathcal{P}_{\delta}]=i(\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}+\gamma^{\alpha}Y^{\mu\nu}{}_{\alpha;\mu})\gamma^{\delta}[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]+$$
$$+(\xi^{\mu\nu}+\gamma^{\alpha}Y^{\mu\nu}{}_{\alpha})\gamma^{\delta}[\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]-i\gamma^{\delta}(\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}+\gamma^{\alpha}Y^{\mu\nu}{}_{\alpha;\delta})[\mathcal{P}_{\mu},\mathcal{P}_{\nu}]+$$
$$+\frac{i}{2}[\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}+\gamma^{\alpha}Y^{\mu\nu}{}_{\alpha;\mu},\gamma^{\delta}][\mathcal{P}_{\delta},\mathcal{P}_{\nu}]-[\xi^{\mu\nu}+\gamma^{\alpha}Y^{\mu\nu}{}_{\alpha},\gamma^{\delta}][\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]-$$
$$-[\xi^{\nu\delta}+\gamma^{\alpha}Y^{\nu\delta}{}_{\alpha},\gamma^{\mu}][\mathcal{P}_{\nu},[\mathcal{P}_{\mu},\mathcal{P}_{\delta}]]-[\xi^{\delta\mu}+\gamma^{\alpha}Y^{\delta\mu}{}_{\alpha},\gamma^{\nu}][\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]+$$
$$+\frac{1}{2}((\xi^{\mu}+\gamma^{\alpha}Y^{\mu}_{.\alpha})\gamma^{\delta}+\gamma^{\delta}(\xi^{\mu}+\gamma^{\alpha}Y^{\mu}_{.\alpha}))[\mathcal{P}_{\mu},\mathcal{P}_{\delta}]+\gamma^{\delta}[\varphi+\varphi^{\alpha}\gamma_{\alpha},\mathcal{P}_{\delta}]=$$
$$=i\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}\gamma^{\delta}[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]+\xi^{\mu\nu}\gamma^{\delta}[\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]-i\gamma^{\delta}\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}[\mathcal{P}_{\mu},\mathcal{P}_{\nu}]+$$
$$+\frac{1}{2}(\xi^{\mu}\gamma^{\delta}+\gamma^{\delta}\xi^{\mu})[\mathcal{P}_{\mu},\mathcal{P}_{\delta}]+i\gamma^{\delta}([\varphi,\nabla_{\delta}]+[\varphi^{\alpha}\gamma_{\alpha},\nabla_{\delta}])=$$
$$=i\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}\gamma^{\delta}(-\frac{is}{4}R_{\nu\delta}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^{\sigma}-iF_{\nu\delta})+\xi^{\mu\nu}\gamma^{\delta}[\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]-i\gamma^{\delta}\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}(-\frac{is}{4}R_{\mu\nu}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^{\sigma}-iF_{\mu\nu})+$$
$$+\frac{1}{2}(\xi^{\mu}\gamma^{\delta}+\gamma^{\delta}\xi^{\mu})(-\frac{is}{4}R_{\mu\delta}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^{\sigma}-iF_{\mu\delta})-i\gamma^{\delta}(\varphi_{,\delta}+\varphi_{\alpha;\delta}\gamma^{\alpha})=$$
$$=\frac{s}{4}\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}R_{\nu\delta}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}e_{\alpha\beta\sigma}(g^{\delta\sigma}-ise^{\delta\sigma\varsigma}\gamma_{\varsigma})+\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}\gamma^{\delta}F_{\nu\delta}+\xi^{\mu\nu}\gamma^{\delta}[\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]-$$
$$-\frac{s}{4}\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}R_{\mu\nu}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}e_{\alpha\beta\sigma}(g^{\delta\sigma}-ise^{\delta\sigma\varsigma}\gamma_{\varsigma})+\gamma^{\delta}\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}F_{\mu\nu}-\frac{is}{8}(\xi^{\mu}\gamma^{\delta}+\gamma^{\delta}\xi^{\mu})R_{\mu\delta}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^{\sigma}-$$
$$-\frac{i}{2}(\xi^{\mu}\gamma^{\delta}+\gamma^{\delta}\xi^{\mu})F_{\mu\delta}-i\gamma^{\delta}\varphi_{,\delta}-i\varphi_{\alpha;\delta}(g^{\delta\alpha}-ise^{\delta\alpha\varsigma}\gamma_{\varsigma})=$$
$$=\frac{s}{4}\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}R_{\nu}{}^{\cdot\sigma\alpha\beta}_{\cdot\cdot\cdot}e_{\alpha\beta\sigma}+\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}R_{\nu\delta}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}(\delta^{\delta}_{\alpha}\delta^{\varsigma}_{\beta}-\delta^{\delta}_{\beta}\delta^{\varsigma}_{\alpha})\gamma_{\varsigma}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}F_{\nu\delta}\gamma^{\delta}+\xi^{\mu\nu}\gamma^{\delta}[\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]-$$
$$-\frac{s}{4}\xi^{\mu\nu;\sigma}R_{\mu\nu}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}e_{\alpha\beta\sigma}-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}R_{\mu\nu}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}(\delta^{\delta}_{\alpha}\delta^{\varsigma}_{\beta}-\delta^{\delta}_{\beta}\delta^{\varsigma}_{\alpha})\gamma_{\varsigma}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}F_{\mu\nu}\gamma^{\delta}-\frac{is}{8}(\xi^{\mu}\gamma^{\delta}+\gamma^{\delta}\xi^{\mu})R_{\mu\delta}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^{\sigma}-$$
$$-\frac{i}{2}(\xi^{\mu}\gamma^{\delta}+\gamma^{\delta}\xi^{\mu})F_{\mu\delta}-i\varphi_{,\delta}\gamma^{\delta}-i\varphi^{\delta}_{;\delta}-s\varphi_{\alpha;\delta}e^{\delta\alpha\varsigma}\gamma_{\varsigma}=-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}R_{\nu\beta}\gamma^{\beta}-$$
$$-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}R_{\nu\alpha}\gamma^{\alpha}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}F_{\nu\delta}\gamma^{\delta}+\xi^{\mu\nu}\gamma^{\delta}[\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]-\frac{s}{4}\xi^{\mu\nu;\sigma}R_{\mu\nu}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}e_{\alpha\beta\sigma}-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu;\alpha}R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\beta}+$$
$$+\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu;\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\alpha}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}F_{\mu\nu}\gamma^{\delta}-\frac{is}{4}\xi^{\mu}R_{\mu\delta}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}e_{\alpha\beta\sigma}(g^{\delta\sigma}-ise^{\delta\sigma\varsigma}\gamma_{\varsigma})-i\xi^{\mu}F_{\mu\delta}\gamma^{\delta}-i\varphi_{,\delta}\gamma^{\delta}-$$
$$-i\varphi^{\delta}_{;\delta}-s\varphi_{\alpha;\delta}e^{\delta\alpha\varsigma}\gamma_{\varsigma}=-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}R_{\nu\beta}\gamma^{\beta}-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}R_{\nu\alpha}\gamma^{\alpha}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}F_{\nu\delta}\gamma^{\delta}+\xi^{\mu\nu}\gamma^{\delta}[\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]-$$
$$-\frac{s}{4}\xi^{\mu\nu;\sigma}R_{\mu\nu}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}e_{\alpha\beta\sigma}-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu;\alpha}R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\beta}+\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu;\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\alpha}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}F_{\mu\nu}\gamma^{\delta}+\frac{1}{4}\xi^{\mu}R_{\mu\delta}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}(\delta^{\delta}_{\alpha}\delta^{\varsigma}_{\beta}-\delta^{\delta}_{\beta}\delta^{\varsigma}_{\alpha})\gamma_{\varsigma}-$$
$$-i\xi^{\mu}F_{\mu\delta}\gamma^{\delta}-i\varphi_{,\delta}\gamma^{\delta}-i\varphi^{\delta}_{;\delta}-s\varphi_{\alpha;\delta}e^{\delta\alpha\varsigma}\gamma_{\varsigma}=-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}R_{\nu\beta}\gamma^{\beta}-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}R_{\nu\alpha}\gamma^{\alpha}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}F_{\nu\delta}\gamma^{\delta}+$$
$$+\xi^{\mu\nu}\gamma^{\delta}[\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]-\frac{s}{4}\xi^{\mu\nu;\sigma}R_{\mu\nu}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}e_{\alpha\beta\sigma}-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu;\alpha}R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\beta}+\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu;\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\alpha}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}F_{\mu\nu}\gamma^{\delta}-$$
$$-\frac{1}{4}\xi^{\mu}R_{\mu\beta}\gamma^{\beta}-\frac{1}{4}\xi^{\mu}R_{\mu\alpha}\gamma^{\alpha}-i\xi^{\mu}F_{\mu\delta}\gamma^{\delta}-i\varphi_{,\delta}\gamma^{\delta}-i\varphi^{\delta}_{;\delta}-s\varphi_{\alpha;\delta}e^{\delta\alpha\varsigma}\gamma_{\varsigma}=-\frac{i}{2}\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}R_{\nu\beta}\gamma^{\beta}+$$
$$+\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}F_{\nu\delta}\gamma^{\delta}+\xi^{\mu\nu}\gamma^{\delta}[\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]-\frac{s}{4}\xi^{\mu\nu;\sigma}R_{\mu\nu}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}e_{\alpha\beta\sigma}-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu;\alpha}R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\beta}+$$
$$+\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu;\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\alpha}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}F_{\mu\nu}\gamma^{\delta}-\frac{1}{2}\xi^{\mu}R_{\mu\beta}\gamma^{\beta}-i\xi^{\mu}F_{\mu\delta}\gamma^{\delta}-i\varphi_{,\delta}\gamma^{\delta}-i\varphi^{\delta}_{;\delta}-s\varphi_{\alpha;\delta}e^{\delta\alpha\varsigma}\gamma_{\varsigma}.$$

Правая часть:

$$\frac{i}{2}\Psi^{\nu\delta}{}_{;\nu}\gamma^{\mu}[\mathcal{P}_{\delta},\mathcal{P}_{\mu}]-\Psi^{\nu\delta}\gamma^{\mu}[\mathcal{P}_{\nu},[\mathcal{P}_{\mu},\mathcal{P}_{\delta}]]-\Psi^{\delta\mu}\gamma^{\nu}[\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]+\frac{m}{2}\Psi^{\nu\delta}[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]+$$

$$+\frac{1}{2}\Psi^{\nu}\gamma^{\mu}[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\mu}]-m\bar{\Psi}=\frac{i}{2}(\Psi^{\nu\delta}{}_{\alpha;\nu}\gamma^{\alpha}+\bar{\Psi}^{\nu\delta}{}_{;\nu})\gamma^{\mu}[\mathcal{P}_{\delta},\mathcal{P}_{\mu}]-(\Psi^{\nu\delta}{}_{\alpha}\gamma^{\alpha}+\bar{\Psi}^{\nu\delta})\gamma^{\mu}[\mathcal{P}_{\nu},[\mathcal{P}_{\mu},\mathcal{P}_{\delta}]]-$$

$$-(\Psi^{\delta\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\alpha}+\bar{\Psi}^{\delta\mu})\gamma^{\nu}[\mathcal{P}_{\mu},[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]]+\frac{m}{2}(\Psi^{\nu\delta}{}_{\alpha}\gamma^{\alpha}+\bar{\Psi}^{\nu\delta})[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\delta}]+\frac{1}{2}(\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}\gamma^{\alpha}+\bar{\Psi}^{\nu})\gamma^{\mu}[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\mu}]-$$

$$-m(\bar{\Psi}^{\mu}_{0}\gamma_{\mu}+\bar{\Psi}_{0})=\frac{1}{2}(\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}\gamma^{\alpha}+\bar{\Psi}^{\nu})\gamma^{\mu}[\mathcal{P}_{\nu},\mathcal{P}_{\mu}]-m(\bar{\Psi}^{\mu}_{0}\gamma_{\mu}+\bar{\Psi}_{0})=$$

$$=\frac{1}{2}(\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}\gamma^{\alpha}+\bar{\Psi}^{\nu})\gamma^{\mu}(-\frac{is}{4}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^{\sigma}-iF_{\nu\mu})-m(\bar{\Psi}^{\mu}_{0}\gamma_{\mu}+\bar{\Psi}_{0})=$$

$$=\frac{1}{2}(\Psi^{\nu\mu}-is\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}e^{\alpha\mu\rho}\gamma_{\rho}+\bar{\Psi}^{\nu}\gamma^{\mu})(-\frac{is}{4}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^{\sigma}-iF_{\nu\mu})-m(\bar{\Psi}^{\mu}_{0}\gamma_{\mu}+\bar{\Psi}_{0})=$$

$$=(-\frac{is}{4}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^{\sigma}\frac{1}{2}\Psi^{\nu\mu}+\frac{is}{4}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^{\sigma}\frac{is}{2}\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}e^{\alpha\mu\rho}\gamma_{\rho}-\frac{is}{4}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^{\sigma}\frac{1}{2}\bar{\Psi}^{\nu}\gamma^{\mu}-$$

$$-iF_{\nu\mu}\frac{1}{2}\Psi^{\nu\mu}+iF_{\nu\mu}\frac{is}{2}\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}e^{\alpha\mu\rho}\gamma_{\rho}-iF_{\nu\mu}\frac{1}{2}\bar{\Psi}^{\nu}\gamma^{\mu})-m(\bar{\Psi}^{\mu}_{0}\gamma_{\mu}+\bar{\Psi}_{0})=$$

$$=(-\frac{is}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^{\sigma}\Psi^{\nu\mu}-\frac{1}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\beta}(\delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\rho}_{\sigma}-\delta^{\mu}_{\sigma}\delta^{\rho}_{\beta})\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}g_{\rho\varrho}(g^{\sigma\varrho}-ise^{\sigma\varrho\epsilon}\gamma_{\epsilon})-$$

$$-\frac{is}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma}\bar{\Psi}^{\nu}(g^{\sigma\mu}-ise^{\sigma\mu\epsilon}\gamma_{\epsilon})-\frac{i}{2}F_{\nu\mu}\Psi^{\nu\mu}-\frac{s}{2}F_{\nu\mu}\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}e^{\alpha\mu\rho}\gamma_{\rho}-\frac{i}{2}F_{\nu\mu}\bar{\Psi}^{\nu}\gamma^{\mu})-m(\bar{\Psi}^{\mu}_{0}\gamma_{\mu}+\bar{\Psi}_{0})=$$

$$=(-\frac{is}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^{\sigma}\Psi^{\nu\mu}-\frac{3}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\mu}\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}+\frac{is}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\mu}\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}g_{\sigma\varrho}e^{\sigma\varrho\epsilon}\gamma_{\epsilon}+\frac{1}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\rho}\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}\delta^{\mu}_{\rho}-$$

$$-\frac{is}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\rho}\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}g_{\rho\varrho}e^{\mu\varrho\epsilon}\gamma_{\epsilon}-\frac{is}{8}R_{\nu\mu\alpha\beta}e^{\alpha\beta\mu}\bar{\Psi}^{\nu}-\frac{1}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\beta}(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\epsilon}_{\beta}-\delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\epsilon}_{\alpha})\bar{\Psi}^{\nu}\gamma_{\epsilon}-$$

$$-\frac{i}{2}F_{\nu\mu}\Psi^{\nu\mu}-\frac{s}{2}F_{\nu\mu}\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}e^{\alpha\mu\rho}\gamma_{\rho}-\frac{i}{2}F_{\nu\mu}\bar{\Psi}^{\nu}\gamma^{\mu})-m(\bar{\Psi}^{\mu}_{0}\gamma_{\mu}+\bar{\Psi}_{0})=$$

$$=(-\frac{is}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma}\gamma^{\sigma}\Psi^{\nu\mu}-\frac{3}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\mu}\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}+\frac{1}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\mu}\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}-$$

$$-\frac{is}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\rho}\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}g_{\rho\varrho}e^{\mu\varrho\epsilon}\gamma_{\epsilon}-\frac{is}{8}R_{\nu\mu\alpha\beta}e^{\alpha\beta\mu}\bar{\Psi}^{\nu}-\frac{1}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\mu\beta}\bar{\Psi}^{\nu}\gamma_{\beta}+\frac{1}{8}R_{\nu\mu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\mu}\bar{\Psi}^{\nu}\gamma_{\alpha}-$$

$$-\frac{i}{2}F_{\nu\mu}\Psi^{\nu\mu}-\frac{s}{2}F_{\nu\mu}\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}e^{\alpha\mu\rho}\gamma_{\rho}-\frac{i}{2}F_{\nu\mu}\bar{\Psi}^{\nu}\gamma^{\mu})-m(\bar{\Psi}^{\mu}_{0}\gamma_{\mu}+\bar{\Psi}_{0})=$$

$$=(-\frac{is}{8}R_{\nu\mu\alpha\beta}e^{\alpha\beta\sigma}\Psi^{\nu\mu}\gamma_{\sigma}+\frac{1}{4}R_{\nu\alpha}\bar{\Psi}^{\nu}\gamma^{\alpha}-\frac{i}{2}F_{\nu\mu}\Psi^{\nu\mu}-\frac{s}{2}F_{\nu\mu}\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}e^{\alpha\mu\rho}\gamma_{\rho}-\frac{i}{2}F_{\nu\mu}\bar{\Psi}^{\nu}\gamma^{\mu})-m(\bar{\Psi}^{\mu}_{0}\gamma_{\mu}+\bar{\Psi}_{0}).$$

Приравнивая, получаем:

$$-\frac{i}{2}\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}R_{\nu\beta}\gamma^{\beta}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}F_{\nu\delta}\gamma^{\delta}+\xi^{\mu\nu}\gamma^{\delta}(\frac{s}{4}R_{\nu\delta\cdot\cdot;\mu}^{\cdot\cdot\alpha\beta}e_{\alpha\beta\rho}\gamma^{\rho}+F_{\nu\delta;\mu})-\frac{s}{4}\xi^{\mu\nu;\sigma}R_{\mu\nu\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma}-$$

$$-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu;\alpha}R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\beta}+\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu;\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\alpha}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}F_{\mu\nu}\gamma^{\delta}-\frac{1}{2}\xi^{\mu}R_{\mu\beta}\gamma^{\beta}-i\xi^{\mu}F_{\mu\delta}\gamma^{\delta}-i\varphi_{,\delta}\gamma^{\delta}-i\varphi^{\delta}_{;\delta}-$$

$$-s\varphi_{\alpha;\delta}e^{\delta\alpha\varsigma}\gamma_{\varsigma}=-\frac{is}{8}R_{\nu\mu\alpha\beta}e^{\alpha\beta\sigma}\Psi^{\nu\mu}\gamma_{\sigma}+\frac{1}{4}R_{\nu\alpha}\bar{\Psi}^{\nu}\gamma^{\alpha}-\frac{i}{2}F_{\nu\mu}\Psi^{\nu\mu}-\frac{s}{2}F_{\nu\mu}\Psi^{\nu}_{\cdot\alpha}e^{\alpha\mu\rho}\gamma_{\rho}-\frac{i}{2}F_{\nu\mu}\bar{\Psi}^{\nu}\gamma^{\mu}-$$

$$-m(\bar{\Psi}^{\mu}_{0}\gamma_{\mu}+\bar{\Psi}_{0}),$$

$$-\frac{i}{2}\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}R_{\nu\beta}\gamma^{\beta}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}F_{\nu\delta}\gamma^{\delta}+\frac{s}{4}\xi^{\mu\nu}R_{\nu\delta\,.\,.\,;\mu}^{\,.\,.\,\alpha\beta}e_{\alpha\beta.}{}^{\delta}-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu}R_{\nu\alpha\,.\,.\,;\mu}^{\,.\,.\,\alpha\sigma}\gamma_{\sigma}+\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu}R_{\nu\beta\,.\,.\,;\mu}^{\,.\,.\,\sigma\beta}\gamma_{\sigma}+$$
$$+\xi^{\mu\nu}F_{\nu\delta;\mu}\gamma^{\delta}-\frac{s}{4}\xi^{\mu\nu;\sigma}R_{\mu\nu\,.\,.}^{\,.\,.\,\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma}-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu;\alpha}R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\beta}+\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu;\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\alpha}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}F_{\mu\nu}\gamma^{\delta}-\frac{1}{2}\xi^{\mu}R_{\mu\beta}\gamma^{\beta}-$$
$$-i\xi^{\mu}F_{\mu\delta}\gamma^{\delta}-i\varphi_{,\delta}\gamma^{\delta}-i\varphi^{\delta}_{;\delta}-s\varphi_{\alpha;\delta}e^{\delta\alpha\varsigma}\gamma_{\varsigma}=-\frac{is}{8}R_{\nu\mu\alpha\beta}e^{\alpha\beta\sigma}\Psi^{\nu\mu}\gamma_{\sigma}+\frac{1}{4}R_{\nu\alpha}\bar{\Psi}^{\nu}\gamma^{\alpha}-\frac{i}{2}F_{\nu\mu}\Psi^{\nu\mu}-$$
$$-\frac{s}{2}F_{\nu\mu}\Psi^{\nu}_{\ .\alpha}e^{\alpha\mu\rho}\gamma_{\rho}-\frac{i}{2}F_{\nu\mu}\bar{\Psi}^{\nu}\gamma^{\mu}-m(\bar{\Psi}^{\mu}_{0}\gamma_{\mu}+\bar{\Psi}_{0}).$$

Выпишем члены без γ-матриц:

$$-\frac{s}{4}\xi^{\mu\nu;\sigma}R_{\mu\nu\,.\,.}^{\,.\,.\,\alpha\beta}e_{\alpha\beta\sigma}-i\varphi^{\delta}_{;\delta}=\frac{m}{3}(i\xi^{\sigma}_{\ ;\sigma}-\xi^{\mu\sigma}{}_{;\sigma\mu}).$$

Выразим $\varphi^{\delta}_{;\delta}$ и сравним его с производной φ_{δ} из предыдущей леммы:

$$\varphi^{\delta}_{;\delta}=\frac{is}{4}(2\xi^{\mu}_{\ .\,\nu;\sigma}R_{\mu\alpha}e^{\alpha\nu\sigma}+2\xi^{\mu\nu}{}_{.\,.\,;\sigma}R_{\nu\alpha}e_{\mu}^{\ .\,\alpha\sigma}+\xi_{\beta\alpha;\sigma}e^{\alpha\beta\sigma}R)+\frac{im}{3}(i\xi^{\sigma}_{\ ;\sigma}-\xi^{\mu\sigma}{}_{;\sigma\mu})=$$
$$=is\xi^{\mu}_{\ .\,\nu;\sigma}R_{\mu\alpha}e^{\alpha\nu\sigma}+\frac{is}{4}\xi_{\beta\alpha;\sigma}e^{\alpha\beta\sigma}R+\frac{im}{3}(i\xi^{\sigma}_{\ ;\sigma}-\xi^{\mu\sigma}{}_{;\sigma\mu})=$$
$$=-\frac{is}{4}(\xi^{\mu}{}_{\sigma;\nu\mu\delta}e^{\delta\sigma\nu}-i\xi_{\sigma;\beta\delta}e^{\delta\sigma\beta}+\frac{1}{2}(\xi_{\rho\mu;\delta}e^{\delta\rho\mu}R+\xi_{\rho\mu}e^{\delta\rho\mu}R_{;\delta})-2(\xi^{\mu\nu}R_{\mu\rho;\delta}e^{\delta\rho}{}_{.\,.\,\nu}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}R_{\mu\rho}e^{\delta\rho}{}_{.\,.\,\nu})),$$

$$\frac{is}{2}\xi^{\mu}_{\ .\,\nu;\sigma}R_{\mu\alpha}e^{\alpha\nu\sigma}+\frac{is}{8}\xi_{\beta\alpha;\sigma}e^{\alpha\beta\sigma}R+\frac{im}{3}(i\xi^{\sigma}_{\ ;\sigma}-\xi^{\mu\sigma}{}_{;\sigma\mu})=$$
$$=-\frac{is}{4}(\xi^{\mu}{}_{\sigma;\nu\mu\delta}e^{\delta\sigma\nu}-i\xi_{\sigma;\beta\delta}e^{\delta\sigma\beta}+\frac{1}{2}\xi_{\rho\mu}e^{\delta\rho\mu}R_{;\delta}-2\xi^{\mu\nu}R_{\mu\rho;\delta}e^{\delta\rho}{}_{.\,.\,\nu}).$$

Распишем:

$$\xi_{\sigma;\beta\delta}e^{\delta\sigma\beta}=\xi_{\sigma;\beta\delta}e^{\sigma\beta\delta}=\frac{1}{2}(\xi_{\sigma;\beta\delta}e^{\sigma\beta\delta}-\xi_{\sigma;\delta\beta}e^{\sigma\delta\beta})+\frac{1}{2}(\xi_{\sigma;\beta\delta}e^{\sigma\beta\delta}+\xi_{\sigma;\delta\beta}e^{\sigma\delta\beta})=$$
$$=\frac{1}{2}(\xi_{\sigma;\beta\delta}-\xi_{\sigma;\delta\beta})e^{\sigma\beta\delta}=\frac{1}{2}R^{\alpha}_{\ .\,\sigma\beta\delta}\xi_{\alpha}e^{\sigma\beta\delta}=0.$$

Тогда:

$$m(i\xi^{\sigma}_{\ ;\sigma}-\xi^{\mu\sigma}{}_{;\sigma\mu})=-(\frac{3s}{2}\xi^{\mu}_{\ .\,\nu;\sigma}R_{\mu\alpha}e^{\alpha\nu\sigma}+\frac{3s}{8}\xi_{\beta\alpha;\sigma}e^{\alpha\beta\sigma}R+$$
$$+\frac{3s}{4}(\xi^{\mu}{}_{\sigma;\nu\mu\delta}e^{\delta\sigma\nu}+\frac{1}{2}\xi_{\rho\mu}e^{\delta\rho\mu}R_{;\delta}-2\xi^{\mu\nu}R_{\mu\rho;\delta}e^{\delta\rho}{}_{.\,.\,\nu})).$$

Члены с γ-матрицами:

$$-\frac{i}{2}\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}R_{\nu\beta}g^{\varrho\beta}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}F_{\nu\delta}g^{\varrho\delta}-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu}R_{\nu\alpha\,.\,.\,;\mu}^{\,.\,.\,\alpha\varrho}+\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu}R_{\nu\beta\,.\,.\,;\mu}^{\,.\,.\,\varrho\beta}+\xi^{\mu\nu}F_{\nu\delta;\mu}g^{\varrho\delta}-$$
$$-\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu;\alpha}R_{\mu\nu\alpha\beta}g^{\varrho\beta}+\frac{i}{4}\xi^{\mu\nu;\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}g^{\varrho\alpha}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\delta}F_{\mu\nu}g^{\varrho\delta}-\frac{1}{2}\xi^{\mu}R_{\mu\beta}g^{\varrho\beta}-$$
$$-i\xi^{\mu}F_{\mu\delta}g^{\varrho\delta}-i\varphi_{,\delta}g^{\varrho\delta}-s\varphi_{\alpha;\delta}e^{\delta\alpha\varrho}=0,$$

$$-\frac{3i}{2}\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}R_{\nu}^{\ .\,\rho}+\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}F_{\nu}^{\ .\,\rho}+\frac{i}{2}\xi^{\mu\nu}R_{\nu\ .\,;\mu}^{\ .\,\rho}+\xi^{\mu\nu}F_{\nu\ .\,;\mu}^{\ .\,\rho}-i\xi^{\mu\rho;\alpha}R_{\mu\alpha}-\frac{i}{2}\xi^{\rho\mu}{}_{.\,.\,;\mu}R+$$
$$+\xi^{\mu\nu;\rho}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\xi^{\mu}R_{\mu}^{\ .\,\rho}-i\xi^{\mu}F_{\mu}^{\ .\,\rho}-i\varphi^{,\rho}-s\varphi_{\alpha;\delta}e^{\delta\alpha\rho}=0,$$

$$\varphi_{,\rho} = -\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}(iF_{\nu\rho} + \frac{3}{2}R_{\nu\rho}) - \xi^{\mu\nu}(iF_{\nu\rho;\mu} - \frac{1}{2}R_{\nu\rho;\mu}) - \xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho}{}^{;\alpha}R_{\mu\alpha} + \frac{1}{2}\xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho;\mu}R -$$
$$-i\xi^{\mu\nu}{}_{\cdot\,\cdot\,;\rho}F_{\mu\nu} + \xi^{\mu}(\frac{i}{2}R_{\mu\rho} - F_{\mu\rho}) + \frac{1}{4}e^{\delta\alpha}{}_{\cdot\,\cdot\,\rho}\xi^{\mu\sigma}{}_{;\nu\mu\delta}e_{\alpha\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\nu} - \frac{i}{4}e^{\delta\alpha}{}_{\cdot\,\cdot\,\rho}\xi^{\sigma;\beta}{}_{\cdot\,\cdot\,;\delta}e_{\alpha\sigma\beta} +$$
$$+\frac{1}{8}e^{\delta\alpha}{}_{\cdot\,\cdot\,\rho}(\xi_{\beta\mu;\delta}e_{\alpha}^{\cdot\,\beta\mu}R + \xi_{\beta\nu}e_{\alpha}^{\cdot\,\beta\nu}R_{;\delta}) - \frac{1}{2}e^{\delta\alpha}{}_{\cdot\,\cdot\,\rho}(\xi^{\mu\nu}{}_{\cdot\,\cdot\,;\delta}R_{\mu\beta}e_{\alpha\,\cdot\,\nu}^{\;\;\beta} + \xi^{\mu\nu}R_{\mu\beta;\delta}e_{\alpha\,\cdot\,\nu}^{\;\;\beta}),$$

$$\varphi_{,\rho} = -\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}(iF_{\nu\rho} + \frac{3}{2}R_{\nu\rho}) - \xi^{\mu\nu}(iF_{\nu\rho;\mu} - \frac{1}{2}R_{\nu\rho;\mu}) - \xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho}{}^{;\alpha}R_{\mu\alpha} + \frac{1}{2}\xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho;\mu}R -$$
$$-i\xi^{\mu\nu}{}_{\cdot\,\cdot\,;\rho}F_{\mu\nu} + \xi^{\mu}(\frac{i}{2}R_{\mu\rho} - F_{\mu\rho}) + \frac{1}{4}(\xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho}{}^{\cdot\,;\nu}{}_{\cdot\,;\mu\nu} - \xi^{\mu\sigma}{}_{\cdot\,;\rho\mu\sigma}) + \frac{i}{4}(\xi^{\sigma}{}_{\cdot\,;\rho\sigma} - \xi_{\rho}{}^{\cdot\,;\beta}{}_{\cdot\,;\beta}) +$$
$$+\frac{1}{8}(\xi_{\rho}{}^{\mu}{}_{\cdot\,;\mu}R - \xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho;\mu}R + \xi_{\rho}^{\cdot\,\mu}R_{;\mu} - \xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho}R_{;\mu}) + \frac{1}{2}(\xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho;\beta}R_{\mu}^{\cdot\,\beta} - \xi^{\mu\nu}{}_{\cdot\,\cdot\,;\nu}R_{\mu\rho} + \xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho}R_{\mu\,\cdot\,;\beta}^{\;\;\beta} - \xi^{\mu\nu}R_{\mu\rho;\nu}).$$

Применим также формулу (3.23):

$$\varphi_{,\rho} = -\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}(iF_{\nu\rho} + R_{\nu\rho}) - \xi^{\mu\nu}(iF_{\nu\rho;\mu} + R_{\nu\rho;\mu}) - \frac{1}{2}\xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho}{}^{;\alpha}R_{\mu\alpha} + \frac{1}{4}\xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho;\mu}R - i\xi^{\mu\nu}{}_{\cdot\,\cdot\,;\rho}F_{\mu\nu} +$$
$$+\xi^{\mu}(\frac{i}{2}R_{\mu\rho} - F_{\mu\rho}) + \frac{1}{4}(\xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho}{}^{\cdot\,;\nu}{}_{\cdot\,;\mu\nu} - \xi^{\mu\sigma}{}_{\cdot\,;\rho\mu\sigma}) + \frac{i}{4}(\xi^{\sigma}{}_{\cdot\,;\rho\sigma} - \xi_{\rho}{}^{\cdot\,;\beta}{}_{\cdot\,;\beta}) + \frac{1}{4}\xi_{\rho}^{\cdot\,\mu}R_{;\mu} + \frac{1}{2}\xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho}R_{\mu\,\cdot\,;\beta}^{\;\;\beta} =$$
$$= -\xi^{\mu\nu}{}_{;\mu}(iF_{\nu\rho} + R_{\nu\rho}) - \xi^{\mu\nu}(iF_{\nu\rho;\mu} + R_{\nu\rho;\mu}) - \frac{1}{2}\xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho}{}^{;\alpha}R_{\mu\alpha} + \frac{1}{4}\xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho;\mu}R - i\xi^{\mu\nu}{}_{\cdot\,\cdot\,;\rho}F_{\mu\nu} -$$
$$-\xi^{\mu}F_{\mu\rho} + \frac{1}{4}(\xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho}{}^{\cdot\,;\nu}{}_{\cdot\,;\mu\nu} - \xi^{\mu\sigma}{}_{\cdot\,;\rho\mu\sigma}) + \frac{i}{3}\xi^{\sigma}{}_{\cdot\,;\sigma\rho} + \frac{1}{4}\xi_{\rho}^{\cdot\,\mu}R_{;\mu} + \frac{1}{2}\xi^{\mu}{}_{\cdot\,\rho}R_{\mu\,\cdot\,;\beta}^{\;\;\beta}.$$

□

Теперь обобщим все полученные результаты в следующую теорему

Теорема 4.7. *Оператор симметрии (4.1) уравнения Дирака (2.30) принимает вид*

$$\hat{Y} = \hat{\mathcal{P}}_{\mu}\xi^{\mu\nu}\hat{\mathcal{P}}_{\nu} + \xi^{\mu}\hat{\mathcal{P}}_{\mu} + \varphi - \frac{is}{4}(\xi^{\mu\sigma}{}_{;\nu\mu}e_{\alpha\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\nu} - i\xi^{\sigma;\beta}e_{\alpha\sigma\beta} + \frac{1}{2}\xi_{\rho\delta}e_{\alpha}^{\cdot\,\rho\delta}R - 2\xi^{\mu\nu}R_{\mu\rho}e_{\alpha\,\cdot\,\nu}^{\;\;\rho})\gamma^{\alpha}, \quad (4.49)$$

где $\xi^{\mu\nu}$ это тензорное поле и ξ^{μ} это векторное поле, которые определяются системой уравнений (4.29) и (4.40). Функцию φ находим из уравнения (4.48).

Доказательство. Подставляем ранее найденные значения:

$$Y = \mathcal{P}_{\mu}\xi^{\mu\nu}\mathcal{P}_{\nu} + \xi^{\mu}\mathcal{P}_{\mu} + \varphi - \frac{is}{4}(\xi^{\mu\sigma}{}_{;\nu\mu}e_{\alpha\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\nu} - i\xi^{\sigma;\beta}e_{\alpha\sigma\beta} + \frac{1}{2}\xi_{\rho\delta}e_{\alpha}^{\cdot\,\rho\delta}R - 2\xi^{\mu\nu}R_{\mu\rho}e_{\alpha\,\cdot\,\nu}^{\;\;\rho})\gamma^{\alpha}.$$

□

Теперь условие (4.47) приводит к изучению отдельно массивного ($m \neq 0$) и безмассового случая ($m = 0$).

В настоящей работе мы имели дело с массивным случаем. Теперь Лемма (4.6) примет вид

$$\hat{\Psi} = \frac{1}{3}(\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu\mu} - i\xi^{\mu}{}_{;\mu}). \quad (4.50)$$

Заметим, что векторные поля Киллинга ξ^μ обладают свойством:

$$\xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = 0, \tag{4.51}$$

а тензорные поля Киллинга обладают свойством

$$\xi_{(\mu\nu;\rho)} = 0, \tag{4.52}$$

где скобки на индексах относятся к симметричной части.

5 Заключение

В работе были получены операторы симметрии второго порядка для уравнения Дирака в $(2+1)$ пространстве-времени. Было показано, что симметрия уравнения Дирака существенно зависит от того, $m \neq 0$ или $m = 0$.

В массивном случае ($m \neq 0$) оператор симметрии первого порядка коммутирует с оператором уравнения Дирака и имеет скалярные (единичные матрицы) коэффициенты при производных. Полный набор операторов симметрии обеспечивает разделение переменных в уравнении Дирака в $(2+1)$ аналогично $(3+1)$-мерному случаю. В отличие от $(3+1)$-мерного пространства, в массивном случае операторы симметрии первого порядка для уравнения $(2+1)$ Дирака представлены в терминах векторов Киллинга и спиновые операторы с матричными коэффициентами при производных могут быть удалены из операторов симметрии без потери общности, а оператор симметрии второго порядка представлен также в терминах тензоров Киллинга. В безмассовом случае ($m = 0$) оператор симметрии представлен в терминах конформных векторов Киллинга.

С точки зрения развития теории, случай $(2+1)$ особенно привлекателен, поскольку он математически проще, но включает в себя все основные элементы теории. Определяющие уравнения всегда линейны, а множество их решений образует алгебру симметрий рассматриваемого уравнения. С этой целью были исследованы свойства операторов симметрии в терминах определяющих уравнений. Также были получены определяющие уравнения для уравнения Дирака в классе линейных дифференциальных операторов первого и второго порядка с матричными коэффициентами и исследованы нетривиальные симметрии.

В $(2+1)$-мерном случае, операторы симметрии второго порядка, а также первого порядка, имеют скалярные коэффициенты при производных векторных полей Киллинга, что значительно отличается от случая $(3+1)$, где операторы симметрии имеют матричную часть. Поэтому операторы $(2+1)$ можно использовать для разделения переменных и некоммутативного интегрирования, что будет являться целью дальнейшей работы.

Список литературы

1. Gordon W. Die Energieniveaus des Wassertoatoms nach der Diracschen Quantentheorie des Electrons // Z. Phys. - 1928. - B. 48. - S. 11.

2. Darwin C. G. The Wave Equations of the Electron // Proc. Roy. Soc. - 1928. - V. 118. - P. 654.

3. Landau L. Diamagnitismus der Metalle // Z. Phys. - 1930. - B. 64. - S. 629.

4. Redmond P. I. Solution of the Klein-Gordon and Dirac Equation for a Particle with a Plane Electromagnetic Wave and a Parallel Magnetic Field // I. Math. Phys. - 1965. - V. 7. - P. 1163.

5. Bagrov V. G. Exact Solutions of Relativistic Wave Equations / V. G. Bagrov, D. M. Gitman - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1992. - 1-300 p.

6. Tsai W. Motion of charged particles in homogeneous magnetic field / W. Tsai, A. Yildiz // Phys. Rev. D. - 1971. - V. 4. - P. 3643.

7. Chand R. Solution of the Dirac Equation with Magnetic Moment / R. Chand, G. Szamosi // Lett. Nuovo Cimento. - 1978. - V. 22. - P. 660.

8. Тернов И. М. Уравнение эволюции спина релятивистского электрона в представлении Гейзенберга // ЖЭТФ. - 1990. - Т. 98. - С. 69.

9. Силенко А. Л. Точное квантовомеханическое описание движения частиц со спином 1/2 и движения спина в однородном магнитном поле // ЖЭТФ. - 1998. - Т. 114. - С. 448.

10. Gerbert Ph. Fermions in an Aharonov-Bohm field and cosmic strings // Phys. Rev. D. - 1989. - V. 40. - P. 1346-1349.

11. Bagrov V. G. Solutions of relativistic wave equations in superpositions of Aharonov-Bohm, magnetic, and electric fields / V. G. Bagrov, D. M. Gitman, V. B. Tlyachev // J. Math. Phys. - 2001. - V. 42. - P. 1933-1959.

12. Gavrilov S. P. Dirac equation in magnetic-solenoid field / S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, A. A. Smirnov // European Physical Journal C. - 2004. - V. 32. - P. 119-142.

13. Khalilov V. R. Zero-mass fermions in Coulomb and Aharonov-Bohm potentials in 2+1 dimensions // Theoretical and Mathematical Physics. - 2013. - V. 175. - P. 226–246.

14. Gitman D. M. Self-adjoint extensions in quantum mechanics: General theory and applications to Schrodinger and Dirac equations with singular potentials / D. M. Gitman, I. V. Tyutin, B. L. Voronov - Springer Science and Business Media, 2012. - 511 p.

15. Banados M. The black hole in three dimensional spacetime / M. Banados, C. Teitelboim, J. Zanelli // Physical Review Letters. - 1992. - V. 69. - P. 1849-1851.

16. Geometry of the 2+1 black hole / M. Banados [and others] // Physical Review D. - 1993. - V. 48. - P. 1506-1525.

17. Quantum properties of the Dirac field on BTZ black hole backgrounds / F. Belgiorno [and others] // Journal of Physics A Mathematical and Theoretical. - 2011. - V. 44. - P. 1-19.

18. The electronic properties of graphene / A. H. Castro Neto [and others] // Rev. Mod. Phys. - 2009. - V. 81. - P. 109-162.

19. Vozmediano M. A. H. Gauge fields in graphene / M. A. H. Vozmediano, M. I. Katsnelson, F. Guinea // Physics Reports. - 2010. - V. 496. - P. 109.

20. Katsnelson M. I. Graphene: Carbon in two dimensions/ M. I. Katsnelson. - Cambridge University Press, Cambridge, 2012. - 1-20 p.

21. Graphene Quantum Dots / A. D. Guclu [and others]. - Springer Heidelberg New York Dordrecht London Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014. - 172 p.

22. Breev A. I. Symmetry operators and separation of variables in the (2 + 1)-Dirac equation with external electromagnetic field / A. I. Breev, A. V. Shapovalov // Mathematical Physics. - 2017. - V. 15. - P. 2-8.

АНТИПЛАГИАТ
ТВОРИТЕ СОБСТВЕННЫМ УМОМ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: Сараева Анастасия anastasia16-05@yandex.ru / ID: 6710100
Проверяющий: Сараева Анастасия (anastasia16-05@yandex.ru / ID: 6710100)

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»- http://users.antiplagiat.ru

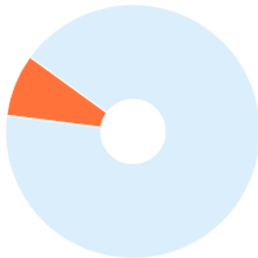
ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 3
Начало загрузки: 10.06.2019 08:56:38
Длительность загрузки: 00:00:01
Имя исходного файла: Дипломная работа1
Размер текста: 433 кБ
Символов в тексте: 43292
Слов в тексте: 5965
Число предложений: 246

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 10.06.2019 08:56:40
Длительность проверки: 00:00:02
Комментарии: не указано
Модули поиска: Модуль поиска Интернет

ЗАИМСТВОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
8,11%	0%	91,89%



Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.
Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа.
Заимствования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.
Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Источник	Ссылка	Актуален на	Модуль поиска
[01]	2,43%	Волновая функция частицы в электромагнитном поле | dissertation.com...	http://dissertation.com.ua	20 Июл 2018	Модуль поиска Интернет
[02]	1,74%	Symmetry operators and separation of variables in the $(2+1)$-dimensional ...	http://arxiv.org	22 Мар 2018	Модуль поиска Интернет
[03]	1,63%	Волновая функция частицы в электромагнитном поле - скачать бесплат...	http://fizmathim.com	29 Авг 2016	Модуль поиска Интернет

Еще источников: 9
Еще заимствований: 2,3%