Министерство образования и науки Российской Федерации
(МИНОБРНАУКИ РОССИИ)
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ТГУ)
Механико-математический факультет
Кафедра математического анализа и теории функций.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
д-р физ.-мат. наук, профессор
_____________П.А.Крылов
«_13_»___июня___2018 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Топологические пространства с γ – свойством

по основной образовательной программе подготовки магистров
«Фундаментальная математика»
направление подготовки 01.04.01 – Математика
Бадмаев Олег Олегович

Научный руководитель ВКР
доцент, канд. физ.-мат. наук
_____________ В.Р. Лазарев
подпись

Автор работы
студент группы № 04601
_____________О.О. Бадмаев
подпись

Томск-2018

Содержание

Введение.

Одной из открытых проблем в теории топологических пространств функций является следующая задача(см. [2, задача II.3.10], [7, problem 4.1.1]): пусть $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ – пространства Фреше – Урысона, верно ли тогда, что и $C_p(X) \times C_p(Y)$ – тоже пространство Фреше – Урысона? Хорошо известно(см [2]), что линейное топологическое пространство $C_p(X) \times C_p(Y)$ линейно гомеоморфно пространству $C_p(X \oplus Y)$. Используя тот факт, что свойство Фреше – Урысона пространства $C_p(X)$ охарактеризовано посредством топологического свойства пространства X, называемого γ - свойством, выше сформулированная задача может быть переформулирована следующим образом: пусть пространства X и Y обладают свойством γ, верно ли тогда, что пространство $X \oplus Y$ обладает свойством γ? Известно, что данная проблема имеет отрицательное решение при некоторых дополнительных по отношению к обычной системе аксиом ZFC теоретико - множественных предположениях (см. [4]). Поэтому возрастает актуальность вопроса о построении так называемого «наивного» примера пространств X и Y, которые обладают свойством γ, но прямая топологическая сумма $X \oplus Y$ которых не является γ - пространством.

Впервые γ - свойство было введено J. Gerlits и Zs. Nagy в статье [5], где также была доказана эквивалентность $C_p(X)$ – пространства Фреше – Урысона и свойства γ. Дальнейшие исследования были посвящены изучению γ - свойства подмножеств вещественной прямой[4]. Также рассматривались различные схожие с γ - свойством понятия: строго γ - множество [3], продуктивное γ - пространство [9], ι - пространство("йота пространство")[6].

Целью исследования является систематизировать и пополнить общие сведения о пространствах со свойством γ. В частности, изучить поведение γ - свойства при топологических операциях, рассмотреть связь γ - свойства с другими топологическими свойствами, изучить примеры пространств со свойством γ не лежащих в $\mathbb{R}$.

Применяемые для исследования методы относятся к методам общей топологии. Новизна работы состоит в том, что на рассматриваемые топологические пространства не накладывается условие быть подпространством вещественной прямой. В частности, рассмотрены подпространства ординалов. Кроме того, получен критерий метризуемости γ-пространств и некоторые его следствия.

Работа состоит из введения, пяти глав и списка литературы. В первой главе даются основные определения и эквивалентные им формулировки. Во второй главе дается характеризация γ - свойства и приводится пример пространства не обладающего γ - свойством. В третей главе рассматриваются операции над γ - пространствами, в частности, непрерывное отображение, переход к подпространствам, произведения, прямая сумма. В четвертой главе доказывается критерий, когда ординал обладает свойством γ. В последней главе рассматривается критерий метризуемости пространств со свойством γ и варианты ослабления его условий.

Теоремы из четвертой и пятой глав, теорема 17 (2 -> 1), предложения 26, 28, 31, 12 и следствия 20, 21 не встречаются в доступной литературе. Они получены автором самостоятельно. Ряд теорем можно найти в литературе, но доказательства, приведенные в работе, были получены автором. На остальные результаты даются ссылки.

В работе теоремы, леммы и т.п. пронумерованы сквозным образом.

1 Предварительные сведения.

В этом разделе приведены определения основных понятий, которые изучаются и используются в дальнейшем. Заметим, что в топологической терминологии мы придерживаемся монографий [1] и [2].

Определение 1. *Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества X называется ω-покрытием этого множества, если для каждого конечного множества $K \subset X$ найдется $U \in \mathcal{A}$, такое, что $K \subset U$.*

Определение 2. *Если $\xi = \{A_n | n \in \mathbb{N}\}$– последовательность подмножеств X, то множество $\underline{\lim}\, \xi = \cup\{\cap\{A_i | i \geq n\} | n \in \mathbb{N}\}$ называется нижним пределом последовательности ξ.*

Определение 3. *Будем говорить, что в топологическом пространстве X выполнено свойство γ (или γ - свойство), если для любого открытого ω - покрытия η пространства X найдется последовательность $\xi \subset \eta$, такая, что $\underline{\lim}\, \xi = X$. При этом само пространство X будем называть γ-пространством. Если $\xi = \{A_1, A_2, ...\}$, то также будет применяться следующее обозначение: $A_n \xrightarrow{n \to \infty} X$*

Замечание 4. *Легко понять, что $\underline{\lim}\, \xi = X$ тогда и только тогда, когда каждая точка $x \in X$ принадлежит всем множествам последовательности ξ, начиная с некоторого номера.*

Замечание 5. *Нетрудно убедиться (см. [2]), что если $\underline{\lim}\, \xi = X$, то последовательность ξ является ω-покрытием пространства X.*

Введем эквивалентное определение свойства γ с помощью следующей теоремы, доказательство, которой можно найти в [2, II.3.2].

Теорема 6. *[2] Следующие условия эквивалентны:*

1) В X выполнено свойство γ_1: для любой последовательности $\{\eta_n | n \in \mathbb{N}\}$

открытых ω-покрытий пространства X найдутся $U_n \in \eta_n$, такие, что $\underline{\lim}\xi = X$, где $\xi = \{U_n | n \in \mathbb{N}\}$;
2) В X выполнено свойство γ.

В монографии [2] также доказывается, что свойство γ равносильно одновременному выполнению в пространстве X так называемых свойств ϕ и ϵ, которые определяются следующим образом:

Определение 7. *Будем говорить, что X удовлетворяет свойству ϕ, если для любого открытого ω - покрытия $\eta = \cup\{\eta_n | n \in \mathbb{N}\}$ пространства X, где $\eta_n \subset \eta_{n+1}$, найдется последовательность $\xi = \{X_n | n \in \mathbb{N}\}$, такая, что $X_n \omega$ - покрыто семейством η_n для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\underline{\lim}\xi = X$.*

Определение 8. *Будем говорить, что X удовлетворяет свойству ϵ, если из любого открытого ω - покрытия пространства X можно извлечь счетное ω - подпокрытие.*

Приведем еще определение γ - пространства в терминах селективных принципов. При этом, заметим, что далее в работе мы будем использовать определения, введенные выше.

Определение 9. *Покрытие топологического пространства называется γ - покрытием, если каждая точка этого пространства принадлежит всем элементам покрытия, кроме конечного числа. При этом γ-пространством называется пространство, в котором каждое ω - покрытие содержит γ - покрытие.*

Заметим, что класс γ - пространств в терминах селективных принципов обозначается, как $\begin{pmatrix} \Omega \\ \Gamma \end{pmatrix}$, где Ω - класс ω - покрытий пространства X, а Γ - класс γ - покрытий пространства.

Наконец, приведем характеризацию γ - свойства в терминах топологических игр.

Пусть X - топологическое пространство. Пусть имеются два игрока, обозначим их I и II. На шаге n, $n \in \mathbb{N}$, игрок I выбирает ω - покрытие η_n пространства X. Игрок II выбирает $U_n \in \eta_n$. Игрок II побеждает, если $\{U_n | n \in \mathbb{N}\} - \gamma$ - покрытие, иначе побеждает игрок I.

Топологическое пространство является γ - пространством тогда и только тогда, когда игрок I не имеет выигрышной стратегии в этой игре.

Более подробно с данными формулировками можно ознакомится в [5]

Как уже упоминалось во введении, в ряде исследований (см. [3], [9]) делались попытки описать условия, накладываемые на пространства X и Y, при которых $X \oplus Y$ будет γ - пространством. На этом пути возникли такие модификации γ - свойства:

Определение 10. *[3] Мы скажем, что X является строго γ - множеством, если существует возрастающая последовательность $\{k_n | n \in \mathbb{N}\}$, такая, что для каждой последовательности $\{\phi_n | n \in \mathbb{N}\}$, где ϕ_n - открытые покрытия подмножеств из X мощности k_n, существует последовательность $\{C_n | n \in \mathbb{N}\}, C_n \in \phi_n$ такая, что $\underline{\lim} C_m = X$.*

Определение 11. *[9] Пространство $X-$ продуктивное γ - пространство, если $X \times Y$ имеет γ - свойство для каждого Y являющегося γ - пространством.*

2 Некоторые основные свойства γ - пространств.

В данной главе излагаются необходимые или достаточные условия γ - свойства в пространстве X. Так как мы изучаем γ - свойство топологических пространств X в связи с тем, что оно характеризует свойство Фреше - Урысона пространств функций $C_p(X)$, то все топологические пространства ниже предполагаются тихоновскими.

Предложение 12. *Если X дискретно и обладает свойством γ, то $|X| \leq \aleph_0$.*

Доказательство. В самом деле, если дискретное пространство X несчётно, то семейство всех конечных подмножеств X является ω - покрытием, из которого нельзя извлечь требуемую в определении 3 последовательность ξ. □

Предложение 13. *Если $|X| \leq \aleph_0$, то X обладает свойством γ.*

Доказательство. Пусть η - произвольное ω - покрытие пространства X и пусть $X = (x_1, ...x_n, ...)$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется $U_n \in \eta$, содержащее множество $\{x_1, ...x_n\}$. При этом $\underline{\lim}\xi = X$ для последовательности $\xi = \{U_n | n \in \mathbb{N}\}$. Следовательно, по определению 3 заключаем, что X обладает свойством γ. □

Предложение 14. *Если X обладает свойством γ, то X - линделефово.*

Доказательство. Пусть $\eta-$ произвольное открытое покрытие пространства X. Рассмотрим семейство η' всевозможных конечных объединений элементов η. Ясно, что $\eta' - \omega$ - покрытие пространства X. Так как X обладает свойством γ, то можем извлечь из η' последовательность ξ со свойством $\underline{\lim}\xi = X$. Теперь искомое счётное подпокрытие можно составить из тех множеств исходного семейства η, которые участвуют в образовании членов последовательности ξ. □

Известно, что каждое линделефово пространство является паракомпактным[1, 5.1.2] и вещественнокомпактным[7, S.406] пространством. Поэтому из 14 следует, что каждое пространство с γ свойством, также является паракомпактным и вещественокомпактным пространством.

Напомним следующее определение.

Определение 15. *Пространство называется разреженным, если в каждом его не пустом подпространстве есть изолированная в этом подпространстве точка.*

Следующий результат (см. [2, III.1.2]), в отличие от вышеприведенных, весьма нетривиален. Он будет использован в главе 4.

Теорема 16. *[2] Если X компакт, то X обладает свойством γ в том и только в том случае, когда X разрежен.*

Из этой теоремы следует, что канторово множество не обладает свойством γ, так как оно не является разреженным.

Ниже мы формулируем и доказываем одну из ключевых теорем данной работы. Она связывает основной объект исследования $-$ γ - свойство $X-$ со свойством Фреше - Урысона пространства непрерывных функций $C_p(X)$ с топологией поточечной сходимости. Данная теорема получена в статье [5]. Доказательство импликации 1) $\rightarrow$ 2) заимствано из монографии [2, II.3.2], а приведенное ниже доказательство импликации 2) $\rightarrow$ 1) принадлежит автору.

Напомним, что пространство Y называется пространством Фреше - Урысона, если для любой точки из $y \in \overline{A} \subset Y$, существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ сходящаяся к точке y.

Теорема 17. *[2] Следующие условия эквивалентны:*

1) $C_p(X)$ - пространство Фреше - Урысона;

2) В X выполнено свойство γ.

Доказательство. 1) $\to$ 2). Пусть η - ω-покрытие пространства X. Положим $A = \{f \in C_p(X) | \overline{f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})} \subset U\}$ для некоторого $U \in \eta$. Тогда $f_0 \in \overline{A}$, где $f_0 = 1$. Поскольку, выполнено условие 1), то существует последовательность $\{f_n | n \in \mathbb{N}\} \subset A$ сходящаяся к f_0.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ возьмем $U_n \in \eta$ для которого $f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \subset U_n$, и покажем, что $\xi = \{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию 2). Для любого $x \in X$ найдется $n(x) \in \mathbb{N}$, такой, что $f_n \in W(f_0, x, 1)$ для всех $n \geq n(x)$. Но это означает, что $f_n(x) > 0$, то есть $x \in f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \subset U_n$ для всех $n \geq n(x)$, то есть $\underline{\lim}\xi = X$. Значит в X выполнено свойство γ.

2) $\to$ 1). Пусть в X выполнено свойство γ. Докажем свойство Фреше - Урысона пространства $C_p(X)$. Пусть $A \subset C_p(X)-$ произвольное множество функций с предельной функцией f. Обозначим через η_n семейство прообразов U_g интервала $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ при функциях вида $|f - g|$, где $g \in A$. Покажем, что $\eta_n - \omega$ - покрытие. Пусть K - произвольное конечное множество в X. Так как $f \in \overline{A}$, то существует $g \in A \cap W(f, K, \frac{1}{n})$, то есть $|f - g|(x) < \frac{1}{n}$, при $x \in K$. Следовательно, $K \subset (|f - g|)^{-1}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = U_g$.

Рассмотрим $(x_1, x_2, ..., x_n...) \subset X$, где $x_i \neq x_j$, при $i \neq j$. Обозначим $\eta_n^0 = \{U_g\backslash\{x_n\} | U_g \in \eta_n\}$. Положим $\eta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \eta_n^0$.

Докажем, что $\eta - \omega$ - покрытие пространства X. Пусть $K''-$ произвольное конечное множество в X. Существует $t \in \mathbb{N}$, что $x_t \notin K''$ =>(т.к. η_t - ω - покрытие X) существует $U_g\backslash\{x_t\} \in \eta_t^0$, такое что $K'' \subset U_g\backslash\{x_t\}$.

По свойству γ, существует последовательность $(V_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \eta$, такая, что $\underline{\lim}V_k = X$. Для каждого $V_k, k \in \mathbb{N}$ укажем индекс $n(k)$, такой, чтобы выполнялись включения: $V_1 \in \eta_{n(1)}^0, ..., V_k \in \eta_{n(k)}^0, ...$

Докажем, что $\{n(k) | k \in \mathbb{N}\}$ неограниченна. Действительно, пусть существует $r \in \mathbb{N}$, такое что $n(k) \leq r$, для любого $k \in \mathbb{N}$. Понятно, что $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ не содержится ни в одном V_k. Действительно, при построении семейства η_n^0 из множества U_g удаляем соответствующие номеру η_n^0, точки x_n. Заключаем, что $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}-$ не ω - покрытие пространства X, вопреки замечанию 5. Значит, существует бесконечная подпоследовательность $(m_i)_{i=1}^{\infty} \subset (n(k))_{k=1}^{\infty}$, такая, что $m_1 < m_2 < ... < m_n < ....$

Заметим, что последовательность $\underline{\lim} V_{k_I} = X$, где $V_{k_I} \in \eta^0_{m_I}$.

Рассмотрим $V_{k_1} = U_g \setminus \{x_1\}$, положим $g_1 = g \in A$. Таким же образом определим $g_2 = g \in A$, при $V_{k_2} = U_g \setminus \{x_2\}$. Продолжая аналогично этот процесс, получим последовательность функций $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Покажем, что эта последовательность сходится к f в $C_p(X)$.

Пусть $x \in X$, покажем, что $g_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$. Найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что если $j \geq N$, то $x \in V_{k_j} \in \eta^0_{m_j}$. Пусть $\epsilon > 0$. Существует l такое, что при $i \geq l$ выполнено $\frac{1}{m_i} < \epsilon$. Пусть $M = max(N, l)$. Тогда при $n \geq M$ имеем $|g_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m_n} \leq \frac{1}{m_l} < \epsilon$. □

Приведем пример пространства X для которого $C_p(X)$ не будет обладать свойством Фреше - Урысона.

Теорема 18. *[2, II.3.5] Пространство $C_p[0, 1]$ не обладает свойством Фреше - Урысона.*

Доказательство. Пусть $\{r_n | n \in \mathbb{N}\}$ - плотное множество в $I = [0, 1]$ и $B = \{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ - база в I, что $\mu(\overline{U_n}) < \dfrac{1}{2}$ при $n \in \mathbb{N}$(здесь $\mu-$ мера Лебега) и для всякого конечного множества $K \subset I$ существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что $K \subset U_n$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем $f_n \in C_p(I)$, удовлетворяющее условиям:

$\int_0^1 f_n dx \geq \dfrac{1}{2}, U_n \cup \{r_n | n \in \mathbb{N}\} \subset f^{-1}(0), f_n(I) \subset I.$

Пусть $g-$ функция, тождественно равная нулю. Тогда $Z = \{f_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{g\}-$ искомое. Действительно, если $f \in C_p(I)$ - предельная функция для Z, то $f(r_n) = 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $g = f$, так что Z замкнуто, а $Z \backslash \{g\}$ дискретно. При $g_n \in Z \backslash \{g\}$ невозможно $g_n \to g$ поскольку из неравенства $\int_0^1 f_n dx \geq \dfrac{1}{2}, n \in \mathbb{N}$, следует на основании теоремы Лебега об ограниченной сходимости, что на множестве положительной меры $g_n(x)$ не стремится к нулю при $n \to \infty$. □

Из теоремы 18 напрямую следует, что отрезок $[0,1]$ не обладает свойством γ. Ниже мы детализируем этот факт.

Лемма 19. *Пространство со счетной базой удовлетворяет свойству* ϵ.

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$ - счетная база пространства X. Пусть η - открытое ω - покрытие пространства X. Определим множество $A_1 = \{U | U \in \mathbf{B}\}$. Так как A_1 по построению есть база, то мощность множества A_1 не более чем счетна. Построим множество $A_2 = \{U \cup V | U, V \in \mathbf{B}\}$, аналогично построим множество $A_3 = \{U \cup V \cup W | U, V, W \in \mathbf{B}\}$. Продолжая данный процесс получим семейство множеств $A = \cup\{A_i | i \in \mathbb{N}\}$. Заметим, что по построению мощность каждого A_i не более чем счетна, значит и мощность A не более чем счетна.

Для каждого $U \in A$ положим семейство $\eta_U = \{G \in \eta | U \subset G\}$. Из каждого непустого семейства η_U выберем по одному элементу G_U. Положим $\mathbf{B}' = \{G_U | U \in A\}$. Ясно, что мощность $\mathbf{B}'$ не более чем счетна и $\mathbf{B}' \subset \eta$.

Покажем, что $\mathbf{B}'$ является ω - покрытием пространства X. Действительно, пусть K -конечное множество в X. Существует $U_K \in A$, такое, что $K \subset U_K$. Выберем в η_{U_K} элемент G_{U_K} такой, что $K \subset U_k \subset G_{U_K}$. Таким образом, по сделанному выбору $K \subset G_{U_K} \in \mathbf{B}'$. □

Следствие 20. *Отрезок* $[0,1]$ *не удовлетворяет свойству* ϕ.

Доказательство. Из теоремы, рассмотренной выше следует, что отрезок $[0,1]$ не удовлетворяет свойству γ, так как $C_p[0,1]$ не является пространством Фреше - Урысона. Как указано выше, свойство γ равносильно одновременному наличию свойств ϕ и ϵ. Так как $\omega([0,1]) \leq \aleph_0$, то, по лемме 19, отрезок удовлетворяет свойству ϵ. Поэтому $[0,1]$ не удовлетворяет свойству ϕ. □

Большим вниманием в топологии пользуется вещественная прямая, снабженная так называемой топологией стрелки. Напомним, что база этой топологии задается полуинтервалами вида $[a, b)$. Отметим, что топология стрелки сильнее евклидовой топологии. Обозначим через I_{arr} отрезок $[0, 1]$ с топологией стрелки.

Следствие 21. *Пусть I_τ - отрезок $[0, 1]$ с топологией τ, которая не слабее евклидовой. Тогда пространство I_τ не удовлетворяет свойству γ. В частности, I_{arr} не удовлетворяет свойству γ.*

Доказательство. Пусть I_τ обладает свойством γ. Пусть $id : I_\tau \to [0, 1]$ тождественное непрерывное отображение. Из предложения 22 (см. ниже) следует, что $[0, 1]$ должен обладать свойством γ, что противоречит теореме 18. □

Также отметим, что из того, что пространства со свойством γ имеют размерность $indX = 0$ [2, II.3.6] следует, что каждое γ - пространство вкладывается в $\{0, 1\}^\tau$ [10, 3.3.6], где τ - некоторый кардинал. При этом само пространство $\{0, 1\}^\tau$ не обладает γ - свойством, так как является канторовым множеством возведенным в некоторую степень. Но степень канторова множества, будучи неразреженным компактом, не может обладать свойством γ в силу теоремы 16.

3 Операции над γ - пространствами.

В данной главе будут рассмотрены топологические операции, сохраняющие γ - свойство.

Предложение 22. *Пусть X является γ - пространством, тогда:*
1) Если $f : X \to Y$ - непрерывное отображение на пространство Y, то Y является γ - пространством;
2) Если $Z \subset X-$ замкнутое подпространство, то Z является γ - пространством.

Доказательство. 1) Пусть η - произвольное ω - покрытие пространства Y. Можно утверждать, что $\mu = \{f^{-1}(U)|U \in \eta\} - \omega$ - покрытие пространства X. Действительно, пусть $K \subset X$ - произвольное конечное множество. Так как образ $f(K)$ также конечное множество, то существует такое $U \in \eta$, что $f(K) \subset U$. Перейдя в последнем включении к прообразу, получим следующее включение $f^{-1}f(K) \subset f^{-1}(U)$, откуда следует, что $K \subset f^{-1}(U)$, это и означает, что $\mu - \omega$ - покрытие пространства X.

Так как X является γ - пространством, то существует подпоследовательность $\mu_1 \subset \mu$, $\mu_1 = \{V_i|i \in \mathbb{N}\}$ такая, что $\underline{\lim}\mu_1 = X$. Покажем, что последовательность $\xi = \{f(V_i)|V_i \in \mu_1, i \in \mathbb{N}\}$ сходится к Y в смысле нижнего предела. Рассмотрим произвольную точку $y \in Y$. Для некоторой точки $x \in f^{-1}(y)$ существует $n_1 \in \mathbb{N}$, что $x \in V_k$, при $k \geq n_1$. Перейдя к образу, получим $f(x) = ff^{-1}(y) \in f(V_k) \in \xi$, при $k \geq n_1$. То есть, для произвольной точки y нашелся номер n_1, что y содержится во всех элементах ξ начиная с n_1.

2) Пусть η - произвольное ω - покрытие пространства Z. Положим $\mu = \{U \cup (X \backslash Z)|U \in \eta\}$. Покажем что $\mu - \omega$ - покрытие пространства X. Действительно, пусть $K \subset X$ - произвольное конечное множество. Можно считать, что $K = K_1 \cup K_2$, где $K_1 \subset Z, K_2 \subset X \backslash Z$. Так как $\eta - \omega$

- покрытие, то существует $U \in \eta$, такой, что $K_1 \subset U$. Таким образом, $K \subset U \cup (X \backslash Z) \in \mu$, то есть $\mu - \omega$ - покрытие пространства X.

Так как X является γ - пространством, то существует последовательность $\mu_1 \subset \mu$, $\mu_1 = \{V_i | i \in \mathbb{N}\}$ такая что $\underline{\lim} \mu_1 = X$. Искомая последовательность $\eta_1 \subset \eta$ будет иметь вид $\eta_1 = \{Z \cap V_i | V_i \in \mu_1\}$. Её, сходимость к Z следует из того, что $Z \cap V_i = Z \cap (U_i \cup (X \backslash Z)) = U_i \in \eta_1$. □

Пункт 2) предыдущего предложения можно усилить. Доказательство этого факта можно найти в работе [4].

Предложение 23. *[4] Если X обладает свойством γ, Y - подпространство в X типа F_σ , то Y также обладает свойством γ.*

Теорема 24. *Если X удовлетворяет свойству γ, то X^n, где $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет свойству γ.*

Доказательство. Пусть $\eta - \omega$ - покрытие пространства X^n.

Дополним каждое конечное множество $K \subset X^n$ до конечного множества K'' следующим образом. Пусть $S_n = \{\delta : \{1...n\} \to \{1...n\} | \delta$ - биекция$\}$. Для каждого $x \in K$ определим $x_\delta \in X^n$ по следующему правилу: $(x_\delta)_i = x_{\delta(i)}$. Положим $K' = \bigcup\limits_{x \in K} \{x_\delta | \delta \in S_n\}$, при этом $x = x_\delta$, при $\delta = id$. Построим (конечное) множество $K'' = \prod\limits_{l=1}^{n} p_l(K')$, где $p_l : X^n \to X = X_l$, - проекция на l -тый сомножитель. Так как $\eta - \omega$ - покрытие пространства X^n, то существует $U_K \in \eta$, такое что $K'' \subset U_K$. Так как U_K - открыто, то каждая точка $x \in K''$ имеет стандартную окрестность $V^x = V_1^x \times ... \times V_n^x$, такую что $x \in V^x \subset U_K$. Можно показать, что окрестность V^x возможно выбрать так, чтобы выполнялось равенство $\bigcup\limits_{x \in K''} V^x = V_K^n$, для некоторого открытого $V_K \subset X$.

Положим теперь $\eta' = \{V_K^n | K \subset X^n, K$ - конечное $\}$. Ясно, что η' вписано в η.

По определению множеств V_K, $V_K^n = (p_1(V_K^n))^n$. Рассмотрим семейство $\mu = \{V_K = p_1(V_K^n) | V_K^n \in \eta'\}$. Покажем, что семейство $\mu - \omega$ - покрытие пространства X. Пусть M - конечное в X. Тогда $V_{M^n}^n \in \eta'$ и $M \subset V_{M^n} = p_1(V_{M_n}^n) \in \mu$. Так как X - удовлетворяет свойству γ, то существует последовательность $\xi \subset \mu$, такая что $\underline{\lim}\xi = X$. Из предыдущих рассуждений следует, что если $V \in \xi$, то $V^n \in \eta'$. Рассмотрим последовательность $\xi' = \{V^n | V \in \xi\}$. Очевидно, что $\underline{\lim}\xi' = X^n$. Так как η' вписано в η, то для каждого $W \in \xi'$ существует $U_W \in \eta$, такой что $W \subset U_W$. Пусть $\xi'' = \{U_W | W \in \xi'\}$. Ясно, что $\lim \xi'' = X^n$, что и завершает доказательсво. $\square$

Предложение 25. *Пусть Y - произвольное пространство, $X_t \subset Y$ для каждого $t \in T$. Пусть также $\prod\{X_t | t \in T\}$ обладает γ-свойством, тогда $\cap\{X_t | t \in T\}$ обладает γ-свойством.*

Данное предложение следует из результатов [7, fact 7, S.271] и предложения 22, пункт 2.

Ответ на вопрос о сохранении γ - свойства при бесконечном произведении дает следующее предложение.

Предложение 26. *Пусть $\{X_t\}_{t \in T}-$ семейство пространств со свойством γ, причем каждое X_t содержит не менее двух точек. Тогда $\prod\{X_t | t \in T\}$ не обладает γ-свойством, где $T-$ бесконечное множество.*

Доказательство. Пусть $C = \{0,1\}^{\aleph_0}$ - канторово множество. Для каждого $t \in T$ зафиксируем $\{{x_0}^t, {x_1}^t\} \subset X_t$. Выберем счетное подмножество $T_0 \subset T$, $T_0 = (t_1, t_2, ...)$. Построим отображение $f : C \to D$, где $D \subset \prod\{X_t | t \in T\}$ по следующему правилу: $(f(y))_{t_n} = x_{y_n}^{t_n}$, если же $t \notin T_0$, то $(f(y))_t = x_0^t$. Очевидно, что f является гомеоморфизмом. Так как C не обладает свойством γ и вложено как замкнутое подпространство в произведение пространств X_t, то по предложению 22, пункт 2, то произведение пространств X_t не обладает γ-свойством. $\square$

Итак, γ - свойство не сохраняется при бесконечных произведениях. Ниже показано, что оно не сохраняется и при переходе к пределу обратной последовательности. Напомним определение предела обратной последовательности.

Определение 27. *Пусть* $\Sigma = \left\{X_i, \pi^i_j, \mathbb{N}\right\}$ *- обратная последовательность. Элемент* $\{x_i\}$ *произведния* $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ *называется нитью обратной последовательности* Σ*, если* $\pi^i_j(x_i) = x_j$*, для любых* $i, j \in \mathbb{N}$*, удовлетворяющих неравенству* $i \le j$*. Подпространство* $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ *состоящие из всех нитей, называется пределом последовательности. И обозначается* $\lim \Sigma$

Предложение 28. *Пусть дана обратная последовательность*
$S = \left\{\{0,1\}^i, \pi^i_j, \mathbb{N}\right\}$*. Тогда* $\lim \Sigma$ *не обладает* γ*-свойством.*

Доказательство. Каждое $\{0,1\}^i$ обладает γ-свойством. Пусть C - канторово множество. Построим отображение $h : C \to \lim \Sigma$ следующим образом: $(h(x))_k = (x_1, ..., x_k) \in \{0,1\}^k$. Легко проверить, что построенное отображение является гомеоморфизмом. Следовательно $\lim \Sigma$ не обладает γ-свойством. $\square$

Далее будут рассмотрены результаты , позволяющих несколько сузить круг поисков контрпримера в задаче о прямой сумме γ - пространств.

Теорема 29. *Если* X *обладает свойством* γ*, то* $X \oplus X$ *тоже* γ *- пространство.*

Доказательство. Пусть η открытое ω - покрытие пространства $X \oplus X$. Обозначим пространства из суммы, как X^1 и X^2 соотвественно. Проверим свойство γ, для этого извлечем из покрытие η последовательность, сходящуюся к $X \oplus X$.

Рассмотрим отображение $I : X^1 \to X^2$, заданное по формуле $I(x) = x$. Покажем, что семейство $\eta^1 = \{U \cap X^1 | U \in \eta\} - \omega$ - покрытие пространства

X^1, а также, что семейство $\eta^2 = \{I(U \cap X^1) \cap (U \cap X^2) | U \in \eta\}$ является ω - покрытием пространства X^2.

Первое утверждение очевидно. Пусть K - конечное подмножество X^2. Найдется $U \in \eta$, которое содержит $K \cup I^{-1}(K)$. Тогда $K \subset U \cap X^2$ и $I^{-1}(K) \subset U \cap X^1$, из последнего включения следует, что $K \subset I(U \cap X^1)$. Имеем, что $K \subset I(U \cap X^1) \cap (U \cap X^2) \in \eta^2$. Заключаем, что $\eta^2 - \omega$ - покрытие пространства X^2.

Так как X^1 и X^2 обладают свойством γ, то существует последовательность $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \eta^2$ такая, что $B_n \xrightarrow{n\to\infty} X^2$, где для произвольного $n \in \mathbb{N}$ $B_n = I(U_n \cap X^1) \cap (U_n \cap X^2)$. Пусть $A_n = (U_n \cap X^1) \in \eta^1$. Заметим, так как $X^1 = X^2$, то в X^1 существует семейство множеств $I^{-1}(B_n), n \in \mathbb{N}$. По построению $I^{-1}(B_n) \subset A_n$. По свойству γ, из того, что $I^{-1}(B_n) \xrightarrow{n\to\infty} X^1$ следует, что $A_n \xrightarrow{n\to\infty} X^1$.

Покажем, что $U_n \xrightarrow{n\to\infty} X \oplus X$. Имеем $A_n \oplus B_n \subset U_n \in \eta$. Рассмотрим произвольную точку $x \in X \oplus X$. Если $x \in X^2$, то при $n \geq n_1$ $x \in B_n$. Поскольку $B_n = I(U_n \cap X^1) \cap (U_n \cap X^2)$, то $x \in U_n$, при $n \geq n_1$. Если $x \in X^1$, то при $n \geq n_2$ $x \in A_n$. Поскольку $A_n = U_n \cap X^1$, то $x \in U_n$, при $n \geq n_2$. Пусть $n_3 = max(n_1, n_2)$. Тогда, если $x \in X \oplus X$, то $x \in A_n \oplus B_n$, при $n \geq n_3$. Поскольку $A_n \oplus B_n = (U_n \cap X^1) \oplus I(U_n \cap X^1) \cap (U_n \cap X^2)$, то $x \in U_n$, при $n \geq n_3$.

$\square$

Из выше доказанной теоремы и предложений 22, 23 можно сформулировать следующие следствия.

Следствие 30. *Пусть X является γ - пространством, тогда:*

1) Если $f : X \to Y$ - непрерывное отображение на пространство Y, то из того, что $X \oplus Y$ является непрерывным образом $X \oplus X$ следует, что $X \oplus Y$ обладает γ - свойством;

2) Если $Z \subset X - F_\sigma$ подпространство, то из того, что $X \oplus Z-$ яв-

ляется F_σ подпространством в $X \oplus X$ следует, что $X \oplus Z$ также γ - пространство.

Предложение 31. *Пусть в X выполнено свойство γ и $|Y| \leq \aleph_0$, тогда $X \oplus Y$ обладает свойством γ.*

Доказательство. Покажем, что в $X \oplus Y$ выполняется свойство γ_1. Так как множество $|Y| \leq \aleph_0$, то мы можем пронумеровать каждый элемент Y. Пусть $\eta - \omega$ - покрытие пространства $X \oplus Y$. Выберем в η подсемейство η^1, таким образом, чтобы элементы η^1 содержали точку $y_1 \in Y$. Аналогично, для каждого $n \in \mathbb{N}$ построим подсемейства η^n семейства η, таким образом, чтобы элементы η^n содержали точки $\{y_1, ... y_n\} \in Y$.

Покажем, что семейство $\{\eta^i\}_{i=1}^{\infty} - \omega$ - покрытие пространства X. Действительно, пусть $K \subset X$ - произвольное конечное множество. Добавим к множеству K точку $y_j \in Y$, для произвольного $j \in \mathbb{N}$. Полученное множество будет содержаться в элементе семейства η^j. Таким образом, для произвольного конечного множества K нашелся элемент из семейства $\{\eta^i\}_{i=1}^{\infty}$, который содержит данное конечное множество. Значит $\{\eta^i\}_{i=1}^{\infty}$ является ω - покрытием пространства X.

Так как в X выполнено свойство γ, то по теореме 6 в X выполнено свойство γ_1, то есть существуют $U^n \in \eta^n$ такие, что $\{y_1, ..., y_n\} \in U^n$. По построению видно, что $U^n \xrightarrow{n \to \infty} X \oplus Y$. Действительно, пусть $z \in X \oplus Y$. Если $z \in Y$, то по построению существует U^k, который содержит точку z, при $k \in \mathbb{N}$. Если $z \in X$, то объединив точку z с произвольной точкой $y_j \in Y$, получим, что существует U^k, при $k \in \mathbb{N}$, которое содержит и точку z, и точку y_j. □

Напомним, что пространство X называется P - пространством, если пересечение каждого счетного семейства открытых в X множеств является открытым в X множеством. Теорема 35 ниже показывает, что $C_p(X) \times C_p(Y)$ обладает свойством Фреше–Урысона всякий раз, когда X и Y P -

пространства и $l(X^n) \leq \aleph_0$, $l(Y^n) \leq \aleph_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Перед её доказательством нужны некоторые вспомогательные сведения.

Теорема 32. *[2, II.7.15] Пространство $C_p(X)$ будет обладать свойством Фреше - Урысона, если $X-$ P - пространство и $l(X^n) \leq \aleph_0$, для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Заметим, что примером γ - пространства, не являющегося Р - пространством является обычная сходящаяся последовательность вместе с пределом.

Лемма 33. *Если A и B являются P - пространствами и $l(A) = l(B) \leq \aleph_0$, то $A \times B$ - линделефово.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $\{a\} \times B$, где $a \in A$. Существуют окрестности точек из B и окрестности точки a, такие, что $\{a\} \times B \subset \{U_n^a \times V_n | n \in \mathbb{N}\}$. Так как A является Р - пространством, то семейство $\gamma = \{U^a | a \in A\}$, где $U^a = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n^a$ будет открытым покрытием множества A. Так как $l(A) \leq \aleph_0$, то можно извлечь счетное подпокрытие $\gamma^1 = \{U^{a_k} | k \in \mathbb{N}\}$. Аналогично построим множество $\gamma^2 = \{U^{b_k} | k \in \mathbb{N}\}$ для множества B. Так как каждый элемент любого покрытия можно представить, как объединение некоторого множества окрестностей точек, которые он покрывает, то не уменьшая общности можно считать, что покрытие состоит из некоторого семейства окрестностей. Поэтому семейство $\{U^{a_n} \times U^{b_m} | n, m \in \mathbb{N}\}$ будет счетным покрытием $A \times B$. □

Лемма 34. *Если A и B являются P - пространствами, то $A \times B$ - P - пространство.*

Доказательство. Покажем, что $M = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} G_n$, где G_n - открытые множества в $A \times B$, тоже является открытым. Пусть $x \in M$, тогда существует окрестность $U_n^x \times V_n^x \in G_n$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как A является Р - пространством, то множество $U^x = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n^x$, где каждое U_n^x - открытая окрестность проекции точки x на A, будет открытым в A. Аналогично, множество $V^x = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n^x$, где каждое V_n^x - открытая окрестность проекции точки x на B, будет открытым в B. Получаем, что $U^x \times V^x \subset M$, где $U^x \times V^x$ - открытая окрестность точки x в $A \times B$. $\square$

Теорема 35. *Пусть X и Y P - пространства и $l(X^n) \leq \aleph_0$, $l(Y^n) \leq \aleph_0$. Тогда $X \oplus Y$ P - пространство и $l((X \oplus Y)^n) \leq \aleph_0$.*

Доказательство. Рассмотрим $G \subset X \oplus Y$. Покажем, что $G = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$, где G_n - открытые множества в $A \oplus B$, является открытым множеством. Каждое G_n представимо в виде $G_n^X \oplus G_n^Y$, где $G_n^X = G_n \cap X$ и $G_n^Y = G_n \cap Y$ - открытые множества в пространствах X и Y соотвественно, а также в пространстве $X \oplus Y$. Рассмотрим $G \cap X = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n^X$. Так как каждое G_n^X - открыто в X и $X \oplus Y$, то $G^X = G \cap X$ имеет тип G_δ в X и $X \oplus Y$, откуда следует, что G^X - открыто в X и $X \oplus Y$. Аналогично получаем, что $G^Y = G \cap Y$ - открыто в Y и $X \oplus Y$. Так как $G = G^X \oplus G^Y$, то G - открытое множество в $X \oplus Y$, откуда следует, что $X \oplus Y$ Р - пространство. Ясно, что $l(X \oplus Y) \leq \aleph_0$. Поэтому из вышеизложенных лемм следует, что $l((X \oplus Y)^n) \leq \aleph_0$. $\square$

4 γ-свойство в пространствах ординалов.

Пространства ординалов $[1,\alpha]$, будучи разреженными компактами, могут служить примерами γ - пространств произвольно большого веса (мощности).

Замечание 36. *Пространство X может не обладать свойством γ, даже если оно непрерывно и взаимно однозначно отображается на пространство Y со свойством γ.*

Действительно, рассмотрим пространство $[1,\beta]$, где $\beta-$ несчётный ординал, и тождественное отображение $id : ([1,\beta],\tau_0) \to ([1,\beta],\tau_1)$, где τ_1- порядковая топология, а τ_0- дискретная топология. Очевидно, что id является непрерывной биекцией. Пространство $([1,\beta],\tau_1)$ обладает свойством γ, как разреженный компакт, а $([1,\beta],\tau_0)$ не обладает свойством γ, что следует из предложения 12.

Ниже рассматриваются пространства вида $[1,\beta)$, где β - некоторый ординал.

Определение 37. *Конфинальностью $cf(\tau)$ ординала τ называется наименьший кардинал λ такой, что множество мощности $|\tau|$ можно представить в виде объединения некоторого семейства мощности не большей, чем λ множеств мощности меньшей, чем $|\tau|$.*

Теорема 38. *$[1,\beta)$ обладает свойством γ, тогда и только тогда, когда $cf(\beta)=\aleph_0$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\eta=\big\{[1,\alpha)|\alpha<\beta\big\}-\omega$ - покрытие $[1,\beta)$. Так как $[1,\beta)$ обладает свойством γ, то существует последовательность $\xi = ([1,\alpha_1),\dots[1,\alpha_n)\dots)$ такая, что $\underline{\lim}\xi = [1,\beta)$. Покажем, что $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$. Возьмем произвольную окрестность $(\mu,\beta]$ ординала β. Рассмотрим ординал $\mu+1$. Так как $\underline{\lim}\xi=[1,\beta)$, то существует $n_0\in\mathbb{N}$, такой что $\mu + 1 \in [1, \alpha_k)$ для всех $k \geqslant n_0$. Ясно, что все соответствующие α_k принадлежат окрестности $(\mu, \beta]$. Таким образом, $cf(\beta) = \aleph_0$.

Достаточность. Заметим, что $[1, \beta]$ обладает свойством γ, как разреженный компакт. Если $cf(\beta) = \aleph_0$, то $[1, \beta) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [1, \alpha_n]$. Так как $[1, \beta) \subset [1, \beta]$, то $[1, \beta) - F_\sigma$ - подпространство в $[1, \beta]$. Значит, по предложению 23 имеем, что $[1, \beta)$ обладает свойством γ. $\square$

5 Метризуемость и γ-свойство.

Теорема 39. *Пусть X обладает свойством γ, тогда следующие условия эквивалентны:*
1) $X-$ метризуемо,
2) $w(X) \leq \aleph_0$.

Доказательство. Заметим, что всегда из 2) следует 1).

Покажем, что из 1) следует 2).

Предположим, что $w(X) > \aleph_0$. Так как пространство X метризуемо, то, по критерию Бинга в X существует σ - дискретная база $\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i$, где все $\mathcal{B}_i$ - дискретные семейства. Ясно, что можно считать, что база $\mathcal{B}$ состоит из шаров вида $B(x, 1/m)$, где $m \in \mathbb{N}$. Так как $|\mathcal{B}| > \aleph_0$, то существуют $i_0, m_0 \in \mathbb{N}$, такие, что $|\mathcal{B}_{i_0}| > \aleph_0$, и все шары семейства $\mathcal{B}_{i_0}$ имеют радиус $1/m_0$. Пусть X_0- множество центров шаров семейства $\mathcal{B}_{i_0}$. Понятно, что $|X_0| > \aleph_0$.

Покажем, что $F = \bigcup_{x \in X_0} \overline{B(x, 1/2m_0)}-$ замкнутое подмножество в X. Заметим, что $\{\overline{B(x, 1/2m_0)}/x \in X_0\}-$ дискретное семейство, так как $\overline{B(x, 1/2m_0)} \subset B(x, 1/m_0)$.

Пусть $y \notin F$. Тогда существует окрестность Oy такая, что $a = |\big\{x \in X_0 | Oy \cap \overline{B(x, 1/2m_0)} \neq \emptyset\big\}| \leq 1$. Если $a = 0$, то $y-$ внутренняя точка дополнения до F. Если $a = 1$, то существует $O'y \subset Oy$ такая, что $O'y \cap \overline{B(x, 1/2m_0)} = \emptyset$ при любом $x \in X_0$. Заметим, что если не существует $O'y \subset Oy$ такой что, $O'y \cap \overline{B(x, 1/2m_0)} = \emptyset$, то $y \in F$, что противоречит выбору y. Итак, $F-$замкнутое множество в X.

Пусть $U_K = \bigcup_{x \in K} B(x, 1/m_0)$, где $K-$конечное подмножество в X_0. Положим $\eta = \big\{U_k | K \subset X_0\big\}$. Очевидно, что ω - покрытие F. Так как X обладает свойством γ, то его замкнутое подмножество F также обладает свойством γ. Извлечём из η последовательность $\xi = \big\{U_{k_n}\big\}$, сходящуюся к F. Каждый элемент ξ равен $\bigcup_{x \in K} \overline{B(x, 1/m_0)}$, где $K-$ некоторое конечное подмножество в X_0. Объединение счетного числа конечных множеств счетно, что противоречит несчётности множества шаров, принадлежащих семейству F.

$\square$

Заметим, что вывести 2) из 1) можно было и другим способом. А именно, каждое γ-пространство линделефово и каждое метризуемое пространство обладает первой аксиомой счетности. Но известно [1], что линделефовы пространства с первой аксиомой счетности имеют счетный вес.

Заметим также, что в теореме 39 метризуемость X можно ослабить до первой аксиомы счетности. Действительно, известно, что с одной стороны из метризуемости следует первая аксиома счетности, с другой стороны линделефово пространство с первой аксиомой счетности метризуемо.

Далее, из [1] известно, что первую аксиому счетности, в свою очередь, можно ослабить до свойства Фреше - Урысона. При этом, из свойства Фреше - Урысона не следует первая аксиома счетности. Примером γ - пространства со свойством Фреше - Урысона, но без первой аксиомы счетности является, так называемый "счетный ёж".

Пространство "счетный ёж"строится из центральной точки O и семейства последовательностей $\{\{x_i{}^j\}_{i=0}^{\mathbb{N}} | j \in \mathbb{N}\}$ сходящихся к O. С топологией, в которой базисная окрестность точки O состоит из всех точек $x_i{}^j$ для которых $i > k_j$, для некоторого k_j, а остальные точки являются изолированными. Очевидно, что "счетный ёж"является γ пространством, так как его мощность счетна. При этом известно, что у точки O нет счетной ф.с.о..

Более того, если изменить у точки O фундаментальную систему окрестностей, а именно считать базисной окрестностью множество всех точек прежней базисной окрестности не входящих в конечное число x_i, то "счетный ёж"перестанет быть пространством Фреше - Урысона.

Предложение 40. *Пусть X обладает свойством γ и метризуемо, тогда*

$|X| \le C$.

Доказательство. По теореме 39 в пространстве X существует счетная база $\mathcal{B} = \{U_i | i \in \mathbb{N}\}$. Каждому $x \in X$ поставим в соответствие (счётное) семейство $B_x = \{U_i | x \in U_i\}$. Так как мощность семейства всех подмножеств в счетном множестве не более чем мощность континуума $\mathfrak{c}$, то $|X| \le \mathfrak{c}$. □

Определение 41. *Экстентом $e(X)$ пространства X называется наименьший бесконечный кардинал τ, такой, что мощность каждого замкнутого дискретного подпространства пространства X не превосходит τ.*

Предложение 42. *Если X обладает свойством γ, то $e(X) \le \aleph_0$.*

Доказательство. Действительно, каждое замкнутое дискретное подмножество обладает свойством γ, откуда следует, что $e(X) \le \aleph_0$

□

Определение 43. *Дискретной клеточностью пространства X называется кардинал $dc(X) = sup\{|U||U$ - дискретное семейство не пустых открытых множеств в $X\}$*

Предложение 44. *Если X обладает свойством γ, то $dc(X) \le \aleph_0$.*

Доказательство. Предположим, что $dc(X) > \aleph_0$. Рассмотрим тогда $Y \subset X-$ замкнутое дискретное подпространство, построенное следующим образом: в каждом элементе некоторого дискретного несчётного семейства открытых подмножеств пространства X взято по произвольной точке. Получаем, что $|Y| > \aleph_0$ и Y должно иметь свойство γ. Но это противоречит предложению 12.

□

Список литературы

[1] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.

[2] Архангельский А.В.. Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989. 222с.

[3] Galvin F. On the Frechet-Urysohn property in spaces of continuous functions. In: Zdenek Frolik (ed.): Abstracta. 9th Winter School on Abstract Analysis. Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1981. P. 29-31.

[4] Galvin F., Miller A. γ-sets and other singular sets of real numbers, I, Topol. and App. 1984.V. 17, P. 145-155.

[5] Gerlits J., Nagy Zs., Some properties of C(X), I, Topol. and App. 1982. V. 14, N 2, P. 151-161.

[6] Natasha May, Santi Spadaro, Paul Szeptycki, A new class of spaces with all finite powers Lindel?f, Topol. and App. 2014. V. 170, P. 104-118.

[7] Tkachuk, V.V., A Cp-Theory Problem Book Topological and Function Spaces. Springer, 2010.

[8] Бадмаев О.О., О топологических пространствах с γ - свойством // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»: Сб. статей. - Томск, 2017. - С. 24 - 29.

[9] Arnold W. Miller, Boaz Tsaban, Lyubomyr Zdomskyy, Selective covering properties of product spaces. Annals of Pure and Applied Logic. 2014. V. 165, N 5, P. 1034-1057.

[10] В. В. Федорчук, Основы теории размерности. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 17 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1987, 111—224.

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: badmaev1995@bk.ru / ID: 1584594
Проверяющий: (badmaev1995@bk.ru / ID: 1584594)

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»- http://www.antiplagiat.ru

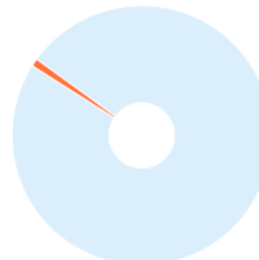
ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 10
Начало загрузки: 13.06.2018 06:58:29
Длительность загрузки: 00:00:01
Имя исходного файла: диссертация Бадмаев О.О
Размер текста: 294 кБ
Символов в тексте: 36132
Слов в тексте: 5215
Число предложений: 890

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 13.06.2018 06:58:31
Длительность проверки: 00:00:01
Комментарии: не указано
Модули поиска:

ЗАИМСТВОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
0,23%	**0%**	**99,77%**



Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.
Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа.
Заимствования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.
Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Доля в тексте	Источник	Ссылка	Актуален на	Модуль поиска	Блоков в отчете	Блоков в тексте
[01]	0,23%	0,23%	Основы теории размерности	http://ruthenia.info	07 Янв 2017	Модуль поиска Интернет	2	2