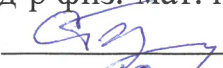


Министерство образования и науки Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Механико-математический факультет
Кафедра общей математики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК

Руководитель ООП

д-р физ.-мат. наук, профессор

 С.П.Гулько
« 10 » июня 2018 г.

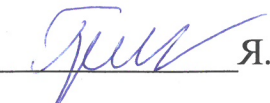
МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ЗАПИСЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ В РАЗЛИЧНЫХ
ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ КАК ОСНОВА ДЛЯ
ПОСЛЕДУЮЩЕГО ИЗУЧЕНИЯ ДЕЙСТВИЙ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ

по основной образовательной программе подготовки магистров
направление подготовки 01.04.01 Математика

Лапатин Алексей Леонидович

Научный руководитель ВКР

Доцент

 Я. С. Гриншпон

« 09 » июня 2018г.

Автор работы:

студент группы

 № 04603(М)
А.Л. Лапатин

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Глава 1. Основные теоретические сведения.	7
§ 1.1. Позиционные системы счисления.	7
§ 1.2. Признаки делимости в позиционных системах счисления.	9
§ 1.3. Исторический обзор.....	13
Глава 2. Задачи на позиционные системы счисления.	18
§ 2.1. Задачи на десятичную запись натуральных чисел.	18
2.1.1. Задачи, содержащие условие, связанное с суммой цифр.....	18
2.1.2. Задачи, содержащие условие, связанное с обратным прочтением числа	20
§ 2.2. Задачи на недесятичные системы счисления.	25
2.2.1. Задачи, содержащие условие, связанное с суммой цифр.....	25
2.2.2. Задачи, содержащие условие, связанное с обратным прочтением числа	27
2.2.3. Задачи на определение основания позиционной записи.....	31
§ 2.3. Описание курса.	34
Глава 3. Арифметические действия над целыми числами и над многочленами от одной переменной.	37
§ 3.1. Сложение и вычитание.	37
§ 3.2. Умножение.....	43
§ 3.3. Деление.	46
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	54
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.	55

ВВЕДЕНИЕ

Понятие целого числа является одним из основополагающих и стрессовых понятий математического образования на всех его стадиях. Практически любой раздел математики в той или иной мере связан с целыми числами. Ведь на фундаменте свойств целых чисел строятся системы рациональных, а затем и действительных чисел. Параллельно с этим путем замены конкретных чисел на буквы происходит переход к буквенным выражениям, а затем и к функциям.

Одним из важнейших примеров буквенных выражений являются многочлены. Многочлены являются связующим звеном между близким к теории целых и рациональных чисел алгебраическим подходом (т.е. подходом, основанном на рассмотрении свойств арифметических операций) и близким к теории действительных чисел подходом математического анализа (т.е. подходом, основанном на рассмотрении свойств предельного перехода и непрерывности). С этой точки зрения, многочлены играют чрезвычайно важную роль в математическом образовании, так как их изучение поддерживает целостность и неразрывность математических курсов «Математика 5-6 классы», «Алгебра 7-9 классы» и «Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы».

Отметим, что многочлены от одной переменной можно интерпретировать не только как буквенные выражения, но и как функции, заданные на множестве всех действительных чисел. Более того, в некотором смысле многочлены от одной переменной с любой заданной точностью позволяют описывать свойства почти любой «достаточно хорошей» функции (точнее, многочлен Тейлора в окрестности заданной точки сходится к бесконечно дифференцируемой функции).

Можно сказать, что как целые числа являются основой для изучения других числовых систем, так же и многочлены являются основой для изучения других функций. Существующая логическая связь между целыми

числами и многочленами от одной переменной находит отражение в схожести многих терминов и теорем, связанных с этими математическими объектами.

Следующая таблица иллюстрирует этот факт. В ней приведены примеры использования схожих понятий при оперировании с целыми числами и с многочленами.

Целые числа	Многочлены от одной переменной
Сложение и вычитание	
$\begin{array}{r} + 8573 \\ - 416 \\ \hline 8989 \end{array}$	$\begin{array}{r} - x^3 + 2x^2 + 4x - 6 \\ \quad x^2 + x - 7 \\ \hline x^3 + x^2 + 3x + 1 \end{array}$
Умножение	
$\begin{array}{r} \times 243 \\ \quad 31 \\ \hline + 243 \\ \quad 729 \\ \hline 7533 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times a^2 - 2a + 1 \\ \quad a - 4 \\ \hline + -4a^2 + 8a - 4 \\ \quad a^3 - 2a^2 + a \\ \hline a^3 - 6a^2 + 9a - 4 \end{array}$
Деление с остатком	
$\begin{array}{r} 382 \quad 12 \\ 36 \quad 31 \\ \hline 22 \\ 12 \\ \hline 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + 3x + 7 \quad x^2 + x - 2 \\ \underline{2x^3 + 2x^2 - 4x} \quad 2x - 3 \\ -3x^2 + 7x + 7 \\ \underline{-3x^2 - 3x + 6} \\ 1 \end{array}$
Делимость	
$18 : 6, 120 : 6 \Rightarrow 138 : 6$	$(x^2 - 1) : (x - 1), (3x - 3) : (x - 1) \\ \Rightarrow (x^2 + 3x - 4) : (x - 1)$
НОД и НОК	
$\text{НОД}(18, 33) = 3$	$\text{НОД}(x^2 - 1, x^5 + x - 2) = x - 1$
Неприводимость (простота ¹)	
7 – простое число	$x^2 + 1$ – неприводимый многочлен

Первые три строчки таблицы показывают, что особенно удобно учитывать схожесть свойств целых чисел и многочленов при обучении

¹ Понятие простоты определяют только для целых чисел, больших единицы.

стандартным алгоритмам выполнения арифметических действий (сложение, вычитание и умножение «в столбик», деление «уголком»). Это наблюдение и стало основной идеей данной работы.

Для более детальной проработки этой идеи необходимо остановиться на вопросе о том, как организован процесс изучения целых (и в частности, натуральных) чисел в современной российской системе образования.

Знакомство с натуральными числами происходит еще в дошкольный этап развития ребенка. В начальной школе понятие натурального числа вводится более системно, а именно, изучаются поразрядная запись числа, сравнение чисел и арифметические действия над ними. Большое внимание уделяется отработке навыка выполнения арифметических действий с помощью специальных алгоритмов (сложение, вычитание и умножение «в столбик», деление «уголком»). Освоение школьниками этих алгоритмов позволяет им достаточно быстро и эффективно получать верный вычислительный результат.

При изучении данных алгоритмов в начальной школе, как правило, не затрагивается вопрос о том, на чем основаны эти способы вычислений. Методически такой подход можно признать оправданным, так как большинству младших школьников трудно проводить рассуждения общего характера, и поэтому попытка строгого логического обоснования алгоритмов скорее всего не найдет отклика у детей.

При переходе же в среднее звено ученики сталкиваются с тем, что учителя математики считают вопросы арифметики натуральных чисел уже пройденным этапом, и вычислительные навыки при этом являются лишь инструментом, необходимым для решения более сложных задач. Поэтому в средней и старшей школе проблема обоснования алгоритмов выполнения арифметических действий так же, как правило, не обсуждается.

Отметим, что способ сложения и вычитания «в столбик» интуитивно понятен учащимся любого возраста, как поразрядное сложение и вычитание. Понимания же смысла умножения «в столбик» и, тем более, деления

«уголком» нет не только у младших школьников, но и у большинства учеников старших классов.

Каким же образом можно восполнить данный пробел в знаниях учащихся? Одним из возможных вариантов представляется введение в курс обучения школьников 5-8 классов задач, способствующих пониманию ими сути десятичной записи натуральных чисел, записи чисел в других позиционных системах счисления, правил выполнения арифметических операций над числами в различных системах счисления.

Таким образом, целями данной работы являются:

- создание банка задач по темам «Десятичная запись натуральных чисел» и «Позиционные системы счисления»;
- разработка факультативного курса, посвященного десятичной и недесятичным позиционным системам счисления;
- разработка методики обоснования стандартных алгоритмов выполнения арифметических действий над целыми числами и над многочленами от одной переменной.

Глава 1. Основные теоретические сведения.

§ 1.1. Позиционные системы счисления.

Понятие позиционной записи.

Под записью

$$A = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n (p) \quad (1),$$

где $0 \leq a_1, a_2, \dots, a_n < p$, $a_1 \neq 0$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – целые числа, p – натуральное число, $p \neq 1$, понимают число, равное

$$A = a_1 \cdot p^{n-1} + a_2 \cdot p^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot p^1 + a_n \cdot p^0 \quad (2).$$

Символы, обозначающие числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, называют цифрами. Число n – количество слагаемых в сумме (2) и количество цифр в записи (1), при этом число A называют n -значным. Число p называют основанием позиционной записи числа или основанием позиционной системы счисления.

Выражение (2) называют суммой разрядных слагаемых числа A . К сумме разрядных слагаемых можно относиться как к значению многочлена $f(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ в точке $x = p$.

Замечание 1. При записи чисел в позиционной системе с основанием 10 принято основание не указывать: $1893_{(10)} = 1893$.

Замечание 2. Позиционные системы с заданным натуральным основанием иногда называют традиционными позиционными системами счисления, чтобы их отличать от позиционных систем другого вида (например, нега-позиционные, факториальная и т.д.)

Замечание 3. Из формулы (2) видно, что число A является натуральным. Таким образом, традиционная позиционная запись применима только для натуральных чисел. Но эту запись легко обобщить на целые числа. Для представления числа ноль используется запись, состоящая из одной цифры 0, а для представления отрицательных чисел перед позиционной записью противоположного натурального числа ставится символ «–» («минус»).

Докажем, что любое натуральное число можно единственным образом записать в позиционной системе счисления с заданным основанием. Другими словами, из формулы (1) ясно, что позиционная запись позволяет однозначно определить соответствующее ей натуральное число. Мы же покажем, что верно и обратное утверждение: натуральное число однозначно определяет свою позиционную запись. Таким образом, при фиксированном основании (по умолчанию, в десятичной системе) можно будет отождествлять натуральные числа и их позиционные записи, т.е. не различать понятия «число сто» и «число 100» (т.е. число, записываемое единицей и двумя нулями).

Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что число A имеет две различные записи в системе счисления с основанием p :

$$A = a_1 \dots a_{n-1} a_n (p) = b_1 \dots b_{n-1} b_n (p).$$

Тогда, учитывая, что $p^1 = p$ и $p^0 = 1$, имеем

$$a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = b_1 \cdot p^{n-1} + \dots + b_{n-1} \cdot p + b_n.$$

Преобразуем:

$$(a_1 \cdot p^{n-2} + \dots + a_{n-1} - b_1 \cdot p^{n-2} - \dots - b_{n-1}) \cdot p = b_n - a_n.$$

Следовательно, $(b_n - a_n) : p$. С другой стороны, так как a_n и b_n – цифры, то $-p + 1 \leq b_n - a_n \leq p - 1$. Но в промежутке $[-p + 1; p - 1]$ содержится единственное целое число, кратное p , – ноль. Значит, $b_n = a_n$.

Аналогично доказывается, что и остальные цифры совпадают, что противоречит различности записей числа A . Полученное противоречие обосновывает, что существует единственная позиционная запись числа A .

§ 1.2. Признаки делимости в позиционных системах счисления.

Многие свойства числа A определяются свойствами его позиционной записи, в частности, это справедливо для так называемых признаков делимости. Но необходимо четко понимать, что при изменении основания p эти свойства (в частности, признаки делимости) могут изменяться.

Поясним, что под признаками делимости общепринято понимать теоремы, устанавливающие равносильность между делимостью произвольного натурального числа A на некоторое фиксированное натуральное число m и свойствами позиционной записи числа A . Большинство признаков делимости являются следствиями признаков равноостаточности, устанавливающих равенство остатков для числа A и для некоторого арифметического выражения, содержащего цифры числа A .

Напомним определения деления с остатком и делимости.

Определение. Пусть даны два целых числа a и b , причем $b \neq 0$. Говорим, что a разделили на b с остатком, если существуют такие два целых числа q и r , что $a = bq + r$ и $0 \leq r < |b|$. При этом, q называется неполным частным, а r остатком при делении a на b .

Известно, что для любых целых a и b ($b \neq 0$) деление с остатком выполнимо, причем единственным образом.

Определение. Если для некоторого целого числа a и целого числа b существует такое целое число q , что $bq = a$, то говорят, что число a делится нацело на b или a делится на b без остатка и пишут $a : b$. Часто слова «нацело» и «без остатка» опускают и говорят, что a делится на b .

Если $a : b$, то b называют делителем a , или говорят, что a кратно b . Число q при этом называется частным от деления a на b .

Приведем основные признаки равноостаточности и делимости, справедливые для произвольной позиционной системы счисления, обобщающие общеизвестные признаки для десятичной системы (признаки для десятичной системы будем воспроизводить как следствия более общих признаков).

При доказательстве этих признаков мы будем опираться на **основное свойство остатков**: сумма (разность, произведение) двух целых чисел и сумма (разность, произведение) их остатков при делении на некоторое целое ненулевое число имеют одинаковые остатки при делении на это число. Другими словами, если числа a и b имеют остатки c и d при делении на число m , то остатки от деления чисел $a + b$ ($a - b$, ab) на m равны остаткам от деления чисел $c + d$ ($c - d$, cd) на m .

Применяя основное свойство остатков для произведения чисел n раз, получим, что, если число a имеет остаток c при делении на m , то числа a^n и c^n имеют равные остатки при делении на m .

Легко показать, что основное свойство остается справедливым, если в определении деления с остатком выбирать остатки не из промежутка $[0; b)$, а из любого промежутка, содержащего b целых чисел.

Отметим, что применение теории сравнений по целому модулю позволило бы более компактно записать доказательства рассматриваемых признаков делимости. Но, учитывая, что в базовом курсе школьной математики сравнения не изучаются, приведем доказательства, не использующие аппарат сравнений.

Теорема 1. Если $p^k : m$, то в системе счисления с основанием p остаток от деления числа A на m равен остатку от деления на m числа, составленного из k последних цифр числа A .

Доказательство. Пусть $A = a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-k} \cdot p^k + \dots + a_n \cdot p^0$ – поразрядная запись числа A . Так как остаток от деления p^k на m равен нулю, то для всех $l \geq k$ из равенства $p^l = p^k \cdot p^{l-k}$ и основного свойства остатков следует, что $p^l : m$. Значит, $a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-k} \cdot p^k : m$, и остаток числа A при делении на m равен остатку числа $B = a_{n-k+1} \cdot p^{k-1} + \dots + a_n \cdot p^0$. Осталось заметить, что число B – это число, составленное из k последних цифр числа A .

Следствие 2. Если $p^k : m$, то в системе счисления с основанием p число A делится на m тогда и только тогда, когда число, составленное из k последних цифр числа A делится на m .

Следствие 3. Если $p : m$, то в системе счисления с основанием p число A делится на m тогда и только тогда, когда последняя цифра числа A делится на m .

Следствие 4. В системе счисления с основанием p число A делится на p тогда и только тогда, когда последняя цифра числа A равна нулю.

Следствие 5. В десятичной системе счисления число A делится на 4 (на 25) тогда и только тогда, когда, число, оставленное из двух последних цифр числа A , делится на 4 (на 25).

Следствие 6. В десятичной системе счисления число A делится на 2 (на 5) тогда и только тогда, когда последняя цифра числа A делится на 2 (на 5).

Следствие 7. В десятичной системе счисления число A делится на 10 тогда и только тогда, когда последняя цифра числа A равна нулю.

Теорема 8. Если $(p - 1) : m$, то в системе счисления с основанием p остаток от деления числа A на m равен остатку от деления на m суммы цифр числа A .

Доказательство. Пусть $A = a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-k} \cdot p^k + \dots + a_n \cdot p^0$ – поразрядная запись числа A . Так как остаток от деления p на m равен одному, то по основному свойства остатков остаток от деления p^k также равен одному для всех натуральных k . С другой стороны, $p^0 = 1$, и значит, тоже дает остаток один. Таким образом, число A имеет тот же остаток при деления на m , что и число $a_1 + \dots + a_{n-k} + \dots + a_n$.

Следствие 9. Если $(p - 1) : m$, то в системе счисления с основанием p число A делится на m тогда и только тогда, когда сумма цифр числа A делится на m .

Следствие 10. В десятичной системе счисления число A делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма цифр числа A делится на 3 (на 9).

Для формулировки следующего признака удобно ввести понятие знакопередающей суммы цифр числа A , т.е. выражения вида $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \dots + (-1)^{n-1}a_1$. Другими словами, если читать позиционную запись числа A справа налево, то цифры, стоящие на нечетных позициях, берутся со знаком «+», а цифры, стоящие на четных позициях, – со знаком «-».

Теорема 11. Если $(p + 1) : m$, то в системе счисления с основанием p остаток от деления числа A на m равен остатку от деления на m знакопередающей суммы цифр числа A .

Доказательство. Пусть $A = a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-k} \cdot p^k + \dots + a_n \cdot p^0$ – поразрядная запись числа A . Можно считать, что «остаток» от деления p на m равен минус одному. Значит, по основному свойству остатков остаток от деления p^k равен одному для всех четных k , и минус одному для нечетных k . Таким образом, число A имеет тот же остаток при деления на m , что и число $a_n - a_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}a_1$.

Следствие 12. Если $(p + 1) : m$, то в системе счисления с основанием p число A делится на m тогда и только тогда, когда знакопередающая сумма цифр числа A делится на m .

Следствие 13. В десятичной системе счисления число A делится на 11 тогда и только тогда, когда знакопередающая сумма цифр числа A делится на 11.

§ 1.3. Исторический обзор.

Доподлинно неизвестно когда возникло цивилизованное человечество, так же как и нет единого мнения на счет причин, приведших к появлению разумного человека, обладающего аналитическим мышлением. Наиболее распространена сегодня версия о том, что человек – достаточно молодой вид, его возраст исчисляется тысячами, в крайнем случае, десятками тысяч лет. Скорее всего, это связано с тем, что свидетельства о деятельности человека в более ранние периоды либо очень скудны, либо полностью отсутствуют.

Как бы давно ни существовал разумный человек на этой планете, любая его организованная деятельность обязательно должна быть сопряжена с понятием о количестве и, как следствие, с существованием какого-то счета. Конечно, это не означает, что во все времена люди знали математику в том виде, как мы себе ее представляем. Однако невозможно представить, что человек когда-то совсем не умел считать. Сегодня доказано, что даже многие животные и насекомые используют счет в своей деятельности. Скорее всего, интуитивное понятие о числе заложено в нас с рождения, что подтверждается наблюдениями за маленькими детьми, еще не умеющими говорить.

Исходя из сказанного выше, имеет смысл говорить не о месте и времени возникновения счета, а о формах его использования в различное время в разных местах.

Разнообразие систем счисления.

Речь пойдет о разнообразии способов и форм фиксации и передачи информации, связанной с количеством. Например, существует описание племени людей, не дошедших даже до счета на пальцах, однако умевших все же передавать информацию о количестве предметов, имевших важное значение в их практической деятельности. Роль чисел выполняли общеизвестные эталонные предметы и объекты: один – луна, солнце, два – губы, глаза, уши, пять – одна рука, десять – две руки. «Ты у меня одна, словно в небе луна...» – мы тоже не прочь использовать подобные обороты,

однако мы не пользуемся ими постоянно так как имеем более подходящий ДЛН НАС способ передачи сведений о количестве.

Унарная система счисления.

Унарная система счисления является самым простым и, по-видимому, самой древним способом записи количественной информации. В этой системе используется только одна цифра. Она может обозначаться любым символом, например, зарубками на дереве.

Аддитивные системы счисления.

Здесь уже могут использоваться несколько символов. Например в Египте один записывали палочкой |, а десять обозначалось дугой для упряжки ∩, десяток десятков - одна мерная веревка , и т. д. Для того, чтобы прочесть число, нужно было сложить значения всех цифр. Поэтому такие системы называли аддитивными (англ. «add» – «складывать»). Эти системы счисления не очень удобны для выполнения арифметических операций. Любое арифметическое действие (а особенно, умножение и деление) вызывает серьезные затруднения, и требует длительной тренировки для его освоения. Такими системами счисления пользовались Египтяне, Ацтеки, племена Майя.

Заметим, что унарную систему счисления можно считать частным случаем аддитивной системы, так как в ней также складываются значения цифр, просто все эти значения равны единице.

Алфавитные аддитивные системы счисления.

Это разновидность аддитивной системы, в которой в роли цифр выступали буквы алфавита. Такими системами счисления пользовались римляне, греки, арабы, евреи, сирийцы, славяне, грузины.

Мультипликативные системы счисления

В таких системах счисления для записи чисел используется определенное количество символов, принимающих разные значения в зависимости от своей позиции, а именно, значение цифры умножается на вес позиции, в которой эта цифра записана (англ. «multiply» – «умножать»).

Такой подход значительно упрощает выполнение арифметических действий над числами, позволяет систематизировать и алгоритмизировать способы этих действий.

Заметим, что системы счисления, в которых порядок записи цифр не влияет на значение числа, называют непозиционными. А системы счисления, в которых значение числа зависит от порядка записи цифр, называют позиционными. С этой точки зрения, аддитивные системы являются непозиционными, а мультипликативные – позиционными. В истории человечества существовали и промежуточные варианты, так называемые полупозиционные системы. Например, в римской системе каждая буква-цифра имеет значение, независимое от занимаемой позиции, например, I – это один, V – это пять и т.д. Но записи IV и VI означают разные числа, а именно, 4 и 6 соответственно.

Важно отметить, что математика не могла бы плодотворно развиваться без системы счисления, удобной для проведения различных расчетов. Наилучшей в этом смысле оказалась мультипликативная позиционная система счисления, в которой вес каждой следующей позиции в одно и то же количество раз больше веса предыдущей позиции (такие системы счисления называют традиционными позиционными или позиционными системами с данным основанием). Сегодня мы используем как раз такую систему счисления с основанием десять.

Считается, что такой подход к записи чисел использовали в Древнем Вавилоне, почти в это же время в Китае, потом в Индии. Оттуда позиционная система счисления перешла на Аравийский полуостров, а затем и в Европу. Здесь эту систему стали называть Арабской, и под этим названием она сегодня известна всему миру. Так что, говоря «арабские числа» надо иметь в виду, что они как минимум индийские.

Шестидесятеричная система счисления

Самой распространенной гипотезой сегодня о происхождении шестидесятеричной системы является предположение, что она явилась

результатом использования в одно время двенадцатеричной и пятеричной систем. Ее использовали в Вавилоне. Далее, через Грецию, до средневековых европейских ученых дошли астрономические учения Вавилона. Поэтому шестидесятеричные дроби приобрели название «астрономические». Эти дроби использовались для записи астрономических координат — углов. Сегодня для измерения углов до сих пор используется знаменатель 60. В одном градусе 60 минут и в одной минуте 60 секунд, в развернутом угле три раза по 60 градусов, а 60 градусов – это угол равностороннего треугольника.

В средние века в Европе предпринимались отдельные попытки повсеместно внедрить шестидесятеричную систему. К положительной стороне этой системы можно причислить тот факт, что 60 кратно 2, 3 и 5 – первым трем простым числам, в отличие от десятичной. Каждый сталкивался с неудобством деления десятичных дробей на 3 – одно из основополагающих чисел любого математического учения.

Начиная с XVI века, десятичные дроби в Европе полностью вытеснили шестидесятеричные. Сейчас следы шестидесятеричной системы можно видеть на циферблате часов и на транспорте.

Двоичная система счисления

Двоичная позиционная система счисления (и родственные с ней восьмеричная и шестнадцатеричная системы) с 50-х годов прошлого века используется для представления данных в электронно-вычислительной технике. Часто для удобства взаимодействия человека с компьютером используется смешанная двоично-десятичная система. Это общепринятая десятичная система, но каждая цифра записывается с помощью четырехзначного двоичного кода.

Интересен факт, что так называемый русский крестьянский способ умножения обосновывается представлением множителей в двоичной системе, хотя нет сведений о том, чтобы наши предки как-то эту систему применяли или вообще были с ней знакомы.

Вообще, как оказывается, двоичная система находит применение во многих разделах математики. Например, многие комбинаторные формулы удобно выводить, используя двоичное кодирование; также с помощью двоичной системы обосновывается алгоритм быстрого возведения в натуральную степень.

Десятичная система счисления

На сегодняшний день во всем мире общепринята позиционная десятичная система счисления. Мы так к ней привыкли, что все остальные системы воспринимаем как иностранные языки. Однако изучение этих языков помогает понять образ мышления тех людей, для которых эти системы были родными.

Глава 2. Задачи на позиционные системы счисления.

§ 2.1. Задачи на десятичную запись натуральных чисел.

2.1.1. Задачи, содержащие условие, связанное с суммой цифр

Обоснование стандартных алгоритмов арифметических действий над натуральными числами невозможно без глубокого понимания поразрядной десятичной записи. Наиболее эффективный способ усвоения данной формы записи чисел (кажущейся ученикам настолько привычной и естественной, что у них даже не возникает потребности задуматься над ее смыслом) – это разбор задач, решение которых требует одновременной работы и с числами, записанными с помощью некоторых цифр, и с суммой этих цифр. При решении этих задач требуется переходить от записей вида $\overline{ab}$ к записям $10a + b$ (отметим, что в задачах на десятичную запись общепринято число, составленное из цифр a и b , обозначать $\overline{ab}$, чтобы не путать с произведением ab).

Задача 1. Найдите двузначное число, которое в два раза больше суммы его цифр.

Решение. Одно из решений, восемнадцать, – находится подбором. Есть ли другие решения? Чтобы это выяснить, эффективнее использовать не полный перебор, а решать в общем виде. Пусть искомое число имеет вид $\overline{ab} = 10a + b$. Тогда

$$10a + b = 2(a + b);$$

$$8a = b.$$

Ограниченность множества цифр позволяет легко установить, что b , кратное восьми, может быть равно только восьми. Соответственно, $a = 1$.

Ответ: 18.

Задача 2. Найдите двузначное число, которое в четыре раза больше суммы его цифр.

Решение. Первое подходящее число 12. С помощью перебора можно найти остальные решения, либо установить, что таковых больше нет. Однако аналитический подход дает полную картину с меньшими трудозатратами.

$$10a + b = 4(a + b)$$

$$2a = b$$

Решение свелось к условию, что вторая цифра в два раза больше первой. Этому условию удовлетворяют четыре числа.

Ответ: 12, 24, 36, 48.

Задача 3. Найдите двузначное число, которое в десять раз больше суммы его цифр.

Решение. Легко заметить, что все числа, оканчивающиеся на ноль, удовлетворяют условию задачи. Докажем, что других решений нет.

$$10a + b = 10(a + b)$$

$$b = 0$$

Ответ: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Задача 4. Найдите двузначное число, которое в одиннадцать раз больше суммы его цифр.

Решение.

$$10a + b = 11(a + b)$$

$$a + 10b = 0$$

Последнее равенство невозможно, так как a – положительное число, а b – неотрицательное.

Ответ: таких чисел не существует.

Подборка задач типа 1-4 полезна тем, что она иллюстрирует разнообразие возможных результатов при решении, казалось бы, совершенно однотипных задач. Тем самым, эти задачи обосновывают необходимость не останавливаться на первом найденном решении, а либо проводить полный перебор, либо, что оказывается более эффективным, решать задачу аналитически в общем виде.

Приведем пример более сложной задачи на сумму цифр.

Задача 5. Сумма цифр числа x равна y , а сумма цифр числа y равна z . Найдите x , если $x + y + z = 60$.

Решение. Если x – однозначное число, то $x + y + z \leq 27$. Если x – трехзначное число или более, то $x + y + z$ по крайней мере трехзначно. Значит, x является двузначным. Пусть $x = \overline{ab}$. Тогда $x = 10a + b$, $y = a + b$.

Если y – однозначное, то $z = y = a + b$. Имеем

$$\begin{aligned}x + y + z &= (10a + b) + (a + b) + (a + b) = 12a + 3b = 60, \\b &= 20 - 4a.\end{aligned}$$

Откуда $a = 3$, $b = 8$ или $a = 4$, $b = 4$ или $a = 5$, $b = 0$. Первый ответ не подходит, так как y не является однозначным. Итак, $x = 44$ или $x = 50$.

Если y – двузначное, то в разряде десятков y числа y стоит цифра 1, так как $a + b \leq 18$. Поэтому $z = a + b - 10 + 1$. Имеем

$$\begin{aligned}x + y + z &= (10a + b) + (a + b) + (a + b - 9) = 12a + 3b - 9 = 60, \\b &= 23 - 4a.\end{aligned}$$

Откуда $a = 4$, $b = 7$ или $a = 5$, $b = 3$. Последний ответ не подходит, так как y не является двузначным. Итак, $x = 47$.

Ответ: 44, 47, 50.

2.1.2. Задачи, содержащие условие, связанное с обратным прочтением числа

Задачи на обратное прочтение числа методически немного сложнее задач на сумму цифр, так как теперь требуется уметь записывать поразрядно не только исходное число, но и число, полученное перестановкой цифр.

Задача 6. Если данное двузначное число записать наоборот, и к полученному числу прибавить сумму его цифр, то получим утроенное данное число. Найдите данное число.

Решение. Если исходное число имеет вид $\overline{ab} = 10a + b$, то записанное наоборот число имеет вид $\overline{ba} = 10b + a$. Тогда из условия задачи получим уравнение на цифры a и b :

$$(10b + a) + (a + b) = 3(10a + b),$$

$$7a = 2b,$$

$$a = 2, b = 7.$$

Ответ: 27.

Задача 7. Если из данного двузначного числа вычесть 10, а полученный результат умножить на 2, то получим данное число, записанное наоборот. Найдите данное число.

Решение.

$$\overline{ab} = 10a + b,$$

$$\overline{ba} = 10b + a,$$

$$(10a + b - 10) \cdot 2 = 10b + a$$

$$19a - 20 = 8b.$$

Заметим, что для выполнения равенства необходимо, чтобы a было четным. Есть 5 четных цифр. Первая цифра не может быть нулем, иначе число станет однозначным.

При $a = 2$, $a = 6$ и $a = 8$, b не является цифрой. Если $a = 4$, то $b = 7$.

Ответ: 47.

Замечание. Можно было заметить, что a кратно четырем, что значительно сократило бы перебор.

Задача 8. Цифры четырехзначного числа, кратного 5, записали в обратном порядке и получили второе четырехзначное число. Затем из первого числа вычли второе и получили 4536.

Найдите: а) наибольшее такое число; б) наименьшее такое число; в) все такие числа.

Задания а), б) и в) – различные варианты постановки задачи.

Решение. Пусть данное число $A = \overline{abcd}$, тогда второе число $B = \overline{dcba}$;
 $A - B = 4536$.

$a, d \neq 0$, иначе эти числа не будут четырехзначными. Так как первое число кратно 5, то $d = 5$.

Первый способ решения: арифметический ребус.

$$\begin{array}{r} \overline{abc5} \\ - \overline{5cba} \\ \hline 4536 \end{array} \Rightarrow a = 9, \quad \begin{array}{r} \overline{9b\dot{c}5} \\ - \overline{5cb9} \\ \hline 4536 \end{array}, \text{ у } c \text{ занимаем единицу.}$$

Если $b = 9$, то $\begin{array}{r} \overline{99\dot{3}5} \\ - \overline{5399} \\ \hline 4536 \end{array}$, $c = 3$, равенство выполняется. а) Ответ: 9935.

Если $b = 8$, то $\begin{array}{r} \overline{98\dot{2}5} \\ - \overline{5289} \\ \hline 4536 \end{array}$, $c = 2$, равенство выполняется.

Если $b = 7$, то $\begin{array}{r} \overline{97\dot{1}5} \\ - \overline{5179} \\ \hline 4536 \end{array}$, $c = 1$, равенство выполняется.

Если $b = 6$, то $\begin{array}{r} \overline{96\dot{0}5} \\ - \overline{5069} \\ \hline 4536 \end{array}$, $c = 0$, равенство выполняется.

При $b = 5, 4, 3, 2, 1, 0$ равенство не выполняется. б) Ответ: 9605.

в) Ответ: 9935, 9825, 9715, 9605.

Второй способ решения: алгебраический.

$$A = \overline{abc5}, \quad B = \overline{5cba}; \quad A - B = 4536.$$

$$A = 1000a + 100b + 10c + 5, \quad B = 5000 + 100c + 10b + a,$$

$$1000a + 100b + 10c + 5 - 5000 - 100c - 10b - a = 4536,$$

$$999a + 90b - 90c = 9531 \quad | : 9,$$

$$111a + 10b - 10c = 1059,$$

$$10(b - c) = 1059 - 111a \Rightarrow (1059 - 111a) : 10 \Rightarrow a = 9,$$

$$10(b - c) = 60,$$

$$b - c = 6.$$

Учитывая, что $b, c \in \{0, 1, \dots, 9\}$, возможны пары

$$\begin{cases} b = 9 \\ c = 3 \end{cases}, \begin{cases} b = 8 \\ c = 2 \end{cases}, \begin{cases} b = 7 \\ c = 1 \end{cases}, \begin{cases} b = 6 \\ c = 0 \end{cases}.$$

При наибольшем b число A будет наибольшим, при наименьшем b число A будет наименьшим.

а) Ответ: 9935.

б) Ответ: 9605.

в) Ответ: 9935, 9825, 9715, 9605.

Задача 9. Цифры трехзначного числа, кратного 9, записали в обратном порядке и получили второе трехзначное число. Затем из первого числа вычли второе и получили 396.

Найдите: а) наибольшее такое число; б) наименьшее такое число.

Решение. Пусть данное число $A = \overline{abc}$, тогда второе число $B = \overline{cba}$; $A - B = 396$. $a, c \neq 0$, иначе эти числа не будут трехзначными.

Первый способ решения: арифметический ребус.

$$\begin{array}{r} _abc \\ -cba \\ \hline 396 \end{array} . \text{ Анализ левого столбца показывает, что } a > c.$$

$$\begin{array}{r} _abc \\ -cba \\ \hline 396 \end{array} ; \quad \begin{cases} a - 1 - c = 3 \\ c + 10 - a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow a - c = 4$$

Учитывая, что $a, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$, возможны пары

$$\begin{cases} a = 9 \\ c = 5 \end{cases}, \begin{cases} a = 8 \\ c = 4 \end{cases}, \begin{cases} a = 7 \\ c = 3 \end{cases}, \begin{cases} a = 6 \\ c = 2 \end{cases}, \begin{cases} a = 5 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Причем, b – любая цифра.

При наибольшем a число A будет наибольшим, при наименьшем a число A будет наименьшим.

Остается, используя признак делимости на 9, подобрать для наибольшего и наименьшего A цифру b .

а) Ответ: 945.

б) Ответ: 531.

Второй способ решения: алгебраический.

$$A = \overline{abc}, \quad B = \overline{cba}; \quad A - B = 396.$$

$$A = 100a + 10b + c, \quad B = 100c + 10b + a,$$

$$100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 396,$$

$$99a - 99c = 396 \quad | : 99 \quad (\text{равенство не зависит от } b),$$

$$a - c = 4.$$

Дальше те же рассуждения, что и в первом способе.

Задачи 8 и 9 полезны тем, что показывают связь между поразрядной записью чисел и способом вычитания чисел «в столбик».

Следующая задача является более сложной в техническом плане, так как приводит к нелинейному уравнению на цифры числа.

Задача 10. Если данное двузначное число записать наоборот и умножить результат на исходное число, то в результате получится 1207. Найдите данное число.

Решение. Пусть данное число $\overline{ab}$, записанное наоборот число $\overline{ba}$.

$$(10a + b) \cdot (10b + a) = 1207,$$

$$101ab + 10a^2 + 10b^2 = 1207,$$

$$10(10ab + a^2 + b^2 - 120) = 7 - ab.$$

Значит, $(7 - ab) : 10$, и ab оканчивается на 7. Произведение цифр оканчивается на 7 только в двух случаях, когда 1 умножается на 7 или когда 3 умножается на 9. Проверкой убеждаемся, что числа 17 и 71 удовлетворяют условию, а числа 39 и 93 – нет.

Ответ: 17 и 71.

Задача 10 интересна также тем, что полученное уравнение не меняется при замене a на b и b на a . Объяснение этой красивой симметрии непосредственно следует из того, что если число $\overline{ab}$ удовлетворяет условию задачи, то число $\overline{ba}$ также будет удовлетворять условию.

§ 2.2. Задачи на недесятичные системы счисления.

2.2.1. Задачи, содержащие условие, связанное с суммой цифр

В данном разделе будут рассмотрены задачи, аналогичные задачам для десятичной записи, рассмотренным в разделе 2.1.1. Переход от десятичной записи к произвольной позиционной записи, во-первых, значительно расширит кругозор учащихся, во-вторых, проиллюстрирует схожесть подходов к решению задач во всех стандартных системах счисления (в том числе, и десятичной), в-третьих, позволит учащимся глубже осознать суть поразрядной записи натуральных чисел, а в-четвертых, станет основой для более плавного перехода к изучению многочлена от одной переменной как обобщения поразрядной записи с переменным основанием. Этот переход будет сделан чуть позже с помощью задач на определение основания системы счисления в разделе 2.2.3.

Договоримся число, составленное из цифр a и b в позиционной записи с основанием p , обозначать $\overline{ab}_p$.

Задача 11. Найдите двузначное число, которое в восьмеричной системе счисления в два раза больше суммы его цифр.

Решение. Пусть данное число имеет вид $\overline{ab}_8$. Тогда $a, b \in \{0, 1, \dots, 7\}$, $a \neq 0$. По условию задачи получаем уравнение:

$$8a + b = 2(a + b),$$

$$6a = b.$$

Откуда $b : 6$, а значит, $b = 0$ или $b = 6$. Если $b = 0$, то и $a = 0$, что противоречит условию. При $b = 6$ и $a = 1$, получаем число 16_8 .

Проверим в десятичной системе:

$$16_8 = 8 + 6 = 14, \quad a + b = 1 + 6 = 7, \quad 14 \text{ в } 2 \text{ раза больше } 7.$$

Ответ: 16_8 .

Задача 12. Найдите двузначное число, которое в восьмеричной системе счисления в три раза больше суммы его цифр.

Решение. Аналогично предыдущей задаче:

$$8a + b = 3(a + b),$$

$$5a = 2b.$$

Так как 2 и 5 взаимно просты, то $b : 5$. Поэтому $b = 5$ и $a = 2$, получаем число 25_8 . В десятичной системе: $25_8 = 21$, $a + b = 7$.

Ответ: 25_8 .

Задача 13. Найдите трехзначное число, которое в пятеричной системе счисления в десять раз больше суммы его цифр.

Решение. Пусть данное число имеет вид $\overline{abc}_5$. Имеем уравнение:

$$25a + 5b + c = 10(a + b + c),$$

$$15a - 5b = 9c.$$

Откуда $c : 5$, и значит, $c = 0$ (это единственная цифра в пятеричной системе, кратная пяти). Подставим в уравнение:

$$3a = b.$$

Откуда $b : 3$, и значит, $b = 0$ или $b = 3$. Если $b = 0$, то $a = 0$, что противоречит трехзначности искомого числа. При $b = 3$ и $a = 1$, получаем число 130_5 .

Проверяем в десятичной системе: $130_5 = 1 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 1 = 40$. Сумма цифр, равная 4, в десять раз меньше.

Ответ: 130_5 .

Следующая задача отличается от задачи 13 только основанием, однако решение выглядит несколько сложнее.

Задача 14. Найдите трехзначное число, которое в шестеричной системе счисления в десять раз больше суммы его цифр.

Решение. Пусть данное число $\overline{abc}_6$, тогда $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $a \neq 0$.

$$36a + 6b + c = 10(a + b + c),$$

$$26a = 4b + 9c.$$

Откуда $c : 2$, т.е. $c \in \{0, 2, 4\}$.

При $c = 0$ получим $13a = 2b$. Следовательно, $b : 13$ и $b = 0$, а значит, и $a = 0$, что противоречит трехзначности.

Если $c = 2$, то $13a = 2b + 9$. Следовательно, $(2b + 9) : 13$. Но, в силу ограниченности множества цифр в шестеричной системе, справедлива оценка $9 \leq 2b + 9 \leq 19$. Так как в этом промежутке существует единственное число, кратное 13, то $2b + 9 = 13$. Таким образом, $b = 2$ и $a = 1$, число 122_6 .

Если $c = 4$, то $13a = 2b + 18$. Следовательно, $(2b + 18) : 13$. Но из оценки $18 \leq 2b + 18 \leq 28$ вытекает, что $2b + 18 = 26$. Итак, $b = 4$ и $a = 2$, данное число 244_6 .

Проверяем в десятичной системе:

$122_6 = 1 \cdot 36 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 50$, это в 10 раз больше суммы цифр $(1 + 2 + 2) = 5$. Аналогично, $244_6 = 2 \cdot 36 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 100$, в 10 раз больше, чем $(2 + 4 + 4) = 10$.

Ответ: $122_6, 244_6$.

2.2.2. Задачи, содержащие условие, связанное с обратным прочтением числа

Задача 15. Трехзначное число в шестеричной системе счисления записали в обратном порядке. Полученное число оказалось на двадцать один больше удвоенного данного числа. Найдите данное число.

Решение. Пусть данное число $\overline{abc}_6$, $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $a \neq 0$. Тогда число, записанное в обратном порядке, имеет вид $\overline{cba}_6$. Получим:

$$(36a + 6b + c) \cdot 2 = 36c + 6b + a + 21,$$

$$72a + 12b + 2c - 36c - 6b - a = 21,$$

$$71a + 6b - 34c = 21.$$

Из этого равенства видно, что $71a$ нечетно, следовательно, a нечетно, $a \in \{1, 3, 5\}$.

Оценим a . Так как $34c \leq 170$, то $71a = 34c - 6b + 21 \leq 191$. При $a = 3$ и $a = 5$ имеем $71a > 191$, значит, остается $a = 1$. Подставим:

$$71 + 6b - 34c = 21,$$

$$6b + 50 = 34c,$$

$$3b + 25 = 17c.$$

Оценим c : $25 \leq 3b + 25 \leq 40$, значит, $25 \leq 17c \leq 40$ и $c = 2$. Отсюда $b = 3$.

Проверим в шестеричной и десятичной системах:

$$\begin{array}{r} \times 132_6 \\ 2_6 \\ \hline 304_6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 304_6 \\ - 231_6 \\ \hline 33_6 \end{array} \quad 33_6 = 21$$

$$132_6 = 36 + 18 + 2 = 56$$

$$231_6 = 72 + 18 + 1 = 91$$

$$56 \cdot 2 = 112$$

$$112 - 91 = 21$$

Ответ: 132_6 .

Задачи на обратное прочтение числа являются частным случаем задач на перестановку цифр числа в некотором определенном порядке. Рассмотрим одну такую задачу.

Задача 16. Последнюю цифру трехзначного числа по основанию 5 перенесли в начало и к полученному трехзначному числу прибавили данное число. В результате получилось трехзначное число, кратное 25. Найдите данное число.

Решение.

Пусть данное число $\overline{abc}_5$, тогда $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Так как числа $\overline{abc}_5$ и $\overline{cab}_5$ трехзначные, то $a, c \neq 0$.

Аналитическое решение.

I способ.

$$(25a + 5b + c + 25c + 5a + b) : 25$$

$$((25a + 25c) + (6b + c + 5a)) : 25$$

$$(6b + c + 5a) : 25$$

Если $a = 1$, то $(6b + c + 5) : 25$

$$6 \leq 6b + c + 5 \leq 33$$

$$6b + c + 5 = 25$$

$$6b + c = 20$$

$$16 \leq 6b \leq 19$$

Отсюда $b = 3$, $c = 2$.

$$\begin{array}{r} 132_5 \\ + 213_5 \\ \hline 400_5 \end{array}$$

Одно из искомым чисел 132_5 .

Если $a = 2$, то $(6b + c + 10) : 25$

$$11 \leq 6b + c + 10 \leq 38$$

$$6b + c + 10 = 25$$

$$6b + c = 15$$

$$11 \leq 6b \leq 14$$

Отсюда $b = 2$, $c = 3$.

$$\begin{array}{r} 223_5 \\ + 322_5 \\ \hline 1100_5 \end{array}$$

Результат суммы – не трехзначное число.

Если $a = 3$, то $(6b + c + 15) : 25$

$$16 \leq 6b + c + 15 \leq 43$$

$$6b + c + 15 = 25$$

$$6b + c = 10$$

$$6 \leq 6b \leq 9$$

Отсюда $b = 1$, $c = 4$.

$$\begin{array}{r} 314_5 \\ + 431_5 \\ \hline 1300_5 \end{array}$$

Если $a = 4$, то $(6b + c + 20) : 25$

$$21 \leq 6b + c + 20 \leq 48$$

$$6b + c + 20 = 25$$

$$6b + c = 5$$

Для допустимых b, c это равенство не выполняется.

Ответ. 132_5 .

2 способ.

$$(25a + 5b + c + 25c + 5a + b) : 25 \text{ и },$$

$$(30a + 6b + 26c) : 25,$$

$$((30a + 25c + 5b) + (b + c)) : 25.$$

Откуда $(b + c) : 5$, и значит, так как $c \neq 0$ и $b + c \leq 8$, то $b + c = 5$.

Если $c = 1$, то $b = 4$ и

$$30a + 6b + 26c = 30a + 50 = ((25a + 50) + 5a) : 25.$$

Следовательно, $5a : 25$ и $a : 5$. Противоречие.

Если $c = 2$, то $b = 3$ и

$$30a + 6b + 26c = 30a + 70 = ((25a + 50) + 5a + 20) : 25.$$

Следовательно, $(5a + 20) : 25$ и $(a + 4) : 5$. Подходит только $a = 1$.

Проверим, что результат трехзначен: $30a + 70 = 100 < 125$. Значит, одно из искоемых чисел 132_5 .

Если $c = 3$, то $b = 2$ и

$$30a + 6b + 26c = 30a + 90 = ((25a + 50) + 5a + 40) : 25.$$

Следовательно, $(5a + 40) : 25$ и $(a + 8) : 5$. Подходит только $a = 2$. Но $30a + 90 = 150 \geq 125$, что противоречит трехзначности результата.

Если $c = 4$, то $b = 1$ и

$$30a + 6b + 26c = 30a + 110 = ((25a + 100) + 5a + 10) : 25.$$

Ответ: 5.

Задача 18. Найдите основание позиционной системы счисления, если $32_{(n)} + 23_{(n)} = 130_{(n)}$.

Решение. Аналогично, по последним цифрам основание должно быть 5, однако проверка показывает, что равенство не выполняется.

Ответ: нет решений.

Задача 19. Найдите основание позиционной системы счисления, если $32_{(n)} + 53_{(n)} = 130_{(n)}$.

Решение. Наличие цифры 5 говорит о том, что $n > 5$, однако условие, о котором шла речь в решении предыдущих задач, однозначно указывает на то, что $n = 5$.

Ответ: нет решений.

Задачи 17 – 19 весьма полезны, несмотря на их простоту и кажущуюся тривиальность. Во-первых, при их решении используется идея поразрядного сложения чисел, которая оказывается справедливой не только для десятичной, но и для других стандартных позиционных систем счисления. Во-вторых, эти задачи хорошо иллюстрируют тот факт, что сложная с виду задача может иметь очень простое решение, с другой стороны, очевидное на первый взгляд решение может таковым не оказаться.

Действительно, напрашивающееся алгебраическое решение оказывается более громоздким. Приведем его, например, для задачи 19:

$$(3n + 2) + (4n + 3) = n^2 + 3n + 0,$$

$$7n + 5 = n^2 + 3n,$$

$$5 = n(n - 4).$$

Число 5 представимо в виде произведения натуральных чисел, первое из которых больше второго, единственным образом: $5 = 5 \cdot 1$. Значит, $n = 5$.

Задача 20. Найдите основание позиционной системы счисления, если $32_{(n)} + 4 *_{(n)} = 130_{(n)}$ и записать данное равенство в десятичной системе счисления.

Решение. По условию суммы последних цифр, имеем $*$ = $(n - 2)$.

$$(3n + 2) + (4n + (n - 2)) = n^2 + 3n + 0$$

$$n^2 = 5n$$

Корни уравнения 0 и 5. Однако, основание позиционной системы счисления есть натуральное число больше единицы. Проверка покажет, что равенство выполняется для $n = 5$ и выглядит так:

$$32_{(5)} + 43_{(5)} = 130_{(5)}$$

$$32_{(5)} = 17; \quad 43_{(5)} = 23; \quad 130_{(5)} = 40.$$

Ответ: 5; $17 + 23 = 40$.

§ 2.3. Описание курса.

Классифицируем задачи, отбираемые для факультативного курса:

- задачи, содержащие условие, связанное с суммой цифр (или с результатом других арифметических действий над цифрами);
- задачи, содержащие условие, связанное с обратным прочтением числа (или с другой перестановкой цифр);
- задачи на перевод записи целого числа из десятичной системы счисления в недесятичную и наоборот;
- задачи на определение основания позиционной записи целого числа;
- задачи на арифметические действия с целыми числами в недесятичных позиционных системах счисления.

Уровни сложности задач:

1. Двухзначные числа.
2. Трехзначные числа.
3. Многозначные числа.
4. Числа с неопределенным количеством знаков.

Решение задач на нахождение двухзначного числа обычно сводится к линейному уравнению с двумя неизвестными, а трехзначного – с тремя неизвестными. Однако можно подобрать такие задачи на нахождение трехзначного числа, которые при использовании дополнительного условия сразу сводятся к линейному уравнению с двумя неизвестными. Такие задачи можно отнести к промежуточному уровню сложности между первым и вторым. Эти задачи очень важны, так как опыт их решения поможет преодолеть психологический барьер при решении более сложных задач, в которых действительно придется иметь дело с уравнением или системой уравнений с тремя неизвестными.

Решение задач на определение основания позиционной записи двухзначного целого числа обычно приводит к линейному уравнению с одной неизвестной, тогда как такие же задачи о трехзначных числах – к

квадратному уравнению. Можно осторожно подбирать такие задачи уже для учеников шестого класса, если квадратное уравнение получается неполным. Тогда оно может быть решено либо подбором, либо разложением на множители. Однако весь пласт этих задач возможно систематически решать только после освоения методов решения квадратных уравнений.

Нужно понимать, что деление задач на уровни сложности достаточно условно, так как встречаются тривиальные задачи на нахождение числа с неопределенным количеством знаков, в то же время есть достаточно сложные задачи с двузначными числами.

Курс предназначен для изучения в 5-8 классах. Его можно разделить на несколько этапов.

Этапы курса:

1. Первый год (5 класс). Формирование понятия натурального числа, записанного в позиционной системе счисления, как суммы разрядных слагаемых. Закрепление этого понятия при решении простейших задач с двузначными числами.
2. Первый год (5 класс). Знакомство с недесятичной позиционной записью натурального числа. Решение задач на перевод из десятичной позиционной системы счисления в недесятичную и наоборот. Арифметические действия над числами в недесятичных позиционных системах счисления.
3. Первый год (5 класс). Решение простейших задач на недесятичную позиционную запись натурального числа на основе опыта решения таких задач в десятичной системе счисления.
4. Второй год (6 класс). Повторение и обобщение материала курса первого года обучения. Решение простейших задач всех типов.
5. Второй год (6 класс). Усложнение. Решение задач на трехзначные числа.
6. Второй год (6 класс). Решение простейших задач на определение основания системы счисления.

7. Третий год (7 класс). Повторение и обобщение материала курса второго года обучения. Решение задач всех типов.

8. Третий год (7 класс). Действия с многочленами. Формулы сокращенного умножения. Выделение полного квадрата двучлена. Решение квадратных уравнений на множестве целых чисел методом выделения полного квадрата двучлена.

9. Третий год (7 класс). Усложнение. Решение всех типов задач на позиционную запись целого числа, в том числе задач, решение которых сводится к нелинейному уравнению, а так же к действиям над многочленами.

10. Четвертый год (8 класс). Повторение и обобщение материала курса третьего года обучения. Решение задач всех типов.

11. Четвертый год (8 класс). Решение различных олимпиадных задач, в которых так или иначе используются приемы и методы, освоенные в данном курсе.

Глава 3. Арифметические действия над целыми числами и над многочленами от одной переменной.

§ 3.1. Сложение и вычитание.

Рассматриваются задачи на применение привычных алгоритмов сложения и вычитания «в столбик» натуральных чисел, записанных в стандартных позиционных системах счисления, по аналогии с алгоритмами для десятичной системы. Эти задачи можно решать с учениками 5-6 классов при условии, что уже отработано действие перевода натурального числа из десятичной записи в недесятичную и обратно.

Задача 21. Найдите сумму $123_5 + 204_5$. Ответ запишите в пятеричной системе. Сделайте проверку в десятичной системе.

Решение
$$\begin{array}{r} 123_5 \\ + 204_5 \\ \hline ?_5 \end{array}$$

Разряд единиц: $3 + 4 = 7$, но $7 > 4$. Отделяем от 7 одну «пятерку» (по аналогии с «десятком»): $7 = 5 + 2$. Слагаемое пять перейдет в разряд пятерок, где оно будет иметь значение, равное единице.

$$\begin{array}{r} + 1\overset{1}{2}3_5 \\ + 204_5 \\ \hline 332_5 \end{array}$$

Штрих над двойкой означает, что в этот разряд добавляется одна единица. Суммы в остальных разрядах не больше четырех, поэтому перехода единицы в другой разряд не происходит. Итак, $123_5 + 204_5 = 332_5$.

Важная и на начальном этапе необходимая часть таких упражнений – это проверка в привычной десятичной системе. С одной стороны, есть возможность увидеть возможные ошибки, с другой – оттачивается навык перевода записи натурального числа из одной системы в другую.

$$123_5 = 1 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 38;$$

$$204_5 = 2 \cdot 25 + 0 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 54;$$

$$332_5 = 3 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 92;$$

$$38 + 54 = 92.$$

Эти примеры на перевод из одной системы в другую и на арифметические действия в разных системах нацелены на укрепление понимания как самого числа, так и форм его записи. Данный пример показывает, что если мы смешали две кучи одинаковых предметов, то количество предметов в общей куче не зависит от того, пересчитывали мы их до смешивания и после, или нет. А если и пересчитывали, то результаты не будут зависеть от способа счета и форм записи этих результатов.

В данном случае число, выражающее девяносто две единицы, представлено в двух видах: 92_{10} и 332_5 . Хотя внешне получены две разные записи, но это одно и то же число. И при записи его в любом другом виде само число не изменится по своей сути.

Задача 22. Вычислите $461_7 - 235_7$. Ответ запишите в семеричной системе. Сделайте проверку в десятичной системе.

Решение.

$$\begin{array}{r} 4\dot{6}1_7 \\ - 235_7 \\ \hline 223_7 \end{array}$$

Точка над «6» означает, что единицу забрали из разряда семерок в разряд единиц. В разряде единиц значение увеличилось на семь, а в разряде семерок значение уменьшилось на один: $7 + 1 = 8$, $8 - 5 = 3$, а $5 - 3 = 2$. В остальных разрядах вычитание происходит без занимания единиц. Итак, $461_7 - 235_7 = 223_7$.

Проверяем в десятичной системе:

$$461_7 = 4 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 1 \cdot 1 = 196 + 42 + 1 = 239$$

$$235_7 = 2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 1 = 98 + 21 + 5 = 124$$

$$223_7 = 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 98 + 14 + 3 = 115$$

$$239 - 124 = 115.$$

Следующие задачи посвящены обоснованию алгоритмов сложения и вычитания натуральных чисел «в столбик». Фактически они подменяют строгое доказательство, требующее рассуждений в общем виде, на рассмотрение ряда показательных частных случаев. При этом, сильному школьнику не составит труда перенести данные рассуждения на общий случай, заменив конкретные цифры на буквенные обозначения.

Данные задачи следует отнести к теоретическому материалу, который объясняет учитель. Но затем имеет смысл попросить учащихся провести аналогичные рассуждения для других числовых значений, или даже

самостоятельно составить пример на сложение или вычитание и обосновать выполняемые при решении этого примера шаги известного алгоритма.

Задача 23. Найдите сумму чисел 2672 и 304.

Решение. $2672 = 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2$ и
 $304 = 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 4$.

Запишем сумму этих чисел:

$$\begin{aligned} 2672 + 304 &= (2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2) + (3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 4) \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{воспользуемся ассоциативностью и коммутативностью сложения,} \\ \text{а так же дистрибутивностью умножения относительно сложения} \end{array} \right] \\ &= 2 \cdot 10^3 + (6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^2) + (7 \cdot 10 + 0 \cdot 10) + (2 + 4) \\ &= 2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 6 = 2976 \end{aligned}$$

Коротко пишут так:

$$\begin{array}{r} 2672 \\ + 304 \\ \hline 2976 \end{array}$$

Задача 24. Найдите сумму чисел $2672_{(8)}$ и $304_{(8)}$.

Аналогично задаче: $2672_{(8)} + 304_{(8)} = 2 \cdot 8^3 + 9 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 6$.

Однако мы не можем эту сумму считать суммой разрядных слагаемых, так как цифры должны быть меньше основания позиционной записи, в данном случае меньше восьми. Второе слагаемое, коэффициент которого нас не устраивает, запишем в виде суммы

$$9 \cdot 8^2 = (8 + 1) \cdot 8^2 = 8 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^2 = 1 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2672_{(8)} + 304_{(8)} &= (2 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^3) + 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 6 \\ &= 3 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 6 = 3176_{(8)} \end{aligned}$$

Или

$$\begin{array}{r} 2672_{(8)} \\ + 304_{(8)} \\ \hline 3176_{(8)} \end{array}$$

В этом примере мы рассмотрели механизм перехода единицы в старший разряд при сложении «в столбик». Аналогично не сложно обосновать механизм заимствования единицы у старшего разряда при вычитании.

Задача 25. Найдите разность чисел $2672_{(8)}$ и $304_{(8)}$.

$$\begin{aligned}
 2672_{(8)} - 304_{(8)} &= (2 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 2) - (3 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 4) \\
 &= 2 \cdot 8^3 + (6 \cdot 8^2 - 3 \cdot 8^2) + (7 \cdot 8 - 0 \cdot 8) + (2 - 4) \\
 &= 2 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + (-2) \\
 &= 2 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + (6 + 1) \cdot 8 + (-2) \\
 &= 2 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 1 \cdot 8 + (-2) = 2 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 6 \\
 &= 2366_{(8)}
 \end{aligned}$$

Или

$$\begin{array}{r}
 2672_{(8)} \\
 - 304_{(8)} \\
 \hline
 2366_{(8)}
 \end{array}$$

Подобные примеры, несмотря на их очевидность для профессионального математика, очень полезны для школьников 7-8 классов, так как формируют у них отношение к позиционной записи натурального числа, как к сумме разрядных слагаемых, и тем самым иллюстрируют взаимосвязь механизмов действий над числами и над многочленами. Следует так же заметить, что примеры на действия с числами, записанными в десятичной форме, помогают развеять стереотип о том, что давно знакомые алгоритмы придуманы специально для привычной десятичной записи натуральных чисел. Оказывается, они остаются верными и для других позиционных систем счисления (в частности, они применимы для важных в информатике двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления).

Задача 26. Найдите сумму чисел $234_{(n)}$ и $351_{(n)}$ для $6 \leq n \leq 9$, результаты запишите в десятичной системе счисления.

Решение.

Первый способ.

Подставляем по очереди вместо n числа 6, 7, 8, 9 и складываем. Затем переводим в десятичную запись. Либо проводим эти же действия в другом порядке: сначала переводим в десятичную запись, а потом складываем. Этот способ решения является весьма трудоемким. Когда задача будет решена этим способом и будут сверены ответы, имеет смысл предложить другой способ решения этой задачи.

Второй способ.

$$\begin{array}{r} 2n^2 + 3n + 4 \\ 3n^2 + 5n + 1 \\ \hline 5n^2 + 8n + 5 \end{array}$$

Подставляя вместо n числа 6, 7, 8, 9 сразу получаем значения суммы в десятичном виде.

Ответ: 233, 306, 389, 482.

Таким образом, второй способ решения задачи 26 подводит школьников к идее, что действия над многочленами можно выполнять аналогично действиям над натуральными числами. Следующая задача развивает эту мысль.

Задача 27. Найдите сумму чисел $2672_{(x)}$ и $304_{(x)}$.

Аналогично предыдущим задачам, получим:

$$2672_{(x)} + 304_{(x)} = 2 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 6$$

Или

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 6x^2 + 7x + 2 \\ + \quad 3x^2 + 0x + 4 \\ \hline 2x^3 + 9x^2 + 7x + 6 \end{array}$$

Конечно, в контексте этой задачи мы должны понимать, что x принимает только натуральные значения больше семи. Так же необходимо уточнить, что не все коэффициенты последней суммы могут быть цифрами в позиционной записи натурального числа, являющегося результатом сложения. Но можно с уверенностью утверждать, что сумма данных чисел

будет равна значению последнего многочлена при заданном допустимом значении основания x .

Выходя же за рамки условия задачи ..., мы получаем удобный способ сложения многочленов от одной переменной. А так как на коэффициенты многочлена не накладываются ограничения, связанные со множеством допустимых значений цифр в позиционной записи числа, то алгоритм сложения и вычитания многочленов становится даже проще алгоритма сложения и вычитания натуральных чисел, а именно, он не содержит правил перехода единицы в старший разряд при сложении и занимания единицы у старшего разряда при вычитании.

Задача 28. Найдите разность многочленов $5x^3 - 2x^2 + x - 6$ и $3x^4 + x^2 + x - 7$.

Решение.

Первый способ (традиционный).

$$\begin{aligned}(5x^3 - 2x^2 + x - 6) - (3x^4 + x^2 + x - 7) &= 5x^3 - \widetilde{2x^2} + \widehat{x} - \underline{6} - 3x^4 - \widetilde{x^2} - \widehat{x} + \underline{7} \\ &= -3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 1\end{aligned}$$

Второй способ («в столбик»).

$$\begin{array}{r} 5x^3 - 2x^2 + 1x - 6 \\ - 3x^4 + 0x^3 + 1x^2 + 1x - 7 \\ \hline -3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 0x + 1 \end{array}$$

Следует заметить, что для получения такого метода сложения и вычитания многочленов можно было и не рассматривать аналогию с натуральными числами. Достаточно сказать, что для более удобного приведения подобных слагаемых запишем многочлены так, чтобы подобные оказывались одно под другим. Однако ценность всех приведенных выше рассуждений заключается не столько в предъявлении метода, сколько в самостоятельном получении этого метода самими учащимися. Кроме того, возникает естественный вопрос о возможности переноса алгоритмов умножения и деления натуральных чисел на случай с многочленами.

§ 3.2. Умножение.

Вначале на практических задачах убедимся, что привычный алгоритм умножения натуральных чисел «в столбик» применим и для недесятичных позиционных систем счисления.

Задача 29. Найдите произведение $231_4 \cdot 23_4$. Ответ запишите в четверичной системе. Сделайте проверку в десятичной системе.

Решение.

$$\begin{array}{r} 231_4 \\ x 23_4 \\ \hline 2013_4 \\ + 1122_4 \\ \hline 13233_4 \end{array}$$

Умножаем сначала 231_4 на 3:

$1 \cdot 3 = 0 \cdot 4 + 3$, пишем 3, в следующий разряд переходит 0;

$3 \cdot 3 = 2 \cdot 4 + 1$, пишем 1, в следующий разряд переходит 2;

$2 \cdot 3 + 2 = 1 \cdot 4 + 2 + 2 = 2 \cdot 4 + 0$, пишем 0, в следующий разряд переходит 2.

Теперь умножаем 231_4 на 2:

$1 \cdot 2 = 0 \cdot 4 + 2$, пишем 2, в следующий разряд переходит 0;

$3 \cdot 2 = 1 \cdot 4 + 2$, пишем 2, в следующий разряд переходит 1;

$2 \cdot 2 + 1 = 1 \cdot 4 + 1$, пишем 1, в следующий разряд переходит 1.

Складывая эти произведения, получим результат:

$$231_4 \cdot 23_4 = 13233_4.$$

Проверяем в десятичной системе:

$$231_4 = 2 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 32 + 12 + 1 = 45;$$

$$23_4 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 11;$$

$$\begin{aligned} 13233_4 &= 1 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = \\ &= 1 \cdot 256 + 3 \cdot 64 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 256 + 192 + 32 + 12 + 3 = 495; \\ 45 \cdot 11 &= 495. \end{aligned}$$

Для отработки навыка умножения натуральных чисел в недесятичных системах не стоит увлекаться усложнением. Действия с небольшими числами по относительно небольшим основаниям помогут сформировать видение причинно-следственных связей в этих алгоритмах, которые в дальнейшем переносятся на действия с многочленами.

Далее по той же схеме, что и для сложения и вычитания, учитель разбирает задания, обосновывающие алгоритм умножения «в столбик».

Задача 30. Найдите произведение чисел $342 \cdot 51$.

Решение. Используя привычный алгоритм умножения натуральных чисел «в столбик», получаем

$$\begin{array}{r} 342 \\ x 51 \\ \hline 342 \\ + 1710 \\ \hline 17442 \end{array}$$

Умножение «в столбик» является краткой записью таких рассуждений:

$$342 \cdot 51 = (300 + 40 + 2) \cdot (50 + 1) = (2 \cdot 1 + 40 \cdot 1 + 300 \cdot 1) + \\ + (2 \cdot 50 + 40 \cdot 50 + 300 \cdot 50) = 342 + 17100 = 17442$$

или

$$342 \cdot 51 = 342 \cdot 1 + 342 \cdot 50 = 342 + (342 \cdot 5) \cdot 10 = \\ 342 + 1710 \cdot 10 = 17442$$

Здесь используем дистрибутивность умножения относительно сложения. Механизм при внимательном рассмотрении прозрачен. Чтобы не загромождать запись, вместо 17100 записывается 1710, но со сдвигом по разрядной шкале на одну цифру влево, что по факту является умножением на десять.

Можно ли этот алгоритм использовать для умножения многочленов? Преобразования из задачи полностью отражают правило умножения многочлена на многочлен. Произведение двух многочленов равно многочлену, членами которого являются произведения каждого члена одного многочлена на каждый член другого многочлена [1, 99].

Задача 31. Преобразуйте выражение $(5 - 2a + a^2)(4a^2 - 3a - 1)$ в многочлен стандартного вида [2, 124].

Решение.

Первый способ.

$$\begin{aligned} (5 - 2a + a^2)(4a^2 - 3a - 1) \\ = 20a^2 - 8a^3 + 4a^4 - 15a + 6a^2 - 3a^3 - 5 + 2a - a^2 \\ = 4a^4 - 11a^3 + 25a^2 - 13a - 5 \end{aligned}$$

Второй способ.

$$\begin{array}{r}
 1a^2 - 2a + 5 \\
 \times 4a^2 - 3a - 1 \\
 \hline
 - 1a^2 + 2a - 5 \\
 - 3a^3 + 6a^2 - 15a \\
 4a^4 - 8a^3 + 20a^2 \\
 \hline
 4a^4 - 11a^3 + 25a^2 - 13a - 5
 \end{array}$$

При решении задачи обоими способами осуществляются одни и те же операции – умножение каждого слагаемого первой суммы на каждое слагаемое второй суммы с последующим приведением подобных слагаемых. Однако, очевидно, что второй способ удобнее.

Заметим, что при умножении натуральных чисел нам, как и в сложении, приходилось беспокоиться о переносе единицы в старший разряд в силу ограниченности набора цифр. При умножении многочленов «в столбик» такой надобности нет, так как коэффициенты многочлена могут принимать любые действительные значения.

Задача 32. Произведение чисел $21_{(x)}$ и $31_{(x)}$ равно 247. По какому основанию записаны данные числа? Запишите эти числа в десятичной системе.

Решение. Пусть x – основание, тогда $21_{(x)} = 2x + 1$, $31_{(x)} = 3x + 1$.

$$\begin{array}{r}
 2x + 1 \\
 \times 3x + 1 \\
 \hline
 2x + 1 \\
 + 6x^2 + 3x \\
 \hline
 6x^2 + 5x + 1
 \end{array}$$

Получаем уравнение $6x^2 + 5x + 1 = 247$, корни которого 6 и $-\frac{41}{6}$. Основанием позиционной записи может быть только натуральное число, не равное 1. Значит, основание 6, данные числа 13 и 19.

В задаче 32 числа рассматриваются как многочлены от одной переменной. Причем результатом арифметического действия над ними является многочлен, коэффициенты которого не являются цифрами позиционной записи. Но это и не нужно, так как здесь важно только значение этого многочлена, которое дано в условии задачи.

§ 3.3. Деление.

Следующие задачи не стоит рассматривать слишком рано. Целесообразно начать решать подобные задачи в 7 классе после изучения темы «многочлены».

Деление – самое сложное из четырех арифметических действий. Поэтому начнем с деления на однозначное число.

Пример можно генерировать вместе с учащимися. Для создания примера будем использовать признак делимости натурального числа, записанного в традиционной позиционной системе с основанием p , на число $(p - 1)$: число кратно $(p - 1)$ в том и только в том случае, когда сумма цифр этого числа кратна $(p - 1)$.

Для начала возьмем удобное для восприятия основание 5. В данном случае делитель – число 4. Подберем число, у которого сумма цифр кратна 4. Например, $32012_5 : 4_5$, так как $(3 + 2 + 0 + 1 + 2) : 4$.

Задача 33. Найдите частное $32012_5 : 4_5$. Ответ запишите в пятеричной системе. Сделайте проверку в десятичной системе.

Решение.

$$\begin{array}{r} 32012_5 \quad 4_5 \\ \hline ?***_5 \end{array}$$

Первый шаг: делим старшие разряды, т.е. 32_5 на 4_5 . Для этого нам необходимо «увидеть» число 32_5 .

$$32_5 = 3 \cdot 5 + 2 = 17, 17 = 4 \cdot 4 + 1. \text{ Берем по } 4.$$

$$4_5 \cdot 4_5 = 4 \cdot 4 = 16 = 3 \cdot 5 + 1 = 31_5.$$

$$32_5 - 31_5 = 1_5.$$

$$\begin{array}{r} 32012_5 \quad 4_5 \\ \underline{31_5} \quad \underline{4_5} \\ 10_5 \quad 4***_5 \end{array}$$

Второй шаг. $10_5 = 5, 5 = 4 \cdot 1 + 1$. Берем по 1.

$$\begin{array}{r} 32012_5 \quad 4_5 \\ \underline{31_5} \quad \underline{41**_5} \\ 10_5 \quad 4_5 \\ \underline{11_5} \end{array}$$

Третий шаг. $11_5 = 6, 6 = 4 \cdot 1 + 2$. Берем по 1.

$$\begin{array}{r}
 32012_5 \\
 \underline{31_5} \\
 10_5 \\
 \underline{4_5} \\
 11_5 \\
 \underline{4_5} \\
 22_5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4_5 \\
 \hline
 411 * 5
 \end{array}$$

Четвертый шаг. $22_5 = 2 \cdot 5 + 2 = 12$, $12 = 4 \cdot 3 + 0$. Берем по 3.

$$\begin{array}{r}
 32012_5 \\
 \underline{31_5} \\
 10_5 \\
 \underline{4_5} \\
 11_5 \\
 \underline{4_5} \\
 22_5 \\
 \underline{22_5} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4_5 \\
 \hline
 4113_5
 \end{array}$$

$$32012_5 : 4_5 = 4113_5.$$

Признак делимости здесь действительно работает. Данное число разделилось на делитель без остатка.

Проверяем в десятичной системе:

$$32012_5 = 3 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 3 \cdot 625 + 2 \cdot 125 + 0 \cdot 25 +$$

$$+ 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 1875 + 250 + 5 + 2 = 2132; \qquad 4_5 = 4;$$

$$4113_5 = 4 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 4 \cdot 125 + 1 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 500 + 25 + 5 + 3 = 533$$

$$\begin{array}{r}
 2132 \\
 \underline{20} \\
 13 \\
 \underline{12} \\
 12 \\
 \underline{12} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 \\
 \hline
 533
 \end{array}$$

В десятичной форме получили тот же результат.

Можно заметить, что даже по такому «прозрачному» основанию как пять, возникли трудности при делении. Каждый раз необходимо представлять числа в привычном виде, что приводит к необходимости постоянно осуществлять перевод в десятичную систему и обратно.

Сложности же, которые возникнут при делении хотя бы на двузначное число, могут оказаться серьезным препятствием для выполнения этого действия. Можно ли обойти эту проблему?

Рассмотрим несколько иной подход к делению «уголком» в десятичной позиционной системе. Сразу представим делимое и делитель в виде суммы разрядных слагаемых.

$$\begin{array}{r}
 3 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 \\
 \underline{17 \cdot 5^3} \\
 16 \cdot 5^3 \\
 \underline{1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2} \\
 5 \cdot 5^2 \\
 \underline{4 \cdot 5^2} \\
 1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 \\
 \underline{6 \cdot 5^1} \\
 4 \cdot 5^1 \\
 \underline{2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0} \\
 12 \cdot 5^0 \\
 \underline{12 \cdot 5^0} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4 \cdot 5^0 \\
 \hline
 4 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0
 \end{array}$$

Такая схема позволяет перевод осуществлять здесь же на законных основаниях. Задача иллюстрирует, что деление натуральных чисел по сути является делением многочлена на многочлен.

Рассмотрим теперь пример деления на двузначное число с единицей в старшем разряде.

Задача 34. Найдите частное $34230_5 : 13_5$. Ответ запишите в десятичной системе. Сделайте проверку в десятичной системе.

Решение.

$$\begin{array}{r}
 3423_5 \quad 13_5 \\
 \underline{31_5} \quad \underline{221_5} \\
 32_5 \\
 \underline{31_5} \\
 13_5 \\
 \underline{13_5} \\
 0
 \end{array}$$

$$13_5 = 8, \quad 34_5 = 19, \quad 31_5 = 16, \quad 32_5 = 17.$$

Это же действие вторым способом:

$$\begin{array}{r}
3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 \\
\underline{19 \cdot 5^2} \\
16 \cdot 5^2 \\
\underline{3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1} \\
17 \cdot 5^1 \\
\underline{16 \cdot 5^1} \\
1 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 \\
8 \cdot 5^0 \\
\underline{8 \cdot 5^0} \\
0
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
1 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 8 \cdot 5^0 \\
\underline{2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0}
\end{array}$$

Окончательно, $2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 221_5$.

Проверяем в десятичной системе:

$$3423_5 = 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 3 \cdot 125 + 4 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 375 + 100 + 10 + 3 = 488;$$

$$13_5 = 8;$$

$$221_5 = 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 2 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 61;$$

$488 : 8 = 61$. Это верное равенство.

На данном этапе целесообразно дать учащимся несколько примеров для самостоятельного решения под видом проверки признака делимости на 11_p для разных p .

Следует заметить, что деление натуральных чисел не совсем то же самое, что и деление многочленов. Например, число 3423_5 делится на число 13_5 без остатка, а многочлен $(3 \cdot p^3 + 4 \cdot p^2 + 2 \cdot p^1 + 3 \cdot p^0)$ на двучлен $(1 \cdot p^1 + 3 \cdot p^0)$ делится с остатком. Однако это не мешает использовать один и тот же алгоритм деления «уголком» для чисел и многочленов, так как в основе его лежит свойство делимости суммы. Данные числа – это частный случай значений этих многочленов при $p = 5$. Видно, что при делении чисел происходит перераспределение коэффициентов за счет конкретизации p .

Но если многочлен разделился на многочлен без остатка, то соответствующие числа также будут делиться без остатка. Рассмотрим, например, следующее равенство $(x^2 + 5x + 6) : (x + 2) = (x + 3)$. Для любых целых $x > 6$ каждый из многочленов будет являться суммой разрядных слагаемых натуральных чисел по данному основанию x . Очевидно, что те действия, которые необходимо проделать для деления трехчлена $(x^2 + 5x + 6)$ на двучлен $(x + 2)$, будут в точности повторяться при конкретизации основания. Соответственно, деление чисел произойдет без остатка. В частности, при $x = 10$ имеем: $156 : 12 = 13$. Это справедливое равенство.

Но для $1 < x \leq 6$ трехчлен $(x^2 + 5x + 6)$ не будет являться суммой разрядных слагаемых по данному основанию. Однако с конкретными числами, которые являются значениями этих многочленов при заданном x , деление все равно произойдет без остатка.

При $x = 6$ имеем:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 6 \cdot 6^0 = 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^1 + 0 \cdot 6^0 \\ &= 6^2 + 6 \cdot 6^1 + 0 \cdot 6^0 = 2 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 0 \cdot 6^0 = 200_6 \end{aligned}$$

Сумма разрядных слагаемых этого числа – это уже другой многочлен $2p^2$, причем $2p^2$ не будет делиться без остатка на $(p + 2)$ и $(p + 3)$, однако число 200_6 разделится на 12_6 и на 13_6 :

$$\begin{array}{r} 200_6 \quad 12_6 \\ 12_6 \quad \overline{13_6} \\ \hline 40_6 \\ 40_6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Этот пример иллюстрирует, что действия с многочленами от одной переменной носят более общий характер, чем действия с натуральными числами, однако перенос алгоритмов действий с числами на действия с многочленами возможен.

Более того, в начальной школе при изучении арифметики мы на самом деле знакомимся с алгоритмами, которые корректно работают благодаря тому, что запись натурального числа в позиционной системе есть укороченная запись суммы, которая в общем виде является многочленом от одной переменной. Попробуем разобраться как работает деление «уголком».

Задача 35. Найдите частное от деления 735324 на 12.

Решение.

$$\begin{array}{r} 735324 \quad 12 \\ \underline{72} \quad \overline{61277} \\ 15 \\ \underline{12} \\ 33 \\ \underline{24} \\ 92 \\ \underline{84} \\ 84 \\ \underline{84} \\ 0 \end{array}$$

Результат деления – число 61277.

Этот алгоритм построен на дистрибутивности деления относительно сложения. А именно

$$(a + b + c + \dots + n) : r = a : r + b : r + c : r + \dots + n : r, \quad r \neq 0$$

Делимое раскладывается на слагаемые, каждое из которых кратно делителю, в нашем случае

$$735324 = 720000 + 12000 + 2400 + 840 + 84.$$

Эти слагаемые формируются из цифр делимого последовательно, начиная со старшего разряда. Выделяется группа цифр, которая больше делителя, фиксируется неполное частное от деления этой группы цифр на делитель, после чего находится остаток от деления, к которому добавляется следующая цифра, и с ним проводятся те же операции. И так до тех пор, пока остаток не станет меньше делителя, после чего все неполные частные складываются. Если остаток оказался равен нулю, то говорят, что произошло деление без остатка, или деление нацело.

В качестве слагаемых разложения выступают фактически произведения неполных частных на делитель, или, другими словами, наибольшие кратные делителя, не превосходящие выделенной группы цифр.

Первое слагаемое разложения – это не 72, как записано при делении «уголком», а 720000. Это видно по позициям, которые занимают цифры 7 и 2. Нули не пишутся, чтобы не загромождать запись.

В итоге имеем

$$735324 : 12 = 720000 : 12 + 12000 : 12 + 2400 : 12 + 840 : 12 + 84 : 12 \\ = 60000 + 1000 + 200 + 70 + 7 = 61277$$

720000	: 12 =	60000
12000	: 12 =	1000
+ 2400	: 12 =	+ 200
840	: 12 =	70
84	: 12 =	7
735324		61277

Будет ли этот алгоритм корректно выполняться при делении многочлена на многочлен от одной переменной?

Если получится представить многочлен-делимое в виде суммы таких многочленов, каждый из которых при делении на многочлен-делитель будет давать одночлен, то по свойству дистрибутивности в частном будет сумма одночленов, то есть многочлен-частное.

Подбор слагаемых происходит по той же схеме, что и при делении натуральных чисел, только вместо старших разрядов числа рассматриваются старшие степени многочлена. По сути подбирается результат деления части делимого на делитель, после чего эта часть просто вычисляется умножением.

Задача 36. Разделите $x^4 + 3x^3 - 35x^2 - 39x + 70$ на $x^2 + x - 2$.

Решение. Самый «большой» одночлен, который может быть результатом деления какой-то части делимого на делитель, легко подбирается по старшим членам делимого и делителя. Это x^2 . (Конечно, «большой» рассматривается с точки зрения показателя степени переменной и абсолютной величины коэффициента, чтобы степень остатка была меньше степени делимого).

$$\begin{aligned}(x^2 + x - 2) \cdot x^2 &= x^4 + x^3 - 2x^2 \\(x^4 + 3x^3 - 35x^2 - 39x + 70) - (x^4 + x^3 - 2x^2) \\&= 2x^3 - 33x^2 - 39x + 70 - \text{первый остаток}\end{aligned}$$

Дальше подбираем по той же схеме «наибольший» одночлен для остатка. Это $2x$.

$$\begin{aligned}(x^2 + x - 2) \cdot 2x &= 2x^3 + 2x^2 - 4x \\(2x^3 - 33x^2 - 39x + 70) - (2x^3 + 2x^2 - 4x) \\&= -35x^2 - 35x + 70 - \text{второй остаток}\end{aligned}$$

Дальше имеем

$$\begin{aligned}(x^2 + x - 2) \cdot (-35) &= -35x^2 - 35x + 70 \\(-35x^2 - 35x + 70) - (-35x^2 - 35x + 70) &= 0 - \text{последний остаток.}\end{aligned}$$

Складываем выделенные одночлены и получаем искомое частное $x^2 + 2x - 35$.

Сделаем более компактную запись этих рассуждений

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 3x^3 - 35x^2 - 39x + 70 \quad \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 35} \\
 \underline{x^4 + \quad x^3 - 2x^2} \\
 2x^3 - 33x^2 - 39x \\
 \underline{2x^3 + 2x^2 - 4x} \\
 -35x^2 - 35x + 70 \\
 \underline{-35x^2 - 35x + 70} \\
 0
 \end{array}$$

Проверим

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 2x^2 : x^2 + x - 2 = x^2 \\
 + 2x^3 + 2x^2 - 4x : x^2 + x - 2 = 2x \\
 -35x^2 - 35x + 70 : x^2 + x - 2 = -35 \\
 \hline
 x^4 + 3x^3 - 35x^2 - 39x + 70 x^2 + 2x - 35
 \end{array}$$

Задача 36 показывает, что алгоритм деления «уголком» применим для произвольных многочленов от одной переменной. Таким образом, данный способ имеет более широкие возможности по сравнению с часто используемым на практике делением по схеме Горнера, которое применимо только при делении многочлена на линейный двучлен. Более того, схема Горнера представляет собой фактически сокращенную запись деления «уголком», а значит, обоснование схемы Горнера основано на тех же идеях, что и деление «уголком», а именно, на идее разложения многочлена на сумму двучленов, кратных делителю. Также важно отметить, что способ деления «уголком» быстрее осваивается и лучше запоминается учениками, чем схема Горнера, в силу того, что запись «уголком» знакома им еще с младшей школы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи, при решении которых существенно используются свойства десятичной записи чисел, достаточно часто встречаются на математических конкурсах, викторинах и олимпиадах. Так же они входят в КИМ базового и профильного ЕГЭ. Таким образом, более системное изучение различных позиционных систем счисления может стимулировать интерес школьников к математике и способствовать как их успешному выступлению на различных конкурсах и конференциях, так и сдаче ГИА.

Эпизодически задачи на десятичную запись натуральных чисел можно найти и в стандартных школьных учебниках, как дополнительные задачи повышенного уровня сложности. Задачи же, связанные со свойствами недесятичных систем счисления, крайне редки не только на обычных уроках математики, но и на факультативах по «олимпиадной математике».

Парадоксально, но факт: определения позиционных систем счисления нет в учебниках по математике, зато оно присутствует в учебниках по информатике и ИКТ! Правда, там излагаются, в основном, только правила работы с числами в двоичной и родственных ей системах счисления.

Нельзя не отметить, что знание систем счисления приводит к более глубокому пониманию понятия числа (например, делимость числа на три – это свойство числа, а делимость суммы цифр на три – это свойство цифровой записи числа; эти свойства равносильны не во всех системах счисления).

Материалы, представленные в работе, могут быть использованы как на основных и дополнительных уроках математики, так и на уроках информатики. Это позволяет говорить о метапредметности курса.

Для повышения качества обучения в каждый раздел включены методические рекомендации по обучению решения предлагаемых задач. Это должно помочь учителю более эффективно использовать материалы работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Алгебра: учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. 7-е изд. М.: Просвещение, 2007. – 285 с.
2. Алгебра: задачник для учащихся 7 класса общеобразовательных учреждений. Часть 2. / под ред. А.Г. Мордковича. 16-е изд. М.: Мнемозина, 2012. – 271 с.
3. Гельфман Э. Г. Математика: учебник для 5 класса: в 2 ч. Ч. 1 / Э. Г. Гельфман, О. В. Холодная. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 152 с.
4. Гашков С. Б. Системы счисления и их применение. Библиотека «Математическое просвещение». Выпуск 29. – М.: МЦНМО, 2004. – 52 с.
5. Гуцин Д. Д. Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ». [Электронный ресурс] / Гуцин Д. Д. – URL: <http://ege.sdangia.ru> (дата обращения 24.05.2018).
6. Развивающие задачи для математического досуга. Библиотека журнала «Математика в школе». / составители Э. А. Кремень, З.С. Сухотина. – М.: Школа-Пресс, 1993. – 112 с.
7. Лапатин А. Л. Обучение арифметическим действиям над натуральными числами в различных позиционных системах счисления как основа для последующего изучения действий над многочленами/ А. Л. Лапатин // Всерос. молодежная научная конф. «Все грани математики и механики»: сборник статей. Томск, 25-28 апреля 2017 г. / под ред. А. В. Старченко. – Томск: Издательский дом Томского ун-та, 2017. – С. 238 – 243.
8. Гриншпон Я.С., Лапатин А.Л. Алгоритмы выполнения арифметических действий над натуральными числами и над многочленами от одной переменной в школьном курсе математики // Дневник науки. 2018. №3

[Электронный ресурс]. URL: http://www.dnevniknauki.ru/images/publications/2018/3/pedagogics/Grinshpon_Lapatin.pdf (Дата обращения 05.06.2018).

9. Гриншпон Я. С. Обучение арифметическим действиям над натуральными числами в различных позиционных системах счисления как основа для последующего изучения действий над многочленами / Я. С. Гриншпон, А. Л. Лапатын // Всерос. молодежная научная конф. «Все грани математики и механики»: сборник тезисов докладов. Томск, 25-28 апреля 2017 г. С. 95. / [Электронный ресурс] URL: <http://conf.math.tsu.ru/wp-content/uploads/2017/04/Collected.pdf> (дата обращения 05.06.2018).

10. Лапатын А. Л. Методы решения задач на десятичную запись натурального числа / А. Л. Лапатын // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»: сборник тезисов докладов. Томск, 24-28 апреля 2018 г. С. 126. / [Электронный ресурс] URL: <http://conf.math.tsu.ru/wp-content/uploads/2018/05/Сборник-тезисов-ВГММ-18.pdf> (дата обращения 05.06.2018).

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: grinshpon@mail.ru / ID: 5795560
Проверяющий: (grinshpon@mail.ru / ID: 5795560)
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»- <http://www.antiplagiat.ru>

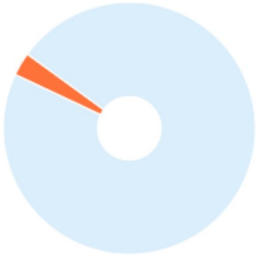
ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 3
Начало загрузки: 11.06.2018 14:08:55
Длительность загрузки: 00:00:02
Имя исходного файла: Лапатин
Размер текста: 1032 кБ
Символов в тексте: 75590
Слов в тексте: 9760
Число предложений: 655

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 11.06.2018 14:08:57
Длительность проверки: 00:00:03
Комментарии: не указано
Модули поиска:

ЗАИМСТВОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
3,32%	0%	96,68%



Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.
Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа.
Заимствования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.
Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Доля в тексте	Источник	Ссылка	Актуален на	Модуль поиска	Блоков в отчете	Блоков в тексте
[01]	0,59%	0,92%	600825.7z	http://project.1september.ru	03 Апр 2017	Модуль поиска Интернет	9	12
[02]	0,32%	0,87%	/Модуль 2 в учебный отдел\...	http://bigpi.biysk.ru	раньше 2011	Модуль поиска Интернет	5	13
[03]	0,23%	0,72%	http://www.lib.tpu.ru/fulltext/...	http://lib.tpu.ru	09 Ноя 2017	Модуль поиска Интернет	3	11

Еще источников: 13
Еще заимствований: 2,18%