Министерство образования и науки Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Механико-математический факультет
Кафедра теории функций

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК

Руководитель ООП
д-р физ.-мат. наук, профессор
_______________ А. В. Старченко
«__19__»___июня___2017 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Банахово пространство, не изоморфное своему квадрату

по основной образовательной программе подготовки бакалавров

«Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и компьютерных наук»

направление подготовки 02.03.01 – Математика и компьютерные науки

Кадыржанова Лейла Муратовна

Руководитель ВКР
Доцент, канд. физ.-мат. наук
_______________ Л. В. Гензе
«__19__»___июня___2017 г.

Автор работы
студент группы №_______
_____________ Л.М. Кадыржанова

Томск - 2017

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Два факта – то, что пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ не изоморфны своему квадрату и то, что такие классические бесконечномерные линейные нормированные пространства, как c_{00}, c_0, c, l_p, l_∞ напротив, изоморфны своим квадратам, устанавливаются довольно просто.

То, что никакое конечномерное линейное нормированное пространство не изоморфно своему квадрату доказывается несколько сложнее. Также нетривиален тот факт, что пространство $C[a,b]$ всех непрерывных вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$, изоморфно своему квадрату (это результат С. Банаха).

Таким образом, с конечномерными пространствами ситуация ясна, а вот поиски бесконечномерного банахова пространства, неизоморфного своему квадрату (или доказательство того, что любое такое пространство изоморфно своему квадрату) затянулись вплоть до 60-х годов XX века.

Первые примеры бесконечномерных банаховых пространств, не изоморфных своим декартовым квадратам, были приведены Ч. Бессагой, А. Пелчинским [1] и З.Семадени [2] в 1960 г. Пример рефлексивного Банахова пространства с таким свойством был построен Т. Фигелем [3] в 1977 г. Как показал Шарек [4] в 1986 г. существует вещественное банахово пространство, не изоморфное декартову квадрату никакого банахова пространства. Также отметим, что существует бесконечномерное линейное нормированное пространство, которое нельзя непрерывно отобразить на свой квадрат.

В 1995 г. вышла статья К.Э. Каибханова [9], в которой строятся рефлексивные банаховы пространства X и Y, такие что $X^2 \nsim X, Y^2 \nsim Y$, но $X \oplus Y \sim (X \oplus Y)^2$.

В этой работе приводится подробное доказательство того, что никакое конечномерное линейное нормированное пространство не изоморфно своему квадрату. Также подробно строятся изоморфизмы пространств c_{00}, c_0, c, l_p, l_∞ и $C[a,b]$ на свои квадраты. Далее разбирается пример Каибханова.

1. Необходимые определения

Определение. Множество E называется линейным (векторным) пространством над полем Λ, если в E определена бинарная операция «сложение» $(x,y) \longmapsto x+y$ и определена операция $(\lambda,x) \longmapsto \lambda x$ умножения элементов E на элементы поля Λ, при чем выполняются следующие условия:

1) $x+(y+z)=(x+y)+z$ для всех $x,y,z \in E$;

2) $x+y=y+x$ для всех $x,y \in E$;

3) существует такой элемент $0 \in E$,что $0+x=x$ для всех $x \in E$;

4) для каждого $x \in E$ существует такой элемент $-x \in E$,что $x+(-x)=0$;

5) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для любых $\alpha, \beta \in \Lambda$ и любого $x \in E$;

6) $\alpha(x+y)= \alpha x+ \alpha y$ для любого $\alpha \in \Lambda$ и любых $x,y \in E$;

7) $\alpha(\beta x) =(\alpha\beta)x$ для любых $\alpha, \beta \in \Lambda$ и любого $x \in E$;

8) $1*x=$x для любого $x \in E$ (здесь 1-нейтральный элемент по умножению поля Λ).

Пусть E-линейное пространство над полем Λ и $A\subset E$. *Линейной оболочкой* множества A называется множество

sp $A=\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n | \alpha_i \in \Lambda, x_i \in A, i=1,\ldots,n; n\in \mathbb{N}\}$.

Определение. *Норма* на линейном пространстве E - это функция

$\|\cdot\|:E\to[0;+\infty)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $\| x \|=0$ тогда и только тогда , когда $x=0$;

2) $\| \alpha x \|=|\alpha|\cdot\| x \|$ для любого $\alpha \in \Lambda$ и любого $x \in E$;

3) $\| x + y \|\leq\| x \|+\| y \|$ для любых $x,y \in E$(неравенство треугольника).

Линейное нормированное пространство (ЛНП)-это пара $(E,\|\cdot\|)$, где E-линейное пространство, а $\|\cdot\|$-норма на E.

Свойства нормы.

1) $|\| x \|-\| y \||\leq\| x - y \|$.

2) непрерывность нормы: если $x_n \to x$, то $\| x_n \|\to\| x \|$.

3) непрерывность алгебраических операций:

(a) если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $x_n + y_n \to x + y$;

(b) если $\lambda_n \to \lambda$ и $x_n \to x$, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

Примеры нормированных пространств.

1) $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$. Норма элемента x=$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в этих пространствах задается формулой $\| x \|$=$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

2) Пусть Г - произвольное множество. М(Г)-пространство всех ограниченных числовых функций, заданных на Г. Норма: $\| x \|$=$sup_{\Upsilon\in\Gamma} |x(\Upsilon)|$.

3) l_∞ - пространство всех ограниченных числовых последовательностей с нормой $\| x \|$=$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$,где x=$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$.

4) Пространство c-пространство всех сходящихся последовательностей с $\| x \|$=$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Ясно, что c$\subset$ l_∞,а так как нормы на c и l_∞ задаются одинаково, то c-это подпространство в l_∞.

5) Пространство c_0 - пространство всех сходящихся к нулю последовательностей. $\| x \|$=$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$=$\max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.Ясно, что $c_0 \subset c \subset l_\infty$, а так как нормы на каждом из этих трёх пространств задаются одинаково, то $c_0 -$ это подпространство и в c, и в l_∞.

6) Пространство $c_{00} -$ пространство последовательностей, у которых отлично от нуля лишь конечное число координат с нормой $\| x \|$=$\max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

Ясно, что $c_{00} -$ подпространство в c_0 .

7) Пусть К-компакт. Множество всех непрерывных функций x:$K \to \Lambda$ с нормой $\| x \|$=$\max_{t\in K} |x(t)|$ будем обозначать C (K).

8) Пусть $p \geq 1$ и l_p- множество всех числовых последовательностей, суммируемых в p-й степени, то есть

$$l_p=\{x=(x_1, x_2, \dots) | \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}.$$

Норма в l_p определяется так: $\| x \| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$.

Замечание. Все пространства $l_p, l_\infty, c, c_0 c_{00}$-бесконечномерные (система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $e_n = \left(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1}, 1,0,0,\dots\right)$−бесконечная линейно независимая система).

Линейные ограниченные операторы

Определение. Пусть E и F-два линейных нормированных пространства . Оператор (отображение) T:E→F называется *линейным*, если

1) $T(x+y)=Tx+Ty$ для любых x,y∈ E;

2) $T(\lambda x)=\lambda \cdot Tx$ для любого $x \in E$ и любого $\lambda \in \Lambda$.

Эти два условия можно заменить на одно: $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$.

Теорема. *Если линейный оператор T:E→F непрерывен хотя бы в одной точке $x_0 \in E$, то он непрерывен всюду на E.*

Определение. Линейный оператор $T : E$→F называется *ограниченным*, если T переводит единичный шар $\overline{U}(0,1)$ пространства E в ограниченное множество в пространстве F.

Оператор T:E→F ограничен, если $sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|<+\infty$.

Определение. Число $sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|$ называется *нормой* линейного ограниченного оператора T:E→F и обозначается $\|T\|$.

Теорема. *Пусть T:E→F - линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) оператор T непрерывен;

(2) оператор T ограничен;

(3) существует такое число C>0,что $\|Tx\| \le C\|x\|$ для всех $x \in E$.

Следствие 1. *Если T:E→F-линейный ограниченный оператор, то*

$\|Tx\| \le \|T\| \cdot \|x\|$ *для каждого $x \in E$.*

Следствие 2. *Если для каждого $x \in E$ верно неравенство $\|Tx\| \le C\|x\|$,то* $\|T\| \le C$

Пространство линейных ограниченных операторов

Пусть E и F - линейные нормированные пространства над полем Λ. Символом L (E,F) будем обозначать множество всех линейных ограниченных операторов из E в F.

Множество $L(E,F)$ образует линейное пространство с естественными операциями сложения и умножения на элементы поля Λ. Ранее введенное понятие нормы оператора ($\| T \|=\sup_{\|x\|\le 1} \| Tx \|$) действительно является нормой на L (E,F).

Теорема 1. *Если пространство F банахово, то* $L(E,F)$ *тоже банахово.*

Изоморфизмы и изометрии

Определение. Пусть E и F – линейные нормированные пространства и T:E→F - линейный оператор. Оператор T называется *изоморфизмом (линейным гомеоморфизмом),* если T биективен, непрерывен и оператор T^{-1} непрерывен. В этом случае говорят, что пространства E и F изоморфны (линейно гомеоморфны) и пишут $E\sim F$.

Замечание. Биекция T : E→F является изоморфизмом тогда и только тогда, когда найдутся такие числа $C_1, C_2 > 0$, что $C_1 \cdot \|x\| \le\| Tx \|\le C_2 \cdot \|x\|$ для каждого $x \in E$.

Определение. Пусть (X,p) и (Y,d)- метрические пространства . Биекция f:X→Y называется *изометрией*, если $d(f(x_1), f(x_2))=p(x_1, x_2)$ для любых точек $x_1, x_2 \in X$.

Определение. Пусть E и F –линейные нормированные пространства и T:E→F-линейный оператор. Оператор T называется *изометрическим изоморфизмом,* если T одновременно изоморфизм и изометрия. В этом случае говорят, что пространства E и F изометрически изоморфны и пишут $E\cong F$.

2. Классические банаховы пространства

и их изоморфность своему квадрату

Определение. Линейное пространство называется *конечномерным*, если в нем существует базис, состоящий из конечного числа элементов. В противном случае, линейное пространство называется *бесконечномерным*.

Н/р: $\mathbb{R}^n$ (1,0,…,0), (0,1,0,…,0),…, (0,0,…,0,1).

Лемма. *Если F-линейное нормированное пространство и T:*$\mathbb{R}^n \to$*F-линейный оператор, то Tнепрерывен. То же самое верно и для оператора T:*$\mathbb{C}^n \to$*F.*

Теорема. *Если E-n-мерное линейное нормированное пространство над полем, то E*$\sim\mathbb{R}^n$.

Теорема. *Пространство, изоморфное банахову, само банахово.*

Следствие. *Любое конечномерное линейное нормированное пространство банахово.*

Следствие. *Если E-конечномерное пространство и T: E→F-линейный оператор, то T непрерывен.*

Следствие. *Множество A в конечномерном линейном нормированном пространстве компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Теорема. Если *T:E→F-линейная инъекция* и $\{e_1, \dots, e_k\}$*-линейно независимая система* в *E*, то $\{Te_1, \dots, Te_k\}$*-линейно независимая система в F.*

Доказательство:

Линейность:*T(αx+βy) = αTx+βTy.*

Инъекция:*f:X→Y,f*-инъекция ,если *x≠y⇒f(x)≠f(y)*

E-линейное пространство, $x_1, \dots, x_n \in E$,$\{x_1, \dots, x_n\}$-линейно независимая система, если из равенства $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ следует, что все $\alpha_i = 0$ и $\alpha_1 Te_1 + \ldots + \alpha_k Te_k = 0 = T(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k)$.

Факт: если *T E→F-линейное отображение, то T(0)=0.*

($T(0\cdot x + 0 \cdot y) = 0\cdot Tx + 0 \cdot Ty = 0$),*т.е.* $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k = 0 \Longrightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_k = 0$

(ч.т.д.)

2.**Следствие.** Если n≠m, то $\mathbb{R}^n \nsim \mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^n \nsim \mathbb{C}^m$.

Доказательство: (от противного)

T:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$-изоморфизм, $n > m$. $e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,\dots,0,1)$- линейно независимая система в $\mathbb{R}^n$.

$\{Te_1, \dots, Te_n\}$- линейно независимая система в $\mathbb{R}^m$, противоречие условию следствия.

Теорема. Если E-конечномерное линейное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$ (над полем $\mathbb{C}$) и $\dim E=n$, то $E\sim \mathbb{R}^n(E\sim\mathbb{C}^n)$.

Доказательство:

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – канонический базис в $\mathbb{R}^n$, а $p_1, .., p_n$ – базис в E.

Определим оператор $T:\mathbb{R}^n \to E$ формулой: $Tx=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, где $x=(x_1, .., x_n)$.

Непрерывность отображения T⇒из леммы (если F-линейное нормированное пространство и $T:\mathbb{R}^n \to F$ –линейный оператор,то T-непрерывен .Верно и для $T:\mathbb{C}^n \to F$).

Докажем непрерывность обратного T^{-1}. Пусть S-сфера R=1,центр в нуле в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим отображение $q:S\to [0;+\infty)$.

$q(x)=\|Tx\|$, где q-непрерывна, как композиция, т.е. достигает на компакте S своего минимального значения: $\exists\ \bar{x} \in S$ такая, что $q(\bar{x})=\min q(x)=\alpha$.

Докажем, что $\alpha>0$.Предположим, что $\alpha=0$.

$0=q(\bar{x})=\|T\bar{x}\| \Rightarrow\ T\bar{x}=0 \Rightarrow \bar{x}=0$, т.к. T-инъекция, получим противоречие

$\bar{x} \notin S$.Таким образом $\forall x\in \mathbb{R}^n$: $\|x\|=1$. $\|Tx\| \geq \alpha > 0$.

$x \in \mathbb{R}^n$,$x\neq 0$, $\frac{x}{\|x\|} \in S, \left\|T\frac{x}{\bar{x}}\right\| \geq \alpha$,т.е. $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ ⇒непрерывно обратное T^{-1}.

(ч.т.д.)

Теорема. $c_0 \sim \mathbb{R}\times c_0$

Доказательство: отображение $(t,(x_1, x_2, ...)) \longmapsto (t, x_1, x_2, ...)$ дает нужный изоморфизм. (ч.т.д.)

Теорема. $c_0\times c_0\sim c_0$

Доказательство: $(\overbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}^{N_x}, \overbrace{(y_1, y_2, \dots, y_n)}^{N_y}) \longmapsto (x_1, y_1, x_2, y_2, ...)$,$\forall\varepsilon>0\ \exists\ N_0$ такое, что $N_0=\max\{2N_x, 2N_y\}$

$(z_1, z_2, z_3) \longmapsto (z_1, z_3, z_5, ...)$ $(z_2, z_4, ...)$, (ч.т.д.)

Теорема. $l_p\times l_p\sim l_p$

Доказательство: $(\overbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}^{N_x}, \overbrace{(y_1, y_2, \dots, y_n)}^{N_y}) \longmapsto (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$ $, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_0$ такое, что N_0=max$\{2N_x, 2N_y\}$. Корректность этого определения следует из того, что сумма двух сходящихся рядов – снова сходящийся ряд.

$(z_1, z_2, z_3) \longmapsto (z_1, z_3, z_5, \dots)$ $(z_2, z_4, \dots)$, $c_0^n \simeq c_0$, $c_0^{\aleph_0} \simeq c_0$

X=$c_0^{\aleph_0} \Rightarrow X^{\aleph_0} \simeq c_0^{\aleph_0} \simeq X^{\aleph_0}$. (ч.т.д.)

Совершенно аналогично доказывается, что $c_{00} \sim c_{00} \times c_{00}$ и что $l_\infty \sim l_\infty \times l_\infty$.

Теорема. $c_0 \sim c$.

Доказательство: отображение $(x_1, x_2, \dots) \longmapsto (a, x_1 - a, x_2 - a, \dots)$ дает нужный изоморфизм. Здесь a=$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. (ч.т.д.)

Теорема. $c \sim c \times c$.

Доказательство: $c \sim c_0 \sim c_0 \times c_0 \sim c \times c$ (ч.т.д.)

Теорема. $C[a, b] \sim C[a, b] \times C[a, b]$.

Доказательство. Известно, что пространство c_0 дополняемо в $C[a, b]$. Тогда

$$C[a, b] \sim c_0 \times E \sim \mathbb{R} \times c_0 \times E \sim \mathbb{R} \times C[a, b] \sim C([a, b] \cup \{*\}),$$

где $\{*\}$ – точка, не принадлежащая отрезку $[a, b]$.

Далее, $C[a, b] \times C[a, b] \sim C([a, b] \cup [d, e])$, где $[d, e]$ – какой-нибудь отрезок, не пересекающийся с отрезком $[a, b]$.

Теперь каждой функции $x \in C([a, b] \cup [d, e])$ поставим в соответствие функцию $y \in C([a, b] \cup \{*\})$ таким образом:

$$y(t) = \begin{cases} x(b) - x(d), \text{если } t = *; \\ x(2t - a), \text{если } t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]; \\ x\left(\frac{2(d-e)}{a-b} t + d - \frac{(d-e)(a+b)}{a-b}\right), \text{если } t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]. \end{cases}$$

2. Пример Каибханова

Теорема. *Существуют рефлексивные банаховы пространства X и Y, не изоморфные своим декартовым квадратам, но обладающие тем свойством, что $X \oplus Y$ изоморфно своему декартову квадрату.*

Для доказательства теоремы нам несколько вспомогательных лемм и определений.

Определение. Банахово пространство обладает тем свойством (*), что если оно содержит подпространство, изоморфное декартову квадрату X:

$X \supset X_1 \oplus X_2, X_1 \sim X_2 \sim X.$

Напомним определение расстояния Банаха-Мазура между банаховыми пространствами X и Y: $d(X,Y) = \inf\{\|A\|\|A^{-1}\| : A: X \to Y - \text{ изоморфизм}\}.$

Лемма 1. *Пусть Банахово пространство X обладает свойством:*

$X \supset X_1 \oplus X_2, X_1 \sim X_2 \sim X$. Тогда X содержит подпространство, изоморфное декартову кубу X.

Доказательство. Так как $X_2 \sim X$, то X_2 содержит подпространство, изоморфное $X_2 \oplus X_2$: $X_2 \supset X_3 \oplus X_4, X_3 \sim X_4 \sim X_2 \sim X$.Таким образом, $X_1 \oplus X_3 \oplus X_4 \subset X,\ X_1 \sim X_3 \sim X_4 \sim X.$ Лемма доказана.

Для Банахова пространства X определим функцию

$\varphi(X,p,n) = \inf\{d(X_1, l_p^n): X_1 \subset \mathrm{X}, \dim X_1 = n\}.$

Лемма 2. *Пусть Банахово пространство X обладает свойством (*). Тогда существует такое C, что*

$\varphi(X,p,3n) \le C\varphi(X,p,n)$

для любого $p \in [1;\infty)$.

Доказательство. Согласно лемме 1, X содержит подпространство, изоморфное его декартову кубу: $X \supset X_1 \oplus X_2 \oplus X_3, X_1 \sim X_2 \sim X_3 \sim X.$

Пусть $P_i: \sum_{j=1}^{3} X_j \to X_i$ – естественные проекторы, $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ произвольны и $Y \subset X$, $\dim Y = n$,- подпространство со свойством $d(Y,l_p^n) < \varphi(X,p,n) + \varepsilon$. Тогда найдутся такие подпространства $Y_i \subset X_i$, что $d(Y_i, l_p^n)(\varphi(X,p,n) + \varepsilon)$.

Пусть $T_i: Y_i \to l_p^n$ – изоморфизм со свойствами: $\|T_i\|$ = $d(Y_i, l_p^n)$, $\left\|T_i^{-1}\right\|$ = 1. Рассмотрим изоморфизм T: $\sum_{j=1}^3 \oplus Y_i \to l_p^{3n}$, определенный по правилу

$$T(y_1, y_2, y_3) = (T_1 y_1, T_2 y_2, T_3 y_3) \in l_p^n \oplus l_p^n \oplus l_p^n .$$

Имеем

$$\| T(y_1, y_2, y_3)\| = \|(T_1 y_1, T_2 y_2, T_3 y_3) \|$$

$$\leq \sum_{i=1}^3 \|T_i\| \|y_i\| = \sum_{i=1}^3 \|T_i\| \|P_i(y_1, y_2, y_3)\|$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^3 \|T_i\| \|P_i\|\right) \|(y_1, y_2, y_3)\|$$

$$=\left(\sum_{i=1}^3 \|P_i\| \, d(Y_i, l_p^n)\right) \|(y_1, y_2, y_3)\|,$$

т.е. $\|T\| \leq \sum_{i=1}^3 \|P_i\| \, d(Y_i, l_p^n)$.\

Если $\| T(y_1, y_2, y_3)\| = 1$, то
$\|(y_1, y_2, y_3)\| \leq \sum_{i=1}^3 \|y_i\| \leq \sum_{i=1}^3 \left\|T_i^{-1}\right\| \|T_i y_i\| \leq 3$,

т.е. $\left\|T_i^{-1}\right\| \leq 3$. Таким образом,

$$\varphi(X, p, 3n) \leq 3\left(\sum_{i=1}^3 \|P_i\| \, d(X, X_i)\right) (\quad \varphi(X, p, n) + \varepsilon,$$

и справедливость леммы следует из произвольности ε.

Лемма 3. *Для любых $p \in (2;\infty)$, $M > 0$ найдется такое $n \in \mathrm{N}$, что*

$$\varphi\left(l_p^{3n}, 2, n\right) > M.$$

Доказательство. Пусть заданы $p \in (2;\infty)$ и $M > 0$. Рассмотрим функцию

$k(n,\tau)$ = max{m: существует $Y \subset l_p^n$, $\dim Y = m, d(Y, l_2^m) \leq \tau$},

$k(n,\tau)$ является неубывающей функцией по n и τ. Доказано, что существует функция $C(\tau)$ такая, что

$$k(n,\tau) \leq C(\tau)\, n^{2/p}.$$

Выберем m настолько большим, чтобы $C(M)*(3m)^{2/p} < m$. Тогда

$$k(3m, M) < C(M)* (3m)^{2/p} < m.$$

Нетрудно проверить, что последнее неравенство равносильно требуемому. Лемма доказана.

Если задано конечное или счетное семейство Банаховых пространств $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, то под $(\sum_{\lambda\in\Lambda} \oplus X_\lambda)_p$ мы будем понимать пространство последовательностей $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$,$x_\lambda \in X_\Lambda$, снабженное нормой

$$\|\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\| = (\sum_{\lambda\in\Lambda}\|x_\lambda\|^p)^{1/p}.$$

Известно, что пространство $L_p(0,1)$ при $1 \le p \le 2$ имеет котип 2 с константой $\sqrt{2}$, что означает: для любых $\{x_j\}_{j=1}^m \subset L_p(0,1)$

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^m r_j(t)x_j\right\| dt \ge \frac{1}{\sqrt{2}}(\sum_{j=1}^m \left\|x_j\right\|^2)^{1/2},$$

а при $2 \le p \le \infty$ $L_p(0,1)$ имеет котип 2 с константой C_p, т.е. для любых $\{x_j\}_{j=1}^m \subset L_p(0,1)$

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^m r_j(t)x_j\right\| \le C_p(\sum_{j=1}^m \left\|x_j\right\|^2)^{1/2},$$

где $r_j(t)$ – функции Радемахера на [0,1].

Лемма 4. *Пусть* X=$(X_1 \oplus X_2)_2$,$\dim X_1 = n$, $d(X_1,l_2^n)$=d, *и* X_2 *имеет котип 2 с константой С. Тогда X имеет котип 2 с константой* C_1=2 $max\{d,C\}$.

Доказательство. Из равенства $d(X_1,l_2^n)=d$ вытекает, что для любых

$\{x_j\}_{j=1}^m \subset X_1$

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^m r_j(t)x_j\right\| dt \ge \frac{1}{d}(\sum_{j=1}^m \left\|x_j\right\|^2)^{1/2}.$$

Пусть $P_i: X \to X_i$, *i=1,2,*-проекторы. Из равенств

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^m r_j(t)x_j\right\|dt \ge \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^m r_j(t)P_i x_j\right\| dt$$

следует, что для любых $\{x_j\}_{j=1}^m \subset X$ будем иметь

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^m r_j(t)x_j\right\|dt \ge \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^m r_j(t)P_1x_j\right\| dt + \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^m r_j(t)P_2x_j\right\| dt\right]$$

$$\ge \frac{1}{2}\,[\frac{1}{d}(\sum_{j=1}^m \left\|P_1x_j\right\|)^2)^{1/2} + \frac{1}{C}(\sum_{j=1}^m \left\|P_2x_j\right\|)^2)^{1/2}]$$

$$\ge \frac{1}{2}\min\{\frac{1}{d},\frac{1}{C}\}[(\sum_{j=1}^m \left\|P_1x_j\right\|)^2)^{1/2} + (\sum_{j=1}^m \left\|P_2x_j\right\|)^2)^{1/2}]$$

$\geq \frac{1}{2}\min\{\frac{1}{d},\frac{1}{c}\}(\sum_{j=1}^{m}\|x_j\|)^2)^{1/2}$.

Лемма доказана.

Для любого p ∈ (1,∞) существует такое K_p, что для любого Банахова пространства X и любых $\{x_j\}_{j=1}^{m} \subset X$

$$\int_0^1\|\sum_{j=1}^{m} r_j(t)x_j\|\,dt \leq (\int_0^1\|\sum_{j=1}^{m} r_j(t)x_j\|^p\,dt)^{1/p} \leq K_p\int_0^1\|\sum_{j=1}^{m} r_j(t)x_j\|\,dt.$$

Лемма 5. *Пусть Банаховы пространства $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ имеют котип 2 с константой M. Тогда X=$(\Sigma_{i=1}^{\infty}\oplus X_i)_2$ имеют котип 2 с константой M K_2.*

Доказательство. *Пусть $P_i\colon X\to X_i$- естественные проекторы и $\{x_j\}_{j=1}^{m}\subset X$.*

Тогда пользуясь неравенством из предыдущей леммы, будем иметь
$(\sum_{j=1}^{m}\|x_j\|^2)^{1/2}$=$(\sum_{i=1}^{\infty}\Sigma\ \|P_ix_j\|^2)^{1/2}$

$$\leq M\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_0^1\|\sum_{j=1}^{m} r_j(t)P_ix_j\|\,dt\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq M(\Sigma_{i=1}^{\infty}\int_0^1\|\sum_{j=1}^{m} r_j(t)P_ix_j\|^2\,dt)^{1/2}$$

$$= M(\int_0^1(\Sigma_{i=1}^{\infty}\|P_i\sum_{j=1}^{m} r_j(t)x_j\|^2)\,dt)^{1/2}$$

$$=M(\int_0^1\|\sum_{j=1}^{m} r_j(t)x_j\|^2\,dt)^{1/2}\backslash$$

$$\leq MK_2\int_0^1\|\sum_{j=1}^{m} r_j(t)x_j\|dt.$$

Лемма 6. *Пусть X = $(\Sigma_{i=1}^{\infty}\oplus\ l_{p_i})_2$, 2 < $p_{i+1} <\ p_i$ и $X_1\subset X$,* $\dim X_1 = m$. *Тогда* $d(X_1, l_2^m)\leq m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}}$.

Доказательство. Достаточно повторить рассуждения в доказательстве леммы 6 в [7].

Теперь приступим непосредственно к доказательству теоремы. Выберем числа $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

1) $p_1 > p_2 >\ p_3 > \ldots; p_i \to 2$;
2) $\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}$=1;

3) $n_{i+1} \geq \sum_{j=1}^{i} n_j$;
4) $(3n_i)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_{i+1}}} \leq 2$;
5) $\varphi\left(l_{p_i}^{3n_i}, 2, n_i\right) > i$ (здесь воспользуемся леммой 3).

Далее будет доказано, что эти условия не являются противоречивыми.

Рассмотрим пространство

$$X = ((\Sigma_{i=1}^{\infty} \oplus l_{p_i}^{n_i})_2 \oplus (\Sigma_{i=1}^{\infty} \oplus l_{q_i})_2)_2.$$

Докажем, что X обладает следующими свойствами:

А) $X \oplus X^*$ изоморфно своему декартову квадрату;
В) X не обладает свойством (*).

Начнем с доказательства А). Очевидно,

$$X^* = ((\Sigma_{i=1}^{\infty} \oplus l_{p_i}^{n_i})_2 \oplus (\Sigma_{i=1}^{\infty} \oplus l_{q_i})_2)_2.$$

Имеем

$$X \oplus X^* \sim (\Sigma_{i=1}^{\infty} \oplus l_{p_i}^{n_i})_2 \oplus (\Sigma_{i=1}^{\infty} \oplus l_{q_i})_2$$

$$\sim ((\Sigma_{i=1}^{\infty} \oplus l_{p_i}^{n_i})_2 \oplus (\Sigma_{i=1}^{\infty} \oplus l_{q_i})_2) \oplus ((\Sigma_{i=1}^{\infty} \oplus l_{p_i}^{n_i})_2 \oplus (\Sigma_{i=1}^{\infty} \oplus l_{q_i})_2)$$
$$\sim (X \oplus X^*) \oplus (X \oplus X^*).$$

Докажем В).Так как $l_{p_i}^{n_i} \subset X$, то для любого i $\varphi(X, p_i, n_i) = 1$.Согласно лемме 2, достаточно доказать, что $\varphi(X, p_i, 3n_i) \to \infty$ при $i \to \infty$. Зафиксируем i; пусть X_1- произвольное подпространство X с условиями $\dim X_1 = 3n_i$, $d(X_1, l_{p_i}^{3n_j}) = h$.

Пусть $Q: X \to (\Sigma_{j=i+1}^{\infty} \oplus l_{p_j}^{n_j})_2 \oplus (\Sigma_{j=1}^{\infty} \oplus l_{q_j})_2$ - естественный проектор. Положим $X_1^1 = QX_1$.Ясно, что $\dim X_1^1 = \delta n_i$, где $1 \leq \delta \leq 3$. Обозначим

$Y = X_1 \cap X_1^1$;тогда из свойства 3) следует, что $\dim Y = \delta_1 n_i$, где $1 \leq \delta_1 \leq \delta \leq 3$.

Пусть $S: X \to (\Sigma_{j=i+1}^{\infty} \oplus l_{p_j}^{n_j})_2$, $R: X \to (\Sigma_{j=1}^{\infty} \oplus l_{q_j})_2$ – естественные проекторы. Из леммы 6, свойства 4) и неравенства $\dim Y \leq 3n_i$ следует, что

$$d(SY, l_2^{\dim SY}) \leq (3n_i)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_{i+1}}} \leq 2,$$
l_{q_j} имеет котип 2 с константой $\sqrt{2}$. Поэтому, согласно лемме 5, RX имеет

котип 2 с константой $\sqrt{2}\,K_2$.А так как $Y \subset (SY \ \oplus RY)_2$, то мы попадаем в условия леммы 4, поэтому для любых $\{y_j\}_{j=1}^m \subset Y$

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^m r_j(t) y_j\right\| dt$$

$$\geq \frac{1}{2}\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}K_2}\}(\sum_{j=1}^m \|y_i\|^2)^{1/2}\,\frac{1}{4K_2}(\sum_{j=1}^m \|y_i\|^2)^{1/2}. \ (1)$$

С другой стороны, из того, что $d(X_1, l_{p_i}^{3n_j})=h$, и l_{p_i} имеет котип 2 с константой C_{p_1}, следует, что X_1 имеет тип 2 с константой hC_{p_1}. А так как $Y \subset X_1$, то для любых $\{y_j\}_{j=1}^m \subset Y$

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^m r_j(t) y_j\right\| dt \leq hC_{p_1}(\sum_{j=1}^m \left\|y_j\right\|^2)^{1/2}. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что $d(Y, l_2^{\delta_1 n_i}) \leq 4K_2 hC_{p_1}$.Имеем

$\varphi\,(X_1, 2, n_i) \leq \varphi\,(X_1, 2, \delta_j n_i) \leq d(Y,\, l_2^{\delta_1 n_i}) \leq 4K_2 hC_{p_1}$.

Пользуясь свойством 5) и равенством $d(X_1, l_{p_i}^{3n_j})=h$,получим

$i < \ \varphi(l_{p_i}^{3n_i}, 2, n_i) \leq 4K_2 h^2 Cp_1$,

$d(X_1, l_{p_i}^{3n_i})=h > \sqrt{\frac{i}{4K_2Cp_1}} \rightarrow \ \infty$

при $i \rightarrow \ \infty$;так как $X_1 \subset X$ было взято произвольно, то последнее неравенство завершает доказательство B).

Покажем теперь, что условия 1)-5) непротиворечивы. Будем выбирать $\{p_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ по индукции. Возьмем $p_1 > 2$ и n_1 произвольно. Пусть $\{p_i\}_{i=1}^k$ и $\{n_i\}_{i=1}^k$. Сначала выберем p_{k+1}, $2 < p_{k+1} < p_k$ так, чтобы

$(3n_k)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_{k+1}}} \leq 2$ (условие 4)),

А затем возьмем n_{k+1} настолько большим, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$n_{k+1} \geq \sum_{j=1}^k n_j$ (условие 3)),

$\varphi\left(l_{p_{k+1}}^{3n_{k+1}}, 2, n_{k+1}\right) > k+1$ (условие 5)).

Следуя этим условиям, мы получим требуемые последовательности.

Пространство X, построенное нами, является рефлексивным, поэтому X^* не изоморфно своему декартову квадрату. Таким образом, мы доказали, что существуют рефлексивные Банаховы пространства X и Y (в нашем случае

$Y=X^*$), ни одно из которых не изоморфно своему декартову квадрату , но при этом $X \oplus Y$ изоморфно своему декартову квадрату.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе был изучен вопрос линейной гомеоморфности (изоморфности) линейного нормированного пространства своему квадрату. Было показано, что никакое конечномерное линейное нормированное пространство не изоморфно своему квадрату, в то время как классические бесконечномерные пространства, такие как $c_{00}, c_0, c, l_p, l_\infty, C[a,b]$, своим квадратам изоморфны.

Кроме того, был разобран пример Каибханова двух рефлексивных банаховых пространств X и Y, которые не изоморфны своим декартовым квадратам, но обладающие дополнительным свойством, что $X \times Y$ изоморфно своему декартову квадрату.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bessaga C., Pelczynski A., “Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian squares, I”, Bull. Acad. Pol. Sci., 8:2 (1960), 77–80.

[2] Semadeni Z., “Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian squares, II”, Bull. Acad. Pol. Sci., 8:2 (1960), 81–86.

[3] Figiel T., “An example of infinite dimensional Banach space non-isomorphic to its Cartesian square”, Studia Math., 42:3 (1972), 295–306.

[4] Szarek S., “A superreflexive Banach space which does not admit complex structure”, Proc. Amer. Math. Soc., 97:3 (1986), 437–444.

[5] Figiel T., Lindenstrauss J., Milman V. D., “The dimension of almost spherical sections of convex bodies”, Acta Math., 139:1–2 (1977), 53–94.

[6] Lindenstrauss J., Tzafriri L., Classical Banach spaces, V. II, Springer, Berlin, 1979.

[7] Кадец В. М., Каибханов К. Э., “О структуре множества допустимых возмущений”, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, № 53, Харьков, 1990, 79–87.

[8] Kwapien S., “Isomorphic characterization of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients”, Studia Math., 44 (1972), 583–595.

[9] К.Э. Каибханов, “О пространствах Банаха, не изоморфных своим декартовым квадратам”, Матем. заметки, 57:4 (1995), 534–541.

Уважаемый пользователь! Обращаем ваше внимание, что система «Антиплагиат» отвечает на вопрос, является ли тот или иной фрагмент текста заимствованным или нет. Ответ на вопрос, является ли заимствованный фрагмент именно плагиатом, а не законной цитатой, система оставляет на ваше усмотрение.

Отчет о проверке № 1

ФИО: Kadyrzhanova Leila
дата выгрузки: 19.06.2017 08:35:18
пользователь: leila.94@bk.ru / ID: 4783758
отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»
на сайте http://www.antiplagiat.ru

Информация о документе

№ документа: 1
Имя исходного файла: ВКР_last2.docx
Размер текста: 92 кБ
Тип документа: Не указано
Символов в тексте: 20067
Слов в тексте: 3270
Число предложений: 151

Информация об отчете

Дата: Отчет от 19.06.2017 08:35:18 - Последний готовый отчет
Комментарии: не указано
Оценка оригинальности: 95.36%
Заимствования: 4.64%
Цитирование: 0%

Оригинальность: 95.36
Заимствования: 4.64%
Цитирование: 0%

Источники

Доля в тексте	Источник	Ссылка	Дата	Найдено в
3.55%	[1] http://www.cnc-club.ru/forum/download/file.php?id=64809%0A/sitemap.xml (4/4)	http://cnc-club.ru	10.02.2016	Модуль поиска Интернет
0.86%	[2] Пространства функций первого класса Бэра, наделенные топологией поточечной сходимости и их l-эквивалентность	http://sun.tsu.ru	16.11.2012	Модуль поиска Интернет
0.24%	[3] Конспект лекций по математическому анализу	http://kpfu.ru	29.11.2016	Модуль поиска Интернет