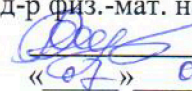


Министерство образования и науки Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физико-технический факультет
Кафедра математической физики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
д-р физ.-мат. наук, профессор
 Э.Р. Шрагер
«07» 06 2017 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Применение метода распространяющихся волн к задаче акустики
по основной образовательной программе подготовки бакалавров
направление подготовки 16.03.01 - Техническая физика
профиль Теплофизика

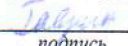
Гаврин Сергей Владимирович

Руководитель ВКР
канд. физ.-мат. наук, доцент
 Р. К. Нариманов
подпись

«___» _____ 2017 г.

Автор работы

Студент группы № 10304

 С. В. Гаврин
подпись

Томский государственный университет
физико-технический факультет
кафедра математической физики

Руководитель ООП

 д.ф.-м.н. Шрагер Э. Р.

«__» ____ 201__

Задание

на выпускную работу квалификационную работу на степень бакалавра
ФТФ Гаврина Сергея Владимировича

Тема работы: Применение метода распространяющихся волн к задаче
двумерной акустики

Научный руководитель: Нариманов Р.К.

Срок представления: июнь 2017

Содержание работы и сроки исполнения:

№	Название раздела работы	Срок выполнения
1	Выполнить поиск научных работ по проблеме исследования	Октябрь 2016
2	Произвести физическую постановку задачи	Октябрь – ноябрь 2016
3	Произвести математическую постановку задачи в одномерном виде и безразмерной форме с соответствующими граничными условиями.	Декабрь 2016
4	Написать программный код решения в одномерной постановке	Декабрь 2016
5	Выполнить численные расчеты. Провести проверку на достоверность путем сравнения с аналитическим решением и на сеточную сходимость	Декабрь 2016
6	Произвести математическую постановку задачи в двумерном виде и безразмерной форме с соответствующими граничными	Февраль 2017

	условиями.	
7	Написать программный код решения в двумерной постановке	Март 2017
8	Провести исследование на достоверность результатов и сравнить с аналитическим решением	Апрель 2017
9	Рассмотреть различный вариант граничных условий	Апрель 2017
10	Провести параметрические исследования условий	Апрель- май 2017
11	В результате проведенного исследования для получения квалификации степени бакалавра представить текст ВКР на тему «Применение метода распространяющихся волн к задаче двумерной акустики»	Май-июнь 2017
12	Проверить текст работы на объем заимствований, и отчет поместить в конец текста ВКР.	Июнь 2017
13	Текст ВКР разместить в электронной библиотеке НБ НИ ТГУ	Июнь 2017

Рекомендуемая для изучения литература:

1. R. LeVeque Wave propagation algorithms for multi-dimensional hyperbolic systems. 2001
2. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. Численное решение многомерных задач газовой динамики.– М. :Наука, 1976 г.
3. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики.
4. Д. Поттер. Вычислительные методы в физике. Пер. с англ. Г.В.Перевераяев. Лондон. 1972г.
5. К. Флетчер. Вычислительные методы в динамике жидкости. – М.:1991г.

Руководитель работы

Задание принял(а) к исполнению




Содержание

Введение.....	3
1 Численный метод	7
1.1 Метод распространяющихся волн (одномерный случай).....	7
1.2 Задача одномерной акустики	10
1.3 Коррекции второго порядка	13
1.4 Поток-корректирующие функции	15
1.5 Метод распространяющихся волн (двумерный случай)	17
1.6 Задача двумерной акустики	19
2. Результаты численных расчётов в одномерном случае	21
3 Сеточная сходимость одномерной акустики.....	25
4 Применение ограничителей	27
5 Результаты расчётов в двумерном случае	29
6 Сеточная сходимость двумерной акустики	36
Заключение	38
Список литературы.	39

Введение

Уравнения гидродинамики сжимаемых сред применимы для изучения произвольных сред и описывают широкий круг физических процессов и явлений. К таким процессам относятся перенос, распространение звуковых волн, описываемые гиперболическими уравнениями [1]. Так же в средах могут быть возмущения большой амплитуды, которые влекут за собой разрывы и ударные волны. Как и в несжимаемых средах, относительное движение потоков ведёт к неустойчивостям, таким образом неламинарные потоки и турбулентность могут оказаться существенными. Во многих средах важны такие процессы как теплопроводность и вязкость, поэтому их тоже следует включить в уравнения гидродинамики сжимаемых сред.

Многообразие физических явлений, описываемых уравнениями гидродинамики сжимаемых сред, переходит в сложность этих уравнений. По этой причине разработано большое количество методов решения этих уравнений [2]. Из-за многообразия описываемых явлений и широты применения уравнений гидродинамики, не существует единого подхода, который мог бы применяться на весь спектр задач от движения атмосферного потока вокруг космического корабля до течения воды по трубам. Каждая задача или класс требуют специальной методики расчёта или особой постановки граничных и начальных условий [3].

Если в задаче важны диффузионные процессы, обусловленные теплопроводностью и вязкостью среды, то в большинстве случаев их так же необходимо внести в рассмотрение с помощью параболических уравнений. Учёт этих процессов следует проводить совместно с аппроксимацией переноса и сжатия [4]. В некоторых приложениях гидродинамики сжимаемых сред влияние вязкости и теплопроводности может быть настолько велико, что во избежание слишком жёстких ограничений на величину шага по времени и пространству при расчёте течений среды приходится использовать различные неявные методы.

Основой для численного решения уравнений гидродинамики сжимаемых сред служат разностные схемы, но, учитывая многообразие этих методов, следует заметить, что в каждой отдельной задаче необходимо специальное рассмотрение при выборе способа её решения [5], основными являются:

- Метод конечных разностей;
- Метод конечных объёмов;
- Спектральный метод;
- Метод конечных элементов;

Но некоторые из существующих методов с трудом поддаются такой классификации:

- Метод дискретных вихрей;
- Метод частиц в ячейках;
- Прямое статистическое моделирование;
- Клеточные автоматы;
- И др.

Конечно – разностный метод основан на замене производных разностными величинами, определенными в дискретном наборе точек сетки. Приближенное решение состоит из величин U_{ii}^n , представляющих поточечное приближение к решению в точках сетки (x_i, y_i) во время t_n :

$$U_{ii}^n \approx u(x_i, y_i, t_n).$$

Метод конечных объёмов основан на представлении такого вида:

$$U_{ii}^n \approx \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x_i, y_i, t_n) dx dy,$$

Данное приближение позволяет более корректно аппроксимировать граничные условия, заданные в виде потоков на границе. Метод конечных объёмов так же используют для задач, в которых граничные условия, коэффициенты уравнений или само решение имеют разрывы. Это более

естественный способ для дифференциальных уравнений, основанных на законах сохранения.

Как было сказано ранее, существует множество численных методов решения задач газовой динамики, в частности гиперболических уравнений. Все эти методы имеют свои особенности, преимущества и недостатки. Каждый подходит для определённого круга задач и областей применения.

Целью данной работы является рассмотрение алгоритма распространяющихся волн на примере уравнения акустики в гетерогенной среде и написание программного модуля для численного решения данной задачи. Особенностью данного метода заключается в том, что он является линеаризованный, а, следовательно, менее трудоёмкий по сравнению с известным методом Годунова. Так же следует отметить использование функции объёмной эластичности, которая в зависимости от задачи может иметь различные физические трактовки, например, пористость или теплоёмкость.

Метод волнового распространения создан для решения многомерных гиперболических систем уравнений в частных производных, которые включают в себя нелинейные системы законов сохранения. Этот метод основывается на решении задач о распаде разрыва для волн, определяющих обновление первого порядка точности средних значений ячеек, так же существует корреляция второго порядка точности. Эти корреляционные члены используют ограничивающие функции, чтобы получить результаты высокого разрешения уравнений. Методы, использующие алгоритм волнового распространения стабильны в основном для чисел Куранта близких к 1, где число Куранта есть мера относительно максимальной волновой скорости в каком-либо направлении [6]:

$$CFL = w_{max} * \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1,$$

где w_{max} – максимальная скорость распространения возмущений.

Методы основываются на решении задач о распаде произвольного разрыва для структур волн и расщепления флуктуаций, что основывается на понятии поточно-разностного расщепления из законов сохранения. Лево-идущая и право-идущая флуктуации обобщают все лево- и право-идущие волны, а затем эти флуктуации расщепляются в поперечном направлении (для многомерных случаев).

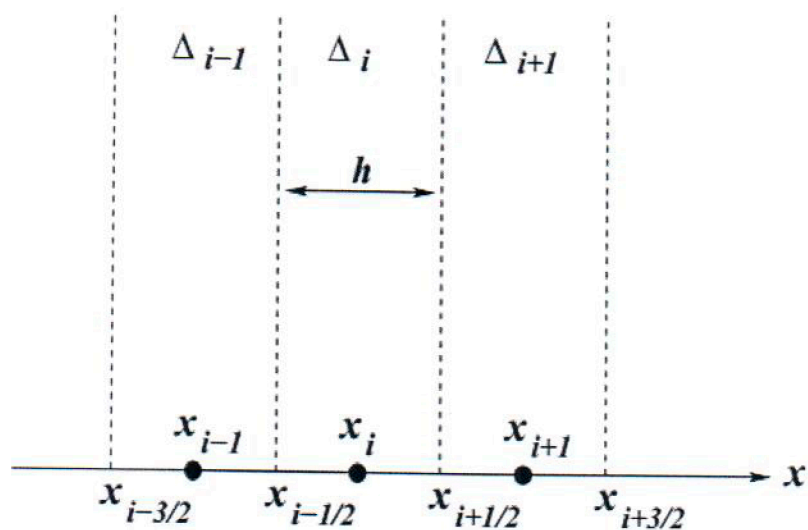


Рисунок 1 – Пример дискретизации пространства.

1 Численный метод

Для исследования была переведена и изучена статья R. LeVeque [7], в которой описан многомерный алгоритм волнового распространения для гиперболических систем уравнений и его применение к различным задачам, основанный на модифицированном методе Годунова, с аппроксимацией Рое для конвективной части уравнения и неявного метода конечных объемов для уравнения диффузии.

1.1 Метод распространяющихся волн (одномерный случай)

В одномерном случае уравнение переноса имеет следующий вид[8]:

$$q_t + f(q)_x = 0, \quad (2.1)$$

где q – вектор консервативных величин.

Данное уравнение можно записать в более общей квазилинейной форме с переменным коэффициентом:

$$q_t + A(q, x, t)q_x = 0. \quad (2.2)$$

Эта форма позволяет применять метод к гиперболическим системам в неконсервативной форме.

Решение задачи (2.1) так же требует задания начальных данных в каждой точке пространственной сетки:

$$q(x, 0) = q_0(x) = \begin{cases} q_l, & \text{if } x < 0 \\ q_r, & \text{if } x > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Вместе со всеми ограничениями на f решение подобно $q(x, t) = Q(x/t)$, которое состоит из набора волн,двигающихся с постоянной скоростью.

Так же предполагаем, что разность $q_r - q_l$ может быть разложена следующим образом:

$$q_r - q_l = \sum_{p=1}^{M_w} W^p, \quad (2.4)$$

где $W^p \in R^m$ скачок через p -ую волну, M_w — количество волн и каждая волна движется со скоростью λ^p . Так же необходимо, чтобы все волны были ударными.

Алгоритм реализован следующим образом, что нет явного указания значения этих волн между ячейками. В место этого необходимо указать потоко-разностное расщепление, которое является разложением $f(q_r) - f(q_l)$ на левоидущую и правоидущую потоковые разности, обозначенные $A^- \Delta q$ и $A^+ \Delta q$ соответственно. Так же должно выполняться следующее равенство:

$$A^- \Delta q + A^+ \Delta q = f(q_r) - f(q_l). \quad (2.5)$$

Для классического метода Годунова пусть $q^* = Q(0)$ значение вдоль $x/t=0$ для задачи о распаде разрыва. Далее

$$A^- \Delta q = f(q^*) - f(q_l), \quad (2.6)$$

$$A^+ \Delta q = f(q_r) - f(q^*).$$

Если возможно разложение по формуле (2.4), тогда можно записать:

$$A^- \Delta q = \sum_p (\lambda^p)^- W^p, \quad (2.7)$$

$$A^+ \Delta q = \sum_p (\lambda^p)^+ W^p,$$

где $\lambda^+ = \max(\lambda, 0)$ и $\lambda^- = \min(\lambda, 0)$.

Обозначения $A^- \Delta q$ и $A^+ \Delta q$ связаны с линейной системой с постоянным коэффициентом:

$$q_t + A q_x = 0, \quad (2.8)$$

в этом случае

$$A^- \Delta q = A^-(q_r - q_l), \quad (2.9)$$

$$A^+ \Delta q = A^+(q_r - q_l),$$

где матрицу $A^\pm$ можно определить как

$$A^\pm = R \Lambda^\pm R^{-1}, \quad (2.10)$$

$R = [r^1 | r^2 | \dots | r^m]$ – матрица правых собственных векторов с некоторым выбором нормализации, $\Lambda = \text{diag}(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ – матрица собственных значений, $\Lambda^\pm = \text{diag}((\lambda^1)^\pm, \dots, (\lambda^m)^\pm)$. Тогда в этом случае будем иметь $W^p = \alpha^p r^p$, где $\alpha = R^{-1} \Delta q$.

Рассмотрим одномерную сетку со средним значением q_i^n в клетке $[x_i, x_{i+1}]$ на n -ом временном слое. Пример распространения волн изображён на рисунке 2.

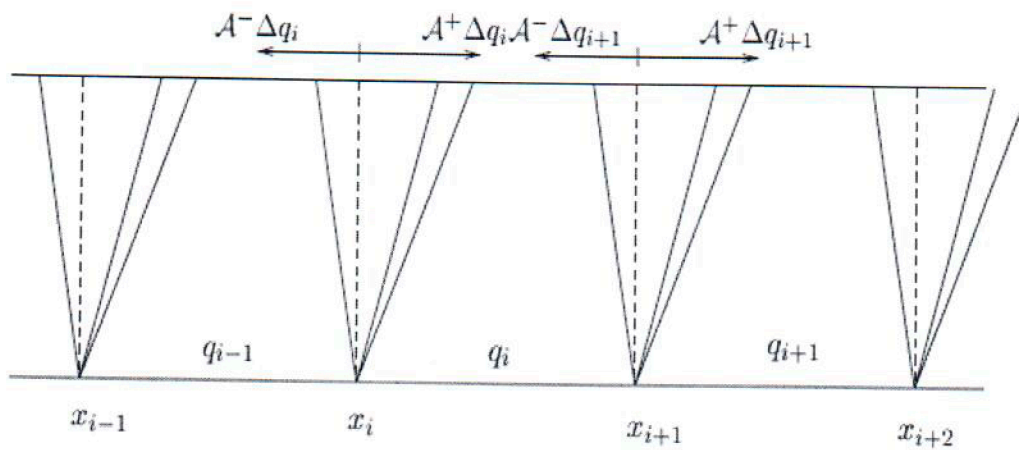


Рисунок 2 – Распространение волн.

Обозначим значение вектора q на следующем слое $\bar{q}_i$. Интегрируя уравнение (2.1) на данной сетке получим следующую разностную схему:

$$\bar{q}_i = q_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(q_{i+1}^*) - f(q_i^*)), \quad (2.11)$$

где q_i^* – промежуточное состояние, при решении задачи распада разрыва в точке x_i . Этот численный метод обычно стабилен для числа Куранта близкого к 1.

Перепишем выражение (2.11) используя (2.6):

$$\bar{q}_i = q_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^+ \Delta q_i + A^- \Delta q_{i+1}), \quad (2.12)$$

где $A^+ \Delta q_i$ правоидущая потоковая разность из решения задачи произвольного разрыва между q_{i-1} и q_i . Из выражения (2.7) видим, что это создаёт общий эффект на среднее значение ячейки q_i от всех волн, входящих с левой стороны.

Соответственно $A^- \Delta q_{i+1}$ – левонидущая потоковая разность между q_i и q_{i+1} , которая учитывает все волны входящие с правой стороны.

Разностная схема (2.12) будет использоваться в общем для законов сохранения. Этот подход консервативен и подходит для любого потоко-разностного расщепления, которое удовлетворяет выражению (2.5).

1.2 Задача одномерной акустики

Расширение на более общие гиперболические системы хорошо иллюстрируется простым примером. Рассмотрим уравнение одномерной акустики в гетерогенной среде [9]. Уравнения могут быть записаны в виде линейной системы с переменным коэффициентом, имеющий производную первого порядка:

$$\begin{cases} P_t + K(x)u_x = 0 \\ \rho(x)u_t + P_x = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

где неизвестными являются давление $p(x, t)$ и скорость $u(x, t)$. Переменными коэффициентами являются плотность среды $\rho(x)$ и модуль объёмной эластичности $K(x)$, который может означать, например, пористость среды.

Можем переписать систему (2.13) в виде уравнения переноса:

$$q_t + A(x)q_x = 0. \quad (2.14)$$

Искомая функция q – вектор с двумя компонентами:

- P – давление;
- U – скорость в x – направлении.

$$q = \begin{bmatrix} P \\ u \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Переменные коэффициенты:

- ρ – плотность;
- $K(x)$ – модуль объёмной эластичности.

Имеем матрицу коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & K(x) \\ 1/\rho_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Пусть для i – ой ячейки имеем параметры среды ρ_i и k_i , тогда матрица примет вид:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & k_i \\ 1/\rho_i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Скорость распространений возмущений в i – ой ячейке $c_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$.

Решение задачи распада разрыва между состояниями q_{i-1} в $i-1$ ячейке и в q_i в i – ой ячейке содержит 2 волны:

- Левонаправленная волна движется в ячейку $i-1$ со скоростью $\lambda_i^1 = -c_i$, а скачок через эту волну можно записать как скаляр, умноженный на собственный вектор r_{i-1}^1 матрицы A_i ,

$$W_i^1 = \alpha_i^1 \begin{bmatrix} -c_{i-1} \\ 1/\rho_{i-1} \end{bmatrix}; \quad (2.18)$$

- Правонаправленная волна движется в i – ую ячейку со скоростью $\lambda_i^2 = c_i$, а скачок через эту волну равен произведению r_i^2 на некоторый скаляр α_i^2 .

$$W_i^2 = \alpha_i^2 \begin{bmatrix} c_i \\ 1/\rho_i \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Состояние между этими двумя волнами должно быть продолжено непрерывно через границу в соответствии с физическими условиями скачка, и поэтому:

$$q_{i-1} + W_i^1 = q_i - W_i^2. \quad (2.20)$$

Исходя из этого, мы получаем линейную систему уравнений:

$$q_i - q_{i-1} = w_i^1 + w_i^2. \quad (2.21)$$

Подставим (2.18) – (2.19) в (2.21) и получим:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta U_i \end{bmatrix} = \alpha_i^1 \begin{bmatrix} -c_{i-1} \\ 1/\rho_{i-1} \end{bmatrix} + \alpha_i^2 \begin{bmatrix} c_i \\ 1/\rho_i \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} \Delta P_i = -\alpha_i^1 c_{i-1} + \alpha_i^2 c_i \\ \Delta U_i = -\alpha_i^1 \frac{1}{\rho_{i-1}} + \alpha_i^2 \frac{1}{\rho_i} \end{cases};$$

Отсюда найдём волновые напряжения α_i^1, α_i^2 :

$$\alpha_i^1 = \frac{-\frac{\Delta q_i^1}{\rho_i} + c_i \Delta q_i^2}{\frac{c_{i-1}}{\rho_i} + \frac{c_i}{\rho_{i-1}}};$$

$$\alpha_i^2 = \frac{-\frac{\Delta q_i^1}{\rho_{i-1}} + c_{i-1} \Delta q_i^2}{\frac{c_{i-1}}{\rho_i} + \frac{c_i}{\rho_{i-1}}};$$

где $\Delta q_i^1 = P_i - P_{i-1}$ – скачки параметров.
 $\Delta q_i^2 = U_i - U_{i-1}$

Затем определяем потоково – разностное расщепление:

$$\begin{aligned} A^- \Delta q_i &= \lambda_i^1 W_i^1; \\ A^+ \Delta q_i &= \lambda_i^2 W_i^2; \end{aligned}$$

$$A \Delta q = A^- \Delta q + A^+ \Delta q = \sum_{p=1}^{M_w} \lambda_i^p W_i^p. \quad (2.22)$$

Подставляем найденные значения в разностную схему (2.12) и находим вектор q , а, следовательно, искомые давление и скорость.

Следует заметить, что это не в самом деле расщепление некоторой потоковой разности в этой неконсервативной задаче, т.е.

$$A^- \Delta q_i + A^+ \Delta q_i \neq A_i q_i + A_{i-1} q_{i-1}. \quad (2.23)$$

Тем не менее, метод Годунова, основанный на постоянных начальных данных и затем на расчёте среднего в ячейке, определённого как $\bar{q}_i$, может быть применён в виде (2.12). Так же это является эффективным подходом, что подтверждается результатами численного расчёта.

1.3 Коррекции второго порядка

Данный метод может быть расширен до более высокого порядка точности добавлением дополнительных членов. Разностная схема расширенного метода имеет вид:

$$\bar{q}_i = q_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^+ \Delta q_i + A^- \Delta q_{i+1}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_{i+1} - \tilde{F}_i). \quad (2.24)$$

Заметим, что эти коррекции записаны в потоко-разностной форме. Это позволяет использовать эту схему даже для случая неконсервативных уравнений. Корректирующая функция определена в терминах волн W_i^p и скоростей λ_i^p , которые возникают в i -ой задаче распада разрыва, и только с этой точки зрения индивидуальные волны важны больше, чем скачковые флуктуации $A^\pm \Delta q$. Разложение в волны позволяет нам применить функции-ограничители для уменьшения осцилляций вблизи разрывов сравнивая p -ую волну с p -ой волной, возникшей в соседней задаче распада разрыва.

В отсутствии ограничителей, коррекции второго порядка имеют форму:

$$\tilde{F}_i = 1/2 \sum_{p=1}^{M_w} |\lambda_i^p| (1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\lambda_i^p|) W_i^p. \quad (2.25)$$

Это стандартное выражение может быть интерпретировано как появление из распространения кусочно-линейной корректирующей волны.

Для линейной системы (2.8), метод (2.24) с флуктуациями (2.9) и коррекциями (2.25) сводится к стандартному методу Лакса-Вендрофа. Для автономной нелинейной системы законов сохранения в форме (2.1) данная форма коррекции даёт полный второй порядок точности. В этом случае метод является вариацией метода Лакса-Вендрофа.

Для неавтономной задачи в форме (2.2) эта форма коррекции формально не даёт второй порядок. Однако, она уничтожает доминирующее диффузионное выражение в ошибке первого порядка и даёт результаты, которые можно было ожидать от методов более высокого порядка. Остающаяся ошибка первого порядка соответствует слабому смещению в

локализации решения, чем чрезмерное смазывание при применении метода первого порядка. Рассмотрим данное замечание на примере уравнения конвекции:

$$q_t + u(x)q_x = 0, \quad (2.26)$$

с заданной гладкой функцией $u(x)$. Разложение Тейлора показывает:

$$\begin{aligned} q(x, t + \Delta t) &= q(x, t) + \Delta t q_t(x, t) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 q_{tt}(x, t) \dots \\ &= q - \Delta t u(x) q_x + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 u(x) [u(x) q_x]_x + \dots \end{aligned}$$

Для второго порядка аппроксимации необходимо использовать три первых слагаемых. Тогда можем записать:

$$q(x, t + \Delta t) = q - \Delta t u(x) q_x + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 [u^2(x) q_{xx} + u(x) u_x(x) q_x].$$

Метод предлагаемый здесь, может быть применён к данной задаче путём установления:

$$\begin{aligned} W_i^1 &= q_i - q_{i-1}, \lambda_i^1 = u_{i-1/2} \\ A^- \Delta q_i &= u_{i-\frac{1}{2}}^- (q_i - q_{i-1}) \\ A^+ \Delta q_i &= u_{i-\frac{1}{2}}^+ (q_i - q_{i-1}) \end{aligned}$$

Предположим, что $u > 0$ во всей области расчёта. Запишем вышеупомянутый метод с коррекцией второго порядка:

$$\begin{aligned} q_i^{n+1} &= q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(u_{i-\frac{1}{2}} (q_i^n - q_{i-1}^n) + u_{i+\frac{1}{2}} (q_{i+1}^n - q_i^n) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left(u_{i+\frac{1}{2}}^2 (q_{i+1}^n - q_i^n) - u_{i-\frac{1}{2}}^2 (q_i^n - q_{i-1}^n) \right). \end{aligned}$$

Это чисто второй порядок аппроксимации для $q - \Delta t u(x) q_x + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 [u^2(x) q_x]$, которая может быть переписана в виде:

$$q - \Delta t u(x) q_x + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 [u^2(x) q_{xx} + 2u(x) u'(x) q_x].$$

Сравнивая данную форму с той, что мы получили ранее, можно увидеть, что мы корректно смоделировали $u^2 q_{xx}$, однако имеем ошибку $\frac{1}{2}(\Delta t)^2 u(x) u_x(x) q_x$. Это эквивалентно замене $u(x)q(x)$ во втором выражении величиной $(1 - \frac{1}{2}\Delta t u_x)u(x)q_x \approx u(x - \frac{1}{2}\Delta t u(x))q_x$.

Другими словами, присутствует ошибка $O(\Delta t)$ в скорости конвекции. Результирующая ошибка намного меньше, чем при диффузионном методе первого порядка. Эта модификация не является универсальной, что позволило бы использовать введённые функции-ограничители стандартным образом на расширенные задачи.

1.4 Потоко-корректирующие функции

Для уменьшения паразитических осцилляций и получения метода высокого порядка необходимо ввести ограничительные функции, которые модифицируют (2.25) вблизи разрывов. В зависимости от интерпретации они обычно называются «потоковые», «разрывные» или «волновые ограничители». В данном контексте будем использовать «волновые ограничители», так как именно амплитуда волны W_i^p в (2.25) должна быть ограничена. Заменяем каждую W_i^p ограниченной версией $\tilde{W}_i^p$, которая получается сравнением W_i^p с соответствующими p -волнами W_{i-1}^p или W_{i+1}^p , возникающими из решения задачи распада разрыва в соседней точке сетки слева или справа. Направление, которое выбирается, должно быть направлением вверх по потоку, то есть мы смотрим налево, если $\lambda_i^p > 0$, и направо, если $\lambda_i^p < 0$. В случае линейной системы (2.8) имеем $W_i^p = \alpha_i^p r^p$, где α_i^p – скаляр, а вектор r^p независим от i . Затем просто применяем ограничение к скаляру α_i^p , устанавливая $\tilde{W}_i^p = \tilde{\alpha}_i^p r^p$, где $\tilde{\alpha}_i^p$ является ограниченной амплитудой волны. Она вычисляется применением некоторой ограничительной функции Φ к отношению этой волновой амплитуды к интенсивности соседней волны того же семейства, в направлении вверх по потоку:

$$\tilde{\alpha}_i^p = \Phi(\theta_i^p) \alpha_i^p, \quad (2.27)$$

$$\text{где } \theta_i^p = \frac{\alpha_i^p}{\alpha_i^p}, I = \begin{cases} i + 1, \text{ если } \lambda_i^p < 0 \\ i - 1, \text{ если } \lambda_i^p > 0 \end{cases}.$$

Отношение волновых интенсивностей служит для измерения гладкости решения. Когда решение гладкое, то это решение близко к единице. Около разрыва в p -ом семействе θ_i^p может быть далеко от 1. Была рассмотрена широкая разновидность ограничительных функций. Некоторые стандартные ограничители:

- $\Phi(\theta) = \max(0, \min(1, \theta))$ – Minmod;
- $\Phi(\theta) = \max(0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta))$ – Superbee;
- $\Phi(\theta) = \max(0, \min((1 + \theta)/2, 2\theta))$ – Monotonized centered(MC);
- $\Phi(\theta) = \frac{\theta + |\theta|}{1 + |\theta|}$ – van Leer корректор третьего порядка.

Для переменных коэффициентов или нелинейных задач волна W_i^p не будет скалярным умножением волн W_{i-1}^p и W_{i+1}^p из соседних решений задач распада разрыва, и они должны определяться способом, в котором эти вектора должны быть сравнены и модифицированы для применения ограничителя.

Предположим, что $\lambda_i^p > 0$, поэтому в p -ом семействе мы сравниваем W_i^p и W_{i-1}^p . Приближение, используемое здесь, проектирует соседнюю волну W_{i-1}^p на вектор W_i^p , изменяя длину W_i^p как необходимо, но сохраняя его направление. Это достигается установлением:

$$\theta_i^p = \frac{W_{i-1}^p * W_i^p}{W_i^p * W_i^p}, \quad (2.28)$$

$$\tilde{W}_i^p = \Phi(\theta_i^p) W_i^p. \quad (2.29)$$

где точкой обозначено скалярное произведение. Заметим, что для линейных систем это преобразование приводит к формуле (2.27). Более простым приближением было бы применение скалярного ограничителя покомпонентно к каждому элементу вектора W_i^p и соответствующему элементу W_{i-1}^p . Это так

же сводится к (2.27) для линейной системы, но обычно не сохраняет направления W_i^p при нелинейной задаче.

Так же можно использовать матрицу A_i Рое, которая определяет $W_i^p = \alpha_i^p r^p$ через разложение $\Delta q = q_i - q_{i-1}$ и другие.

После определения ограниченной волны $\tilde{W}_i^p$ по одной из приведённых выше методик, находится $\tilde{F}_i$ по формуле (2.25) с заменой W_i^p на $\tilde{W}_i^p$.

1.5 Метод распространяющихся волн (двумерный случай)

Рассмотрим задачу акустики в двумерном случае. Имеем стандартное уравнение переноса:

$$q_t + f(q)_x + g(q)_y = 0. \quad (2.30)$$

Запишем разностную схему. Средним значением в ячейке i, j обозначим q_{ij} . Тогда будем иметь:

$$\bar{q}_{ij} = q_{ij} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1,j} - F_{i,j}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{i,j+1} - G_{i,j}). \quad (2.31)$$

где $F_{i,j}$ — левоидущий поток, $G_{i,j}$ — поток направленный вниз. Поток $F_{i,j}$ вычисляется следующим образом:

$$F_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta y \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(q(x_i, y, t)) dx dt. \quad (2.32)$$

Описываемый здесь многомерный метод распространяющихся волн может быть применён к стандартному уравнению сохранения (2.30), но он реализован в более общей форме, которая позволяет применять и другие гиперболические уравнения в неконсервативной форме. Разностная схема примет вид:

$$\bar{q}_{ij} = q_{ij} + \Delta_{i,j}^{up} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_{i+1,j} - \tilde{F}_{i,j}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\tilde{G}_{i,j+1} - \tilde{G}_{i,j}), \quad (2.33)$$

где $\Delta_{i,j}^{up}$ — донор-клетка для обновления первого порядка в форме:

$$\Delta_{i,j}^{up} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^- \Delta q_{i+1,j} + A^+ \Delta q_{i,j}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (B^- \Delta q_{i,j+1} + B^+ \Delta q_{i,j}). \quad (2.34)$$

Члены $A^\pm \Delta q$ и $B^\pm \Delta q$ представляют собой флуктуации возникающие после распада произвольного разрыва в x и y направлениях соответственно. Потоки $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ используются для коррекции второго порядка точности, а так же коррекции перекрёстной производной, которая возникает в двумерном случае.

Для начала будем решать одномерную задачу распада разрыва на каждой клетке расчётной сетки. В результате получим множество из M_w волн и их скоростей вместе с расщеплением потоковой разности $f(q_{ij}) - f(q_{i-1,j})$ на $A^- \Delta q_{i,j}$ и $A^+ \Delta q_{i,j}$ движущиеся влево и вправо соответственно. Далее осуществляется расщепление этих членов на поперечные флуктуации, обозначенные $B^+ A^* \Delta q_{i,j}$ (идушая вверх) и $B^- A^* \Delta q_{i,j}$ (идушая вниз).

Обозначение $B^\pm A^* \Delta q_{i,j}$ вызвано случаем линейной системы уравнений:

$$q_t + A q_x + B q_y = 0. \quad (2.35)$$

Матрицы $B^\pm$ определены аналогично матрицам $A^\pm$ из одномерного случая.

Поперечный флуктуации определены как:

$$B^\pm A^* \Delta q_{i,j} = B^\pm A^* (q_{i,j} - q_{i-1,j}) \quad (2.36)$$

В общем случае поперечные флуктуации изменяют 4 соседних потока в соответствии:

$$\begin{aligned} G_{i,j+1} &= G_{i,j+1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} B^+ A^+ \Delta q_{i,j}; \\ G_{i,j} &= G_{i,j} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} B^- A^+ \Delta q_{i,j}; \\ G_{i-1,j+1} &= G_{i-1,j+1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} B^+ A^- \Delta q_{i,j}; \\ G_{i-1,j} &= G_{i-1,j} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} B^- A^- \Delta q_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Для линейной системы (2.35) сумма всех поперечных флуктуаций равна:

$$(B^+A^+ + B^-A^+ + B^+A^- + B^-A^-) \Delta q = BA\Delta q. \quad (2.38)$$

Основой для данного метода является расширение одномерного случая с использованием (2.33) и (2.34), считая $\tilde{F} = \tilde{G} = 0$. Данный метод обычно устойчив для числа Куранта вблизи $1/2$.

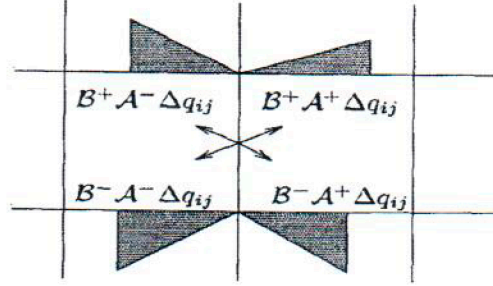


Рисунок 3 – Четыре потоковые разности в общем случае.

1.6 Задача двумерной акустики

В двумерном случае уравнение акустики с искомыми функциями давления P и скоростями V и U может быть записано как:

$$q_t + Aq_x + Bq_y = 0, \quad (2.39)$$

где $q = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Опишем алгоритм в x -направлении. Для направления y будем иметь аналогичные формулы, меняя где это необходимо u и v .

Решение задачи $q_t + Aq_x = 0$ между состояниями $q_{i-1,j}$ и $q_{i,j}$ содержит 3 волны, но одна всегда будет иметь скорость равную 0, поэтому может быть проигнорирована. Тогда можем взять $M_w = 2$ и использовать будем только 2 волны, $\alpha^1 r^1$ со скоростью $\lambda^1 = -c$ и $\alpha^2 r^2$ со скоростью $\lambda^2 = c$. Собственные вектора:

$$r^1 = \begin{bmatrix} c \\ 1/\rho \\ 0 \end{bmatrix}, r^2 = \begin{bmatrix} -c \\ 1/\rho \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты, как и в одномерном случае:

$$\alpha^1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\Delta q^1}{c} + \rho \Delta q^2 \right), \alpha^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta q^1}{c} + \rho \Delta q^2 \right).$$

Выражения для флуктуаций примут следующий вид:

$$A^- \Delta q = \lambda^1 \alpha^1 r^1, A^+ \Delta q = \lambda^2 \alpha^2 r^2.$$

Чтобы получить поперечные флуктуации мы разделим $A^* \Delta q_{ij}$ на собственные вектора матрицы B . Например для $A^- \Delta q_{ij}$ будем иметь:

$$A^- \Delta q_{ij} = -c \alpha^1 \begin{bmatrix} -c \\ 1 \\ \rho \\ 0 \end{bmatrix} = \beta^1 \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ 1 \\ \rho \end{bmatrix} + \beta^2 \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 1 \\ \rho \end{bmatrix} + \beta^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $\beta^1 = -\frac{c\alpha^1}{2}, \beta^2 = \frac{c\alpha^1}{2}, \beta^3 = -\frac{c\alpha^1}{\rho}$. Собственные значения $\mu^1 = -c, \mu^2 = c, \mu^3 = 0$, отсюда видим, что третья волна не оказывает воздействия на поперечное распространение. Поперечные флуктуации:

$$B^- A^- \Delta q_{ij} = -c \beta^1 \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ 1 \\ \rho \end{bmatrix}, B^+ A^- \Delta q_{ij} = c \beta^1 \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ 1 \\ \rho \end{bmatrix}.$$

2 Результаты численных расчётов в одномерном случае

Начальные условия зададим следующим образом.

Скорость:

$$U=0;$$

Перепад давления в виде:

$$P = \begin{cases} 0.2 \sqrt{1 - \left(\frac{x - 0.4}{0.075}\right)^2}, & \text{if } |x - 0.4| < 0.075; \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Модуль объёмной эластичности на всей области решения:

$$K = 1.$$

Данный выбор начальных условий обусловлен наличием таких начальных данных в статье.[7]

Далее приведены графики распределения давления для данной задачи в различные моменты времени при граничных условиях:

- Слева и справа условие сноса;
- По координате $x = 0.6$ скачком изменяется плотность среды: слева $\rho=1$, справа $\rho=4$.

На рисунке 4 изображено начальное распределение давления в момент времени $t = 0$. Далее на рисунках 5 и 6 видим, как пик начинает распадаться и получаем 2 волны, идущие в противоположные стороны с одинаковой скоростью. На рисунках 7 – 9 наблюдается переход одной волны в более плотную среду, с образованием новой волны, двигающейся в обратном направлении. В более плотной среде волна теряет скорость, но амплитуда увеличивается. Отраженная же волна уменьшает свою амплитуду. Так как слева и справа имеем граничное условие сноса, то со временем волны уходят из области видимости, не от чего не отражаясь.

Результаты расчёта сравнивались с результатами автора метода. Получили качественное и количественное совпадение, что говорит о достоверности данного метода.

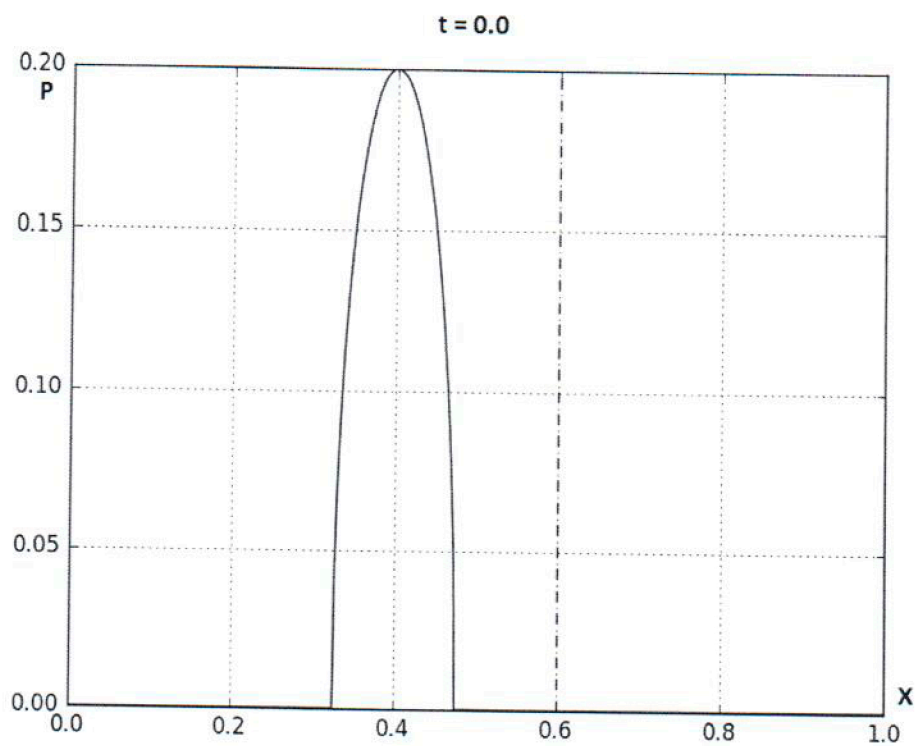


Рисунок 4 – Начальное распределение.

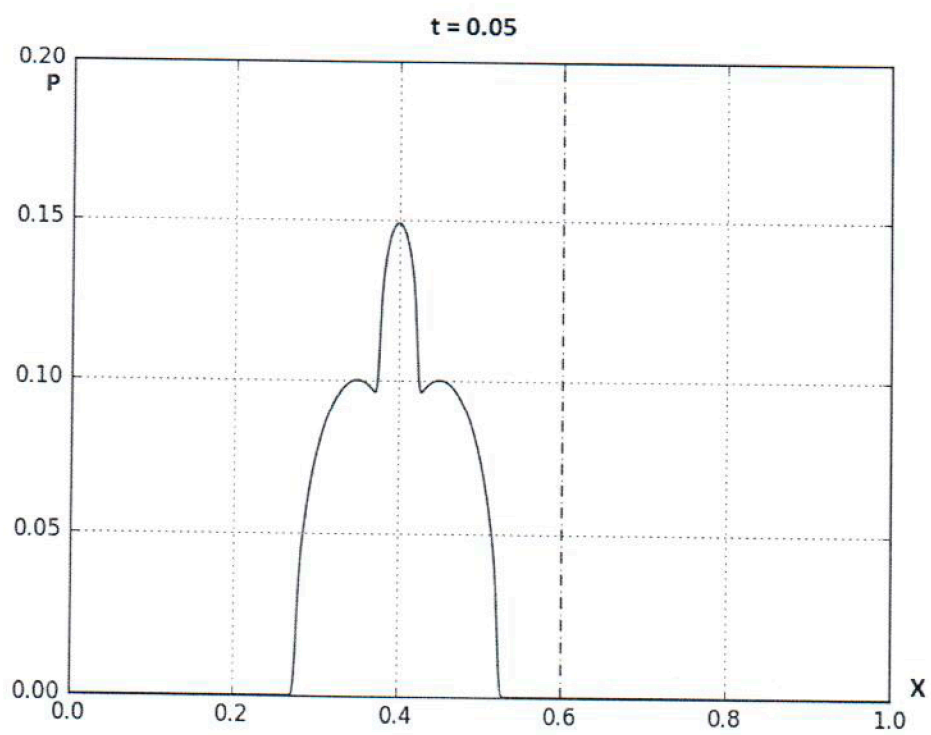


Рисунок 5 – «Пик» начинает распадаться.

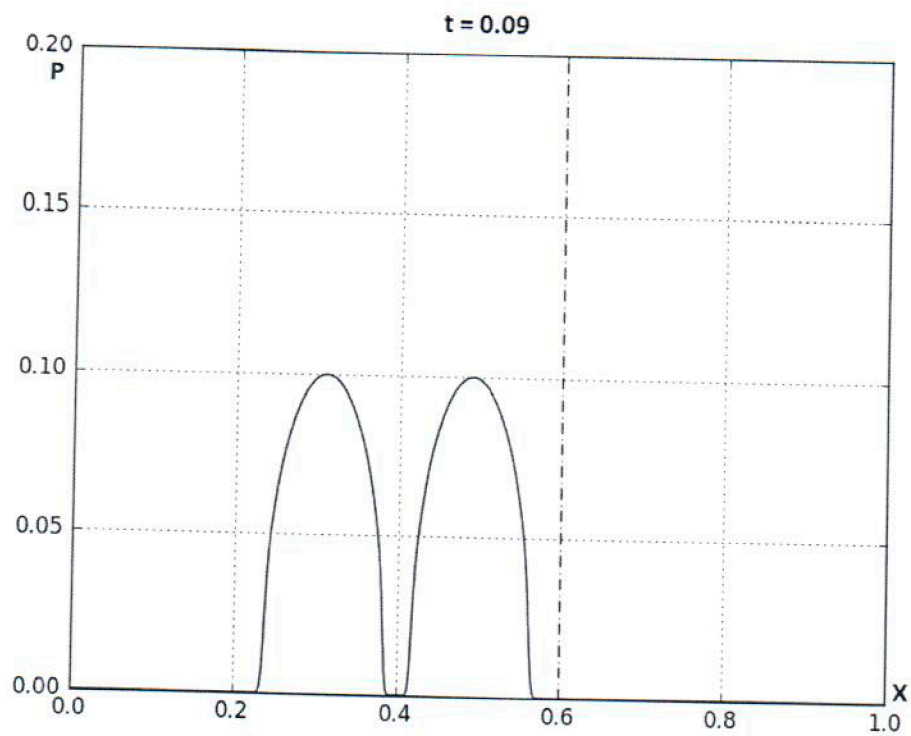


Рисунок 6 – Образовалось 2 волны, идущие в разные стороны.

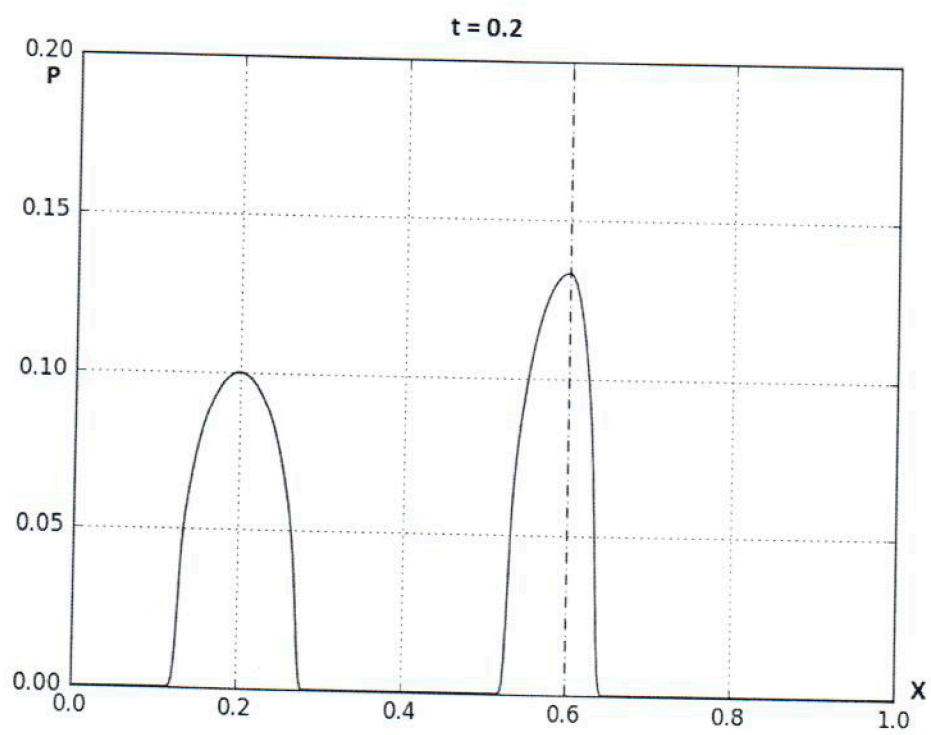


Рисунок 7 – Переход одной волны в более плотную среду.

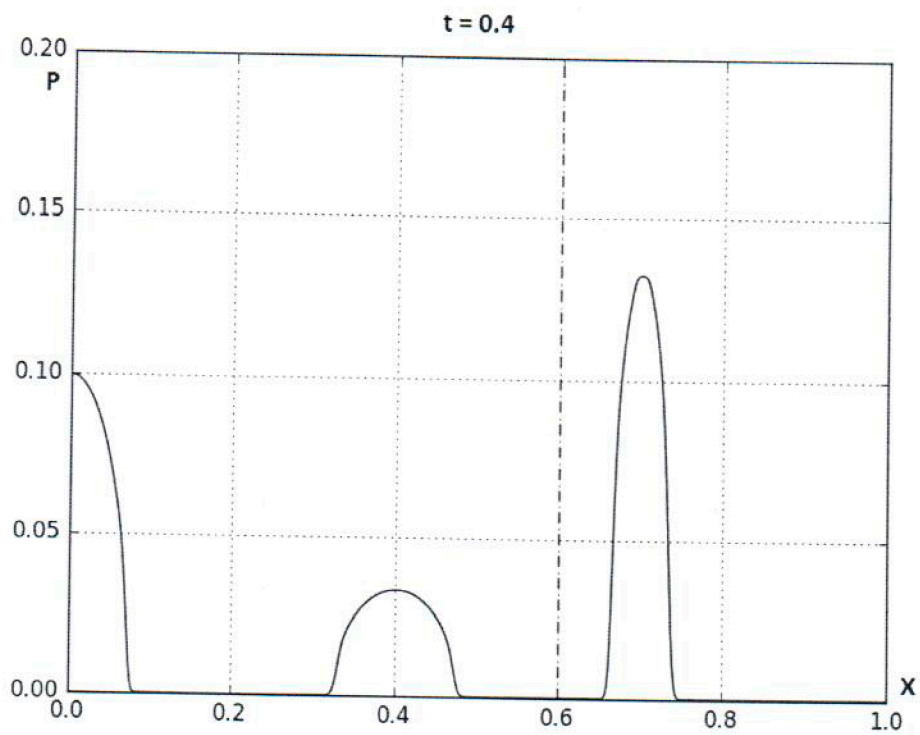


Рисунок 8 – Образовалось 3 волны разной амплитуды.

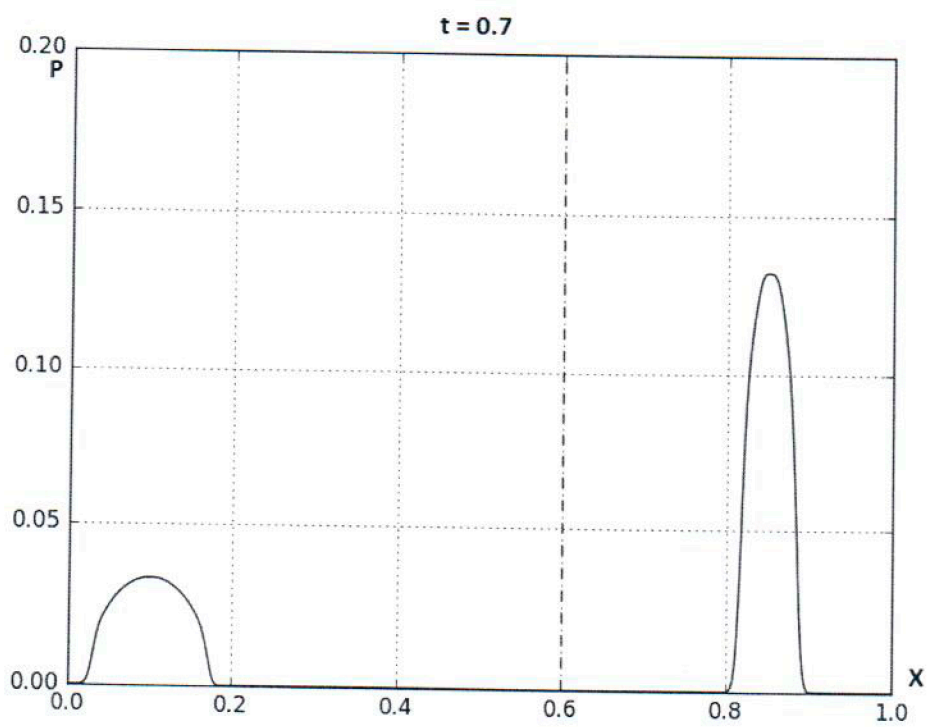


Рисунок 9 – Распределение давления в момент времени 0,4.

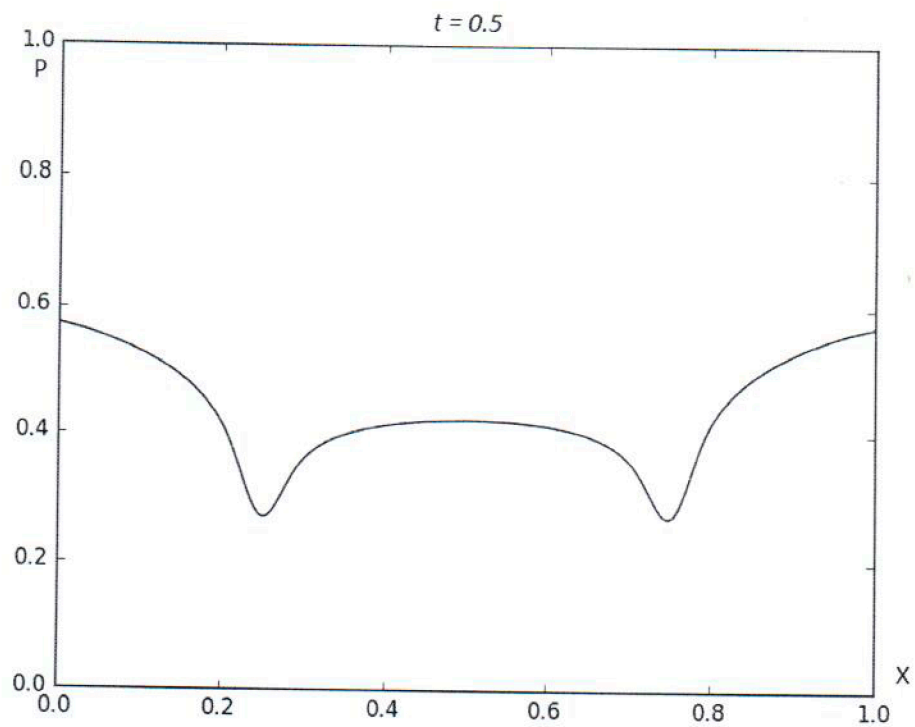


Рисунок 28 – Распределение давления на срезе со свободными границами.

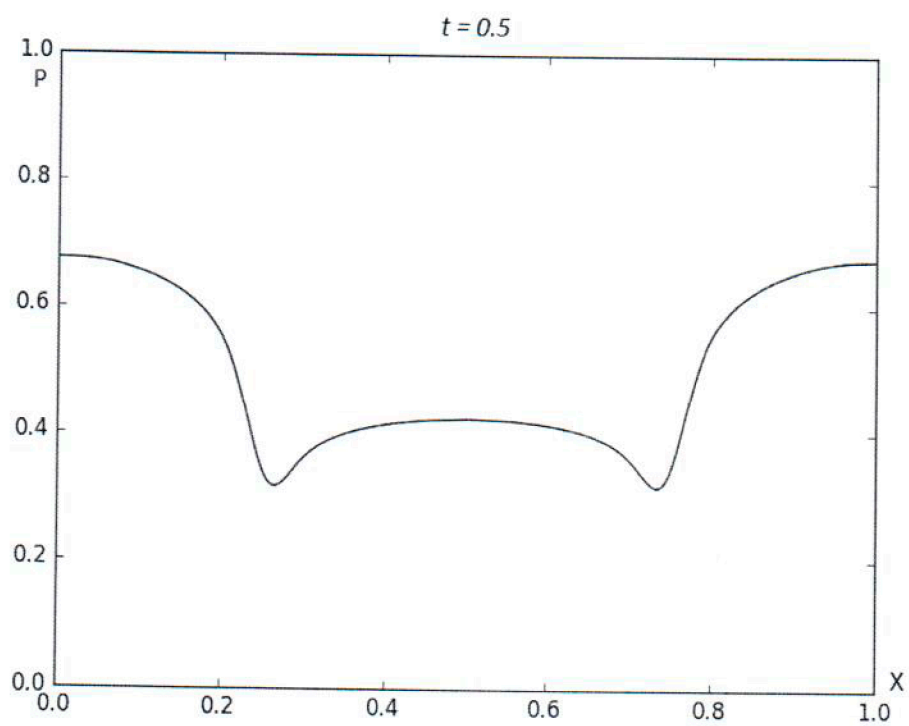


Рисунок 29 – Распределение давления на срезе с твёрдыми стенками.

Заключение

В работе был рассмотрен алгоритм волнового распространения и его применение к решению различных задач, описываемых гиперболической системой уравнений в регулярных и нерегулярных областях.

Была рассмотрена задача одномерной и двумерной акустики в гетерогенной среде с учётом функции востимости.

В результате проделанной работы разработан программный модуль для решения систем гиперболических уравнений в регулярных и нерегулярных областях, и на его основе решена задача переноса в нерегулярной области для одномерного и двумерного случаев.

Получены решения для данных задач в различные моменты времени при различных граничных условиях, которые представлены на графиках. Результаты для задачи одномерной акустики сравнивались с результатами, полученными авторами данного алгоритма. Результаты качественно и количественно совпали. Так же рассматривалось влияние функций-корректоров для получения более высокого порядка точности. Решения для задачи в нерегулярной области были проверены на сеточную сходимость.

3 Сеточная сходимость одномерной акустики

Алгоритм так же исследовался на сеточную сходимость. Рассматривали разбиение на 100, 200, 300, 400 и 500 ячеек. Из рисунков 10, 11 и 12 видно, что графики накладываются друг на друга, причем при увеличении числа разбиений они сходятся к одной кривой. Данный факт говорит, что алгоритм сходится. Так же можно заметить, что разбиение в 400 ячеек является более оптимальным, так как при увеличении разбиения до 500 разницы в графиках не наблюдается.

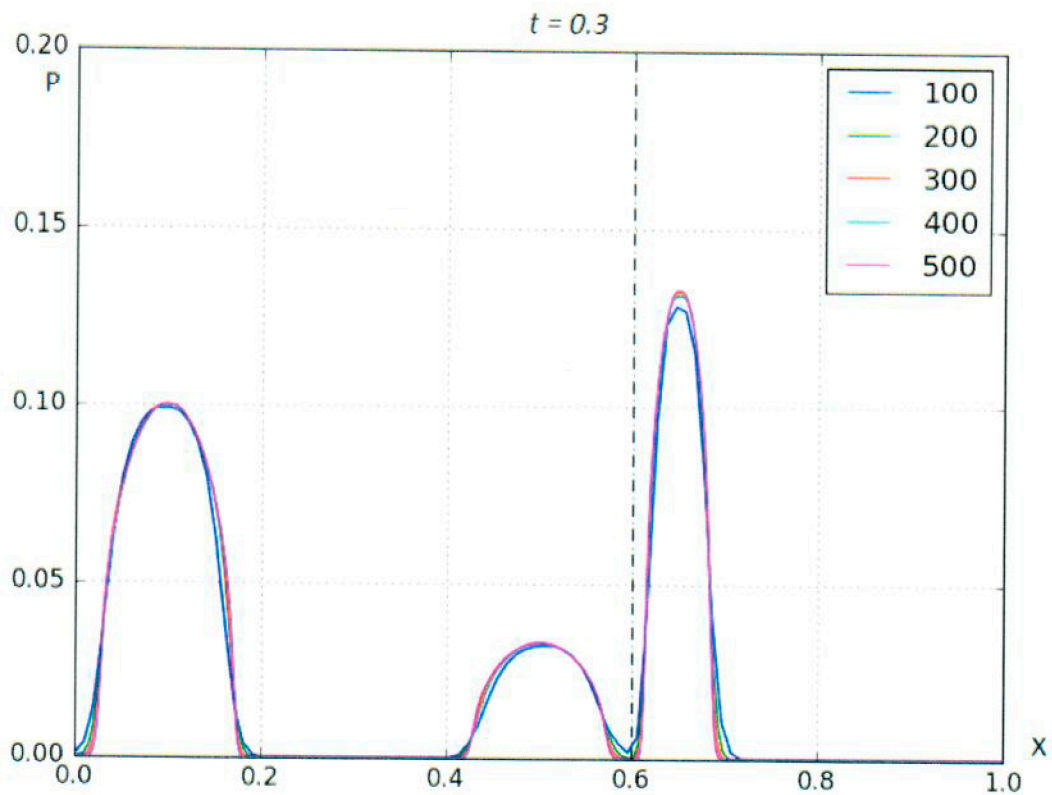


Рисунок 10 – Сеточная сходимость.

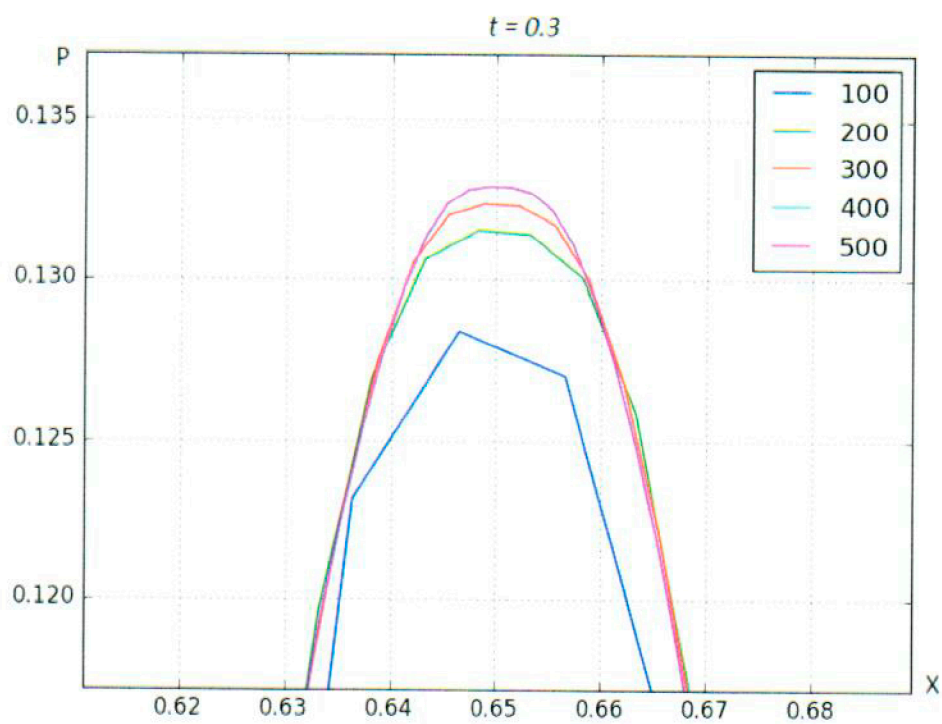


Рисунок 12 – Сеточная сходимость на пике.

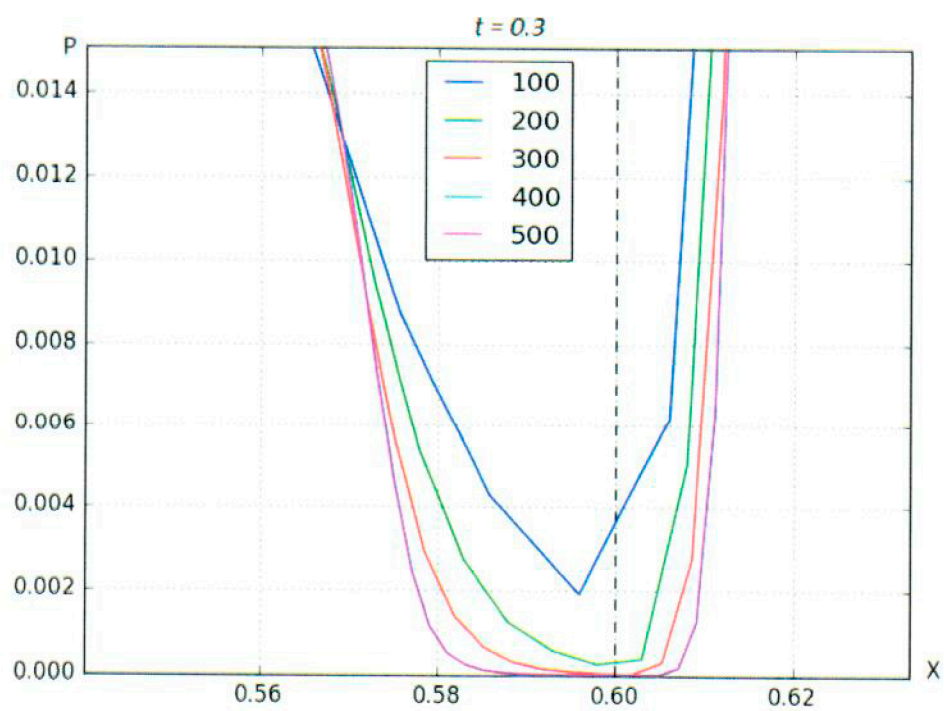


Рисунок 13 – Сеточная сходимость у основания.

4 Применение ограничителей

Рассмотрим применение ограничителей для уменьшения паразитических осцилляций и получения решений более высокого порядка аппроксимации. По умолчанию использовался ограничитель van Leer. Сравним его с MinMod, Superbee и MC(monotonized centered).

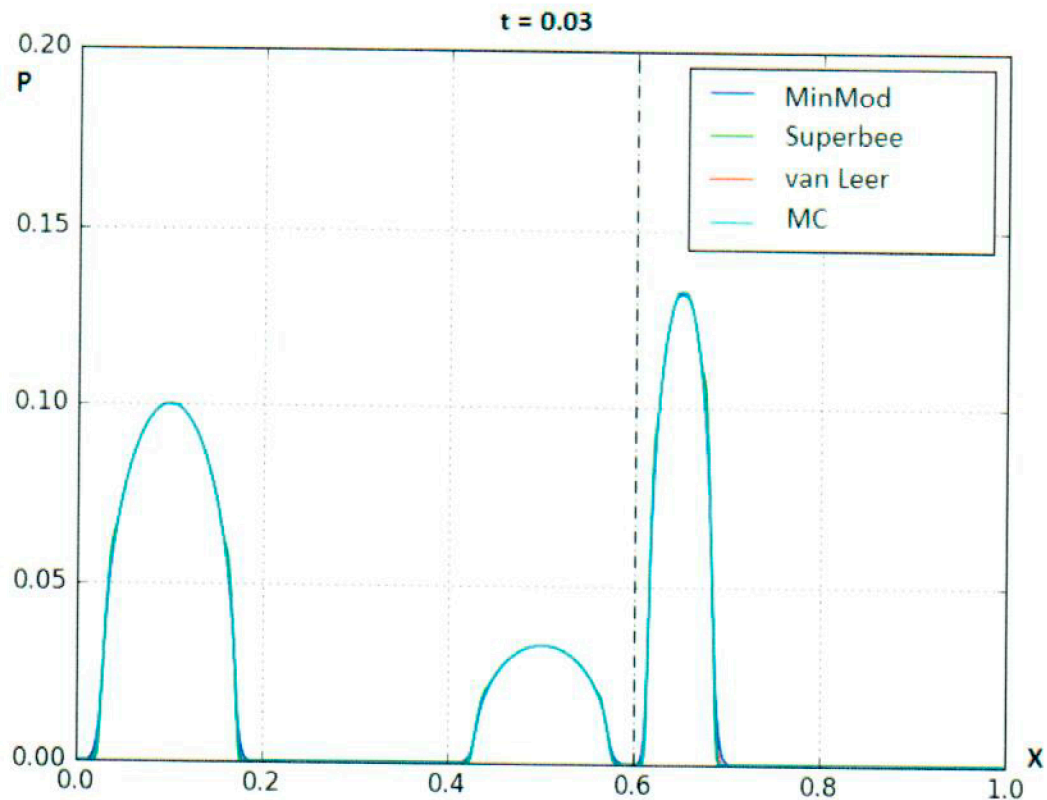


Рисунок 14 – Применение ограничителей.

На рисунке 14 видно, что мы имеем довольно гладкое решение, поэтому влияние ограничителей на картину решения очень мало. Хотя, можно заметить, что у основания и на вершинах пиков всё-таки проявляются некоторые различия. Распределения давления у основания и на пиках изображены на рисунках 15 и 16 соответственно.

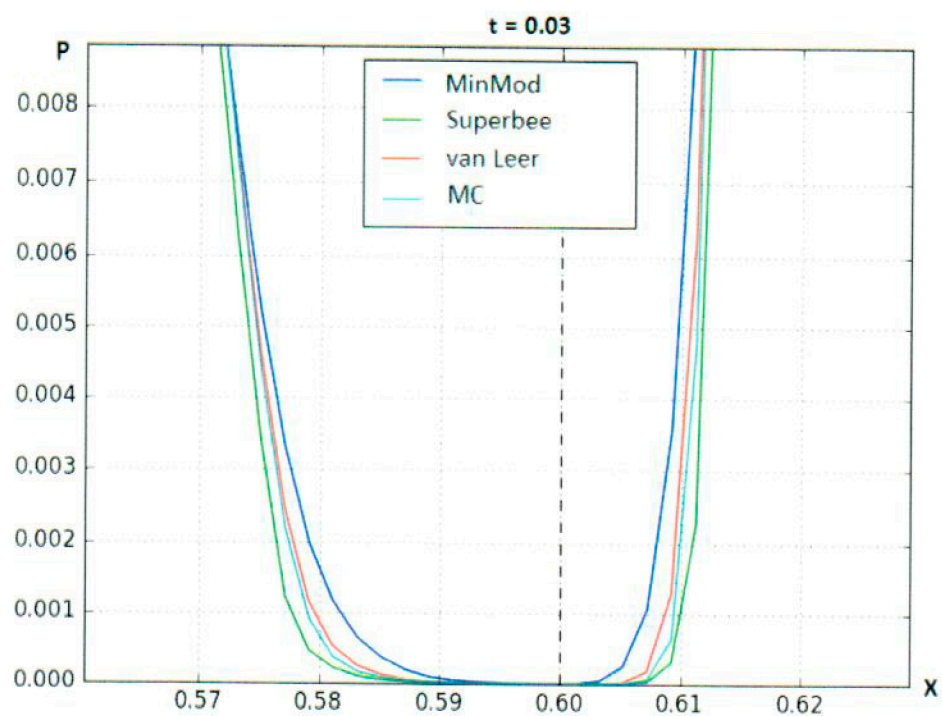


Рисунок 15 – Распределение давления у основания.

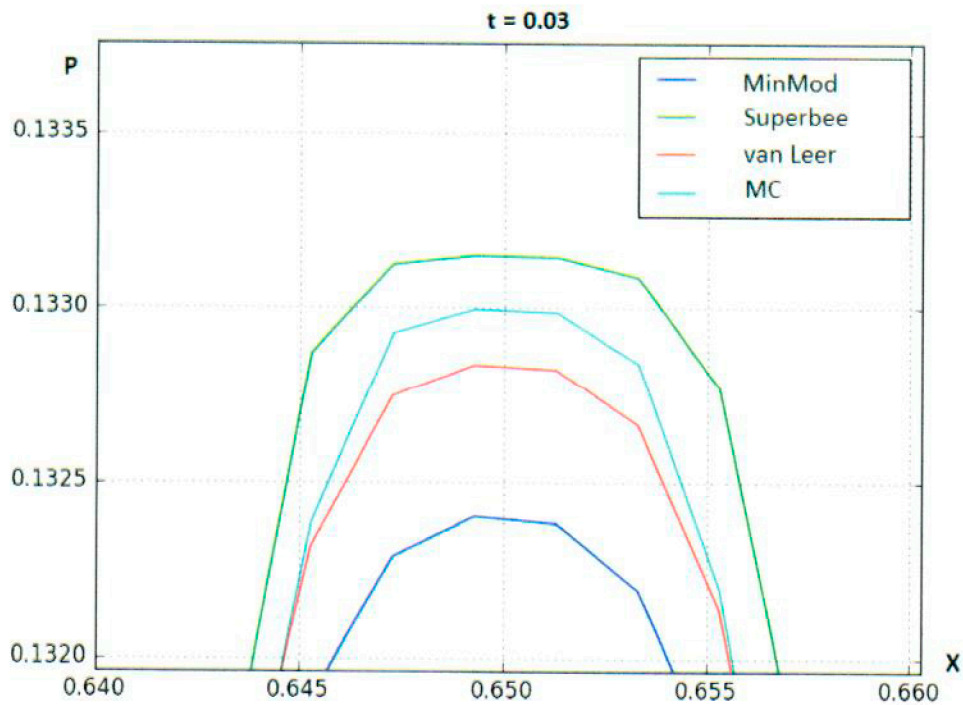


Рисунок 16 – Распределение давление на пике.

5 Результаты расчётов в двумерном случае

Взята квадратная область со стороной равной единице. Расчётную область разбили по 200 делений на каждую сторону.

Имеем следующие начальные условия. Скорости u и v равны нулю. Распределение давления: в центре имеем скачок давления $P = 1$ радиусом $r = 0.25$, в остальной области $P = 0.5$ во всех направлениях. Плотность ρ и модуль объёмной эластичности k равны единице.

Производили расчёт до времени $t = 1$, число выводимых расчётов задали равным 50.

Рассмотрели два вида граничных условий: в первом случае все границы свободные, т.е. условие сноса; во втором слева и справа имеем твёрдую стенку, а сверху и снизу свободные границы.

На рисунках 17 – 27 изображены карты распределения давления в различные моменты времени при различных граничных условиях. На рисунках 21, 23, 25 и 27 видно, как волны отражаются от твёрдых стенок и начинают следовать в обратном направлении, сливаясь между собой. Рисунки 20, 22, 24 и 26 показывают беспрепятственный переход волн за границы исследования. На рисунках 28 – 29 представлены графики распределения давления на срезе в момент времени $t = 0.5$.

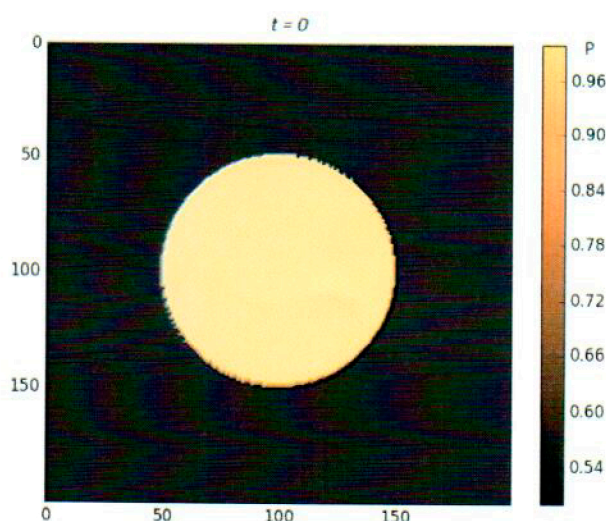


Рисунок 17 – начальное распределение давления.

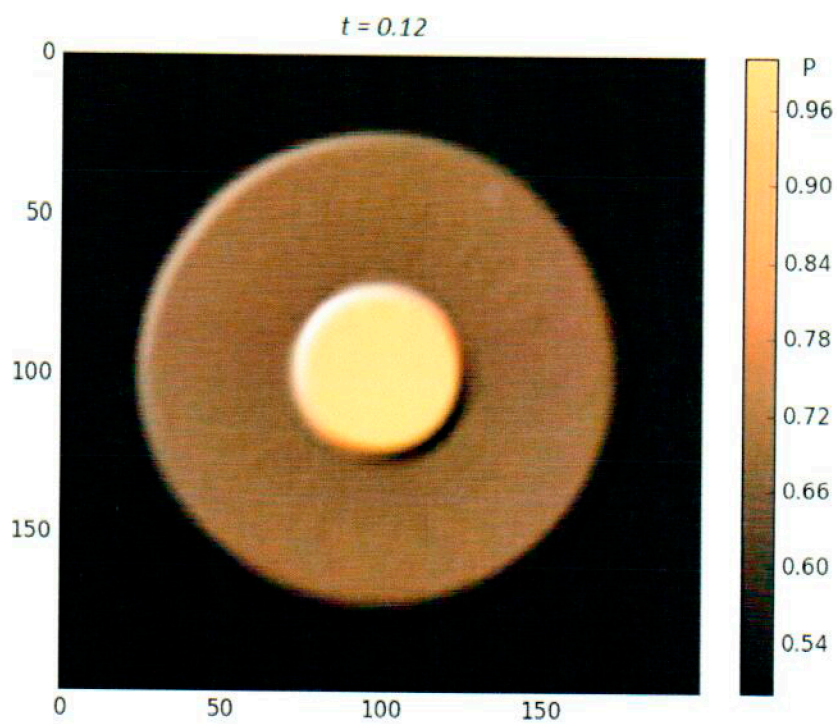


Рисунок 18 – скачок распадается.

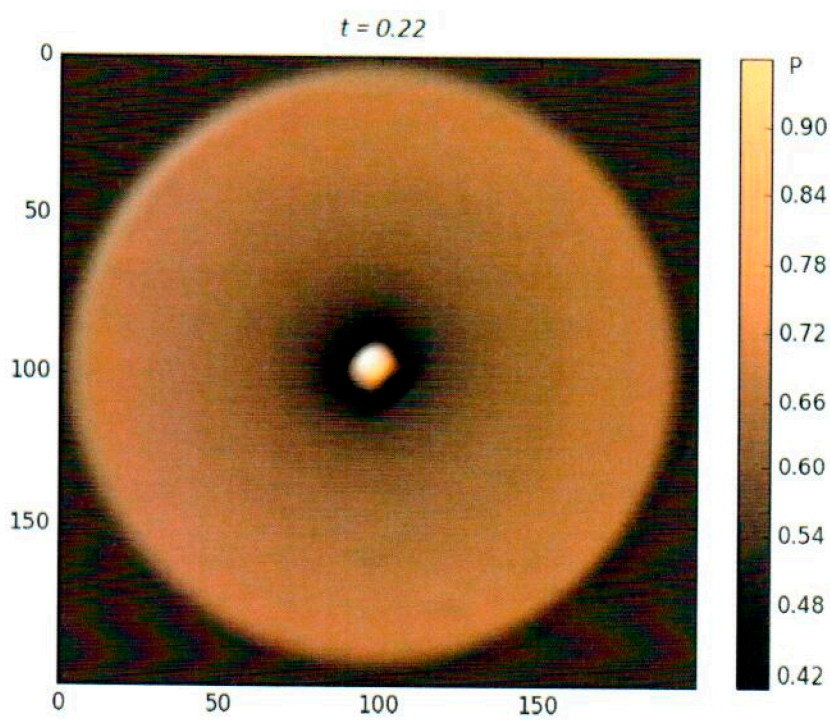


Рисунок 19 – Скачок почти распался.

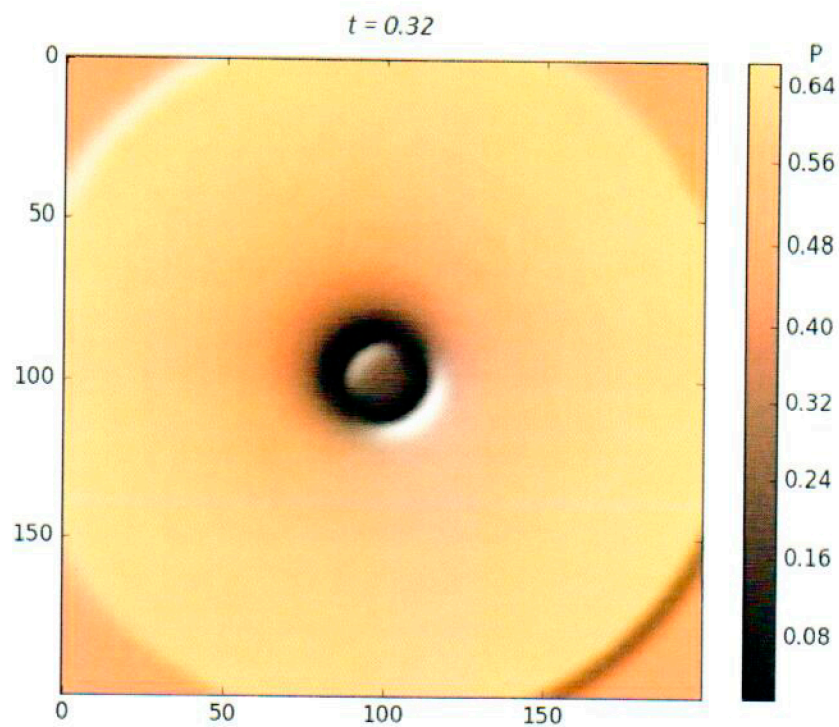


Рисунок 20 – Распределение давления в задаче со свободными границами при $t = 0.32$.

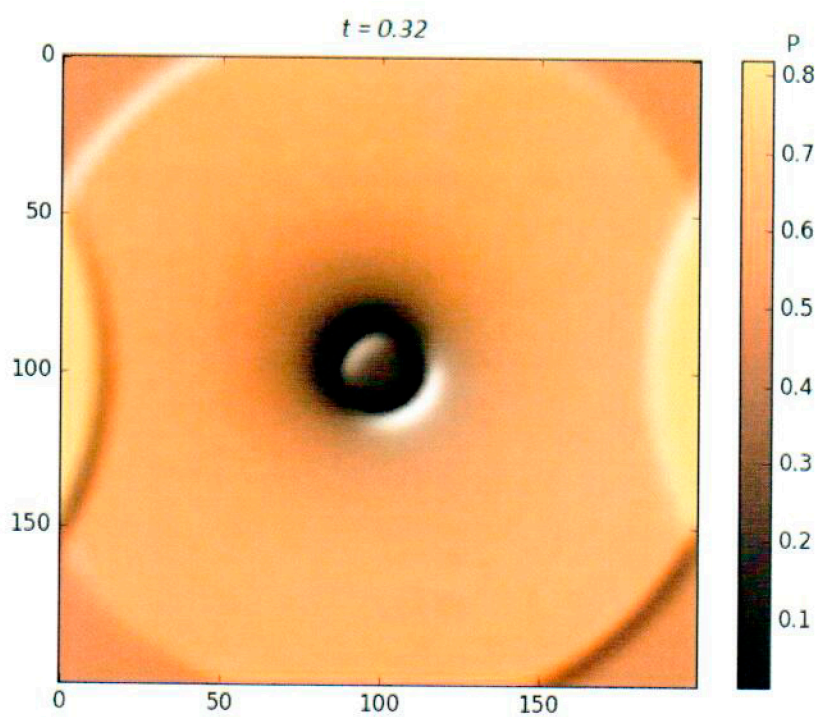


Рисунок 21 – Распределение давления в задаче с твёрдыми границами при $t = 0.32$.

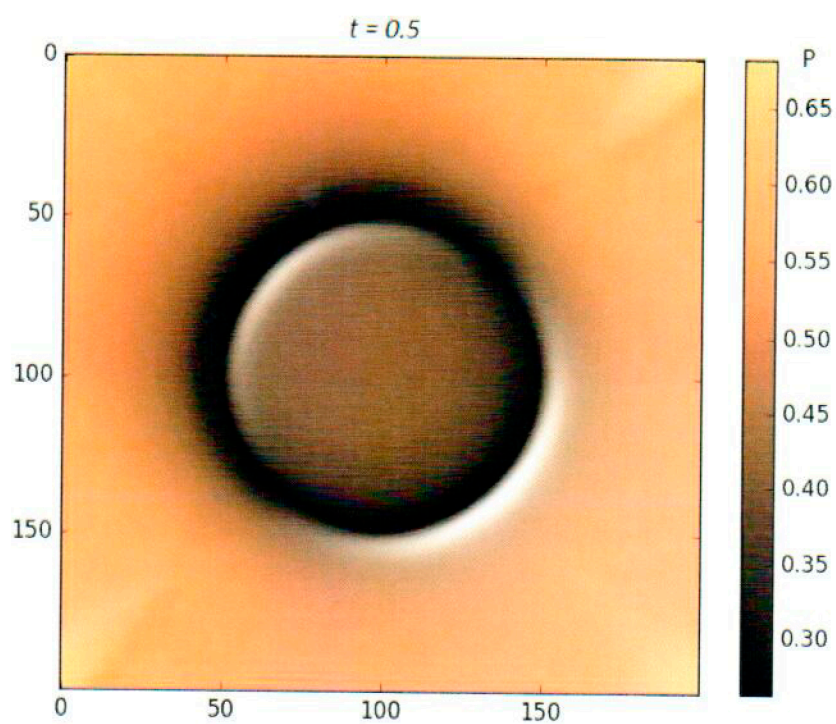


Рисунок 22 – Распределение давления в задаче со свободными границами при $t = 0.5$.

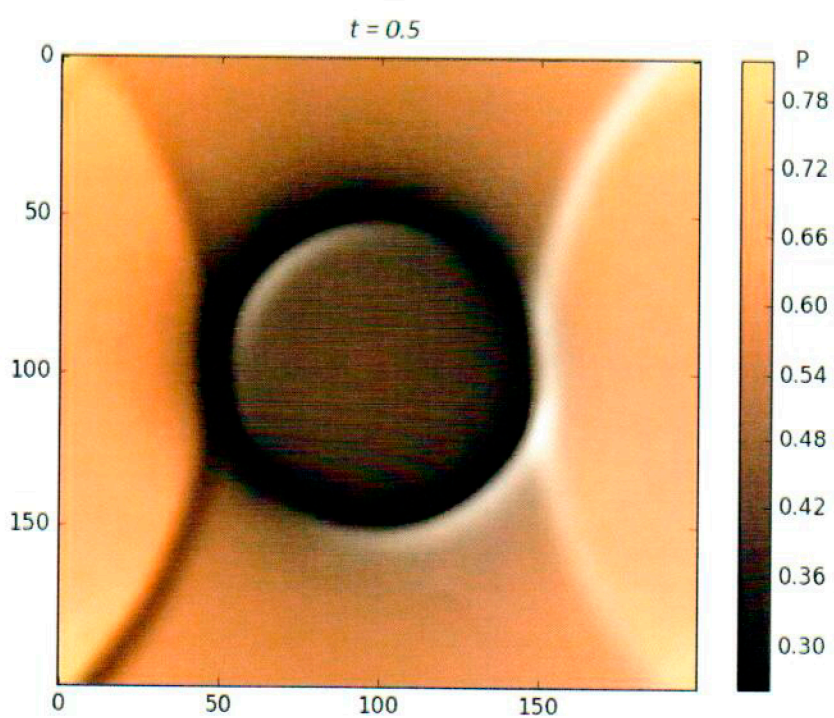


Рисунок 23 – Распределение давления в задаче с твёрдыми границами при $t = 0.5$.

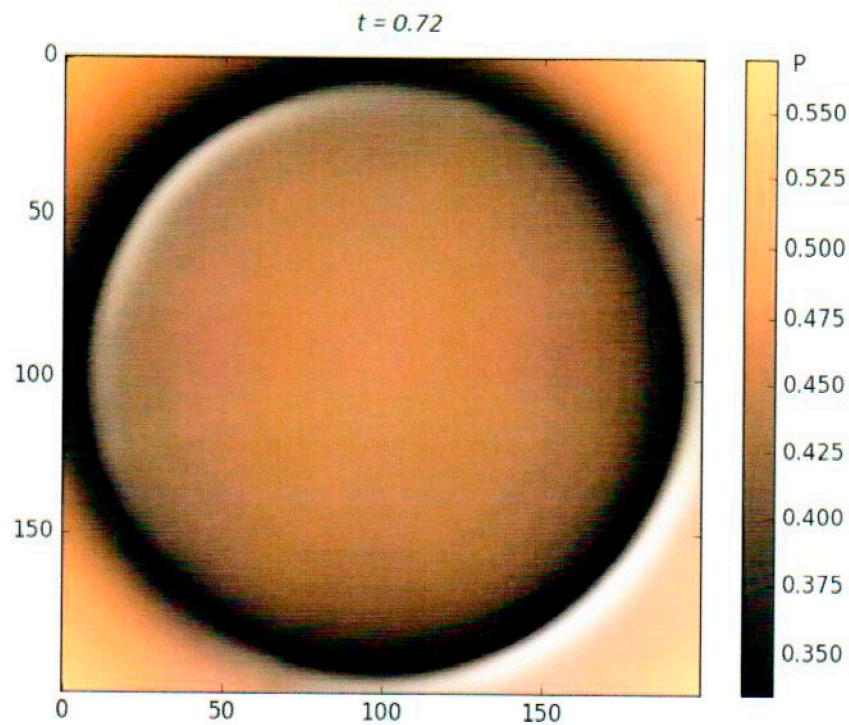


Рисунок 24 – Распределение давления в задаче со свободными границами при $t = 0.72$.

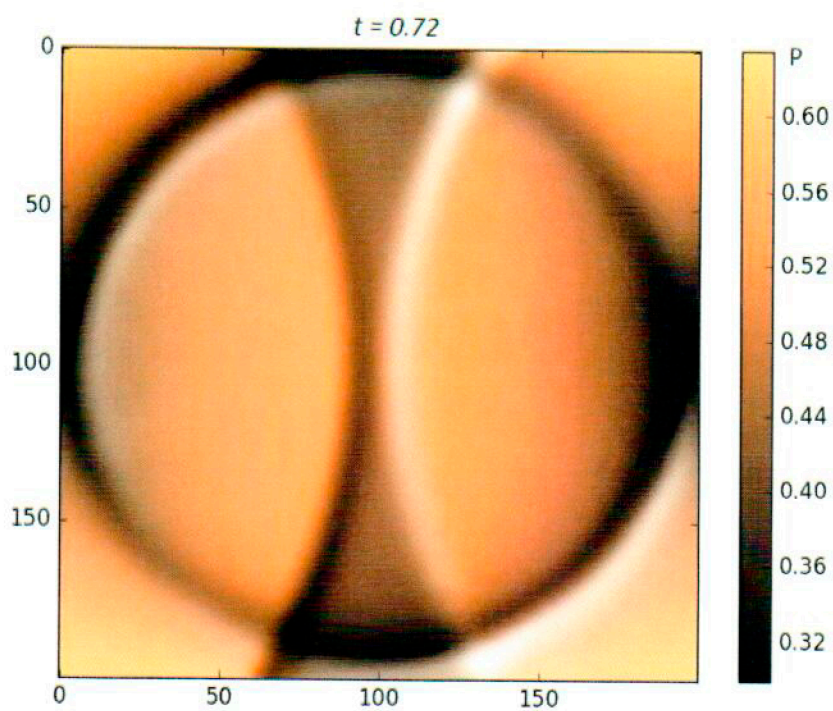


Рисунок 25 – Распределение давления в задаче с твёрдыми границами при $t = 0.72$

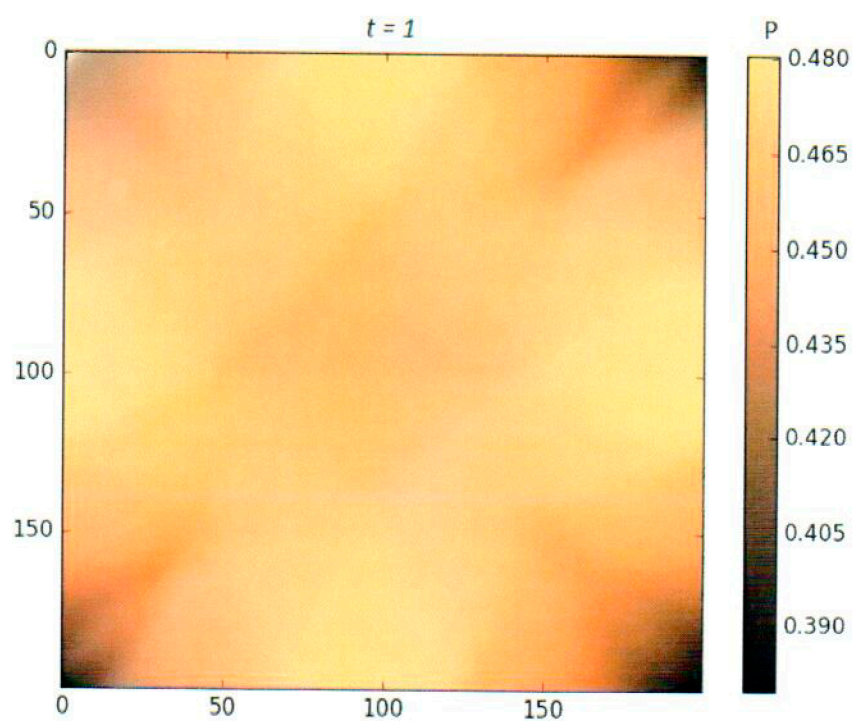


Рисунок 26 – Распределение давления в задаче со свободными границами при $t = 1$.

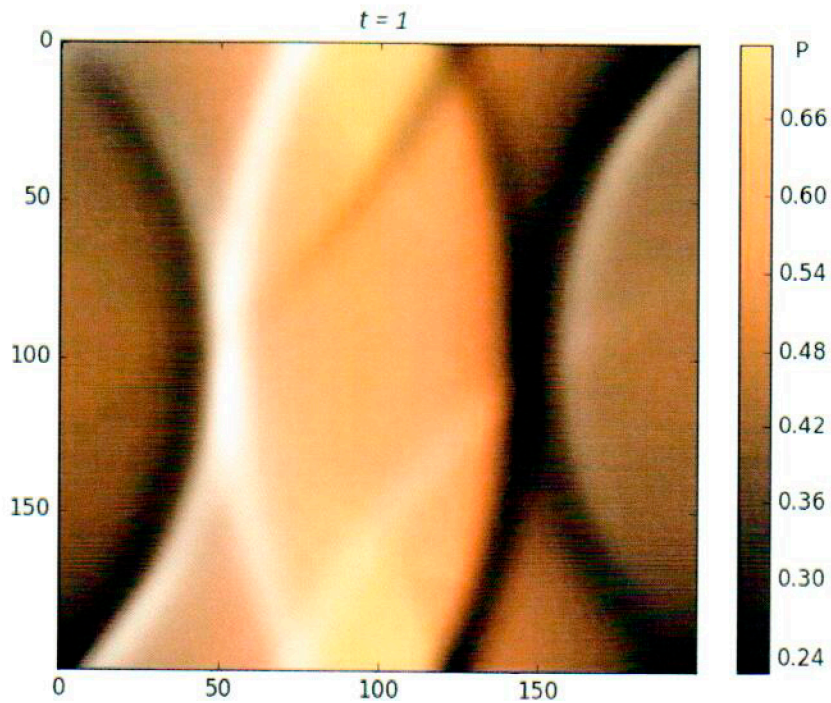


Рисунок 27 – Распределение давления в задаче с твёрдыми границами при $t = 1$.

6 Сеточная сходимость двумерной акустики

Для проверки на достоверность результатов алгоритм исследовался на сеточную сходимость на разрезе. Ниже представлены рисунки 30, 31 и 32 на которых изображены графики давления при различном разбиении расчётной сетки. На графиках видно, что все кривые стремятся к одной, что говорит о сходимости метода. Оптимальным числом разбиений можно считать 200, так как при увеличении ячеек алгоритм начинает работать значительно дольше, по сравнению с данным разбиением.

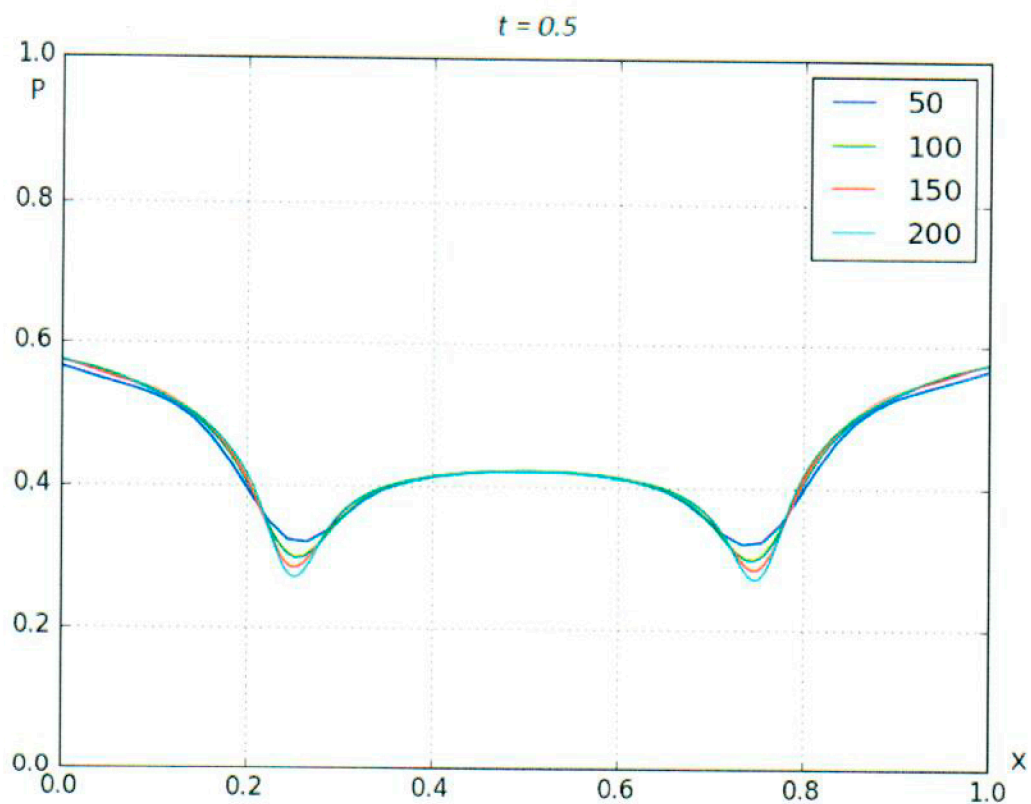


Рисунок 30 – Сеточная сходимость на разрезе.

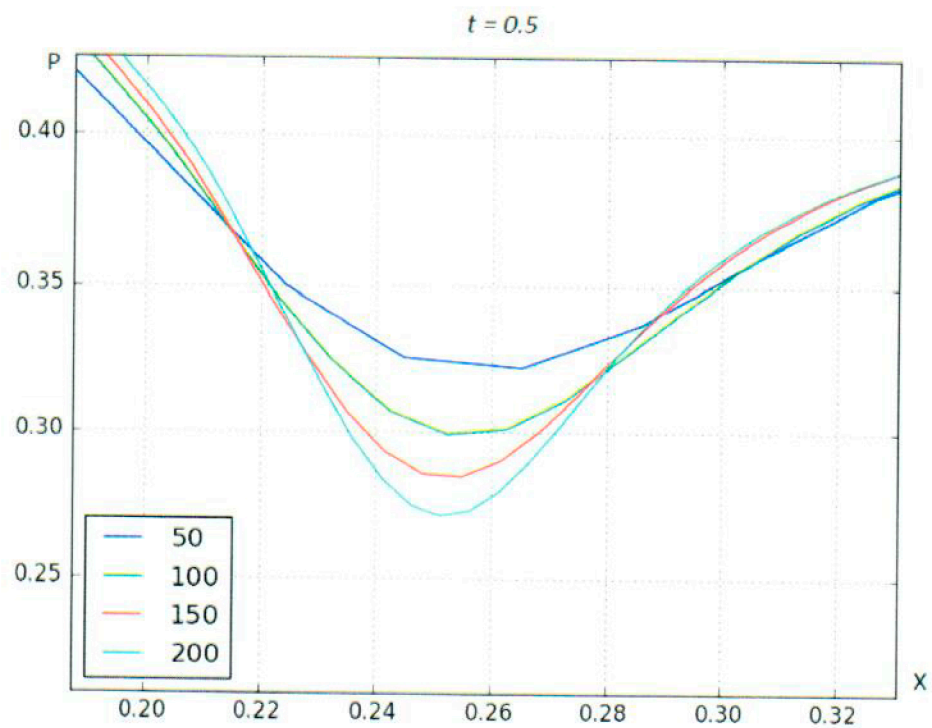


Рисунок 31 – Сеточная сходимость на изгибе.

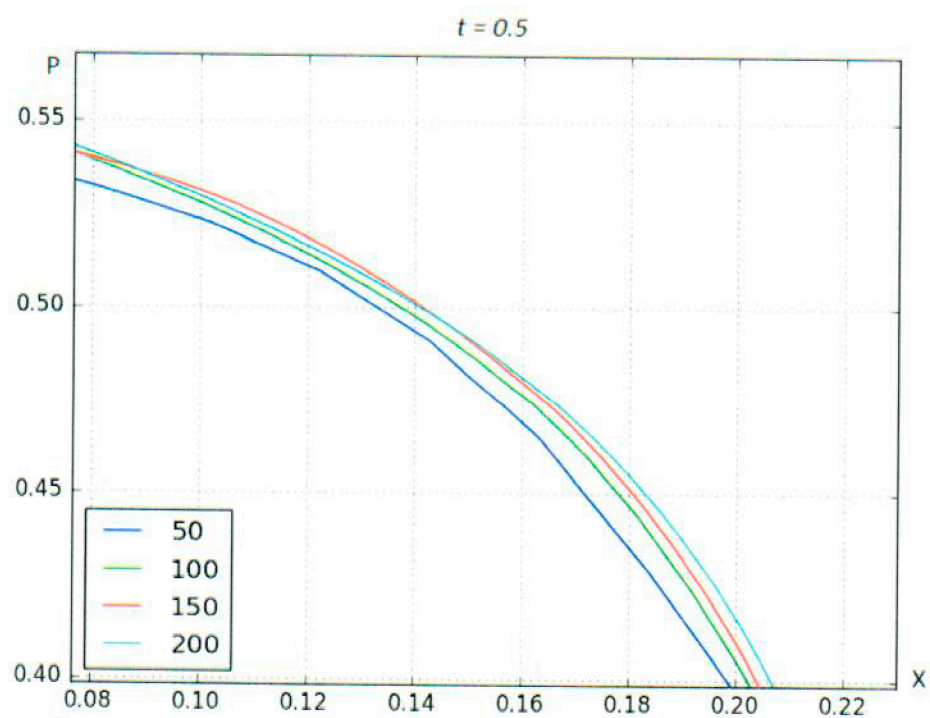


Рисунок 32 – Сеточная сходимость на пике.

Список литературы.

1. Черный Г. Г. Газовая динамика: Учебник для университетов и вузов / Г. Г. Черный. – М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1988. – 424 с.
2. Годунов С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики. / Под ред. С.К. Годунова. –М.: Наука, 1976. – 400 с.
3. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидромеханики. // Математический сборник, 1959. –Т47, Вып.3. – С. 271 – 306.
4. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – 552 с.
5. Поттер Д. Вычислительные методы в физике: пер. с англ./ Д. Поттер; под ред. Г.В.Переверзев. – М.: Мир, 1975. – 392 с.
6. Численные методы решения одномерных нестационарных уравнений газовой динамики: [учеб. –метод. пособие] / Л. Л. Миньков, Э.Р. Шрагер [и др.]. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – 44 с.
7. R. J. LeVeque Wave propagation algorithms for multidimensional hyperbolic systems // Journal of Computational Physics. – 1997. – № 131. – P. 327 – 353.
8. R. J. LeVeque Wave-propagation methods and software for complex applications/ R. J. LeVeque, S. Mitran // Finite Volumes for Complex Applications III. – 2002. – P. 107 – 118.
9. R. J. LeVeque High- resolution finite volume methods for acoustic in rapidly-varying heterogeneous medium/ R. J. LeVeque, T. Fogarty// Mathematical and Numerical Aspect of Wave Propagation. – 1998. – P. 603–605.

Уважаемый пользователь! Обращаем ваше внимание, что система «Антиплагиат» отвечает на вопрос, является ли тот или иной фрагмент текста заимствованным или нет. Ответ на вопрос, является ли заимствованный фрагмент именно плагиатом, а не законной цитатой, система оставляет на ваше усмотрение.

Отчет о проверке № 1

ФИО: Гаврин Сергей
 дата загрузки: 09.06.2017 09:23:54
 пользователь: gavrin_s@mail.ru / ID: 3091485
 отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»
 на сайте <http://www.antiplagiat.ru>

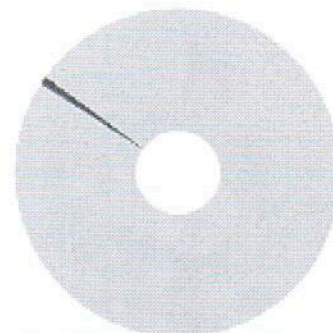
Информация о документе

№ документа: 10
 Имя исходного файла: Диплом.docx
 Размер текста: 2273 кБ
 Тип документа: Не указано
 Символов в тексте: 30025 Слов в тексте: 4132
 Число предложений: 221

Информация об отчете

Дата: Отчет от 09.06.2017 09:23:54 - Последний готовый отчет
 Комментарии: не указано
 Оценка оригинальности: 99.35%

Заимствования: 0.65%
 Цитирование: 0%



Оригинальность: 99.35%
 Заимствования: 0.65%
 Цитирование: 0%

Источники

Доля в тексте	Источник	Ссылка	Дата	Найдено в
0.65%	[1] Numerical methods for interface coupling of compressible and almost incompressible media	http://arxiv.org	26.03.2017	Модуль поиска Интернет

<https://www.antiplagiat.ru/My/Report/Print/10?short=true>

1/1

Руководитель ООП
 д-р физ.-мат. н., профессор
Э.Р. Шрагер
 « 13 » 06 2017 г.

Руководитель ВКР
 канд. физ.-мат.
 наук, доцент
Р.К. Нариманов
 « _____ » _____ 2017 г.

Автор работы
 Студент группы
 №10304
С.В. Гаврин