Министерство образования и науки Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ТГУ)
Факультет прикладной математики и кибернетики
Кафедра теоретической кибернетики (ТК)

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
д-р физ.-мат.наук, профессор
_____ Ю.Г. Дмитриев
«03» 06 2017 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

КОМБИНИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В ARX-МОДЕЛЯХ

по основной образовательной программе подготовки магистров
по направлению подготовки 38.04.01 Экономика
и направленности (профилю) подготовки
«Математические методы анализа экономики»

Луков Вадим Юрьевич

Научный руководитель ВКР
д-р физ.-мат. наук, профессор
_____ Г.М. Кошкин
«02» июня 2017 г.

Автор работы
студент группы № 1154М
_____ В. Ю. Луков

Томск – 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ТГУ)
Факультет прикладной математики и кибернетики
Кафедра теоретической кибернетики (ТК)

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ООП
д-р физ.-мат.наук, профессор
_____ Ю.Г. Дмитриев
«15» февраля 2017 г.

ЗАДАНИЕ

по подготовке ВКР магистра студенту Лукову Вадиму Юрьевичу группы № 1154М.

1. Тема ВКР «Комбинированные алгоритмы идентификации и прогнозирования в ARX-моделях».

2. Срок сдачи студентом выполненной ВКР:
а) на кафедре 03.06.2017
б) в ГЭК 08.06.2017

3. Исходные данные к работе: цели и задачи: Построение комбинированной модели стохастических процессов. Объект исследования: регрессионные процессы, AR- и ARX-процессы Методы исследования: оптимизация критерия минимума СКО, методы комбинированного оценивания и непараметрической статистики. Оценка качества предложенных алгоритмов с помощью моделирования и исследования процессов реальных данных.

4. Краткое содержание работы: Построение комбинированной модели. Вывод формулы оптимального весового коэффициента, а также его асимптотической формы. Построение оценки весового коэффициента с помощью метода бутстреп и оценивания коэффициентов главной части СКО непараметрической оценки регрессии. Апробация полученных алгоритмов на основе численного моделирования и задачах идентификации и прогнозирования цен акций компании «Газпром».

5. ВКР выполнена на кафедре теоретической кибернетики НИ ТГУ.

6. Перечень графического материала – 48рис.

7. Дата выдачи задания «15» февраля 2017 г.

Руководитель ВКР: д-р. физ.-мат. наук, проф. каф. ТК. _____ Кошкин Г.М.

Задание принял к исполнению 15.02.2017 В.Луков
дата, подпись студента

РЕФЕРАТ

«Комбинированные алгоритмы идентификации и прогнозирования в ARX-моделях»

Магистерская диссертация: 63 с., 62 рис., 8 табл., 2 приложения, 24 источника литературы.

Ключевые слова: авторегрессионная модель, ARX-модель, непараметрические оценки, ядерное сглаживание, комбинированные оценки, весовой коэффициент, статистический бутстреп, главные части среднеквадратических отклонений.

В данной квалификационной работе рассматриваются непараметрические и комбинированные алгоритмы идентификации и прогнозирования стохастических процессов.

Для комбинированных моделей найдена оптимальная форма весового коэффициента, которая минимизирует среднеквадратическое отклонение между выходами процесса и модели. Теоретически показано, что выбор такого весового коэффициента приводит к меньшему СКО в сравнении с непараметрическими оценками, основанными на ядерном сглаживании.

Для комбинированных моделей рассмотрены два метода оценки весового коэффициента, основанные на статистическом бутстрепе и использовании приближений главных частей среднеквадратических отклонений оценок.

Разработаны программы построения ядерных и комбинированных оценок, на основе которых проведена апробация работоспособности данных алгоритмов в задачах идентификации и прогнозирования регрессионных, авторегрессионных и ARX-процессов на основе численного моделирования и процессов реальных данных (цены акций компании «Газпром»).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Перечень условных обозначений и сокращений 5

Введение 6

1 Постановка задачи 9

2 Непараметрическая оценка регрессии 11

2.1 Структура непараметрической оценки регрессии 12

2.2 Некоторые асимптотические свойства непараметрической оценки регрессии 14

3 Комбинированная оценка регрессии 16

3.1 Структура комбинированной оценке регрессии 16

3.2 Оценка весовых коэффициентов на основе метода бутстреп 17

3.3 Асимптотическая оценка весовых коэффициентов 19

4 Моделирование 21

4.1 Идентификация с использованием метода бутстреп 21

4.2 Идентификация с использованием асимптотической оценки 31

5 Идентификация AR-процессов 38

6 Идентификация ARX-процессов 39

7 Анализ реальных данных 41

7.1 AR-модель идентификации и прогнозирования реальных данных 41

7.2 ARX-модель идентификации и прогнозирования реальных данных 45

Заключение 53

Литература 54

Приложение А Исходные данные 56

Приложение Б Пример программы моделирования регрессии 57

Приложение В Пример программы идентификации ARX-модели 60

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

Y – выход объекта

$\vec{X}$ – вектор входов объекта

ξ – шум

$M\{...\}$ − математическое ожидание

$D\{...\}$ − дисперсия

R^n − пространство размерности n

$K(u)$ − ядро

h_N − параметр размытости

λ − весовой коэффициент

с.п. – сильное перемешивание

СКО – среднеквадратическое отклонение

ВВЕДЕНИЕ

Во многих прикладных задачах требуется исследовать влияние на стохастический объект некоторого множества факторов. Часто структура этой зависимости может быть частично или полностью неизвестна исследователю. Более того, иногда приходится работать в условиях ограниченной информации (малого объема наблюдений). Таким образом, не всегда получается построить корректную модель этого объекта, заданную в явном параметрическом виде, так как помимо выявления важных (значимых) факторов в модели, требуется еще и определить тип зависимости исследуемого объекта от выявленных факторов, что в условиях приближенных к реальности сделать достаточно трудно или практически невозможно в силу сложной структуры исследуемого процесса. В данных случаях приходится отдавать предпочтение непараметрическим методам восстановления неизвестной зависимости.

Однако, в процессе изучения объекта иногда можно сделать некоторые выводы о его структуре, исходя из предварительных результатов или опыта исследователя. Эта информация, называемая априорной догадкой, может оказаться как верной, так и неверной, однако имеющиеся предположения хотелось бы использовать в попытке параметризации модели.

Ядерное сглаживание активно используется в задачах идентификации, прогнозирования, управления, задачах обработки сигналов. Впервые, сама идея ядерного сглаживания была предложена Фиксом и Ходжесом в 1951 г., как средство освобождения от требований в строгой параметрической спецификации. Сам же метод разработал М.Розенблатт, опубликовавший первую статью о ядерном сглаживании в 1956 г., где ввел класс ядерных оценок плотностей и исследовал их асимптотическую несмещенность и состоятельность, а затем Э.Парзен доказал их асимптотическую нормальность. Далее Э.А.Надарая (1965) и Г.Ватсон (1964) независимо друг от друга разработали метод ядерной непараметрической оценки регрессии. П.Бхаттачария и Е.Шустер разработали методы оценки производных плотностей. В.Мерфи и В.А.Епанечников изучали многомерные оценки плотностей. Г.М.Кошкин, В.А.Симахин и Ф.П.Тарасенко исследовали условные функции и функционалы распределений. В данных работах рассматривались также асимптотические свойства ядерных оценок, а также сходимость данных оценок, асимптотическая нормальность и методика выбора оптимальных ядер и ширины окна.

Одним из важнейших вопросов в ядерном оценивании связан с выбором оптимальной ширины окна, от которого сильно зависит точность ядерного оценивания функционалов. Стоун (1974) и Гайзер (1975) предлагали определять данный параметр с помощью метода кросс-валидации на основе метода правдоподобия, Рудемо (1982) и Бовмэн (1984) − с помощью метода кросс-валидации на основе наименьших квадратов, Шитер и Джоунс (1991) − методом подстановки.

Еще одной важной проблемой является тот факт, что не всегда, особенно в приближенных к реальности задачах, объясняющие факторы будут независимы между собой, как требуется в классических положениях, введенных Розенблаттом, и часто приходится отходить от ограничения независимости факторов. Данный вопрос рассматривался, например, Г.М.Кошкиным, В.А.Китаевой, В.А.Васильевым в [3,4,12,13,15].

Комбинированные алгоритмы идентификации, основанные на ядерном сглаживании, изучались С.В.Скрипиным, Ю.Г.Дмитриевым, Г.М.Кошкиным, А.Н.Завариным и др. В частности, Ю.Г.Дмитриев и Г.М.Кошкин рассматривали использование дополнительной информации при оценивании функционалов плотности [7,8], С.В.Скрипин и Ю.Г.Дмитриев изучали применение комбинированной оценки в задачах безотказной работы объекта [9]. Также С.В.Скрипин рассматривал оценки весовых коэффициентов в комбинированных моделях регрессии [22], а А.Н.Заварин изучал привлечение априорной информации в задачах восстановления регрессии [10].

В данной работе рассматриваются комбинированные модели стохастических регрессионных, авторегрессионных и ARX-процессов. Находится оптимальная форма весового коэффициента в смысле минимума СКО между выходами модели и исследуемого процесса, и теоретически показывается, что выбор такого весового коэффициента приводит к меньшему СКО в сравнении с непараметрическими оценками. Предлагаются два метода оценки этого весового коэффициента, основанные на методе бутстреп и асимптотической записи данного коэффициента. Работоспособность данных алгоритмов тестируется с помощью численного моделирования и рассмотрении задач идентификации и прогнозирования ценных бумаг.

Результаты работы опубликованы в [14,17,20] и докладывались на следующих конференциях:

1. «Second International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science, and Operations Management», CPS, Beer Sheva, Israel, 15-18 February, 2016.

2. XX Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи. Математика. Информатика» (I место), Анжеро-Судженск, Россия, 28-29 апреля 2016.
3. IV Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (III место), Томск, Россия, 20-21 мая 2016.
4. XI Международная конференция «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», Екатеринбург, Россия, 6-10 июня 2016.
5. V Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (I место), Томск, Россия, 19-20 мая 2017.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть некоторый стохастический процесс генерируется моделью

$$Y_t = f\left(\vec{X}_t\right) + \xi_t, \tag{1}$$

где Y_t − выход модели в момент времени t, $\vec{X}_t = \left(X_t^{\langle 1\rangle}, ..., X_t^{\langle p\rangle}\right)$ − p-мерный вектор факторов модели в момент времени t, f − неизвестная функция, ξ_t − последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, независящих от $\vec{X}_t$ с $M\xi_t = 0,\ M\xi_t^2 = \sigma < \infty,\ M\xi_t^3 = 0,\ M\xi_t^4 < \infty.$ Также предположим, что f — ограниченная, положительная и непрерывная функция, определенная на гильбертовом пространстве, а её вид не меняется на исследуемом интервале времени.

Ставится задача восстановления зависимости f по наблюдениям $\left(Y_i, \vec{X}_i\right),\ i = 1, ..., N.$

Данную задачу будем решать путем построения такой модели $\psi_м(\vec{X})$, которая бы наилучшим образом описывала процесс (1) в смысле близости выходов. Графически эту задачу можно представить в виде:

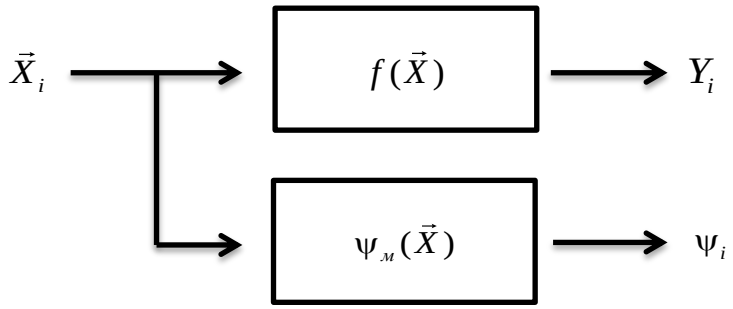

Рисунок 1 – Графическое представление задачи

Таким образом, необходимо построить такую оценку $\psi_м(\vec{X})$, выходы которой были бы как можно «ближе» к Y_i.

Рассмотрим среднеквадратическое отклонение между $\psi_м(\vec{X})$ и Y

$$M\left\{Y - \psi_м(\vec{X})\right\}^2 = \int_X \int_Y \left(y - \psi_м(\vec{x})\right)^2 \cdot f(\vec{x}, y) d\vec{x} dy \xrightarrow[\psi_м(\vec{x})]{} \min. \tag{2}$$

Для нахождения минимума возьмем производную по правилам вариационного исчисления [2]

$$\frac{\delta M\left\{Y-\psi_{м}(\vec{X})\right\}^{2}}{\delta\psi_{м}(\vec{X})}=-2\int_{\Upsilon}\left(y-\psi_{м}(\vec{x})\right)\cdot f(\vec{x},y)dy=-2f(\vec{x})\cdot\int_{\Upsilon}\left(y-\psi_{м}(\vec{x})\right)\cdot f(y\mid\vec{x})dy=0,$$

$$\int_{\Upsilon}\left(y-\psi_{м}(\vec{x})\right)\cdot f(y\mid\vec{x})dy=\int_{\Upsilon}y\cdot f(y\mid\vec{x})dy-\psi_{м}(\vec{x})\cdot\int_{\Upsilon}f(y\mid\vec{x})dy=0.$$

Выражая $\psi_{м}(\vec{x})$ и принимая во внимание, что $\int_{\Upsilon}f(y\mid\vec{x})dy=1,$ получим

$$\psi_{м}(\vec{x})=\frac{\int_{\Upsilon}y\cdot f(y\mid\vec{x})dy}{\int_{\Upsilon}f(y\mid\vec{x})dy}=\int_{\Upsilon}y\cdot f(y\mid\vec{x})dy=M\left(Y\mid\vec{X}=\vec{x}\right)=r(\vec{x}). \qquad (3)$$

Таким образом, минимум СКО (2) достигается при использовании условного математического ожидания (регрессии) в качестве модели $\psi_{м}(\vec{x})$, а задача восстановления неизвестной функции f сводится к оцениванию этой регрессии $r(\vec{x})$, так как плотность $f(y\mid\vec{x})$ неизвестна.

2 НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РЕГРЕССИИ

Методика оценивания многих функционалов опирается на использование известной непараметрической оценки плотности вероятности $p(\vec{x})$

$$\hat{p}\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{N\prod_{j=1}^{p}h_N^{\langle j\rangle}}\sum_{i=1}^{N}K^*\left(\frac{\vec{x}-\vec{X}_i}{\vec{h}_N}\right), \tag{4}$$

где $K^*\left(\frac{\vec{x}-\vec{X}_i}{\vec{h}_N}\right)=K\left(\frac{x_1-X_i^{\langle 1\rangle}}{h_N^{\langle 1\rangle}}\right)\times\ldots\times K\left(\frac{x_p-X_i^{\langle p\rangle}}{h_N^{\langle p\rangle}}\right)$ — p-мерное ядро оценки (обычно, это произведение плотностей вероятности), для которой выполняются следующие ограничения:

$$\begin{aligned}
&1)\ 0\le K(u)<\infty,\\
&2)\ K(u)=K(-u),\\
&3)\ \int_{-\infty}^{\infty}K(u)du=1,\\
&4)\ \int_{-\infty}^{\infty}K^2(u)du<\infty,\\
&5)\ \int_{-\infty}^{\infty}u^2K(u)du=1,\\
&6)\ \lim_{u\to\infty}uK(u)=0,
\end{aligned} \tag{5}$$

$\vec{h}_N=\left(h_N^{\langle 1\rangle},\ldots,h_N^{\langle p\rangle}\right)$ — p-мерный вектор неотрицательных параметров (коэффициентов) размытости, зависящий от объема выборки N, для которого выполняются следующие условия:

$$\lim_{N\to\infty}h_N^{\langle j\rangle}=0,\quad \lim_{N\to\infty}Nh_N^{\langle j\rangle}=\infty,\quad \forall j=1,\ldots,p. \tag{6}$$

Оценку $\hat{p}\left(\vec{x}\right)$ обычно называют ядерной или парзеновской оценкой плотности (иногда ее называют оценкой типа Розенблатта – Парзена, так как М. Розенблатт впервые в 1956 г. ввел класс ядерных оценок плотностей и исследовал их асимптотическую несмещенность и состоятельность, а Е. Парзен доказал их асимптотическую нормальность).

2.1 Структура непараметрической оценки регрессии

Перепишем (3) в виде

$$r(\vec{x}) = \int_{\Upsilon} y \cdot f(y \mid \vec{x}) dy = \frac{\int_{\Upsilon} y \cdot f(y, \vec{x}) dy}{\int_{\Upsilon} f(y, \vec{x}) dy} = \frac{a(\vec{x})}{p(\vec{x})}, \tag{7}$$

где $p(\vec{x}) = \int_{\Upsilon} f(x, y) dy \neq 0,$ а $f(y, \vec{x})$ − плотности вероятностей вектора входов $\vec{X}$ и совместного вектора выхода и входов $\left(Y, \vec{X}\right)$ соответственно, а $a(\vec{x}) = \int_{\Upsilon} y \cdot f(y, \vec{x}) dy$ − так называемый базовый функционал.

Непараметрическая оценка регрессии (7), основанная на ядерном сглаживании, была предложена независимо друг от друга Э. Надарая [21] и Г. Ватсоном и для данной задачи записывается в виде

$$\hat{r}(\vec{x}) = \frac{\hat{a}(\vec{x})}{\hat{p}(\vec{x})} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i \cdot K^* \left(\frac{\vec{x} - \vec{X}_i}{\vec{h}_N} \right)}{\sum_{i=1}^{N} K^* \left(\frac{\vec{x} - \vec{X}_i}{\vec{h}_N} \right)}, \tag{8}$$

где $\hat{a}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} Y_i K^* \left(\frac{\vec{x} - \vec{X}_i}{\vec{h}_N} \right)$ − оценка базового функционала $a(\vec{x})$ в (7), а $\hat{p}(\vec{x})$ − оценка (4).

Одной из проблем непараметрического оценивания может стать тот факт, что в некоторых случаях (особенно в процессах реальных данных) условие независимости наблюдений может нарушаться. Это, в конечном счете, может привести к тому, что свойства характерные для непараметрических оценок по независимым наблюдениям, вообще говоря, могут не выполняться. Однако, в работах [12,13,15] показано, что эту проблему можно решить, потребовав выполнения условий, при которых стохастический процесс будет удовлетворять условиям сильного перемешивания (с.п.). Такие процессы также называют процессами со слабой зависимостью. Понятие слабой зависимости заключается в том, что при отдалении прошлого и будущего последовательности Y_t, зависимость между этими моментами убывает к нулю.

Математическое представление понятия слабой зависимости формулируется следующим образом:

Пусть $Y_t \in R^1$, t=0,1,2…, — последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, F^y, \mathrm{P})$, и $F^y_{s,t} = \sigma\{Y_u, \mathrm{s} \le \mathrm{u} \le \mathrm{t}\}$ — σ-алгебра событий, генерируемых случайными величинами Y_u. Прошлое последовательности Y_t определяется $F^y_{0,t}$, будущее — $F^y_{\mathrm{t}+\tau,\infty}$. Зависимость между этими σ-алгебрами можно измерять следующем соотношением

$$|\,\mathrm{P}(\mathrm{AB}) - \mathrm{P}(\mathrm{A})\,\mathrm{P}(\mathrm{B})\,|, \tag{9}$$

где A — событие из $F^y_{0,t}$, а B — событие из $F^y_{\mathrm{t}+\tau,\infty}$. Если при увеличении τ величина (9) убывает к нулю, то говорят, что Y_t — последовательность со слабой зависимостью.

В работе [15] показано, что процесс (1) в заданных выше ограничениях на шум ξ_t и функцию f будет являться геометрической цепью Маркова и удовлетворять условию с.п. с коэффициентами с.п.

$$\alpha(\tau) \le c_0 \rho_0^{\tau},\ \ 0 < \rho_0 < 1,\ \ c_0 > 0. \tag{10}$$

Также стоит отметить, что в некоторых ситуациях знаменатель $\hat{p}(\vec{x})$ в (8) может оказаться близким к нулю, что приводит к неустойчивости оценки (8). Это означает, что небольшие изменения $\vec{X}_i$ могут привести к значительным изменениям $\hat{r}(\vec{x})$. С одной стороны, эту проблему можно обойти путем ограничения исследуемой области до такой степени, что $p(\vec{x})$ на заданном интервале будет ограничена снизу некоторой положительной константой, или же путем дополнительных ограничений на Y и ядро $K^*(\vec{u})$. Другой подход решения данной проблемы заключается в рассмотрении не оценки $\hat{r}(\vec{x})$, а её кусочно-гладкой аппроксимации [15]

$$\tilde{r}(\vec{x}) = \frac{\hat{r}(\vec{x})}{\left(1 + \delta_N \left|\hat{r}(\vec{x})\right|^{\tau}\right)^{\rho}}, \tag{11}$$

где $\tau > 0,\ \ \rho > 0,\ \ \rho\tau \ge 1,\ \ \delta_N \downarrow 0.$

Одним из показателей качества приближения модели (7) к объекту (1) может также служить остаточная (условная) дисперсия

$$D(Y \mid \vec{X} = \vec{x}) = D(Y \mid \vec{x}) = \frac{\int\limits_{\Upsilon} y^2 \cdot f(y, \vec{x})dy}{\int\limits_{\Upsilon} f(y, \vec{x})dy} - r^2(\vec{x}), \tag{12}$$

которая характеризует погрешность, связанную с тем фактом, что при построении регрессионной модели могут учитываться не все факторы объекта.

Её оценка, основанная на ядерном сглаживании, запишется в виде

$$\hat{D}(Y \mid \vec{x}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} Y_i^2 \cdot K^*\left(\frac{\vec{x} - \vec{X}_i}{\vec{h}_N}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{N} K^*\left(\frac{\vec{x} - \vec{X}_i}{\vec{h}_N}\right)} - \left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} Y_i \cdot K^*\left(\frac{\vec{x} - \vec{X}_i}{\vec{h}_N}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{N} K^*\left(\frac{\vec{x} - \vec{X}_i}{\vec{h}_N}\right)}\right]^2. \tag{13}$$

2.2 Некоторые асимптотические свойства непараметрической оценки регрессии

Приведем некоторые важные свойства непараметрической оценки регрессии (9), с которыми более подробно можно ознакомиться, например, в [1,15,18,19,21].

Если выполняются условия (5) и (6)

1) При достаточно большом N, а также $N\left(h_n^{\langle j \rangle}\right)^2 \to \infty,\ j = 1, \ldots, p$:

$$\left|M\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right| = o\left(\frac{1}{Nh_N^{3/2}}\right). \tag{14}$$

2) Если дополнительно с условиями в предыдущем пункте $\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 p(y)dy < \infty$, где $p(y)$ − плотность вероятностей случайной величины Y, то оценка $\hat{r}(\vec{x})$ является состоятельной.

3) Если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y)dy < \infty$, то $\left[\hat{r}(\vec{x}) - r(x)\right]$ распределено асимптотически нормально с нулевым средним и дисперсией, равной

$$\frac{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y \mid \vec{x})dy - r^2(\vec{x})\right]}{Np(\vec{x})} \cdot \int \left[K^*(\vec{u})\right]^2 d\vec{u}. \tag{15}$$

При этом СКО оценки $r_N(\vec{x})$ можно записать в виде

$$M\left\{\left(r_N(x)-r(x)\right)^2\right\}=\frac{C_1(\vec{x})}{N\cdot\prod_{j=1}^{p}h_N^{\langle j\rangle}}+C_2(\vec{x})\cdot\prod_{j=1}^{p}\left(h_N^{\langle j\rangle}\right)^2, \tag{16}$$

где $C_1(\vec{x})=\left(\frac{\int y^2\cdot p(y\,|\,\vec{x})dy-r^2(\vec{x})}{p(\vec{x})}\right)\cdot\int\left(K^*(\vec{u})\right)^2 d\vec{u},\quad C_2(\vec{x})=\frac{d^2r(\vec{x})}{d\vec{x}^2}.$

3 КОМБИНИРОВАННАЯ ОЦЕНКА РЕГРЕССИИ

Часто в ходе исследования зависимости можно сделать некоторые выводы о структуре неизвестной f, исходя из каких-то вне статистических гипотез или опыта исследователя. Имеющиеся предположения, естественно, желательно использовать в процессе восстановления неизвестной зависимости. Подобные задачи привлечения дополнительной информации к ядерным оценкам рассматривались в [7,8,9,10,22].

3.1 Структура комбинированной оценки регрессии

Рассмотрим следующую модель

$$R(\vec{x}) = (1-\lambda)\cdot r(\vec{x}) + \lambda\cdot\varphi(\vec{x},\vec{\theta}), \tag{17}$$

где $R(\vec{x})$ — оценка функции f, $r(\vec{x})$ — регрессия, определенная в (7), $\varphi(\vec{x},\vec{\theta})$ — параметрическая функция с неизвестным вектором параметров $\vec{\theta}$, $\lambda\in[0;1]$ — весовой коэффициент.

Найдем такой параметр λ, который минимизирует СКО

$$M\left(\hat{R}(\vec{x})-r(\vec{x})\right)^2 = M\left[(1-\lambda)\cdot\hat{r}(\vec{x})+\lambda\cdot\varphi(\vec{x},\hat{\theta})-r(\vec{x})\right]^2 \xrightarrow[\lambda]{} \min. \tag{18}$$

$$\frac{\partial M\left(\hat{R}(\vec{x})-r(\vec{x})\right)^2}{\partial\lambda} = M\left\{2\cdot\left[\hat{r}(\vec{x})-r(\vec{x})-\lambda\cdot\left(\hat{r}(\vec{x})-\varphi(\vec{x},\hat{\theta})\right)\right]\cdot\left(\varphi(\vec{x},\hat{\theta})-\hat{r}(\vec{x})\right)\right\};$$

$$\frac{\partial M\left(\hat{R}(\vec{x})-r(\vec{x})\right)^2}{\partial\lambda} = 0:\ \lambda\cdot M\left\{\hat{r}(\vec{x})-\varphi(\vec{x},\hat{\theta})\right\}^2 - M\left\{\left(\hat{r}(\vec{x})-r(\vec{x})\right)\cdot\left(\hat{r}(\vec{x})-\varphi(\vec{x},\hat{\theta})\right)\right\} = 0. \tag{19}$$

Выражая λ из (18), получим $\lambda_{опт}(x)$, которое минимизирует (18)

$$\lambda_{опт}(\vec{x}) = \frac{M\left\{\left(\hat{r}(\vec{x})-r(\vec{x})\right)\cdot\left(\hat{r}(\vec{x})-\varphi(\vec{x},\hat{\theta})\right)\right\}}{M\left\{\hat{r}(\vec{x})-\varphi(\vec{x},\hat{\theta})\right\}^2}. \tag{20}$$

Оценка модели (17) перепишется в виде

$$\hat{R}(\vec{x}) = \left(1-\hat{\lambda}_{опт}(\vec{x})\right)\cdot\hat{r}(\vec{x}) + \hat{\lambda}_{опт}(\vec{x})\cdot\varphi(\vec{x},\hat{\theta}). \tag{21}$$

Подставим (20) в (18)

$$M\left(\hat{R}(\vec{x})-r(\vec{x})\right)^2 = M\left[\hat{r}\left(\vec{x}\right)-r\left(\vec{x}\right)-\frac{M\left\{\left(\hat{r}\left(\vec{x}\right)-r\left(\vec{x}\right)\right)\cdot\left(\hat{r}\left(\vec{x}\right)-\varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right)\right\}}{M\left\{\hat{r}\left(\vec{x}\right)-\varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right\}^2}\cdot\left(\hat{r}\left(\vec{x}\right)-\varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right)\right]^2 =$$

$$= M\left\{\hat{r}\left(\vec{x}\right)-r\left(\vec{x}\right)\right\}^2 - \frac{\left[M\left\{\left(\hat{r}\left(\vec{x}\right)-r\left(\vec{x}\right)\right)\cdot\left(\hat{r}\left(\vec{x}\right)-\varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right)\right\}\right]^2}{M\left\{\hat{r}\left(\vec{x}\right)-\varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right\}^2}. \qquad (22)$$

Первое слагаемое в (22) является СКО для непараметрической оценки (8), а второе – неотрицательно. Таким образом, комбинированная оценка (21) дает теоретически меньшее СКО в сравнении с непараметрической оценкой (8).

При этом, если $r\left(\vec{x}\right)=\varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)$, т.е. параметрическая часть верно описывает объект, (22) перепишется в виде

$$M\left(\hat{R}(\vec{x})-r(\vec{x})\right)^2 = M\left\{\hat{r}\left(\vec{x}\right)-r\left(\vec{x}\right)\right\}^2 - \frac{\left[M\left\{\left(\hat{r}\left(\vec{x}\right)-r\left(\vec{x}\right)\right)\cdot\left(\hat{r}\left(\vec{x}\right)-\varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right)\right\}\right]^2}{M\left\{\hat{r}\left(\vec{x}\right)-\varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right\}^2} =$$

$$= M\left\{\hat{r}\left(\vec{x}\right)-r\left(\vec{x}\right)\right\}^2 - \frac{\left[M\left\{\left(\hat{r}\left(\vec{x}\right)-r\left(\vec{x}\right)\right)\right\}^2\right]^2}{M\left\{\hat{r}\left(\vec{x}\right)-r\left(\vec{x}\right)\right\}^2} = M\left\{\hat{r}\left(\vec{x}\right)-r\left(\vec{x}\right)\right\}^2 - M\left\{\hat{r}\left(\vec{x}\right)-r\left(\vec{x}\right)\right\}^2 = 0.$$

Т.е. если параметрический вид объекта задан правильно, то СКО равняется нулю.

3.2 Оценка весовых коэффициентов на основе метода бутстреп

Основной проблемой нахождения оптимального весового коэффициента является неизвестная функция регрессии $r\left(\vec{x}\right)$ в числителе (20) и неизвестные структуры математических ожиданий в (20) за счёт незнания плотностей вероятностей.

Одним из методов устранения этой неопределенности может стать использование оценок, основанных на методе бутстреп.

Данный метод был предложен Б. Эфроном в 1977 году. Его суть заключается в том, чтобы на основе имеющейся выборки построить эмпирическое распределение, которое в дальнейшем рассматривается как теоретическое. Используя это распределение, можно

сгенерировать достаточно большое количество псевдовыборок, уже на основе которых восстанавливать интересующие характеристики объекта.

Перепишем (20) в виде

$$\lambda_{опт}(\vec{x}) = \frac{M\left\{\left(\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right)\cdot\left(\hat{r}(\vec{x}) - \varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right)\right\}}{M\left\{\hat{r}(\vec{x}) - \varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right\}^2} = \frac{M\psi_1(\vec{x})}{M\psi_2(\vec{x})}, \tag{23}$$

где $M\psi_1(x) = M\left\{\left(\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right)\cdot\left(\hat{r}(\vec{x}) - \varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right)\right\}$, $M\psi_2(x) = M\left\{\hat{r}(\vec{x}) - \varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right\}^2$.

На основе выборки $\left(Y_i, \vec{X}_i\right)_{i=1,\dots,N}$ сформируем B-выборок $\left(Y^*_{i,j}, \vec{X}^*_{i,j}\right)$, $i = 1,\dots,N,\ j = 1,\dots,B$ по бутстрепу. Далее для каждой бутстрэп-выборки строим непараметрическую оценку

$$\hat{r}(x;\vec{X}^*_{i,j}),\ \ j = 1,\dots,B.$$

Тогда оценки числителя и знаменателя для $\lambda_{опт}(\vec{x})$ запишутся в виде

- $M\psi_1(x;\vec{X}_i) \approx \frac{1}{B}\cdot\sum_{j=1}^{B}\psi_1(x;\vec{X}^*_{i,j}) = \frac{1}{B}\cdot\sum_{j=1}^{B}\left\{\left(r(\vec{x};\vec{X}^*_{i,j}) - \hat{r}(\vec{x};\vec{X}_i)\right)\cdot\left(r(\vec{x};\vec{X}^*_{i,j}) - \varphi\left(\vec{x};\hat{\theta}\right)\right)\right\}$,
- $M\psi_2(\vec{x};\vec{X}_i) \approx \frac{1}{B}\cdot\sum_{j=1}^{B}\psi_2(\vec{x};\vec{X}^*_{i,j}) = \frac{1}{B}\cdot\sum_{j=1}^{B}\left\{r(\vec{x};\vec{X}^*_{i,j}) - \varphi\left(x;\hat{\theta}\right)\right\}^2$,

а оценка весового коэффициента (20) запишется в виде

$$\hat{\lambda}_{бс}(\vec{x}) = \frac{\sum_{j=1}^{B}\left\{\left(r(\vec{x};\vec{X}^*_{i,j}) - \hat{r}(\vec{x};\vec{X}_i)\right)\cdot\left(r(\vec{x};\vec{X}^*_{i,j}) - \varphi\left(\vec{x};\hat{\theta}\right)\right)\right\}}{\sum_{j=1}^{B}\left\{r(\vec{x};\vec{X}^*_{i,j}) - \varphi\left(\vec{x};\hat{\theta}\right)\right\}^2}. \tag{24}$$

В итоге, оценка (21) перепишется как

$$\hat{R}(\vec{x}) = \left(1 - \hat{\lambda}_{бс}(\vec{x})\right)\cdot\hat{r}(\vec{x}) + \hat{\lambda}_{бс}(\vec{x})\cdot\varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right). \tag{25}$$

3.3 Асимптотическая оценка весовых коэффициентов

Рассмотрим асимптотическое поведение весового коэффициента $\lambda_{опт}(\vec{x})$. Для этого перепишем (20) в виде

$$\lambda_{опт}(\vec{x}) = \frac{M\left\{\left(\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right)\cdot\left(\hat{r}(\vec{x}) - \varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right)\right\}}{M\left\{\hat{r}(\vec{x}) - \varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right\}^2} = \frac{M\left\{\left(\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right)\cdot\left(\hat{r}(\vec{x}) \pm r(\vec{x}) - \varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right)\right\}}{M\left\{\hat{r}(\vec{x}) \pm r(\vec{x}) - \varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right\}^2} =$$

$$= \frac{M\left\{\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right\}^2 + M\left\{\left(\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right)\left(r(\vec{x}) - \varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right)\right\}}{M\left\{\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right\}^2 + 2M\left\{\left(\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right)\left(r(\vec{x}) - \varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right)\right\} + M\left\{r(\vec{x}) - \varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right\}^2}. \qquad (26)$$

Для упрощения задачи далее положим $\varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right) = \varphi(\vec{x})$, т.е. в качестве параметрической оценки будем брать известную заданную функцию $\varphi(\vec{x})$. Тогда $\left(r(\vec{x}) - \varphi\left(\vec{x},\hat{\theta}\right)\right) = \left(r(\vec{x}) - \varphi(\vec{x})\right)$ выносится из под знака математического ожидания, и принимая во внимание, что с ростом N $M\left(\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right) \to 0$ (по свойству 1 из 2.2.), оценку (26) запишем в виде

$$\lambda_{асимп}(\vec{x}) = \frac{M\left\{\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right\}^2}{M\left\{\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right\}^2 + M\left\{r(\vec{x}) - \varphi(\vec{x})\right\}^2}.$$

Далее, поделив числитель и знаменатель на $M\left\{\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right\}^2$, получим

$$\lambda_{асимп}(\vec{x}) = \frac{1}{1 + \dfrac{\left\{r(\vec{x}) - \varphi(\vec{x})\right\}^2}{M\left\{\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right\}^2}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\Delta^2(\vec{x})}{M\left\{\hat{r}(\vec{x}) - r(\vec{x})\right\}^2}}, \qquad (27)$$

где $\Delta^2(\vec{x}) = \left\{r(\vec{x}) - \varphi(\vec{x})\right\}^2$ – СКО параметрической функции.

Наконец, подставляя формулу (16) для главных частей СКО непараметрической оценки $\hat{r}(\vec{x})$ в (27), получим асимптотическую формулу для весового коэффициента

$$\lambda_{асимп}(\vec{x}) == \frac{1}{1 + \dfrac{\Delta^2(\vec{x})}{\dfrac{C_1(\vec{x})}{N\cdot\prod_{j=1}^{p} h_N^{\langle j\rangle}} + C_2(\vec{x})\cdot\prod_{j=1}^{p}\left(h_N^{\langle j\rangle}\right)^2}}, \qquad (28)$$

где $C_1(\vec{x}) = \left(\dfrac{\int y^2\cdot p(y\,|\,\vec{x})dy - r^2(\vec{x})}{p(\vec{x})}\right)\cdot\int\left(K^*(\vec{u})\right)^2 d\vec{u}, \quad C_2(\vec{x}) = \dfrac{d^2 r(\vec{x})}{d\vec{x}^2}.$

Таким образом, для нахождения оценки $\hat{\lambda}_{асимп}(\vec{x})$ необходимо лишь оценить $C_1(\vec{x})$ и $C_2(\vec{x})$, и, в итоге, $\hat{\lambda}_{асимп}(\vec{x})$ запишется в виде

$$\hat{\lambda}_{асимп}(\vec{x}) == \frac{1}{1+\dfrac{\hat{\Delta}^2(\vec{x})}{\dfrac{\hat{C}_1(\vec{x})}{N\cdot\prod\limits_{j=1}^{p} h_N^{\langle j\rangle}}+\hat{C}_2(\vec{x})\cdot\prod\limits_{j=1}^{p}\left(h_N^{\langle j\rangle}\right)^2}}, \tag{29}$$

где

$$\hat{C}_1(\vec{x}) = \left[\frac{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(Y_i\right)^2\cdot K^*\left(\dfrac{\vec{x}-\vec{X}_i}{\vec{h}_N}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{N}K^*\left(\dfrac{\vec{x}-\vec{X}_i}{\vec{h}_N}\right)}-\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}Y_i\cdot K^*\left(\dfrac{\vec{x}-\vec{X}_i}{\vec{h}_N}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{N}K^*\left(\dfrac{\vec{x}-\vec{X}_i}{\vec{h}_N}\right)}\right)^2}{\dfrac{1}{N\prod\limits_{j=1}^{p}h_N^{\langle j\rangle}}\sum\limits_{i=1}^{N}K^*\left(\dfrac{\vec{x}-\vec{X}_i}{\vec{h}_N}\right)}\right]\cdot\int\left(K^*(u)\right)^2 du,$$

$$\hat{C}_2(\vec{x}) = \frac{d^2}{d\vec{x}^2}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}Y_i\cdot K^*\left(\dfrac{\vec{x}-\vec{X}_i}{\vec{h}_N}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{N}K^*\left(\dfrac{\vec{x}-\vec{X}_i}{\vec{h}_N}\right)}\right).$$

4 МОДЕЛИРОВАНИЕ

Рассмотрим конкретный пример в одномерном случае, когда функция f − известна, а $p=1$

$$Y(x)=10+1{,}8\cdot x^2+\xi,$$

где ξ - независимые нормально распределенные с.в. с $M\xi=0$ и $D\xi=\sigma^2$.

Для простоты параметрическую функцию зададим в явном виде

$$\varphi(\vec{x};\vec{\theta})=\varphi(x)=8+10{,}8\cdot x.$$

Для данной модели непараметрическая оценка регрессии (8) запишется в виде

$$\hat{r}(x)==\frac{\sum_{i=1}^{N}Y_i\cdot K\left(\frac{x-X_i}{h_N}\right)}{\sum_{i=1}^{N}K\left(\frac{x-X_i}{h_N}\right)}, \tag{30}$$

а комбинированная оценка (21)

$$\hat{R}(x)=\left(1-\hat{\lambda}_{опт}(x)\right)\cdot\hat{r}(x)+\hat{\lambda}_{опт}(x)\cdot\varphi(x), \tag{31}$$

где

$$\lambda_{опт}(x)=\frac{M\left\{\left(\hat{r}(x)-r(x)\right)\cdot\left(\hat{r}(x)-\varphi(x)\right)\right\}}{M\left\{\hat{r}(x)-\varphi(x)\right\}^2}. \tag{32}$$

Для различных дисперсий шума и объемов наблюдений исследуем поведение данной модели. Качество идентификации модели будем исследовать с помощью средних относительных ошибок

$$\delta_Y=\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{Y_i-\hat{r}(X_i)}{Y_i}\right|\cdot 100\%,\quad \eta_Y=\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{Y_i-\hat{R}_{\hat{\lambda}}(X_i)}{Y_i}\right|\cdot 100\%,$$

$$\delta_r=\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{r(X_i)-\hat{r}(X_i)}{Y_i}\right|\cdot 100\%,\quad \eta_r=\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{r(X_i)-\hat{R}_{\hat{\lambda}}(X_i)}{Y_i}\right|\cdot 100\%.$$

Примеры построения программ можно увидеть в Приложении Б.

4.1 Идентификация с использованием метода бутстреп

Для данной постановки задачи оценка весового коэффициента (32), найденная по бутстрепу по формуле (24), принимает вид

$$\hat{\lambda}_{бс}(x) = \frac{\sum_{j=1}^{B}\left\{\left(r(x;\vec{X}_j^*) - \hat{r}(x;\vec{X}_j)\right)\cdot\left(r(x;\vec{X}_j^*) - \varphi(x)\right)\right\}}{\sum_{j=1}^{B}\left\{r(x;\vec{X}_j^*) - \varphi(x)\right\}^2}. \qquad (33)$$

I. Проведем анализ модели с N=10, $D\xi_t = 1$.

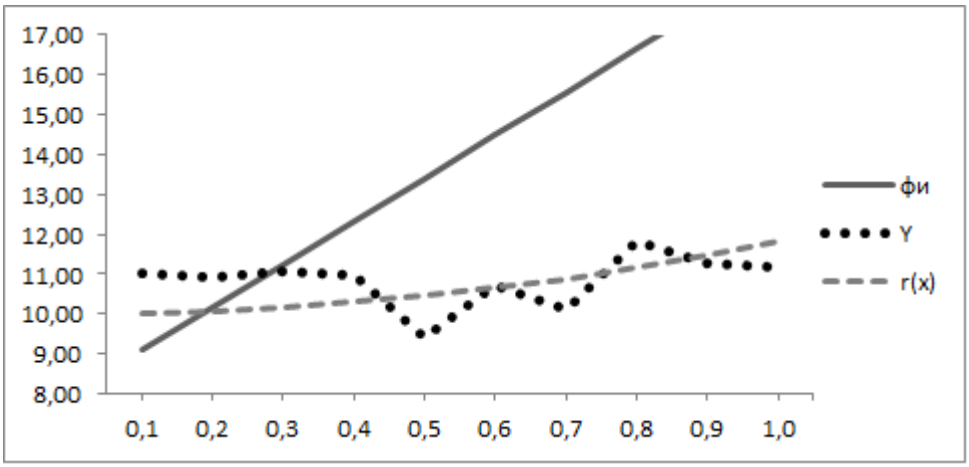

Рисунок 2 − Графики процесса Y, его регрессии $r(x)$ и заданной параметрической функции

Для оценки (30) найдем параметр размытости, который минимизирует СКО (см. Рисунок 3).

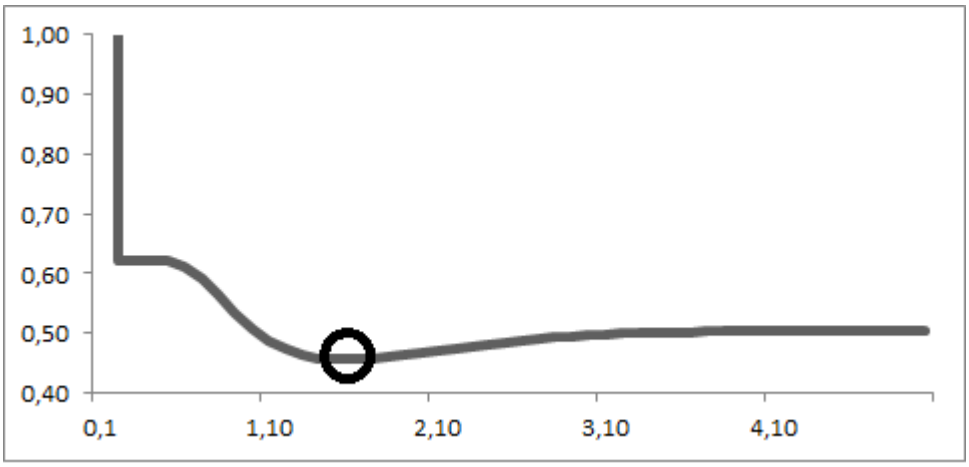

Рисунок 3 − Зависимость СКО от параметра размытости

Таким образом, оптимальный параметр размытости, который минимизирует СКО, будет равен $h_{оптим} = 1,6$.

Построим оценку (30) для модели примера, используя оптимальный параметр размытости. Для этой оценки результаты представлены на Рисунке 4.

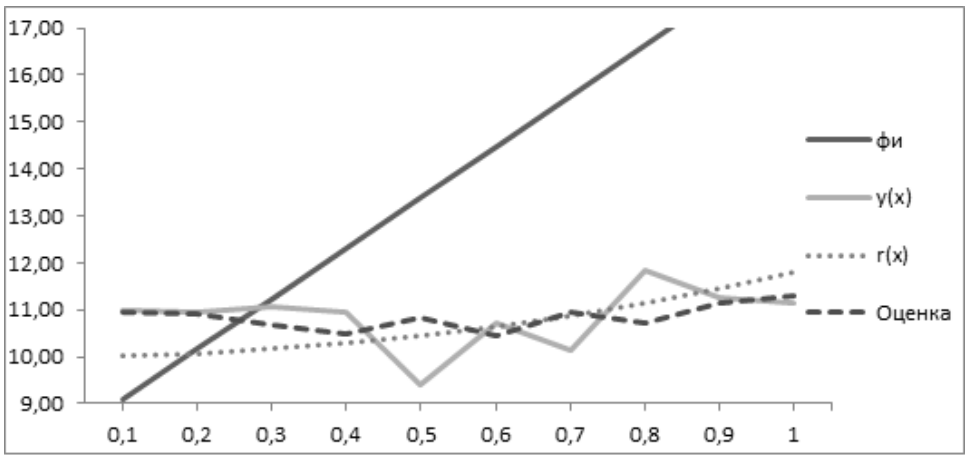

Рисунок 4 − Непараметрическая идентификация

Далее построим оценки весовых коэффициентов (33) (их поведение отражено на Рисунке 5).

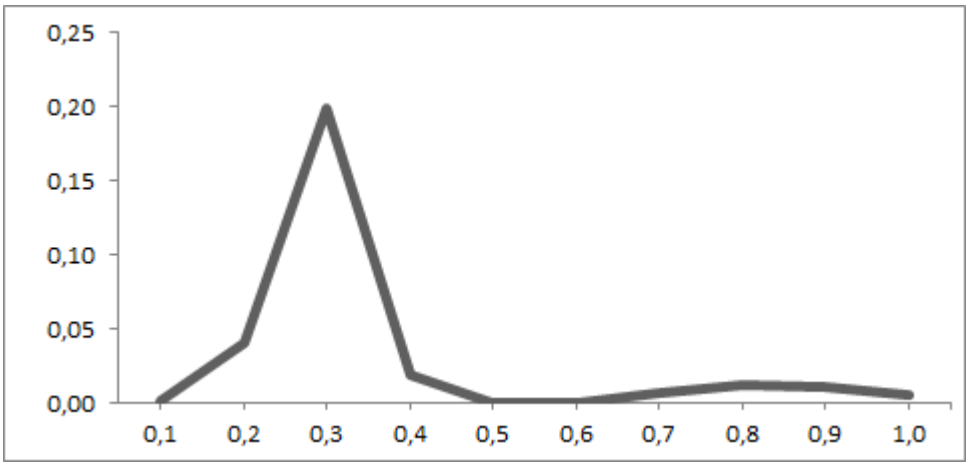

Рисунок 5 − График весовых коэффициентов

Можем заметить, что весовой коэффициент «реагирует» на тот момент, когда $\varphi(X)$ приближается к $Y(X)$ лучше, чем оценка $\hat{r}(X)$. Таким образом, больший вес отдается заданной функции нежели непараметрической оценке.

Для данного весового коэффициента построим комбинированную оценку (31). Результаты представлены на Рисунке 6.

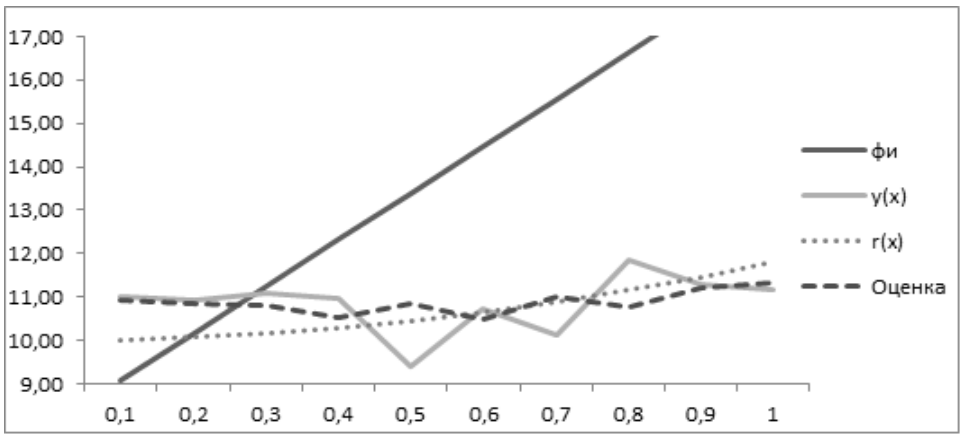

Рисунок 6 − Комбинированная идентификация

II. Далее рассмотрим случай, когда $N = 50$.

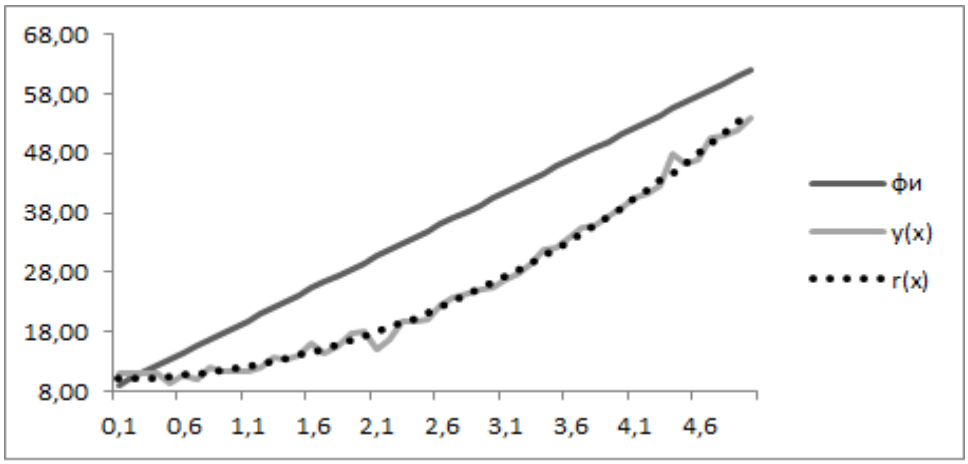

Рисунок 7 − Графики процесса Y, его регрессии $r(x)$ и заданной параметрической функции

Аналогично, для оценки (30) найдем параметр размытости, который минимизирует СКО (см. Рисунок 8).

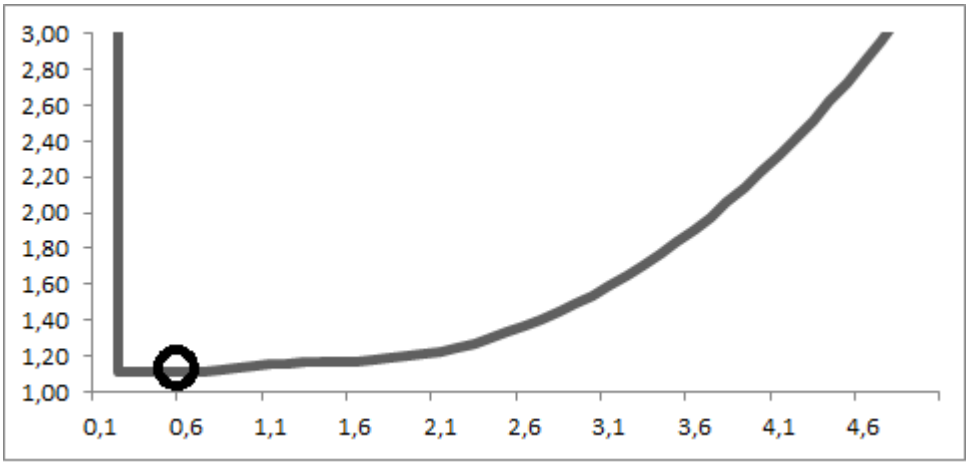

Рисунок 8 − Зависимость СКО от параметра размытости

Таким образом, оптимальный параметр размытости, который минимизирует СКО, будет равен $h_{оптим} = 0,6$.

Построим оценку (30) для модели примера, используя оптимальный параметр размытости. Для этой оценки результаты представлены на Рисунке 9 (Для наглядности представлены только первые 10 наблюдений в силу большого масштаба по оси ординат).

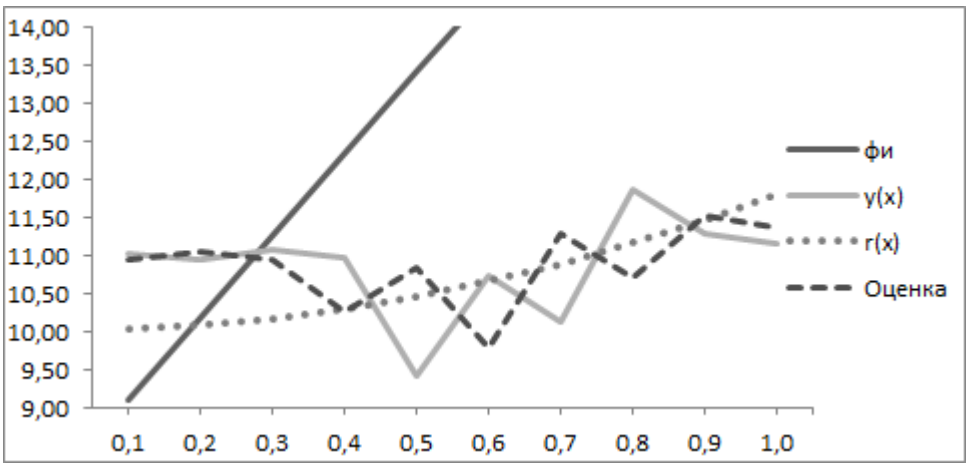

Рисунок 9 – Непараметрическая идентификация

Далее построим оценки весовых коэффициентов (33) (их поведение отражено на Рисунке 10).

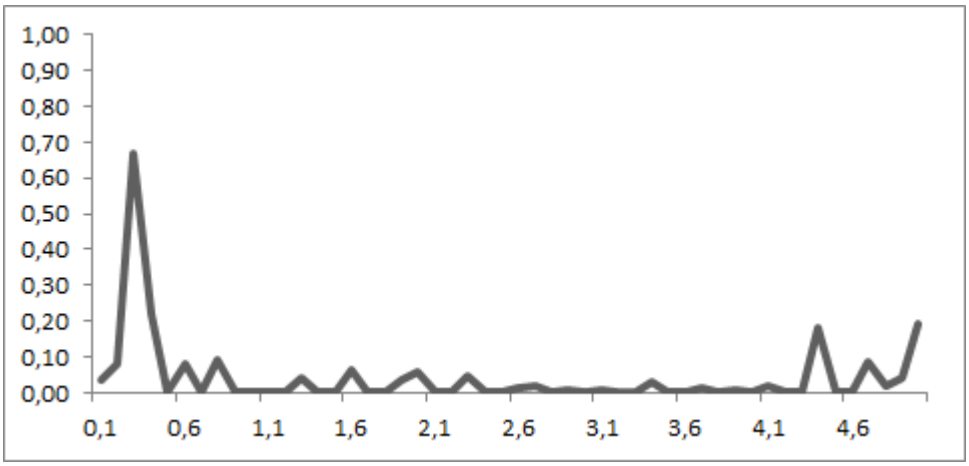

Рисунок 10 – График весовых коэффициентов

Можем заметить, что весовой коэффициент «реагирует» на тот момент, когда $\varphi(X)$ приближается к $Y(X)$ лучше, чем оценка $\hat{r}(X)$. Таким образом, больший вес отдается заданной функции нежели непараметрической оценке. Также наблюдается всплеск на конце интервала. Это связано с резким скачком $Y(X)$ в районе точки 4,3 и приближением на конце модели к функции $\varphi(X)$.

Для данного весового коэффициента построим комбинированную оценку (31). Результаты представлены на Рисунке 11.

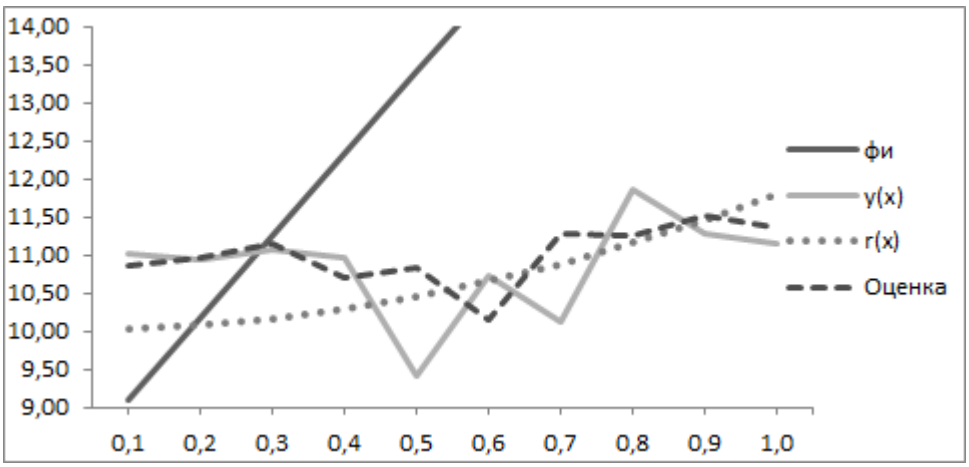

Рисунок 11 − Комбинированная идентификация

III. Наконец рассмотрим случай, когда $N = 100$.

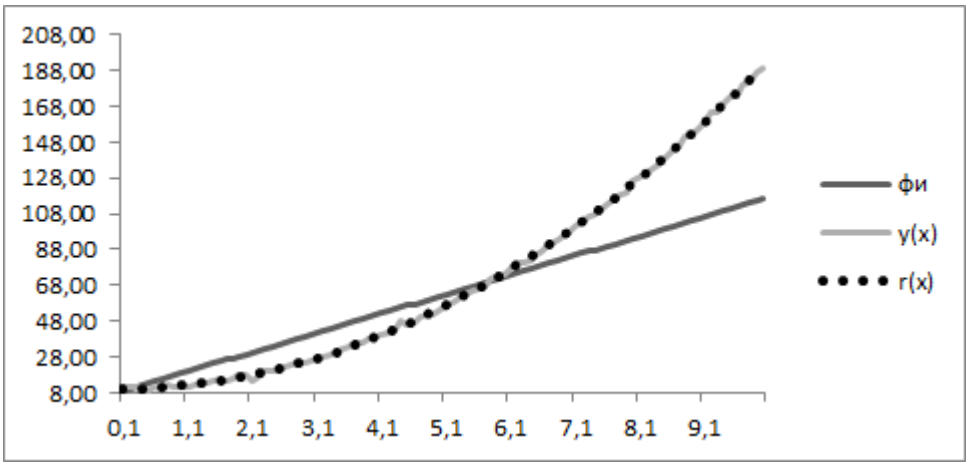

Рисунок 12 − Графики процесса Y, его регрессии $r(x)$ и заданной параметрической функции

Аналогично, для оценки (30) найдем параметр размытости, который минимизирует СКО (см. Рисунок 13).

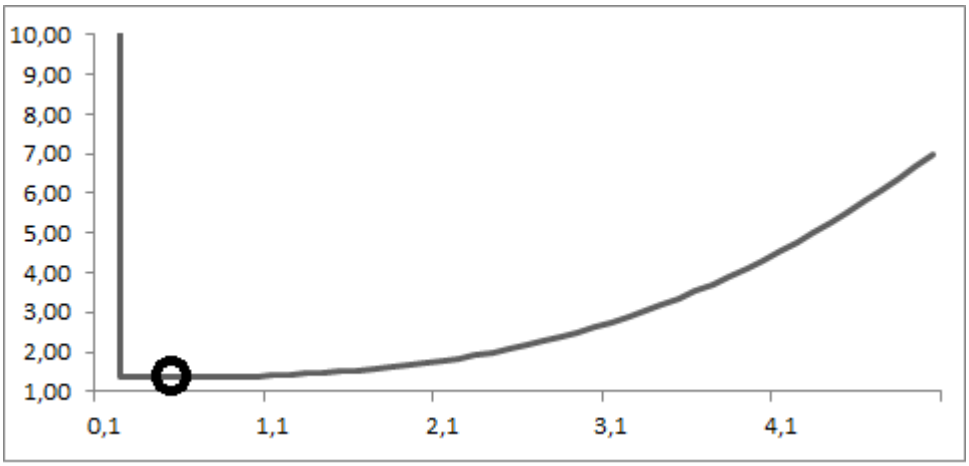

Рисунок 13 − Зависимость СКО от параметра размытости

Таким образом, оптимальный параметр размытости, который минимизирует СКО, будет равен $h_{оптим} = 0,5$.

Построим оценку (30) для модели примера, используя оптимальный параметр размытости. Для этой оценки результаты представлены на Рисунке 14 (Для наглядности представлены только первые 10 наблюдений в силу большого масштаба по оси ординат).

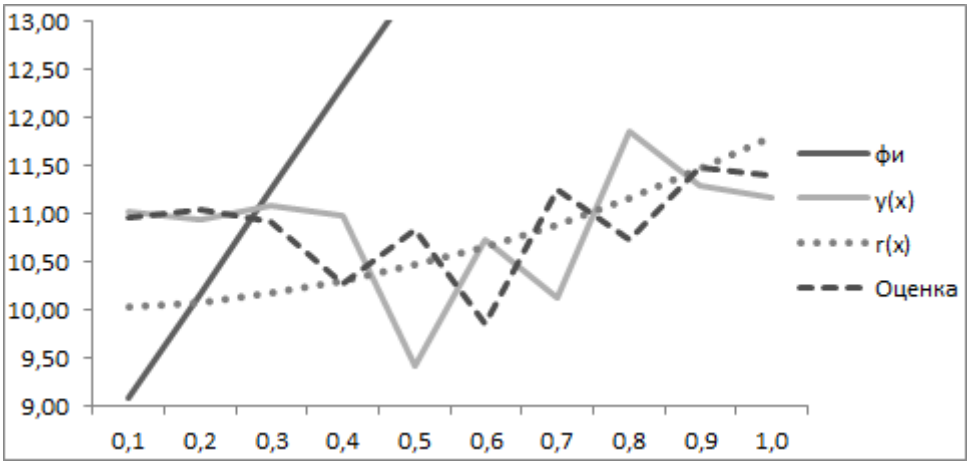

Рисунок 14 − Непараметрическая идентификация

Далее построим оценки весовых коэффициентов (33) (их поведение отражено на Рисунке 15).

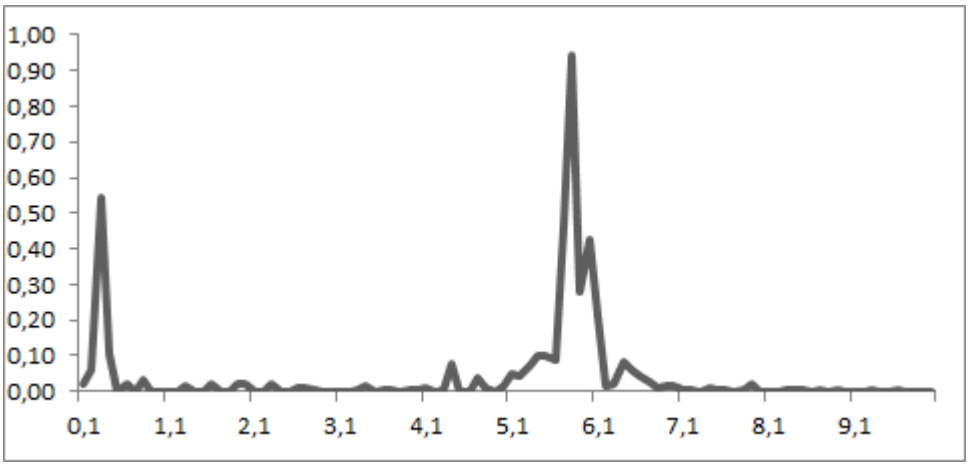

Рисунок 15 − График весовых коэффициентов

Можем заметить, что наблюдается всплеск в тех окрестностях, где функция $\varphi(X)$ и $Y(X)$ проходят достаточно близко друг к другу, а пик этих всплесков приходится на точки пересечения.

Для данного весового коэффициента построим комбинированную оценку (31). Результаты представлены на Рисунке 16.

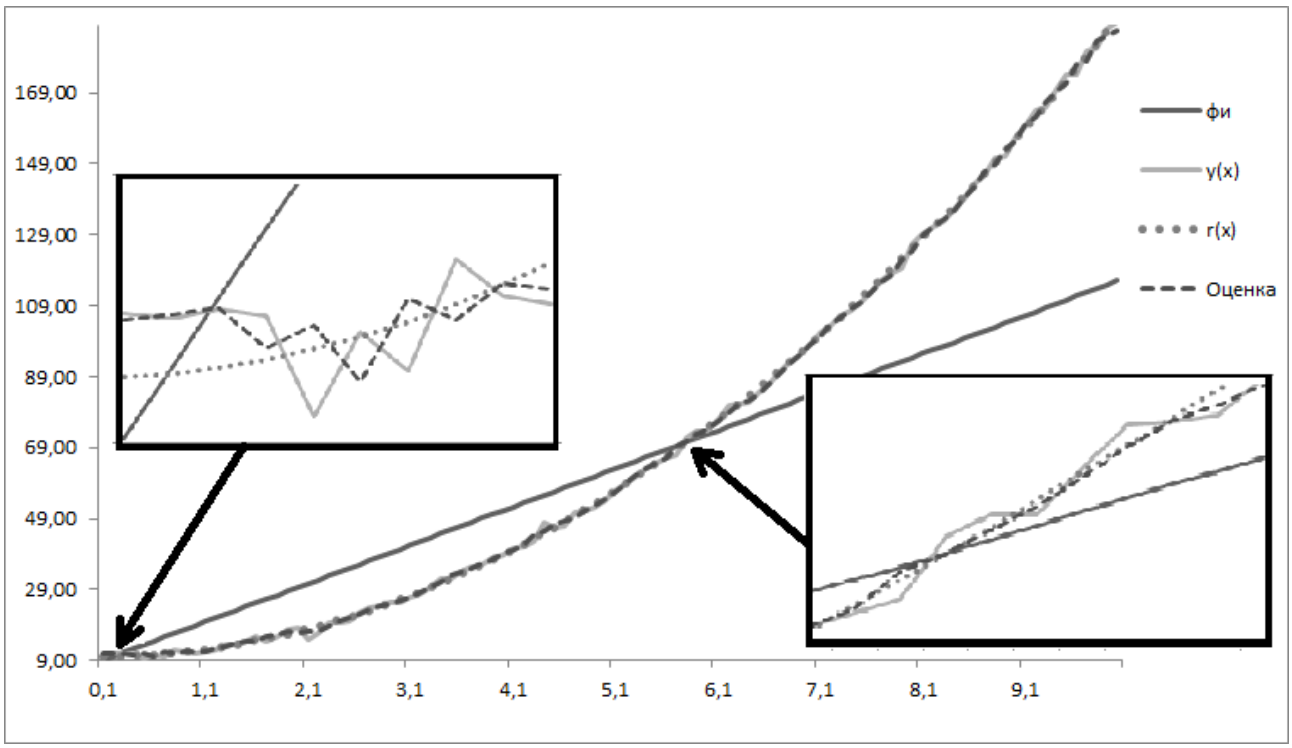

Рисунок 16 − Комбинированная идентификация

Аналогичные исследования проводятся для различных дисперсий и объемов наблюдений.

Построив оценки для различных случаев, вычисляем средние относительные ошибки идентификации δ_Y, η_Y, δ_r, η_r (см. Таблицу 1).

Таблица 1 − Сравнение средних относительных ошибок идентификации

			Объем наблюдений											
			10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Дисперсия	1	δ_Y	4,70	5,16	5,05	4,20	3,87	3,32	3,01	2,74	2,50	2,33	2,17	2,01
		η_Y	4,62	5,07	5,05	4,20	3,86	3,31	2,98	2,72	2,47	2,29	2,15	2,00
		δ_r	4,19	3,37	3,71	3,04	2,71	2,28	2,08	1,90	1,71	1,54	1,22	1,12
		η_r	4,02	3,21	3,66	3,00	2,68	2,26	2,06	1,88	1,69	1,52	1,22	1,12
	2	δ_Y	15,26	14,16	12,22	10,07	8,77	7,95	7,10	6,31	5,90	5,37	4,95	4,58
		η_Y	15,07	14,04	12,10	10,01	8,73	7,86	7,07	6,29	5,89	5,35	4,93	4,56
		δ_r	7,28	6,64	5,92	3,87	3,45	3,20	2,86	2,53	2,44	2,20	2,10	1,97
		η_r	6,96	6,41	5,79	3,81	3,40	3,14	2,85	2,52	2,43	2,15	2,06	1,93
	3	δ_Y	23,88	21,63	19,78	18,83	15,43	13,37	11,96	10,77	9,86	8,96	8,28	7,76
		η_Y	23,02	21,50	19,67	18,68	15,40	13,28	11,92	10,72	9,83	8,92	8,24	7,76
		δ_r	19,85	10,26	8,80	4,27	6,67	5,90	5,36	3,87	2,91	3,46	2,94	3,72
		η_r	18,39	9,16	8,20	3,73	6,37	5,61	5,22	3,69	2,70	3,33	2,81	3,64
	4	δ_Y	23,88	21,63	19,78	18,83	15,43	13,37	11,96	10,77	9,86	8,96	8,28	7,76
		η_Y	23,02	21,50	19,67	18,68	15,40	13,28	11,92	10,72	9,83	8,92	8,24	7,76
		δ_r	19,85	10,26	8,80	4,27	6,67	5,90	5,36	3,87	2,91	3,46	2,94	3,72
		η_r	18,39	9,16	8,20	3,73	6,37	5,61	5,22	3,69	2,70	3,33	2,81	3,64
	5	δ_Y	33,80	29,84	26,05	21,10	18,18	15,84	14,00	12,99	11,90	10,83	2,00	9,35
		η_Y	32,30	28,57	25,55	20,62	17,86	15,58	13,86	12,80	11,75	10,70	9,90	9,25
		δ_r	9,15	14,20	6,95	7,35	6,05	6,45	5,63	4,61	4,25	4,41	3,84	4,09
		η_r	7,37	12,44	6,32	6,79	5,76	6,06	5,36	4,39	4,08	4,22	3,67	3,95

Таким образом, можно заметить, что с ростом объема наблюдений улучшение комбинированной оценки в сравнении с непараметрической оценкой уменьшается, а с ростом дисперсии шума – увеличивается. Другими словами, комбинированная оценка дает тем большее улучшение в сравнении с непараметрической, чем меньше объем наблюдений и больше дисперсия. Первый результат объясняется тем, что при малом количестве наблюдений дополнительная информация об объекте становится ценнее, а второй вывод исходит из того, что при большом зашумлении модели непараметрическая оценка хуже оценивает поведение модели, и привлечение новой информации способствует более точной идентификации. Более наглядно эти результаты можно увидеть на Рисунках 17-21.

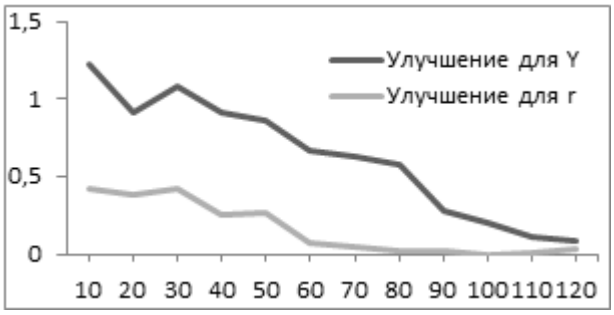

Рисунок 17 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений для дисперсии, равной 1

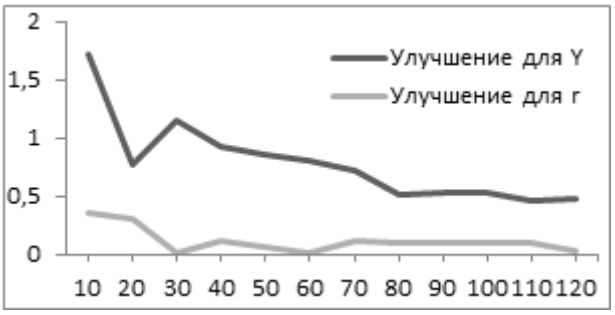

Рисунок 18 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений для дисперсии, равной 2

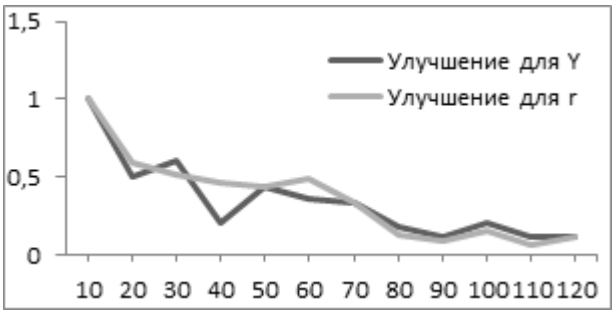

Рисунок 19 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений для дисперсии, равной 3

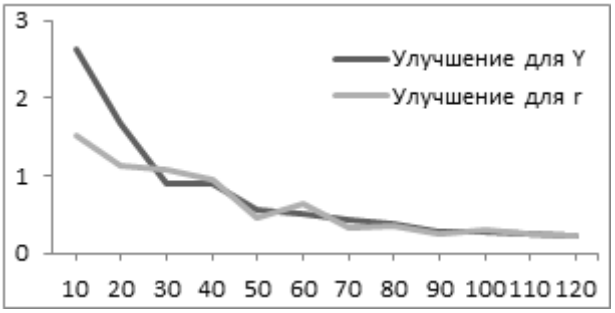

Рисунок 20 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений для дисперсии, равной 4

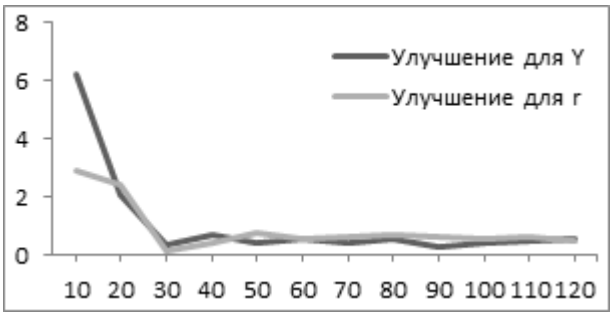

Рисунок 21 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений для дисперсии, равной 5

4.2 Идентификация с использованием асимптотической оценки

Для данной постановки задачи асимптотическая оценка (29) для весового коэффициента (32), запишется в виде

$$\hat{\lambda}_{асимп}(x) == \frac{1}{1+\dfrac{\hat{\Delta}^2(x)}{\dfrac{\hat{C}_1(x)}{N\cdot h_N}+\hat{C}_2(x)\cdot h_N}}, \tag{34}$$

где $\hat{\Delta}^2(x)=\left\{\hat{r}(x)-\varphi(x)\right\}^2$,

$$\hat{C}_1(x)=\left[\frac{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}(Y_i)^2\cdot K\left(\dfrac{x-X_i}{h_N}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{N}K\left(\dfrac{x-X_i}{h_N}\right)}-\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}Y_i\cdot K\left(\dfrac{x-X_i}{h_N}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{N}K\left(\dfrac{x-X_i}{h_N}\right)}\right)^2}{\dfrac{1}{Nh_N}\sum\limits_{i=1}^{N}K\left(\dfrac{x-X_i}{h_N}\right)}\right]\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(K(u)\right)^2du,$$

$$\hat{C}_2(x)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}Y_i\cdot K\left(\dfrac{x-X_i}{h_N}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{N}K\left(\dfrac{x-X_i}{h_N}\right)}\right).$$

I. Проведем анализ модели с N=10, $D\xi_t=1$.

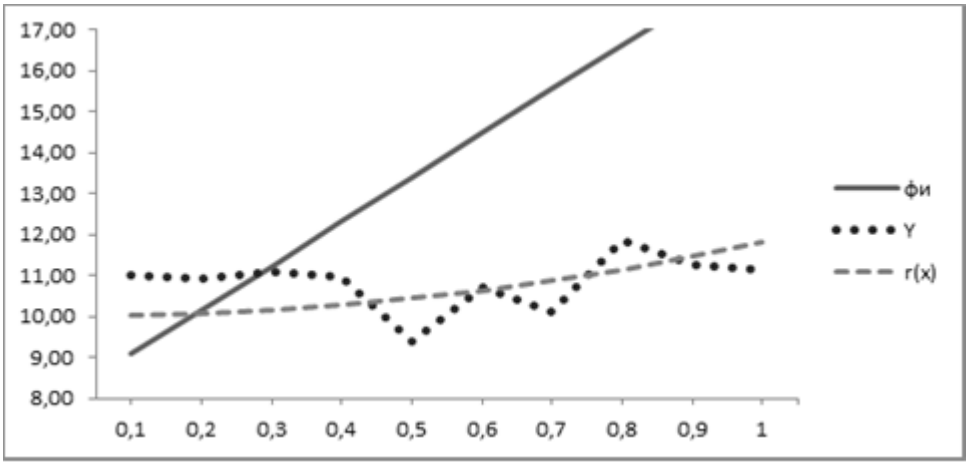

Рисунок 22 − Графики процесса Y, его регрессии $r(x)$ и заданной параметрической функции

Построим оценки весовых коэффициентов (34) (их поведение отражено на Рисунке 23).

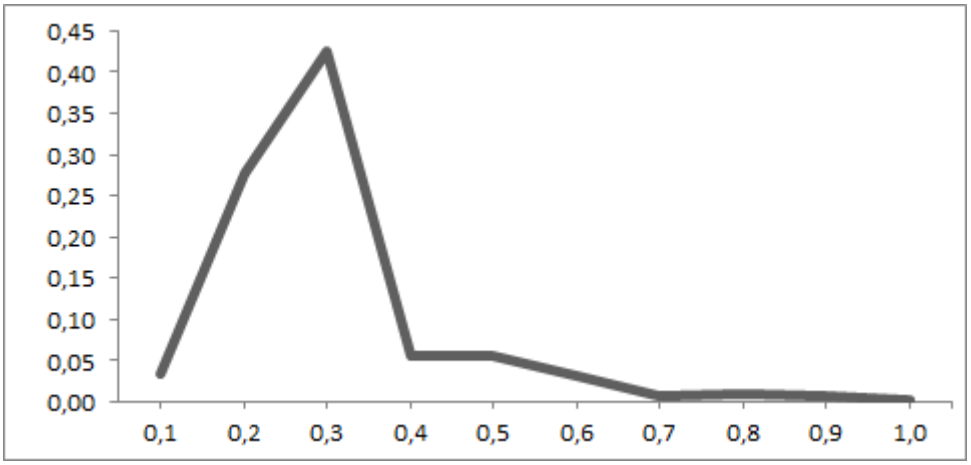

Рисунок 23 − График весовых коэффициентов

Можем заметить, что весовой коэффициент «реагирует» на тот момент, когда $\varphi(X)$ приближается к $Y(X)$ лучше, чем оценка $\hat{r}(X)$. Таким образом, больший вес отдается заданной функции нежели непараметрической оценке.

Для данного весового коэффициента построим комбинированную оценку (31). Результаты представлены на Рисунке 24.

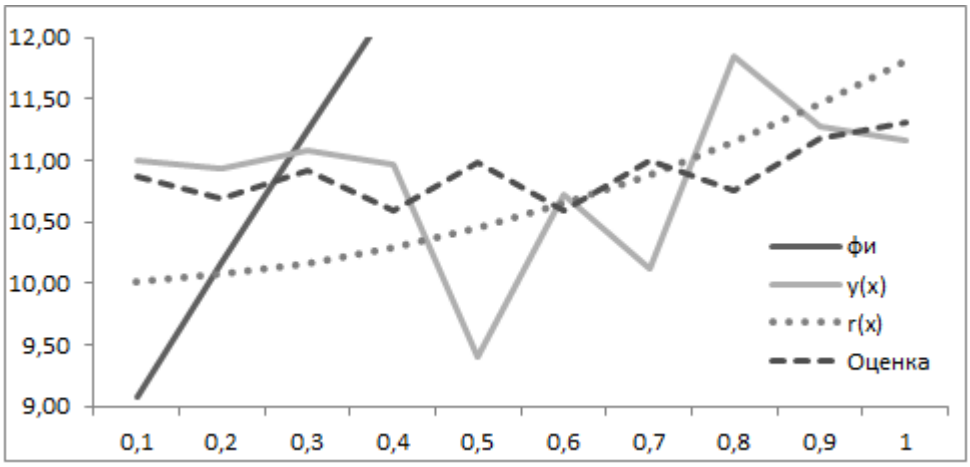

Рисунок 24 – Комбинированная идентификация

II. Далее рассмотрим случай, когда $N = 50$.

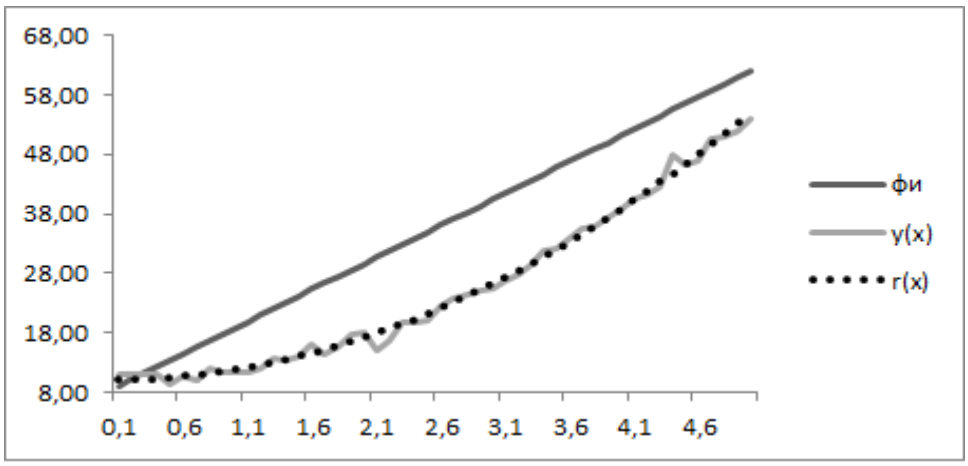

Рисунок 25 − Графики процесса Y, его регрессии $r(x)$ и заданной параметрической функции

Построим оценки весовых коэффициентов (33) (их поведение отражено на Рисунке 26).

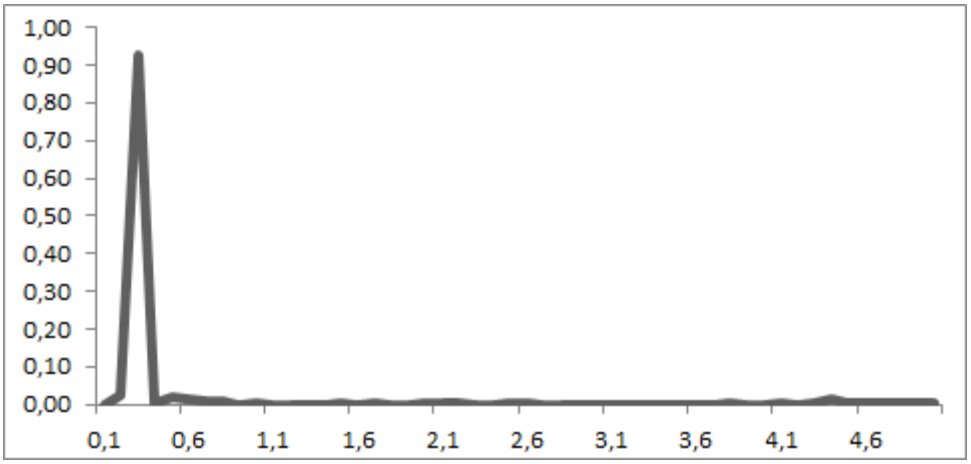

Рисунок 26 − График весовых коэффициентов

Можем заметить, что весовой коэффициент «реагирует» на тот момент, когда $\varphi(X)$ приближается к $Y(X)$ лучше, чем оценка $\hat{r}(X)$. Таким образом, больший вес отдается заданной функции нежели непараметрической оценке. Также наблюдается всплеск на конце интервала. Это связано с резким скачком $Y(X)$ в районе точки 4,3 и приближением на конце модели к функции $\varphi(X)$.

Для данного весового коэффициента построим комбинированную оценку (31). Результаты представлены на Рисунке 27.

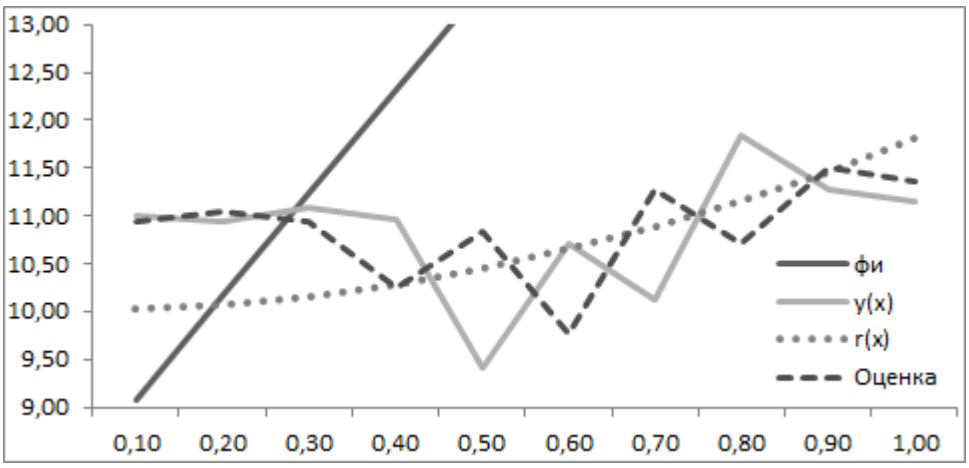

Рисунок 27 − Комбинированная идентификация

III. Наконец рассмотрим случай, когда $N = 100$.

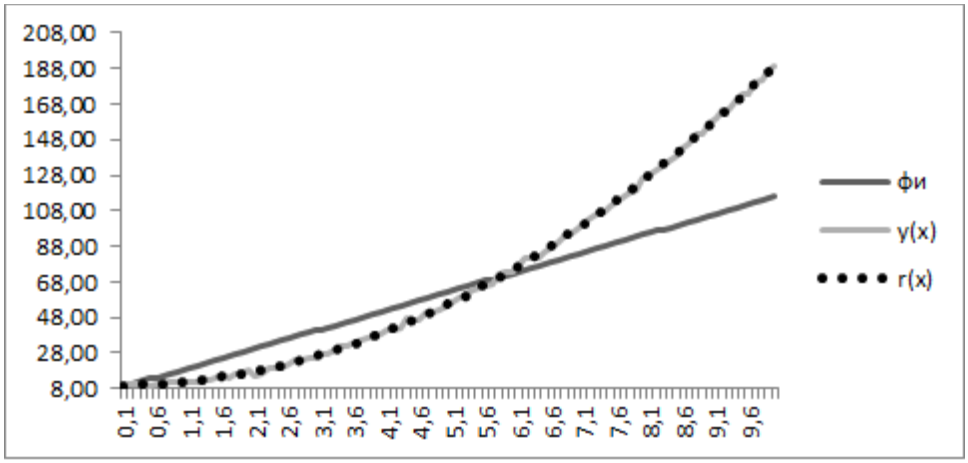

Рисунок 28 − Графики процесса Y, его регрессии $r(x)$ и заданной параметрической функции

Аналогично построим оценки весовых коэффициентов (33) (их поведение отражено на Рисунке 29).

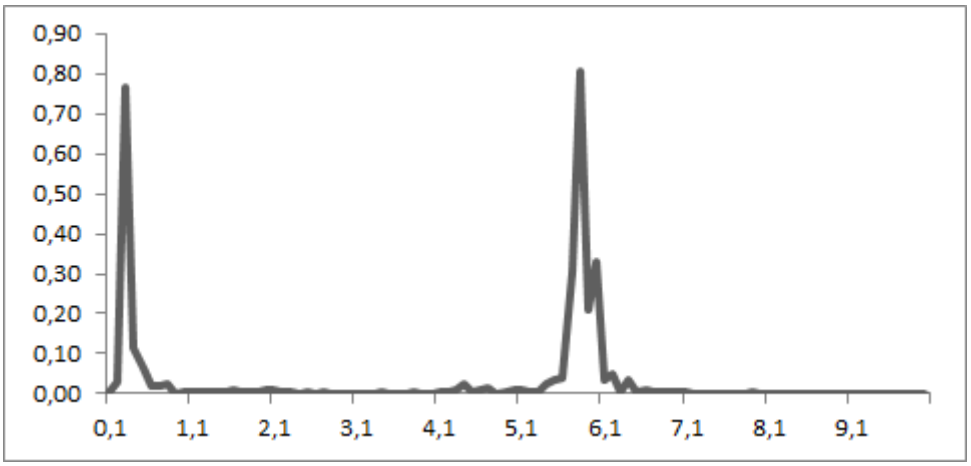

Рисунок 29− График весовых коэффициентов

Можем заметить, что наблюдается всплеск в тех окрестностях, где функция $\varphi(X)$ и $Y(X)$ проходят достаточно близко друг к другу, а пик этих всплесков приходится на точки пересечения.

Для данного весового коэффициента построим комбинированную оценку (31). Результаты представлены на Рисунке 30.

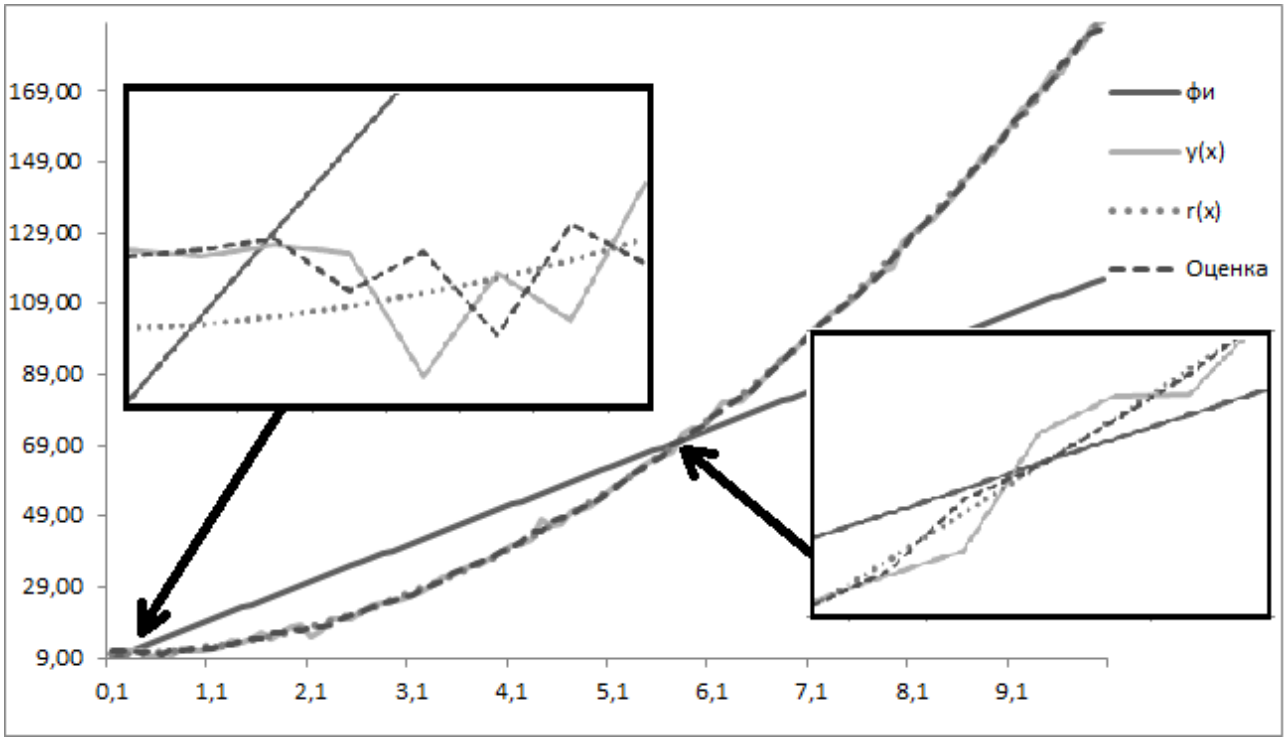

Рисунок 30 − Комбинированная идентификация

Аналогичные исследования проводятся для различных дисперсий и объемов наблюдений.

Построив оценки для различных случаев, вычисляем средние относительные ошибки идентификации δ_Y, η_Y, δ_r, η_r (см. Таблицу 2):

Таблица 2 − Сравнение средних относительных ошибок идентификации

			Объем наблюдений											
			10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Дисперсия	1	δ_Y	5,70	5,56	5,05	4,20	3,87	3,32	3,01	2,74	2,50	2,33	2,16	1,80
		η_Y	4,48	4,64	3,96	3,29	3,00	2,65	2,38	2,17	2,21	2,12	2,05	1,71
		δ_r	4,59	3,67	3,66	3,00	2,68	2,26	2,06	1,88	1,69	1,52	1,33	1,35
		η_r	4,17	3,29	3,24	2,74	2,41	2,18	2,01	1,86	1,67	1,52	1,32	1,31
	2	δ_Y	27,46	23,24	18,15	14,99	12,44	11,03	9,89	8,63	7,97	7,41	6,75	6,41
		η_Y	25,74	22,47	17,00	14,05	11,58	10,22	9,17	8,11	7,44	6,87	6,29	5,92
		δ_r	11,76	11,80	6,36	5,70	4,72	3,96	3,65	3,23	3,01	2,85	2,60	2,51
		η_r	11,41	11,49	6,34	5,58	4,66	3,93	3,52	3,13	2,91	2,76	2,50	2,48
	3	δ_Y	23,88	21,63	19,78	18,68	15,43	13,37	11,96	10,77	9,86	8,96	8,28	7,71
		η_Y	22,87	21,12	19,17	18,47	15,00	13,00	11,62	10,59	9,74	8,76	8,16	7,59
		δ_r	16,86	9,06	8,11	4,24	6,19	5,49	4,99	3,66	2,80	3,26	2,43	2,51
		η_r	15,85	8,47	7,59	3,78	5,75	5,00	4,65	3,53	2,72	3,11	2,37	2,39
	4	δ_Y	34,95	30,25	26,46	21,54	18,44	16,09	14,29	13,18	12,04	10,99	10,14	9,48
		η_Y	32,31	28,57	25,56	20,62	17,87	15,58	13,86	12,80	11,75	10,70	9,90	9,25
		δ_r	7,99	11,34	6,21	6,43	5,62	5,95	5,19	4,31	3,99	4,08	3,58	3,74
		η_r	5,28	9,01	5,13	5,49	5,15	5,31	4,85	3,94	3,73	3,78	3,32	3,51
	5	δ_Y	56,14	47,69	43,62	36,62	30,99	26,39	23,21	21,07	19,01	17,44	16,15	15,02
		η_Y	53,95	47,22	43,06	36,19	30,58	26,21	22,78	20,49	18,73	17,02	15,67	14,49
		δ_r	30,48	18,77	19,56	14,05	12,49	9,70	7,44	6,51	6,08	5,38	4,98	4,69
		η_r	24,98	16,82	17,55	12,95	11,70	9,39	6,82	5,82	5,48	4,84	4,40	4,20

Таким образом, как и в случае оценки по бутстрепу можно заметить, что с ростом объема наблюдений улучшение комбинированной оценки в сравнении с непараметрической оценкой уменьшается, а с ростом дисперсии шума – увеличивается. Т.е., комбинированная оценка дает тем большее улучшение в сравнении с непараметрической, чем меньше объем наблюдений и больше дисперсия. Более наглядно эти результаты можно увидеть на Рисунках 31-35.

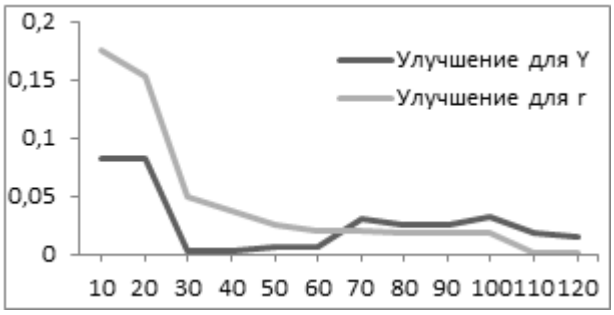

Рисунок 31 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений для дисперсии, равной 1

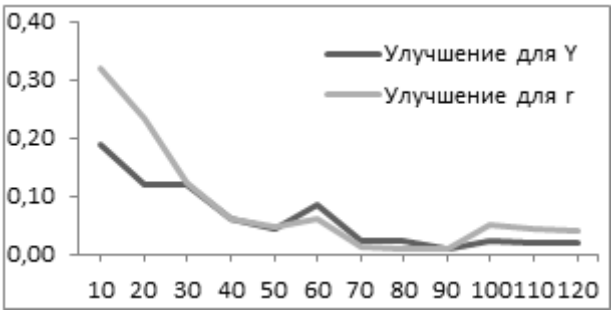

Рисунок 32 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений для дисперсии, равной 2

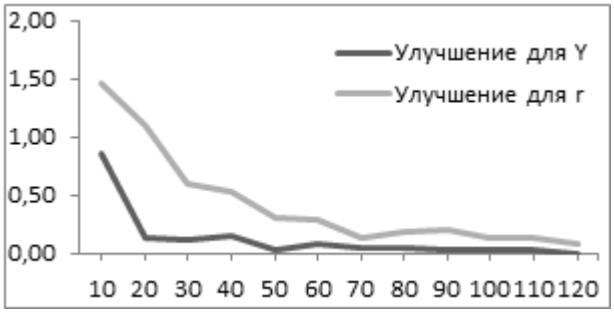

Рисунок 33 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений для дисперсии, равной 3

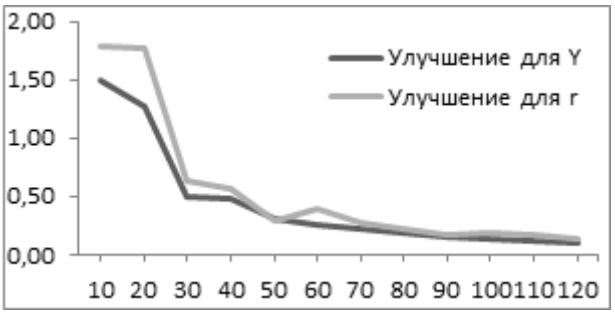

Рисунок 34 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений для дисперсии, равной 4

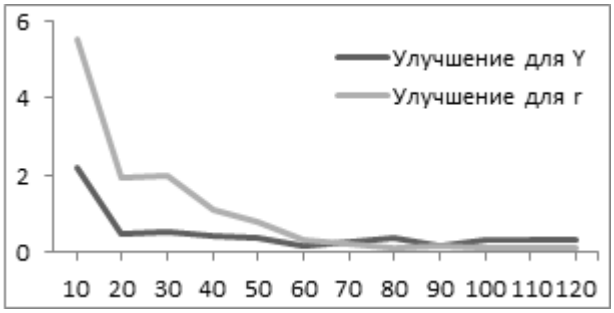

Рисунок 35 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений для дисперсии, равной 5

5 ИДЕНТИФИКАЦИЯ AR-ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим модель авторегрессии k-ого порядка, вида

$$Y_t = f(Y_{t-1},...,Y_{t-k}) + \xi_t. \tag{35}$$

Здесь выход Y_t будет зависеть от k своих предыдущих значений, а f и ξ_t будут удовлетворять условиям, введенным в разделе 1. Обозначим $Y_{t,k} = \left(Y_{t-1},...,Y_{t-k}\right)$ тогда функция регрессии для (35) запишется в виде

$$r(\vec{y}) = M\left(Y_t \mid Y_{t,k} = \vec{y}\right) = M\left(Y_t \mid \vec{y}\right) = \int_{\Upsilon} Y_t \cdot f(Y_t \mid \vec{y}) dY_t = \frac{a(\vec{y})}{p(\vec{y})},$$

где $y \in R^k$, $a(\vec{y}) = \int z \cdot p(z,\vec{y}) dz$ — базовый функционал, $p(\vec{y})$ — плотность распределения случайного вектора $Y_{t,k}$, $p(z,\vec{y})$ — плотность распределения вектора $\left(Y_t, Y_{t,k}\right)$ [13].

Тогда непараметрическая оценка данной регрессии

$$\hat{r}(\vec{y}) = \frac{\sum_{i=k+1}^{N} Y_i \cdot K^*\left(\frac{\vec{y} - Y_{i,k}}{\vec{h}_N}\right)}{\sum_{i=k+1}^{N} K^*\left(\frac{\vec{y} - Y_{i,k}}{\vec{h}_N}\right)}, \tag{36}$$

где $K^*\left(\frac{\vec{y} - Y_{i,k}}{\vec{h}_N}\right) = K\left(\frac{y_1 - Y_{i,1}}{h_N^{\langle 1\rangle}}\right) \times ... \times K\left(\frac{y_k - Y_{i,k}}{h_N^{\langle k\rangle}}\right)$ – k-мерная плотность, $\vec{h}_N = \left(h_N^{\langle 1\rangle},...,h_N^{\langle k\rangle}\right)$.

Весовой коэффициент, минимизирующий СКО модели, по аналогии с (20) будет удовлетворять свойству (22) и запишется в виде

$$\lambda_{опт}(\vec{y}) = \frac{M\left\{\left(\hat{r}\left(\vec{y}\right) - r\left(\vec{y}\right)\right) \cdot \left(\hat{r}\left(\vec{y}\right) - \varphi\left(\vec{y}, \hat{\theta}\right)\right)\right\}}{M\left\{\hat{r}\left(\vec{y}\right) - \varphi\left(\vec{y}, \hat{\theta}\right)\right\}^2}, \tag{37}$$

а его оценки, построенные по методу бутстреп и асимптотической оценке, определяются формулами (38) и (39) соответственно

$$\hat{\lambda}_{бс}(\vec{y}) = \frac{\sum_{j=1}^{B}\left\{\left(r(\vec{y}; \vec{Y}_{i,j}^*(k)) - \hat{r}(\vec{y}; Y_{i,k})\right) \cdot \left(r(\vec{y}; \vec{Y}_{i,j}^*(k)) - \varphi\left(\vec{y}; \hat{\theta}\right)\right)\right\}}{\sum_{j=1}^{B}\left\{r(\vec{y}; \vec{Y}_{i,j}^*(k)) - \varphi\left(\vec{y}; \hat{\theta}\right)\right\}^2}, \tag{38}$$

$$\hat{\lambda}_{асимп}(\vec{y}) == \frac{1}{1 + \frac{\hat{\Delta}^2(\vec{y})}{\frac{\hat{C}_1(\vec{y})}{N \cdot \prod_{j=1}^{k} h_N^{\langle j\rangle}} + \hat{C}_2(\vec{y}) \cdot \prod_{j=1}^{k}\left(h_N^{\langle j\rangle}\right)^2}}, \tag{39}$$

где $\hat{C}_1(\vec{y})$ и $\hat{C}_2(\vec{y})$ выводятся по аналогии с оценками в 3.3.

6 ИДЕНТИФИКАЦИЯ ARX-ПРОЦЕССОВ

Часто, поведение объекта зависит не только от его предыдущих состояний, но и от некоторых внешних экзогенных факторов. Таким образом, во многих случаях, особенно, когда объект имеет сложную структуру необходимо исследовать влияние этих внешних воздействий. Такая постановка задачи рассматривалась во многих работах, в том числе и в [5,6,14,17,20].

Наконец, рассмотрим ARX-модель вида

$$Y_t = f(Y_{t-1},...,Y_{t-k}, X_{t-1},..., X_{t-q}) + \xi_t, \tag{40}$$

где Y_t − выход модели в момент времени t, X_t − значение экзогенного фактора в момент времени t, а f и ξ_t опять же удовлетворяют условиям, введенным в разделе 1.

Обозначив $Y_{t,k} = \left(Y_{t-1},...,Y_{t-k}\right)$, $X_{t,q} = \left(X_{t-1},..., X_{t-q}\right)$ запишем функцию регрессии для (40) в виде

$$r(\vec{y},\vec{x}) = M\left(Y_t \mid Y_{t,k} = \vec{y}, X_{t,q} = \vec{x}\right) = M\left(Y_t \mid \vec{y},\vec{x}\right) = \int_{\Upsilon} Y_t \cdot f(Y_t \mid \vec{y},\vec{x}) dY_t = \frac{a(\vec{y},\vec{x})}{p(\vec{y},\vec{x})},$$

где $(y,x) \in R^{k+q}$, $a(\vec{y},\vec{x}) = \int z \cdot p(z,\vec{y},\vec{x}) dz$ — базовый функционал, $p(\vec{y},\vec{x})$ — плотность распределения случайного вектора $\left(Y_{t,k}, X_{t,q}\right)$, $p(z,\vec{y},\vec{x})$ — плотность распределения вектора $\left(Y_t, Y_{t,k}, X_{t,q}\right)$ [14].

Введем следующие обозначения:

$$h_N^{\langle y\rangle} = \left(h_{N,1}^{\langle y\rangle},...,h_{N,k}^{\langle y\rangle}\right), \quad h_N^{\langle x\rangle} = \left(h_{N,1}^{\langle x\rangle},...,h_{N,q}^{\langle x\rangle}\right),$$

$$K_k\left(\frac{y - Y_{i,k}}{h_N^{\langle y\rangle}}\right) = K\left(\frac{y_1 - Y_{i,1}}{h_{N,1}^{\langle y\rangle}}\right) \times ... \times K\left(\frac{y_k - Y_{i,k}}{h_{N,k}^{\langle y\rangle}}\right),$$

$$K_q\left(\frac{x - X_{i,k}}{h_N^{\langle x\rangle}}\right) = K\left(\frac{x_1 - X_{i,1}}{h_{N,1}^{\langle x\rangle}}\right) \times ... \times K\left(\frac{x_q - X_{i,q}}{h_{N,q}^{\langle x\rangle}}\right),$$

тогда по [17] непараметрическая оценка данной регрессии запишется в виде

$$\hat{r}(\vec{y},\vec{x}) = \frac{\sum_{i=s+1}^{N} Y_i \cdot \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} h_{N,j}^{\langle y\rangle}} K_k\left(\frac{\vec{y} - Y_{i,k}}{h_N^{\langle y\rangle}}\right) \frac{1}{\prod_{j=1}^{q} h_{N,j}^{\langle x\rangle}} K_q\left(\frac{\vec{x} - X_{i,q}}{h_N^{\langle x\rangle}}\right)}{\sum_{i=s+1}^{N} \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} h_{N,j}^{\langle y\rangle}} K_k\left(\frac{\vec{y} - Y_{i,k}}{h_N^{\langle y\rangle}}\right) \frac{1}{\prod_{j=1}^{q} h_{N,j}^{\langle x\rangle}} K_q\left(\frac{\vec{x} - X_{i,q}}{h_N^{\langle x\rangle}}\right)}, \tag{41}$$

где $s = \max(k,q)$.

Весовой коэффициент, минимизирующий СКО модели, по аналогии с (20) также удовлетворяет (22) и запишется в виде

$$\lambda_{опт}(\vec{y},\vec{x}) = \frac{M\left\{\left(\hat{r}\left(\vec{y},\vec{x}\right) - r\left(\vec{y},\vec{x}\right)\right)\cdot\left(\hat{r}\left(\vec{y},\vec{x}\right) - \varphi\left(\vec{y},\vec{x},\hat{\theta}\right)\right)\right\}}{M\left\{\hat{r}\left(\vec{y},\vec{x}\right) - \varphi\left(\vec{y},\vec{x},\hat{\theta}\right)\right\}^2}, \tag{42}$$

а его оценки, построенные по методу бутстреп и асимптотической оценке, в виде

$$\hat{\lambda}_{бс}(\vec{y},\vec{x}) = \frac{\sum_{j=1}^{B}\left\{\left(r(\vec{y},\vec{x};\vec{Y}^*_{i,j}(k),\vec{X}^*_{i,j}(q)) - \hat{r}(\vec{y},\vec{x};Y_{i,k},X_{i,q})\right)\cdot\left(r(\vec{y},\vec{x};\vec{Y}^*_{i,j}(k),\vec{X}^*_{i,j}(q)) - \varphi\left(\vec{y},\vec{x};\hat{\theta}\right)\right)\right\}}{\sum_{j=1}^{B}\left\{r(\vec{y},\vec{x};\vec{Y}^*_{i,j}(k),\vec{X}^*_{i,j}(q)) - \varphi\left(\vec{y},\vec{x};\hat{\theta}\right)\right\}^2}, \tag{43}$$

$$\hat{\lambda}_{асимп}(\vec{y}) == \frac{1}{1+\dfrac{\hat{\Delta}^2(\vec{y})}{\dfrac{\hat{C}_1(\vec{y})}{N\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(h^{\langle y\rangle}_{N,j}\right)\cdot\prod_{j=1}^{q}\left(h^{\langle x\rangle}_{N,j}\right)} + \hat{C}_2(\vec{y})\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(h^{\langle y\rangle}_{N,j}\right)^2\cdot\prod_{j=1}^{q}\left(h^{\langle x\rangle}_{N,j}\right)^2}}, \tag{44}$$

где $\vec{Y}^*_{i,j}(k)$ и $\vec{X}^*_{i,j}(q)$ − бутстреп-выборки из $Y_{t,k}$ и $X_{t,q}$, $\hat{C}_1(\vec{y})$ и $\hat{C}_2(\vec{y})$ выводятся по аналогии с оценками в 3.3 с использованием непараметрической оценки (41).

7 АНАЛИЗ РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Применим рассмотренные алгоритмы в разделах 6 и 7 на практике. Для этого исследуем поведение цен акций ПАО «Газпром» за период 04.01.2016−04.05.2016 г. в зависимости от предыдущего значения цены, а также курса доллара и цены на нефть как экзогенных факторов. Исходные данные представлены в Приложении А. В качестве априорной информации будем брать предыдущую цену акции. Примеры построения программ можно увидеть в Приложении В.

7.1 AR-модель идентификации и прогнозирования реальных данных

Рассмотрим авторегрессионную модель порядка 1 для цен акций в нашем примере

$$Y_t = f(Y_{t-1}) + \xi_t. \tag{45}$$

Тогда непараметрическая оценка (36) перепишется как

$$\hat{r}(Y_{i-1}) = \frac{\sum_{j=2}^{N} Y_j \cdot K\left(\frac{Y_{i-1} - Y_{j-1}}{h_N}\right)}{\sum_{j=2}^{N} K\left(\frac{Y_{i-1} - Y_{j-1}}{h_N}\right)}, \tag{46}$$

а комбинированная оценка в виде

$$\hat{R}\left(Y_{i-1}\right) = \left(1 - \hat{\lambda}_{опт}(Y_{i-1})\right) \cdot \hat{r}\left(Y_{i-1}\right) + \hat{\lambda}_{опт}(Y_{i-1}) \cdot Y_{i-1}. \tag{47}$$

Качество рассматриваемых оценок будем измерять средними ошибками идентификации δ и прогнозирования η, для которых индексы r и R обозначают ту оценку, для которой рассчитывается ошибка

$$\delta_r = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{Y_i - \hat{r}(Y_{i-1})}{Y_i} \right| \cdot 100\%, \quad \eta_r = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=N+1}^{N+10} \left| \frac{Y_i - \hat{r}(Y_{i-1})}{Y_i} \right| \cdot 100\%,$$

$$\delta_R = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{Y_i - \hat{R}(Y_{i-1})}{Y_i} \right| \cdot 100\%, \quad \eta_R = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=N+1}^{N+10} \left| \frac{Y_i - \hat{R}(Y_{i-1})}{Y_i} \right| \cdot 100\%,$$

Рассмотрим случай, когда N=10. Для оценки (46) найдем параметр размытости, который минимизирует СКО (см. Рисунок 36).

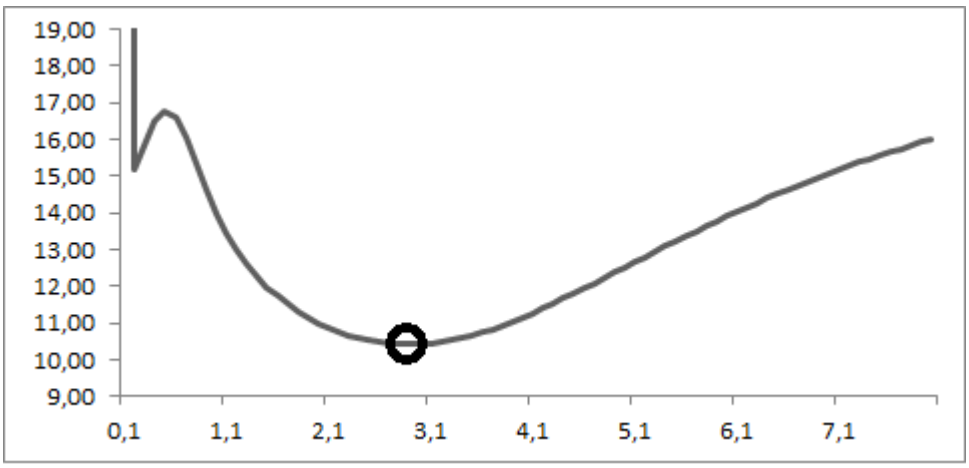

Рисунок 36 − Зависимость СКО от параметра размытости

Оптимальный параметр размытости, который минимизирует СКО, в данном случае, будет равен $h_{оптим} = 2,9$.

Результаты построения оценок идентификации и прогнозирования приведены на Рисунке 37.

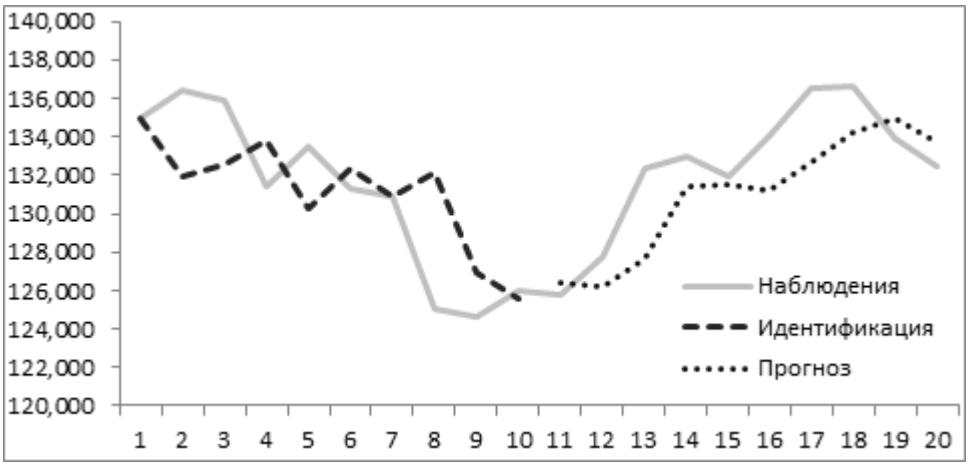

Рисунок 37 − Непараметрическая идентификация и прогнозирование

Далее рассмотрим оценку весового коэффициента (38), которая для нашего случая перепишется в виде

$$\hat{\lambda}_{бс}(Y_{i-1}) = \frac{\sum_{j=1}^{B}\left\{\left(r(Y_{i-1};Y_{i,j}^{*}) - \hat{r}(Y_{i-1};Y_{i,k})\right)\cdot\left(r(Y_{i-1};Y_{i,j}^{*}) - Y_{i-1}\right)\right\}}{\sum_{j=1}^{B}\left\{r(Y_{i-1};Y_{i,j}^{*}) - Y_{i-1}\right\}^{2}}. \quad (48)$$

График оценки изображен на Рисунке 38, а результаты построения оценки (47) приведены на Рисунке 39.

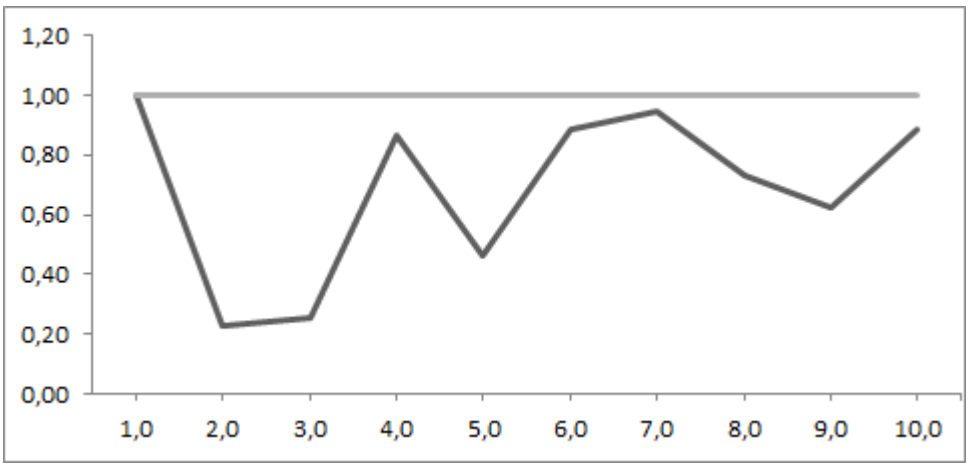

Рисунок 38 − График весовых коэффициентов

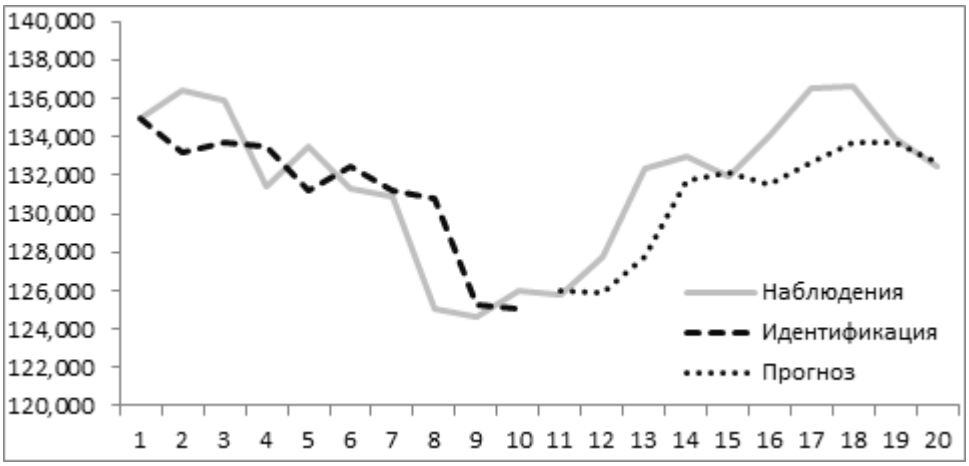

Рисунок 39 − Комбинированная идентификация и прогнозирование

Наконец построим асимптотическую оценку весового коэффициента (39), который перепишется как

$$\hat{\lambda}_{асимп}(Y_{i-1}, X_{i-1}) == \frac{1}{1+\dfrac{\hat{\Delta}^2(Y_{i-1}, X_{i-1})}{\dfrac{\hat{C}_1(Y_{i-1}, X_{i-1})}{N \cdot h_N} + \hat{C}_2(Y_{i-1}, X_{i-1}) \cdot h_N^2}}. \qquad (49)$$

График весовых коэффициентов приведен на Рисунке 40, а оценки цен акций на Рисунке 41.

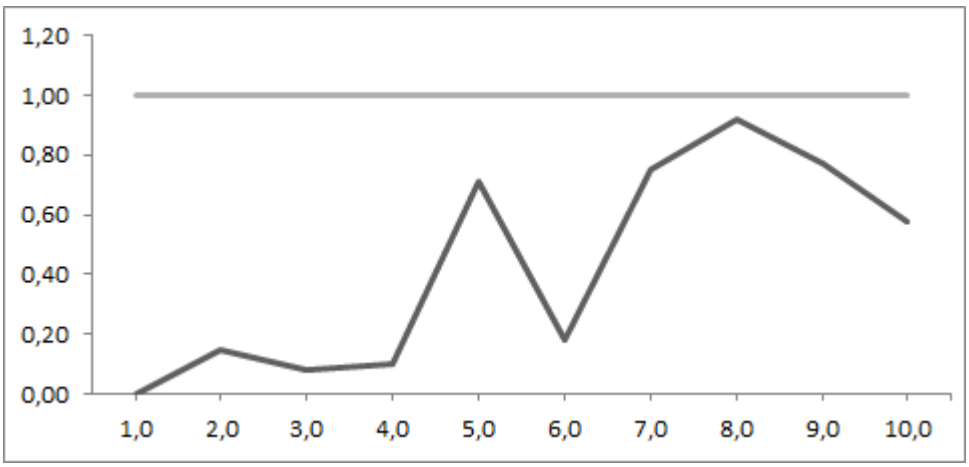

Рисунок 40 − График весовых коэффициентов

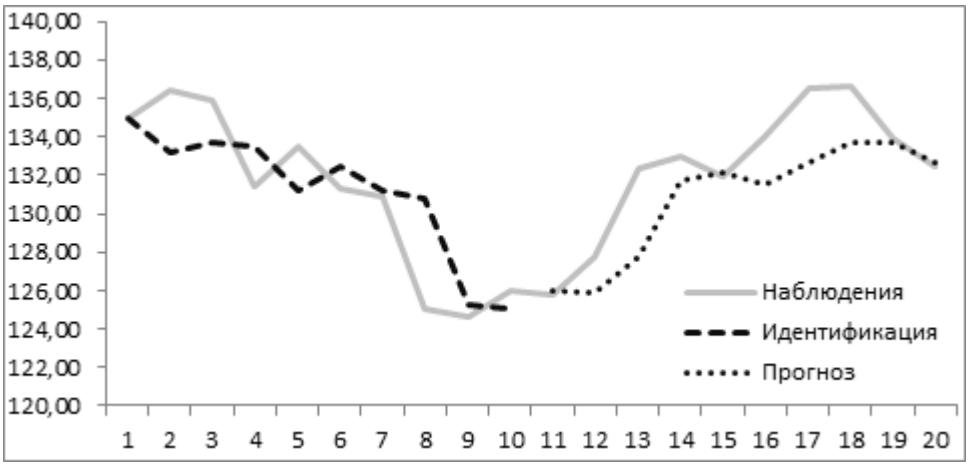

Рисунок 41 − Комбинированная идентификация и прогнозирование

Аналогичные исследования проводятся для больших значений N. Результаты идентификации и прогнозирования приведены в Таблице 3 и Таблице 4 соответственно.

Таблица 3 − Сравнение средних относительных ошибок идентификации

Оценка	Объем наблюдений									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Непараметрическая оценка	1,87	1,62	1,38	1,40	1,40	1,35	1,30	1,34	1,35	1,34
БС-оценка	1,67	1,54	1,32	1,30	1,29	1,28	1,25	1,30	1,32	1,32
Асимптотическая оценка	1,44	1,40	1,22	1,22	1,22	1,20	1,17	1,20	1,22	1,21

Таблица 4 − Сравнение средних относительных ошибок прогнозирования

Оценка	Объем наблюдений									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Непараметрическая оценка	2,50	2,80	2,97	2,40	1,17	1,02	2,23	1,63	1,30	1,29
БС-оценка	1,37	1,04	1,53	1,53	1,01	0,99	1,58	1,62	1,30	1,24
Асимптотическая оценка	1,32	1,02	1,58	1,56	1,05	1,02	1,54	1,63	1,27	1,21

Таким образом, можно сделать вывод, что с ростом объема наблюдений выигрыш комбинированных моделей уменьшается, что и ожидалось исходя из предыдущих исследований. При этом асимптотическая оценка дает большее улучшение в сравнении с БС-оценкой, что можно обосновать результатом, полученным ранее, что в модели присутствует большая зашумленность. Это достаточно обосновано, так как мы рассматриваем сложный по структуре объект, и не все факторы могут быть учтены, что как раз повышает шум модели. Более наглядно выигрыш комбинированных оценок представлен на Рисунке 42 и Рисунке 43 для идентификации и прогнозирования соответственно.

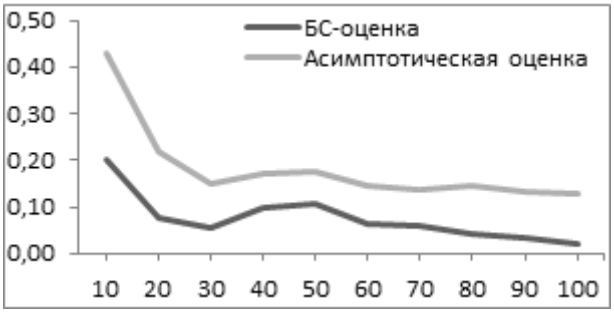

Рисунок 42 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений для задачи идентификации

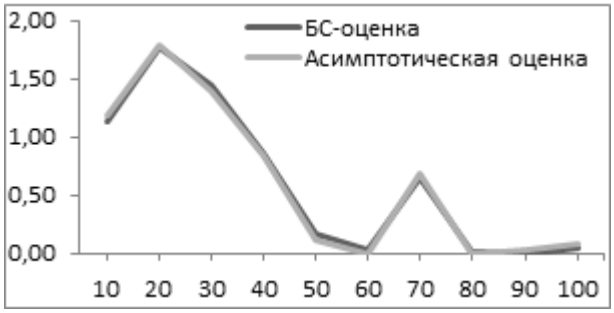

Рисунок 43 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений задачи прогнозирования

7.2 ARX-модель идентификации и прогнозирования реальных данных

Наконец, рассмотрим модель ARX(1,1) для цен акций

$$Y_t = f(Y_{t-1}, X_{t-1}) + \xi_t. \tag{50}$$

Тогда непараметрическая оценка (41) перепишется как

$$\hat{r}(Y_{j-1}, X_{j-1}) = \frac{\sum_{i=2}^{N} Y_i \cdot \frac{1}{h_N^{\langle y \rangle}} K\left(\frac{Y_{j-1} - Y_{i-1}}{h_N^{\langle y \rangle}}\right) \frac{1}{h_N^{\langle x \rangle}} K\left(\frac{X_{j-1} - X_{i-1}}{h_N^{\langle x \rangle}}\right)}{\sum_{i=2}^{N} \frac{1}{h_N^{\langle y \rangle}} K\left(\frac{Y_{j-1} - Y_{i-1}}{h_N^{\langle y \rangle}}\right) \frac{1}{h_N^{\langle x \rangle}} K\left(\frac{X_{j-1} - X_{i-1}}{h_N^{\langle x \rangle}}\right)}, \tag{51}$$

а комбинированная оценка в виде

$$\hat{R}\left(Y_{i-1}, X_{i-1}\right) = \left(1 - \hat{\lambda}_{onm}(Y_{i-1}, X_{i-1})\right) \cdot \hat{r}\left(Y_{i-1}, X_{i-1}\right) + \hat{\lambda}_{onm}(Y_{i-1}, X_{i-1}) \cdot Y_{i-1}. \tag{52}$$

I. Рассмотрим случай, когда в качестве экзогенного фактора выступает курс доллара за соответствующий период.

Для оценки (51) найдем параметр размытости, который минимизирует СКО (см. Рисунок 44).

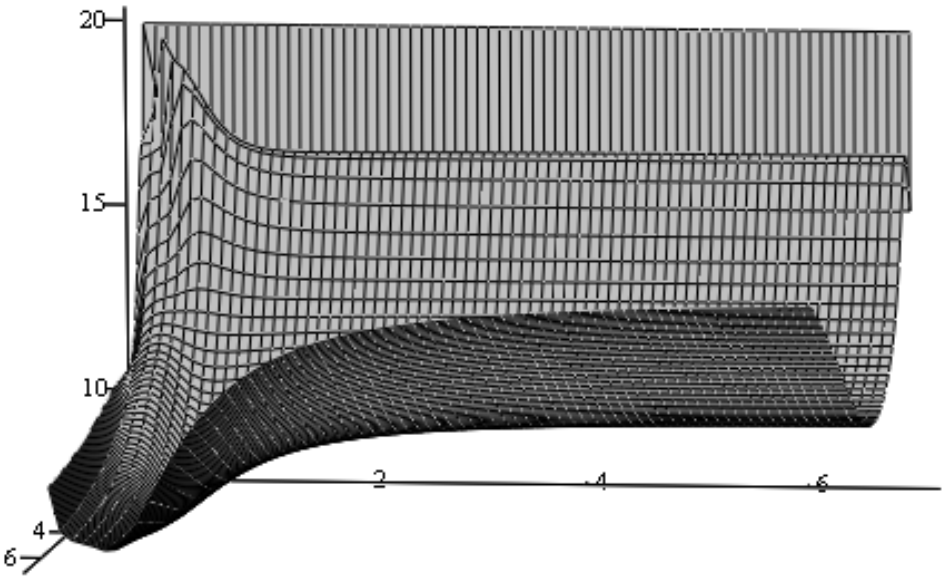

Рисунок 44 − Зависимость СКО от параметров размытости

Оптимальный параметр размытости, который минимизирует СКО, в данном случае, будет равен $h_{оптим}^{\langle y \rangle} = 5;\ \ h_{оптим}^{\langle x \rangle} = 0,3.$

Результаты построения оценок идентификации и прогнозирования приведены на Рисунке 45.

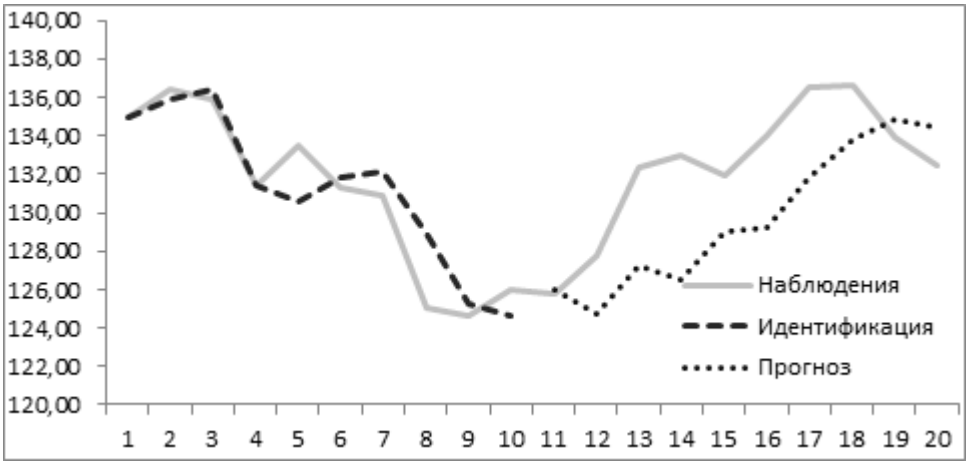

Рисунок 45 − Непараметрическая идентификация и прогнозирование

Далее рассмотрим оценку весового коэффициента (43), которая для нашего случая перепишется в виде (53), график оценки изображен на Рисунке 46, а результаты построения оценки (52) приведены на Рисунке 47

$$\hat{\lambda}_{бс}(Y_{i-1}, X_{i-1}) = \frac{\sum_{j=1}^{B}\left\{\left(r(Y_{i-1}, X_{i-1}; Y_{i,j}^{*}, X_{i,j}^{*}) - \hat{r}(Y_{i-1}, X_{i-1}; Y_{i,k})\right)\cdot\left(r(Y_{i-1}, X_{i-1}; Y_{i,j}^{*}, X_{i,j}^{*}) - Y_{i-1}\right)\right\}}{\sum_{j=1}^{B}\left\{r(Y_{i-1}, X_{i-1}; Y_{i,j}^{*}, X_{i,j}^{*}) - Y_{i-1}\right\}^{2}}. \qquad (53)$$

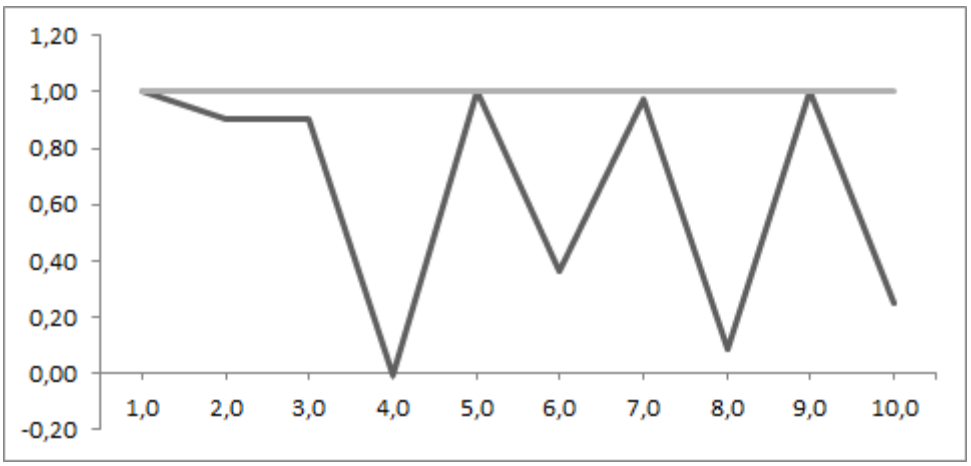

Рисунок 46− График весовых коэффициентов

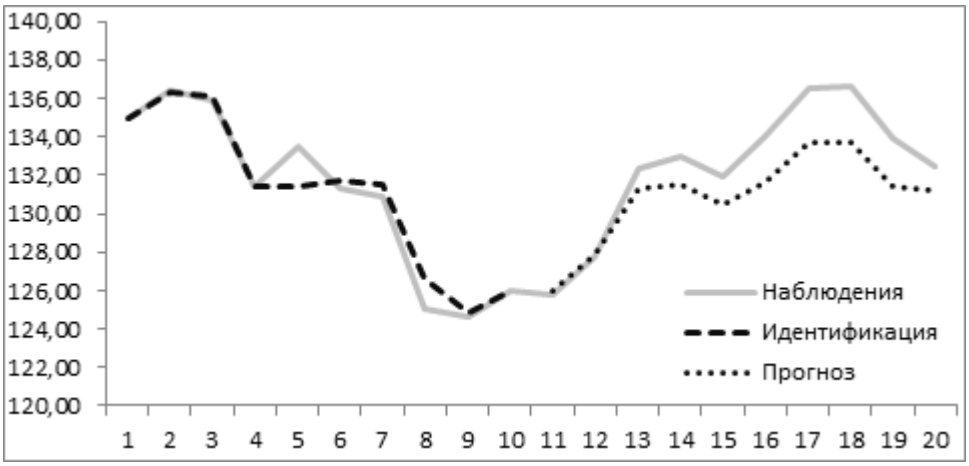

Рисунок 47 − Комбинированная идентификация и прогнозирование

Наконец построим асимптотическую оценку весового коэффициента (44), который перепишется как

$$\hat{\lambda}_{асимп}(Y_{i-1}) == \frac{1}{1+\dfrac{\hat{\Delta}^2(Y_{i-1})}{\dfrac{\hat{C}_1(Y_{i-1})}{N\cdot h_N}+\hat{C}_2(Y_{i-1})\cdot h_N^2}}. \qquad (54)$$

График весовых коэффициентов приведен на Рисунке 48, а оценки цен акций на Рисунке 49.

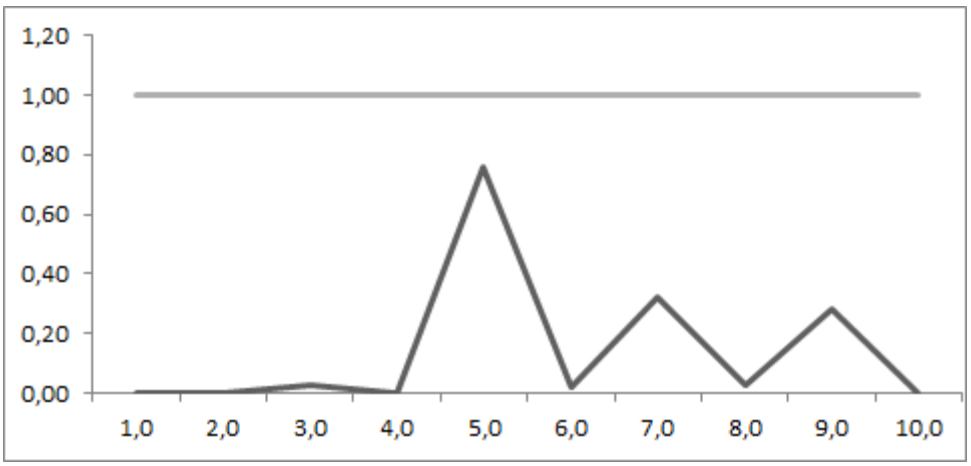

Рисунок 48− График весовых коэффициентов

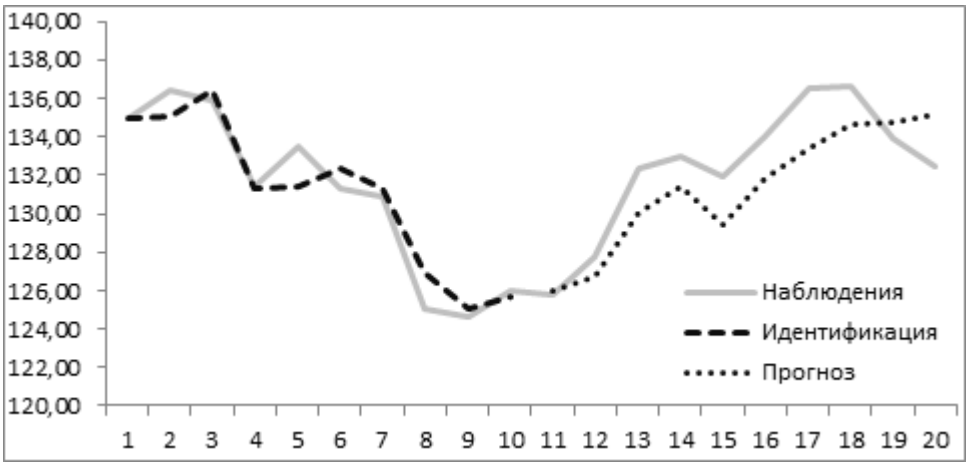

Рисунок 49 − Комбинированная идентификация и прогнозирование

Аналогичные исследования проводятся для более больших значений *N*. Результаты идентификации и прогнозирования приведены в Таблице 5 и Таблице 6 соответственно.

Таблица 5 − Сравнение средних относительных ошибок идентификации

Оценка	Объем наблюдений									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Непараметрическая оценка	0,903	1,417	1,346	1,184	1,269	1,26	1,225	1,292	1,287	1,294
БС-оценка	0,405	0,948	1,057	0,951	1,071	1,075	1,157	1,208	1,273	1,214
Асимптотическая оценка	0,628	0,946	1,04	0,917	1,043	1,061	1,126	1,161	1,176	1,152

Таблица 6 − Сравнение средних относительных ошибок прогнозирования

Оценка	Объем наблюдений									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Непараметрическая оценка	5,322	1,37	1,633	2,132	1,336	1,234	5,698	1,5	1,308	1,489
БС-оценка	2,454	1,153	1,023	1,974	1,292	1,205	4,827	1,467	1,23	1,379
Асимптотическая оценка	3,288	1,139	1,213	1,744	1,127	1,132	4,825	1,494	1,288	1,224

Таким образом, можно сделать вывод, что с ростом объема наблюдений выигрыш комбинированных моделей также уменьшается. При этом асимптотическая оценка дает большее улучшение в сравнении с БС-оценкой, хотя и проигрывает при N=10 (это можно объяснить малым объемом наблюдений, для которых асимптотика еще не работает). Более наглядно выигрыш комбинированных оценок представлен на Рисунке 50 и Рисунке 51 для идентификации и прогнозирования соответственно.

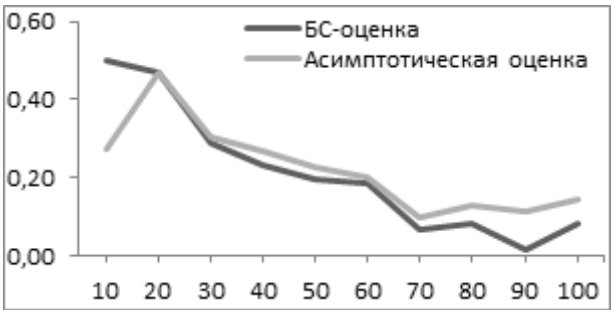

Рисунок 50 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений для задачи идентификации

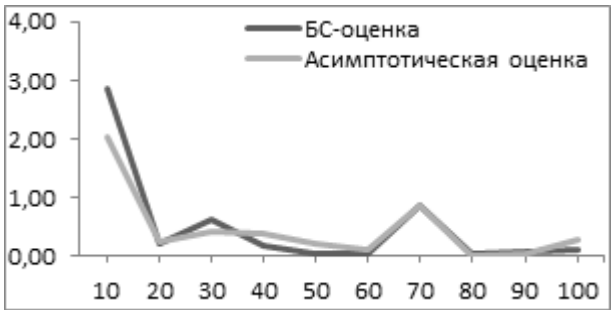

Рисунок 51 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений задачи прогнозирования

II. Теперь рассмотрим случай, когда в качестве экзогенного фактора выступает цена на нефть за соответствующий период.

Для оценки (51) найдем параметр размытости, который минимизирует СКО (см. Рисунок 52).

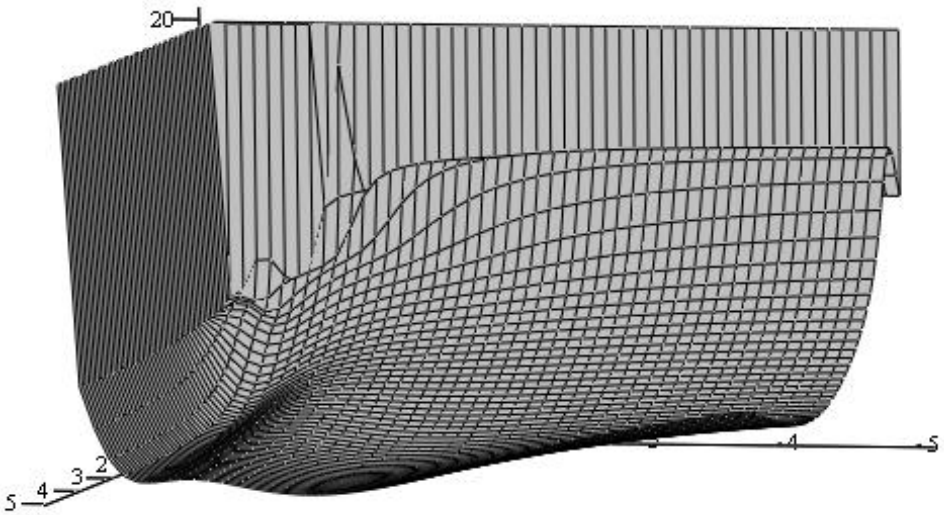

Рисунок 52 − Зависимость СКО от параметров размытости

Оптимальный параметр размытости, который минимизирует СКО, в данном случае, будет равен $h^{\langle y \rangle}_{оптим} = 4,5;\ \ h^{\langle x \rangle}_{оптим} = 1,8.$

Результаты построения оценок идентификации и прогнозирования приведены на Рисунке 53.

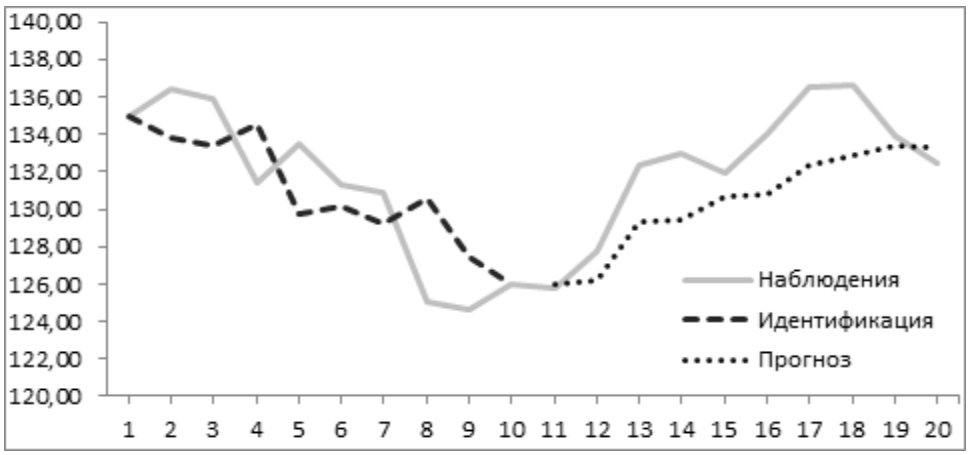

Рисунок 53 − Непараметрическая идентификация и прогнозирование

Далее рассмотрим оценку весового коэффициента (53) . Результаты представлены на Рисунке 54.

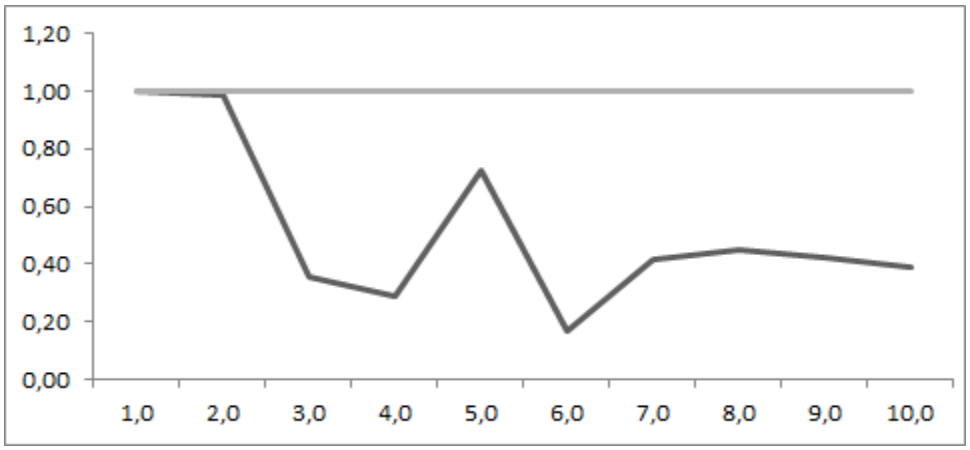

Рисунок 54 − График весовых коэффициентов

Построим комбинированную оценку (52), результаты которой приведены на Рисунке 55.

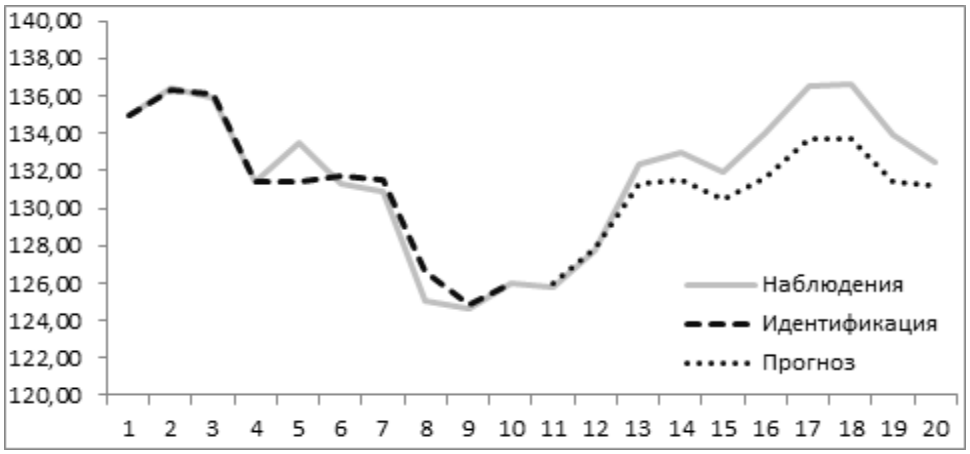

Рисунок 55 − Комбинированная идентификация и прогнозирование

Наконец построим асимптотическую оценку весового коэффициента (44) (см. Рисунок 56).

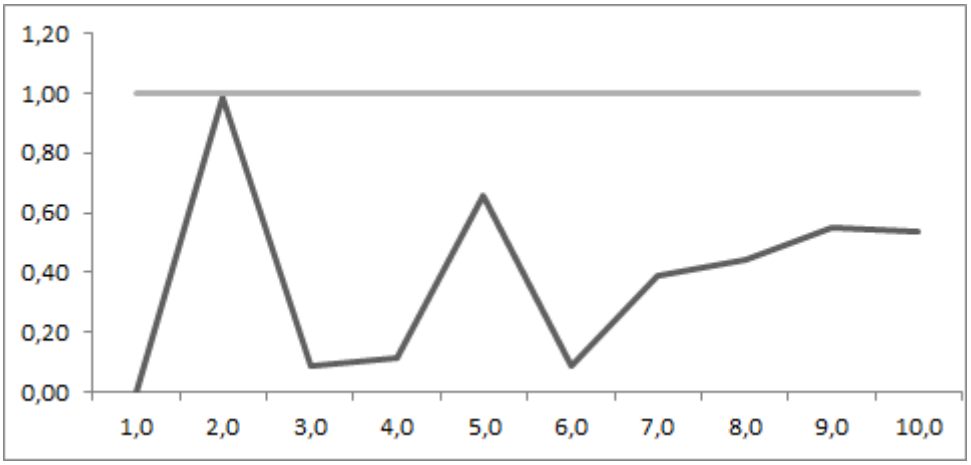

Рисунок 56 − График весовых коэффициентов

Построив комбинированную оценку для данных весовых коэффициентов, получаем результаты Рисунка 57.

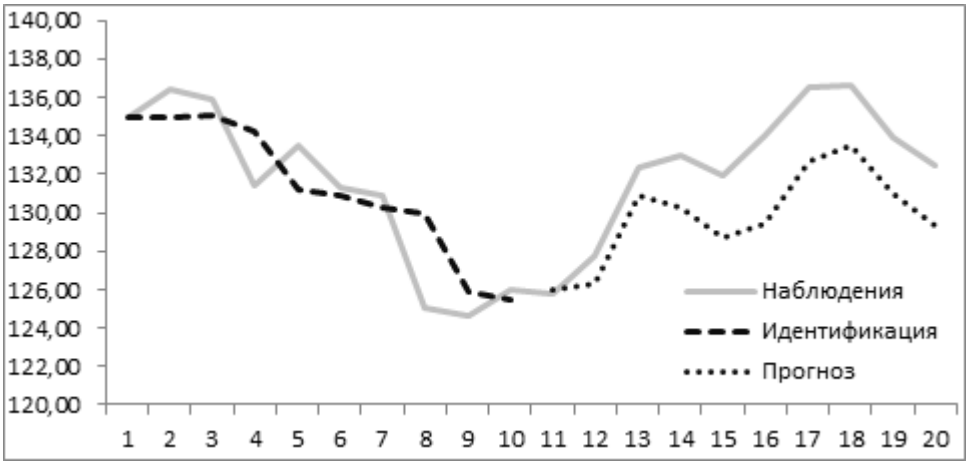

Рисунок 57 − Комбинированная идентификация и прогнозирование

Аналогичные исследования проводятся для более больших значений N. Результаты идентификации и прогнозирования приведены в Таблице 7 и Таблице 8 соответственно.

Таблица 7 − Сравнение средних относительных ошибок идентификации

Оценка	Объем наблюдений									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Непараметрическая оценка	1,797	1,635	1,44	1,406	1,401	1,35	1,306	1,356	1,357	1,346
БС-оценка	1,184	1,163	1,116	1,253	1,246	1,218	1,178	1,247	1,272	1,243
Асимптотическая оценка	1,225	1,144	1,116	1,217	1,213	1,195	1,162	1,212	1,204	1,207

Таблица 8 − Сравнение средних относительных ошибок прогнозирования

Оценка	Объем наблюдений									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Непараметрическая оценка	4,004	1,448	4,037	2,21	1,355	1,127	5,423	1,565	1,241	1,691
БС-оценка	1,864	1,263	2,568	1,975	1,299	1,126	5,309	1,451	1,201	1,498
Асимптотическая оценка	3,528	1,273	3,65	1,592	1,128	0,936	4,571	1,37	1,12	1,528

Таким образом, можно сделать вывод, что с ростом объема наблюдений выигрыш комбинированных моделей также уменьшается. При этом асимптотическая оценка дает большее улучшение в сравнении с БС-оценкой. Более наглядно выигрыш комбинированных оценок представлен на Рисунке 58 и Рисунке 59 для идентификации и прогнозирования соответственно.

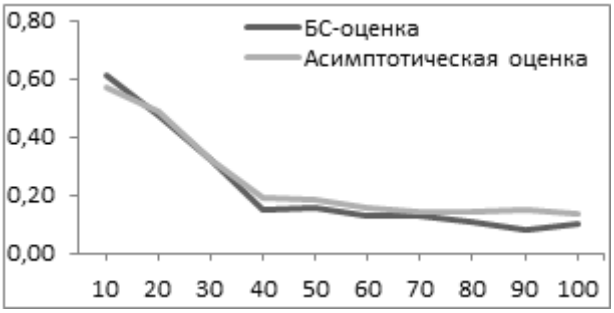

Рисунок 58 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений для задачи идентификации

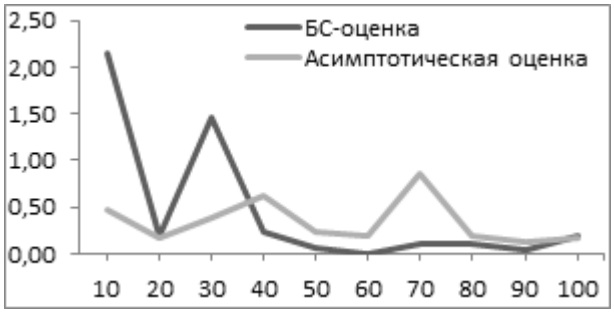

Рисунок 59 – Улучшение ошибок в зависимости от объема наблюдений задачи прогнозирования

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследовались ядерные и комбинированные алгоритмы оценивания поведения стохастического объекта. Для комбинированных оценок получена формула оптимального весового коэффициента и теоретически показано, что при таком коэффициенте комбинированные оценки дают лучший результат в сравнении с непараметрическими в смысле минимума СКО.

Для комбинированных оценок рассмотрены два метода оценивания весовых коэффициентов. Оба метода показали свою работоспособность при моделировании стохастических процессов. При этом можно сделать следующие выводы:

1) С ростом объема наблюдений априорная информация теряет свою ценность, однако при малых объемах наблюдений она дает наилучшие результаты, что достаточно ценно в тех экспериментах, которые не позволяют провести многократные опыты, т.е. получить большую выборку для исследования.

2) С ростом дисперсии шума, т.е. зашумленности объекта, выигрыш комбинированных методов в сравнении с непараметрическими растет. Этот факт достаточно полезен в задачах идентификации сложных процессов, когда учесть все факторы не представляется возможным, что влечет к большей дисперсии за счет того, что шум «берет на себя» влияние этих факторов.

3) Асимптотическая оценка весового коэффициента в комбинированных моделях даже при малых объемах выборки не сильно уступает оценкам, полученным по методу бутстреп, и выигрывает при увеличении количества наблюдений.

Полученные результаты были подтверждены при апробировании рассмотренных методов оценивания на примерах численного моделирования и реальных данных (на примере оценивания цен акций компании «Газпром»).

ЛИТЕРАТУРА

1. Булдаков В. М. О рекуррентных оценках плотности вероятности и линии регрессии / В. М. Булдаков, Г. М. Кошкин // Пробл. передачи информ. ─ 1977. ─ Т. 13, вып. 1. ─ С.58─66.
2. Вапник В. Н. Восстановление зависимости по эмпирическим данным / В. Н. Вапник ─ М.: Главная редакция физ.-мат. литературы, 1979. ─ 448 с.
3. Васильев В. А. Непараметрическая идентификация авторегрессий / В. А. Васильев, Г. М. Кошкин // Теория вероятн. и её примен. ─ 1999. ─ Т. 3, вып. 3. ─ С. 507─517.
4. Васильев В. А. Оценивание функций от плотности распределения по зависимым наблюдениям / В. А. Васильев, Г. М. Кошкин // Пробл. передачи информ. ─ 1997. ─ Т. 33, вып. 4. ─ С. 45─60.
5. Глухова И. Ю. Непараметрическая идентификация нелинейных ARX-процессов / И. Ю. Глухова, Г. М. Кошкин // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. ─ 2012. ─ №3. ─ С. 55─61.
6. Глухова И. Ю. Сходимость в среднеквадратическом непараметрического алгоритма идентификации ARX-процесса / И. Ю. Глухова, Г. М. Кошкин // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. ─ 2012. ─ №4. ─ С. 71─78.
7. Дмитриев Ю. Г. Использование дополнительной информации при непараметрическом оценивании функционалов плотности / Ю. Г. Дмитриев, Г. М. Кошкин // Автомат. и телемех. ─1987. ─ №10. ─ С. 47─59.
8. Dmitriev Yu. G. On the use of a priori information in nonparametric regression estimation / Yu. G. Dmitriev, G. M. Koshkin // Proceeding 2nd IFAC Symposium on Stochastic Control. Oxford e.a.: Pergamon Press. ─ 1987. ─ P. 223─228.
9. Дмитриев Ю. Г. О комбинированной оценке вероятности безотказной работы по полной выборке / Ю. Г. Дмитриев, С. В. Скрипин // Вестн. Том. гос. ун-та. УВТиИ. ─ 2012. ─ №4. ─ С. 32─38.
10. Заварин А. Н. Использование априорной информации в непараметрических оценках функции регрессии // Авто- мат. и телемех. ─ 1985. ─ №5. ─ С. 79─86
11. Катковник В. Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных: метод локальной аппроксимации / В. Я. Катковник ─ М.: Главная редакция физ.-мат. литературы, 1985. ─ 336 с.
12. Китаева А. В. Полурекуррентные ядерные оценки базовых функционалов по независимым наблюдениям / А. В. Китаева, Г. М. Кошкин // Известия ТПУ. ─ 2010. ─ №2. ─ С. 8─12.

13. Китаева А. В. Ядерные оценки базовых функционалов по зависимым наблюдениям / А. В. Китаева, Г. М. Кошкин // Известия ТПУ. ─ 2009. ─ №2. ─ С. 26─31.

14. Кошкин Г. М. Непараметрическая идентификация и прогнозирование ARX-процессов/ Г. М. Кошкин, В. Ю. Луков // Известия вузов. Физика. ─2016. ─ Т.59, №8. ─ С.53─56.

15. Кошкин Г. М. Непараметрическая идентификация экономических систем: учебное пособие / Г.М. Кошкин. ─ Томск: Изд-во НТЛ, 2007. ─ 308 с.

16. Koshkin G. M. Nonparametric algorithms for identifying and control of continuous-discrete stochastic objects / G. M. Koshkin, F. P. Tarasenko // 8-th IFAC-IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation. Beijing: Pargamon Press. ─ 1988. ─№2. ─ P.882─887.

17. Koshkin G. M. Nonparametric Algorithms of Identification and Prediction in the ARX-Models / G. M. Koshkin, V. YU. Lukov, I. G. Piven // Proceedings. The Second International Symposium on Stochastic Models, in Reliability Engineering, Life Science, and Operations Management / Ilia Frenkel and Anatoly Lisnianski (Eds.). SMRLO 2016, February 15-18, 2016, Beer Sheva, Israel. Conference Publishing Services The Institute of Electrical and Electronics Engineers. ─ 2016. ─ P. 620─623.

18. Лапко А. В. Анализ асимптотических свойств многомерной непараметрической регрессии / А. В. Лапко, В. А. Лапко // Вестник сибирского государственного аэрокосмического университета им. Академика М. Ф. Решетнева. ─ 2012. ─ №2. ─ С. 41-44.

19. Лапко А. В. Непараметрические модели и алгоритмы обработки информации: учебное пособие / А. В. Лапко ─ Красноярск, Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т., 2010. – 220 с.

20. Луков В. Ю. Непараметрические алгоритмы идентификации, прогнозирования и управления в ARX-процессах // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы III Всероссийской молодежной научной конференции. ─ 2016. ─ Т. 297. ─ С. 74─79.

21. Надарая Э. А. Об оценке регрессии // ТВП. ─ 1964. ─ № 9. ─ С. 157─159.

22. Скрипин С. В. Свойства комбинированной оценки регрессии при конечных объемах выборок // Известия Томского политехнического университета. ─ 2008. ─ Т. 313, № 5. ─ С.10-14.

23. Тарасенко Ф. П. Непараметрическая статистика / Ф. П. Тарасенко. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 1976. – 292 с.

24. Котировки акций. График курса акций [Электронный ресурс] // ПАО «Газпром». – Электрон. дан. – М., 2011. – URI: http://www.finam.ru/ (дата обращения: 10.02.2017).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Исходные данные

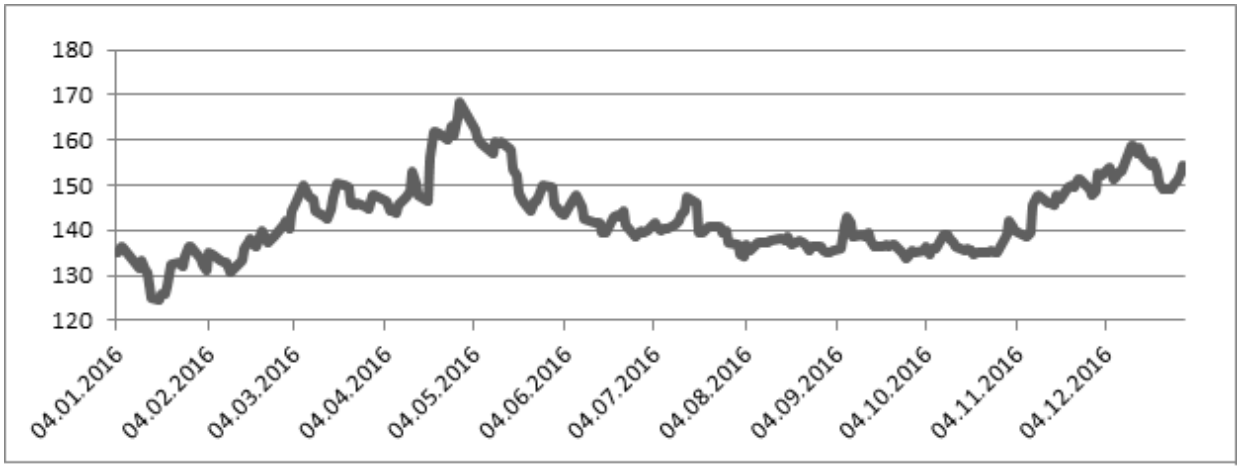

Рисунок А.1 – Динамика цен акций ПАО Газпром

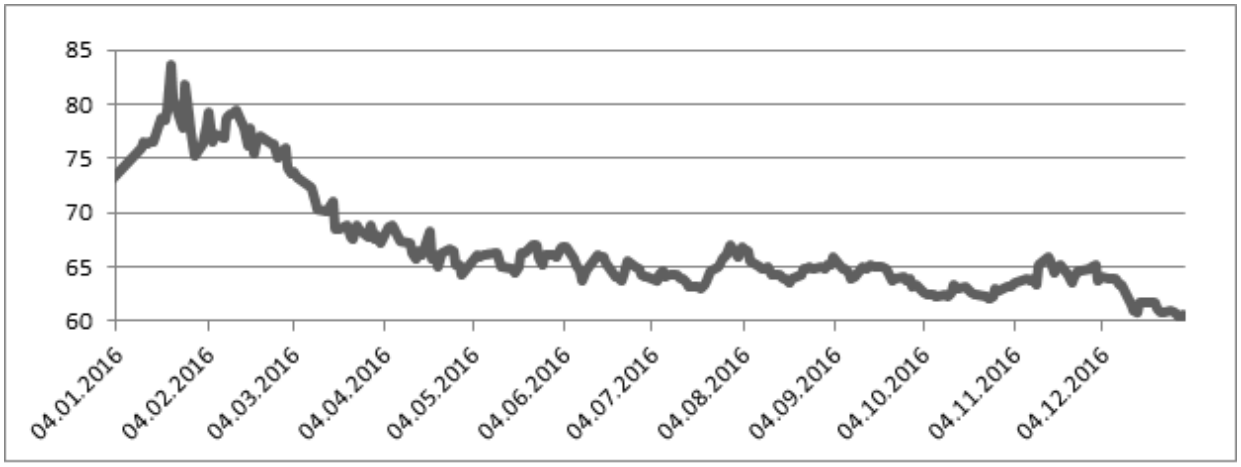

Рисунок А.2 – Динамика курса доллара

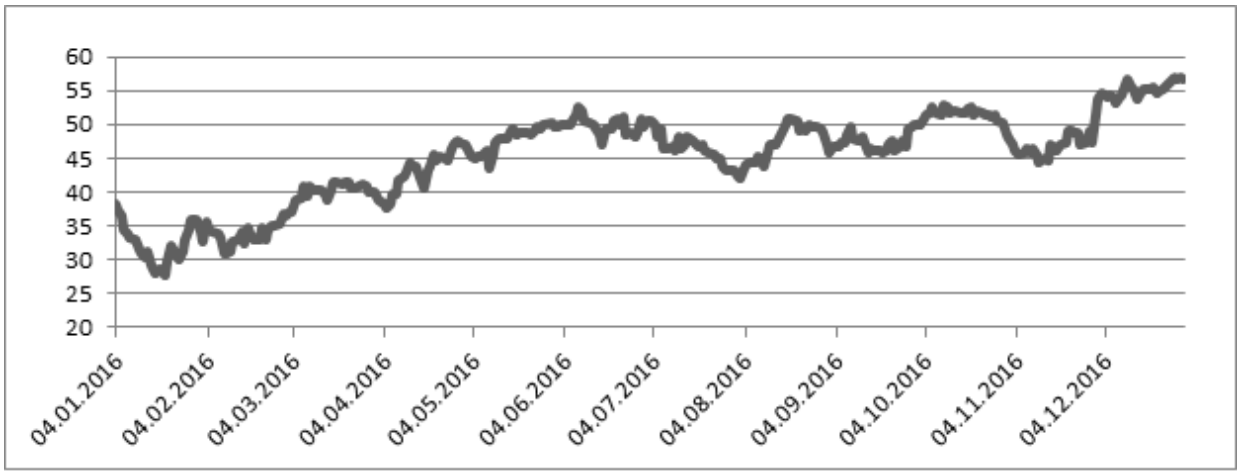

Рисунок А.3 – Динамика цены на нефть

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Пример программы моделирования регрессии

Здесь и далее расчет данных производился в пакете MathCad 14.0.

1. Непараметрическая модель.

Построение матрицы ошибок:

$$
Pr1 := \left| \begin{array}{l}
\text{for } H1 \in 1..HH \\
\quad \left| \begin{array}{l}
\text{for } i \in 1..N \\
\quad r1_{H1,i} \leftarrow \dfrac{\left[\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\left[r_j \cdot \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-(X_i - X_j)^2}{2\cdot\left(\frac{H1}{100}\right)^2}}\right]\right] - r_i \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]}{\left[\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-(X_i - X_j)^2}{2\cdot\left(\frac{H1}{100}\right)^2}}\right] - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]} \\
\quad error_{H1} \leftarrow \dfrac{1}{N}\cdot\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\left(r_j - r1_{H1,j}\right)^2
\end{array} \right. \\
\begin{pmatrix} r1 \\ error \end{pmatrix}
\end{array} \right.
$$

Построение оценок:

$$
r2(z) := \frac{\displaystyle\sum_{i=2}^{N}\left[r_i \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-(z - X_i)^2}{2\cdot\left(\frac{hopt}{100}\right)^2}}\right]\right]}{\displaystyle\sum_{i=2}^{N}\left[\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-(z - X_i)^2}{2\cdot\left(\frac{hopt}{100}\right)^2}}\right]\right]}
$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ Б

Пример программы моделирования регрессии

2. Комбинированная модель по бутстрепу.

Построение бутстреп-выборки:

$$
Bs := \left|\begin{array}{l}
\text{for } i \in 1..B \\
\quad \text{for } j \in 1..N \\
\quad\quad \left|\begin{array}{l} ind \leftarrow \text{round}(\text{rnd}(N-1)) + 1 \\ Bs1_{i,j} \leftarrow r_{ind} \\ Bs2_{i,j} \leftarrow X_{ind} \end{array}\right. \\
\begin{pmatrix} Bs1 \\ Bs2 \end{pmatrix}
\end{array}\right.
$$

Оценка весовых коэффициентов по бутстрепу:

$$
\lambda(x) := \frac{\frac{1}{B}\cdot\sum_{j=1}^{B}\left[(r3(x,j) - r2(x))\cdot(r3(x,j) - \phi1(x))\right]}{\frac{1}{B}\cdot\sum_{j=1}^{B}\left[(r3(x,j) - \phi1(x))^2\right]}
$$

$$
r2(z) := \frac{\sum_{i=2}^{N}\left[r_i\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-(z-X_i)^2}{2\cdot\left(\frac{hopt}{100}\right)^2}}\right]\right]}{\sum_{i=2}^{N}\left[\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-(z-X_i)^2}{2\cdot\left(\frac{hopt}{100}\right)^2}}\right]\right]}
\qquad
r3(z,j) := \frac{\sum_{i=2}^{N}\left[Bs1_{j,i}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-(z-Bs2_{j,i})^2}{2\cdot\left(\frac{hopt}{100}\right)^2}}\right]\right]}{\sum_{i=2}^{N}\left[\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-(z-Bs2_{j,i})^2}{2\cdot\left(\frac{hopt}{100}\right)^2}}\right]\right]}
$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ Б

Пример программы моделирования регрессии

3. Асимптотическая комбинированная модель.

$$\lambda opt(x) := \frac{1}{1 + \frac{(r2(x) - \phi 1(x))^2}{SKO(x)}}$$

$$SKO(x) := \frac{C1(x)}{N \cdot \frac{hopt}{100}} + C2(x) \cdot \left(\frac{hopt}{100}\right)^2$$

$$C1(z) := \left[\frac{\sum_{j=2}^{N} \left[\left(r_j\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-\left(z - X_j\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{hopt}{100}\right)^2}} \right] \right]}{\sum_{j=2}^{N} \left[\left[\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-\left(z - X_j\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{hopt}{100}\right)^2}} \right] \right]} - r2(z)^2 \right] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-(u)^2}{2}} \right]^2 du$$

$$C2(z) := \frac{d^2}{dz^2} \frac{\sum_{i=2}^{N} \left[r_i \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-\left(z - X_i\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{hopt}{100}\right)^2}} \right] \right]}{\sum_{i=2}^{N} \left[\left[\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-\left(z - X_i\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{hopt}{100}\right)^2}} \right] \right]}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Пример программы идентификации ARX-модели

Рассмотрим ARX-модель с зависимостью от курса доллара. Для авторегрессионных моделей и ARX-моделей с зависимостью от цены на нефть программы аналогичны.

1. Непараметрическая модель.

Построение матрицы СКО:

$$
\begin{array}{l}
Pr1 := \left| \begin{array}{l}
\text{for } H1 \in 1..HH1 \\
\quad \text{for } H2 \in 1..HH2 \\
\quad\quad \left| \begin{array}{l}
er \leftarrow 0 \\
\text{for } i \in 2..N \\
\quad \left| \begin{array}{l}
y_i \leftarrow \dfrac{\left[\displaystyle\sum_{j=2}^{N} \left[\left[x_j \cdot \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(x_{i-1}-x_{j-1}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{H1}{10}\right)^2}}\right]\right] \cdot \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(USD_{i-1}-USD_{j-1}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{H2}{10}\right)^2}}\right]\right] - x_i \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\right)\right]}{\left[\displaystyle\sum_{j=2}^{N} \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(x_{i-1}-x_{j-1}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{H1}{10}\right)^2}} \cdot \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(USD_{i-1}-USD_{j-1}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{H2}{10}\right)^2}}\right]\right] - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\right)\right]} \\
er_i \leftarrow \left(\left|x_i - y_i\right|\right)^2
\end{array} \right. \\
error_{H1,H2} \leftarrow \dfrac{1}{N} \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{N} er_i
\end{array} \right. \\
\quad error
\end{array} \right.
\end{array}
$$

Построение непараметрической оценки:

$$
\begin{array}{l}
Pr2 := \left| \begin{array}{l}
\text{for } i \in 2..N \\
y_i \leftarrow \dfrac{\left[\displaystyle\sum_{j=2}^{N} \left[\left[x_j \cdot \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(x_{i-1}-x_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt1)^2}}\right]\right] \cdot \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(USD_{i-1}-USD_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt2)^2}}\right]\right] - x_i \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\right)\right]}{\left[\displaystyle\sum_{j=2}^{N} \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(x_{i-1}-x_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt1)^2}} \cdot \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(USD_{i-1}-USD_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt2)^2}}\right]\right] - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\right)\right]} \\
y
\end{array} \right.
\end{array}
$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В

Пример программы идентификации ARX-модели

Прогнозирование:

$$
Pr3 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in N+1..N+10 \\ \quad y_i \leftarrow \dfrac{\left[\left[\displaystyle\sum_{j=i-N+1}^{i-1} \left[\left[x_j \cdot \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(x_{i-1}-x_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt1)^2}}\right]\right] \cdot \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(USD_{i-1}-USD_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt2)^2}}\right]\right]\right]\right]}{\left[\left[\displaystyle\sum_{j=i-N+1}^{i-1} \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(x_{i-1}-x_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt1)^2}} \cdot \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(USD_{i-1}-USD_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt2)^2}}\right]\right]\right]\right]} \\ y \end{array} \right.
$$

2. Комбинированная оценка по бутстрепу.

Бутстреп-выборка:

$$
Bs := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..B \\ \quad \text{for } j \in 1..N \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} ind \leftarrow round(rnd(N-1)) + 2 \\ Bs1_{i,j} \leftarrow x_{ind} \\ Bs2_{i,j} \leftarrow x_{ind-1} \\ Bs3_{i,j} \leftarrow USD_{ind-1} \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} Bs1 \\ Bs2 \\ Bs3 \end{pmatrix} \end{array} \right.
$$

Весовой коэффициент по бутстрепу:

$$
\lambda(x,y) := \frac{\dfrac{1}{B} \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{B} \left[(r1(x,y,j) - r(x,y)) \cdot (r1(x,y,j) - x)\right]}{\dfrac{1}{B} \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{B} \left[(r1(x,y,j) - x)^2\right]}
$$

3. Асимптотическая комбинированная оценка.

Оценка весового коэффициента:

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В

Пример программы идентификации ARX-модели

$$\lambda opt(z,y) := \frac{1}{1+\frac{(r(z,y)-z)^2}{SKO(z,y)}}$$

Здесь,

$$SKO(z,y) := \frac{C1(z,y)}{N\cdot hopt1\cdot hopt2} + \left|C2(z,y)\right|\cdot(hopt1\cdot hopt2)^2$$

$$C1(z,y) := \left[\frac{\sum_{j=2}^{N}\left[\left(x_j\right)^2\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-\left(z-x_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt1)^2}}\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-\left(y-USD_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt2)^2}}\right]\right]}{\sum_{j=2}^{N}\left[\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-\left(z-x_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt1)^2}}\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-\left(y-USD_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt2)^2}}\right]\right]} - r(z,y)^2\right]\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-(u)^2}{2}}\right]^2 du$$

$$C2(z,y) := \frac{d^2}{dz^2}\frac{\sum_{i=2}^{N}\left[x_i\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-\left(z-x_{i-1}\right)^2}{2\cdot(hopt1)^2}}\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-\left(y-USD_{i-1}\right)^2}{2\cdot(hopt2)^2}}\right]\right]}{\sum_{i=2}^{N}\left[\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-\left(z-x_{i-1}\right)^2}{2\cdot(hopt1)^2}}\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-\left(y-USD_{i-1}\right)^2}{2\cdot(hopt2)^2}}\right]\right]}$$

Прогнозирование:

$$\lambda opt(z,y,k) := \frac{1}{1+\frac{(r(z,y)-z)^2}{SKO(z,y,k)}}$$

Здесь,

$$SKO(z,y,k) := \frac{C1(z,y,k)}{N\cdot hopt1\cdot hopt2} + \left|C2(z,y,k)\right|\cdot(hopt1\cdot hopt2)^2$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В

Пример программы идентификации ARX-модели

$$C1(z,y,k) := \left[\frac{\displaystyle\sum_{j=2+k}^{N+k-1} \left[\left(x_j\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(z-x_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt1)^2}} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(y-USD_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt2)^2}} \right] \right]}{\displaystyle\sum_{j=2+k-1}^{N+k-1} \left[\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(z-x_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt1)^2}} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(y-USD_{j-1}\right)^2}{2\cdot(hopt2)^2}} \right] \right]} - r(z,y)^2 \right] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-(u)^2}{2}} \right]^2 du$$

$$C2(z,y,k) := \frac{d^2}{dz^2} \frac{\displaystyle\sum_{i=2+k}^{N+k-1} \left[x_i \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(z-x_{i-1}\right)^2}{2\cdot(hopt1)^2}} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(y-USD_{i-1}\right)^2}{2\cdot(hopt2)^2}} \right] \right]}{\displaystyle\sum_{i=2+k}^{N+k-1} \left[\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(z-x_{i-1}\right)^2}{2\cdot(hopt1)^2}} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(y-USD_{i-1}\right)^2}{2\cdot(hopt2)^2}} \right] \right]}$$

Уважаемый пользователь! Обращаем ваше внимание, что система «Антиплагиат» отвечает на вопрос, является ли тот или иной фрагмент текста заимствованным или нет. Ответ на вопрос, является ли заимствованный фрагмент именно плагиатом, а не законной цитатой, система оставляет на ваше усмотрение.

Отчет о проверке № 1

дата выгрузки: 06.06.2017 10:16:34
пользователь: lukov_vadim@rambler.ru / ID: 1841504
отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»
на сайте http://www.antiplagiat.ru

Информация о документе

№ документа: 22
Имя исходного файла: Луков Магистреская диссертация _новая редакция_.docx
Размер текста: 1522 кБ
Тип документа: Не указано
Символов в тексте: 48376
Слов в тексте: 5232
Число предложений: 225

Информация об отчете

Дата: Отчет от 06.06.2017 10:16:34 - Последний готовый отчет
Комментарии: не указано
Оценка оригинальности: 95.02%
Заимствования: 4.73%
Цитирование: 0.25%

Оригинальность: 95.02%
Заимствования: 4.73%
Цитирование: 0.25%

Ознакомлен с проверкой
Кошкин Т.М.

Источники

Доля в тексте	Источник	Ссылка	Дата	Найдено в
1.48%	[1] Непараметрическое оценивание функционалов от распределений случайных последовательностей диссертация по информатике, вычислительной технике и управлению, скачайте бесплатно автореферат диссертации на тему 'Применение вычислительной техники, математическ...	http://tekhnosfera.com	27.11.2016	Модуль поиска Интернет
1.2%	[2] 30 лет ФПМК-30 лет кафедре теоретической кибернетики | Вестн. Том. гос. ун-та. 2000. № 271. / Вестник Томского государственного университета (Вестн. Том. гос. ун-та)	http://journals.tsu.ru	21.11.2016	Модуль поиска Интернет
1.2%	[3] 30 years of DAMC - 30 years of theoretical cybernetics department | Tomsk State University Journal. 2000. № 271. / Вестник Томского государственного университета (Вестн. Том. гос. ун-та)	http://journals.tsu.ru	21.11.2016	Модуль поиска Интернет
0.94%	[4] Скачать полнотекстовую версию (3/7)	http://journals.tsu.ru	08.10.2016	Модуль поиска Интернет
0.88%	[5] 30 years of DAMC - 30 years of theoretical cybernetics department.pdf	http://journals.tsu.ru	21.11.2016	Модуль поиска Интернет
0.71%	[6] Скачать - 772,8 КБ	http://nauchkor.ru	12.04.2017	Модуль поиска Интернет
0.29%	[7] Скачать PDF/moluch_42_ch1.pdf	http://moluch.ru	раньше 2011 года	Модуль поиска Интернет
0.28%	[8] СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВЕСОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА В КОМБИНИРОВАННОЙ МОДЕЛИ РЕГРЕССИИ - тема научной статьи по кибернетике, читать бесплатно текст научно-исследовательской работы в электронной библиотеке КиберЛенинка	http://cyberleninka.ru	19.01.2013	Модуль поиска Интернет
0.21%	[9] Непараметрическое оценивание функционалов от условных распределений последовательностей сильного перемешивания	http://sun.tsu.ru	15.11.2012	Модуль поиска Интернет
0.2%	[10] СХОДИМОСТЬ В СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ИДЕНТИФИКАЦИИ ARX-ПРОЦЕССА - тема научной статьи по математике, читать бесплатно текст научно-исследовательской работы в электронной библиотеке КиберЛенинка	http://cyberleninka.ru	13.06.2013	Модуль поиска Интернет
0.18%	[11] Автореферат	http://oldvak.ed.gov.ru	26.11.2012	Модуль поиска Интернет
0.16%	[12] не указано	http://window.edu.ru	раньше 2011 года	Модуль поиска Интернет
0.25%	[13] не указано	не указано	раньше 2011 года	Цитирование