

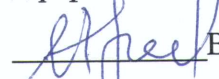
Министерство образования и науки Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет
Кафедра астрономии и космической геодезии

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК

Зав.каф. к.АиКГ

д-р физ.-мат. наук

 В.А. Авдюшев

« 7 » июня 2016 г.

Кинзерский Владислав Владимирович

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СВЕТОВОЙ
МОДЕЛИ ДЛЯ СПУТНИКОВ ИСЗ ГЛОНАСС

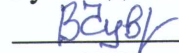
МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание степени магистра информационных систем и технологий

по направлению подготовки

09.04.02 - Информационные системы и технологии

Руководитель

 И. Н. Чувашов

подпись

« 7 » июня 2016 г.

Автор работы

студент группы № 0507-м

 В.В. Кинзерский

подпись

Томск 2016

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация 39 страниц, 18 рисунков 9 таблиц.

Работа посвящена исследованию влияния светового давления на движение навигационных спутников ГЛОНАСС.

Цель данной работы заключалась в определении параметров орбит и коэффициентов светового давления для спутников системы ГЛОНАСС из межспутниковых наблюдений.

Были решены следующие задачи:

1. Исследована математическая модель системы навигационных спутников ГЛОНАСС.
2. Обработаны измерения, в качестве которых выступают дальности до спутников навигационной системы ГЛОНАСС.
3. Исследована бортовая световая модель, а также световая модель численной модели движения ИСЗ и сравнена их эффективность.
4. Провести эксперимент по уточнению эфемерид на 30 сутках и сравнить отклонения от наблюдений на этом интервале времени полученных с помощью численной и бортовой моделью.

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
1 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ.....	6
1.2 Уравнения движения	8
1.3 Алгоритмы вычисления возмущающих сил, связанных с несферичностью Земли.....	8
1.4 Возмущения от приливных деформаций центрального тела	10
1.4.1 Вековые изменения	10
1.4.2 Возмущения от твердых приливов	10
1.4.3 Возмущения от океанических приливов	12
1.4.4 Возмущения от полюсного прилива	12
1.4.5 Возмущения от океанического полюсного прилива	13
1.5 Возмущения от третьего тела	14
1.6 Возмущения от светового давления.....	15
1.7 Релятивистские эффекты.....	21
1.8 Структура возмущений для спутника ГЛОНАСС на 1 обороте и на 60 оборотах (30 суток)	22
1.9 Методы численного интегрирования.....	23
1.9.1 Основные формулы	23
1.9.2 Интегрирование на шаге	25
1.9.3 Формулы интегратора как одно из представлений неявного метода Рунге—Кутты 26	26
1.9.4 Выбор шага	26
1.9.5 Выбор оптимальных параметров метода Гаусса-Эверхарда для интегрирования уравнений движения ИСЗ ГЛОНАСС	27
2 ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕТОВОЙ МОДЕЛИ	31
2.1 Определение параметров световой модели для спутников ИСЗ ГЛОНАСС с помощью «Численной модели движения ИСЗ»	31
2.2 Световая модель, используемая в бортовой модели ИСЗ ГЛОНАСС.....	35
2.3 Описание эксперимента по бортовой модели.....	35
2.4 Сравнение результатов	36
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	38
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	39

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

CRS – Celestial Reference System

TRS – Terrestrial Reference System

IERS – International Earth Rotation and Reference Systems Service

ОСК – орбитальная система координат

КА – космический аппарат

СОЗ – Солнце – Объект – Земля

МСИ – межспутниковые измерения

ВВЕДЕНИЕ

Для решения задач с использованием навигационных систем точность моделирования орбит спутников системы ГЛОНАСС должна быть на уровне нескольких сантиметров.

Учет светового давления является главной трудностью при определении орбит спутников этой системы. Существуют модели радиационного давления, разработанные в процессе наземных испытаний с учетом конструкционных особенностей спутников, а также простые эмпирические модели светового давления, полученные по данным измерений в полете. Однако ни те, ни другие не обеспечивают требуемую точность и могут приводить к ошибкам в определении орбит на двух оборотах превосходящим 50 см.

Цель данной работы заключалась в определении параметров орбит и коэффициентов светового давления для спутников системы ГЛОНАСС из межспутниковых наблюдений.

Для достижения поставленной цели предлагалось решить следующие задачи:

1. Исследовать математическую модель системы навигационных спутников ГЛОНАСС.
2. Обработать измерения, в качестве которых выступают дальности до спутников навигационной системы ГЛОНАСС;
3. Исследовать бортовую световую модель, а также световую модель численной модели движения ИСЗ и сравнить их эффективность
4. Провести эксперимент по уточнению эфемерид на 30 сутках и сравнить отклонения от наблюдений на этом интервале времени полученных с помощью численной и бортовой моделью.

В первой главе дипломной работы описывается модель движения ИСЗ и рассмотрены численные методы интегрирования. Вторая глава посвящена исследованию и сравнению бортовой световой модели и световой модели численной модели движения ИСЗ.

1 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

1.1 Используемые системы координат

В представляемом комплексе программ мы используем две основных системы координат, рекомендованных Международным астрономическим союзом: опорную небесную систему координат каталога FK-5, связанную с центром Земли на эпоху J2000.0 – CRS (Celestial Reference System) и земную опорную систему координат. Начало этой системы координат помещено в центре масс всей Земли, включая океаны и атмосферу, ось аппликат направлена к среднему северному полюсу Земли (Международное условное начало-CIO). Эту систему будем обозначать как TRS (Terrestrial Reference System).

Связь между системами координат CRS и TRS определяется формулами

$$\begin{aligned} TRS &= [ABCD]CRS, \\ CRS &= [ABCD]^T TRS. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Матрица прецессии D задается как

$$D = r(-z)q(\theta)r(\xi_0) = \begin{pmatrix} \cos z & -\sin z & 0 \\ \sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \xi_0 & \sin \xi_0 & 0 \\ -\sin \xi_0 & \cos \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

а прецессионные параметры ξ_0, z, θ находятся из соотношений:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (2306'', 2181 + 1'', 39656T - 0'', 000139T^2)\tau + (0'', 30188 - 0'', 000345T)\tau^2 + \\ &\quad + 0'', 017998\tau^3, \\ z &= \xi_0 + (0'', 79280 + 0'', 000400T)\tau^2 + 0'', 018203\tau^3, \\ \theta &= (2004'', 3109 - 0'', 85330T - 0'', 000217T^2)\tau + (0'', 42665 - 0'', 000217T)\tau^2 - \\ &\quad - 0'', 041833\tau^3, \end{aligned}$$

где T отсчитывается в юлианских столетиях от эпохи J2000.0 до выбранной произвольно эпохи, а τ – от выбранной эпохи до даты наблюдения также в юлианских столетиях.

Матрица нутации C задается формулой

$$C = p(-\varepsilon)r(-\Delta\psi)p(\bar{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi & 0 \\ \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= 23^\circ 26' 21'', 448 - 46'', 8510t - 0'', 00059t^2 + 0'', 001813t^3, \\ t &= T + \tau, \quad \varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon. \end{aligned}$$

Для вычисления $\Delta\varepsilon, \Delta\psi$ используются ряды в соответствии с принятой Международным астрономическим союзом в 1980 г. теорией нутации

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^n (A_i + A'_i t) \sin(\text{ARGUMENT}),$$

$$\Delta\varepsilon = \sum_{i=1}^n (B_i + B'_i t) \cos(\text{ARGUMENT}),$$

где

$$\text{ARGUMENT} = \sum N_i F_i.$$

Коэффициенты A_i, A'_i, B_i, B'_i и целочисленные множители N_i фундаментальных аргументов F_i приведены в (IERS, 2010). Фундаментальные аргументы вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} F_1 = l &= 134^0,96340251 + 1717915923'',2178t + 31'',8792t^2 + 0'',051635t^3 - 0'',00024470t^4, \\ F_2 = l' &= 357^0,52910918 + 129596581'',0481t - 0'',5532t^2 + 0'',000136t^3 - 0'',00001149t^4, \\ F_3 = F &= 93^0,27209062 + 1739527262'',8478t - 12'',7512t^2 - 0'',001037t^3 + 0'',00000417t^4, \\ F_4 = D &= 297^0,85019547 + 1602961601'',2090t - 6'',3706t^2 + 0'',006593t^3 - 0'',00003169t^4, \\ F_5 = \Omega &= 125^0,04455501 - 6962890'',2665t + 7'',4722t^2 + 0'',007702t^3 - 0'',00005939t^4, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где t измеряется в юлианских столетиях от эпохи J2000.0 (каждое столетие по 36525 дней, каждый день по 86400 секунд динамического времени); l – средняя аномалия Луны, l' – средняя аномалия Солнца, $F = L - \Omega$, D – средняя элонгация Луны от Солнца, Ω – средняя долгота восходящего узла Луны, L – средняя долгота Луны.

Матрица B осуществляет преобразование инерциальной CRS-системы истинной даты в систему TRS истинной даты,

$$B = r(h) = \begin{pmatrix} \cosh h & \sinh h & 0 \\ -\sinh h & \cosh h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Истинное гринвичское звездное время h определяется формулой

$$h = H_0 + \omega(t_0 - \Delta H), \quad (1.6)$$

где

$$H_0 = 24110^s,54841 + 8640184^s,812866T_* + 0^s,093104T_*^2 - 6^s,2 \cdot 10^{-6}T_*^3 \quad (1.7)$$

гринвичское среднее время в 0^h на дату наблюдения; $\Delta H = \Delta\psi \cos \varepsilon$; t_0 – временной интервал от 0^h UT1 на дату наблюдения до момента наблюдения; $\Delta t = \Delta UT1 - UTC$; $\omega = 86401^s,84812866$ – скорость среднего звездного вращения Земли, $T_* = d_*/36525$, причем d_* есть число дней во всемирном времени от эпохи J2000.0.

Движение полюса задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

где x_p есть положительное южное перемещение вдоль гринвичского меридиана, заданного ВИН; y_p – положительное южное перемещение по направлению, перпендикулярному гринвичскому меридиану. Величины x_p, y_p – координаты мгновенного полюса относительно полюса ВИН 1984, публикуются в циркулярах ВИН, кроме того, их можно найти по электронному адресу: <http://maia.usno.navy.mil>

1.2 Уравнения движения

Движение искусственного спутника Земли, представляемое как движение материальной частицы бесконечно малой массы в поле тяготения центрального тела с массой M под действием сил, определенных потенциальными функциями V и R , а также совокупности сил P , не имеющих потенциала, представим в виде (Аксенов, 1977)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = Q \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} \quad (1.9)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(t_0), \quad (1.10)$$

причем V – потенциал притяжения Земли, а $R = \sum_1^N R_i$, где R_i возмущающие функции, обусловленные с притяжением Луны и Солнца и больших планет; $\mathbf{P}$ – возмущающее ускорение, обусловленное возмущающими силами, не имеющими потенциала, $Q = Q(t, s)$ – матрица перехода из вращающейся системы координат TRS в инерциальную систему. CRS

1.3 Алгоритмы вычисления возмущающих сил, связанных с несферичностью Земли

Следуя (Аксенов, 1977), потенциал U будем задавать общей формулой

$$V = \frac{GM_{\oplus}}{R_E} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_E}{r} \right)^{n+1} \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi) [\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda] \right\}, \quad (1.11)$$

где R_e – экваториальный радиус Земли; $GM_{\oplus}$ – гравитационный параметр Земли, r , φ , λ – сферические координаты спутника во вращающейся системе координат, жестко связанной с Землей; $\bar{P}_{n,m}(\sin \varphi)$ – полностью нормированные присоединенные функции Лежандра, связанные с классическими $P_{n,m}$ формулой;

$$\bar{P}_{n,m} = N_{n,m} P_{n,m},$$

где

$$N_{n,m} = \sqrt{\frac{(n-m)(2n+1)(2-E_m)}{(n+m)!}},$$

$$E_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases}$$

$\bar{C}_{n,m}$, $\bar{S}_{n,m}$ – числовые коэффициенты, характеризующие структуру гравитационного поля Земли, причем $\bar{S}_{n0} = 0$

Для вычисления составляющих разложения (1.11) и его производных будем использовать рекуррентный алгоритм Л. Каннингема (Бордовицына, Авдюшев, 2007). Для этого введем шаровую функцию

$$\bar{V}_{n,m} \equiv \frac{\bar{P}_{n,m}(\sin \varphi)(\cos m\lambda + i \sin m\lambda)}{r^{n+1}}, \quad (1.12)$$

и перепишем соотношение (1.11) как

$$V = \text{Real} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r_0^n (\bar{C}_{n,m} - i \bar{S}_{n,m}) \bar{V}_{n,m}. \quad (1.13)$$

Выразим прямоугольные координаты x'_1, x'_2, x'_3 через сферические r, λ, φ :

$$\begin{aligned} x'_1 &= r \cos \varphi \cos \lambda, \\ x'_2 &= r \cos \varphi \sin \lambda, \\ x'_3 &= r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.14)$$

а функцию $\bar{V}_{n,m}$ через x'_1, x'_2, x'_3 .

$$\bar{V}_{n,m} = \frac{\bar{P}_{n,m}(\sin \varphi)(x'_1 + ix'_2)^m}{\cos^m \varphi},$$

Шаровые функции $\bar{V}_{n,m}$ и их частные производные по x'_1, x'_2, x'_3 вычисляются с помощью нижеследующих рекуррентных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_{nm} &= \sqrt{\frac{\xi_{m-1}(2n+1)}{\xi_m(2n)}} \frac{x'_1 + ix'_2}{r^2} \bar{V}_{n-1,m-1} \quad (n=m) \\ \bar{V}_{nm} &= \sqrt{\frac{4n^2-1}{n^2-m^2}} \frac{z}{r^2} \bar{V}_{n-1,m} - \sqrt{\frac{(2n+1)((n-1)^2-m^2)}{(2n-3)(n^2-m^2)}} \frac{1}{r^2} \bar{V}_{n-2,m} \quad (n \neq m) \\ \bar{V}_{00} &= \frac{1}{r}, \quad r^2 = \sum_{i=1}^3 x_i'^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_{nm}}{\partial x'_1} &= -\frac{1}{2} \sqrt{X_{nm}} \bar{V}_{n+1,m+1} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_{nm}} \bar{V}_{n+1,m-1}, \\ \frac{\partial \bar{V}_{n0}}{\partial x'_1} &= -\sqrt{X_{n0}} \cdot \text{Real} \bar{V}_{n+1,1}, \\ \frac{\partial \bar{V}_{nm}}{\partial x'_2} &= \frac{i}{2} \sqrt{X_{nm}} \bar{V}_{n+1,m+1} + \frac{i}{2} \sqrt{Y_{nm}} \bar{V}_{n+1,m-1}, \\ \frac{\partial \bar{V}_{n0}}{\partial x'_2} &= -\sqrt{X_{n0}} \cdot \text{Imag} \bar{V}_{n+1,1}, \\ \frac{\partial \bar{V}_{nm}}{\partial x'_3} &= -\sqrt{Z_{nm}} \bar{V}_{n+1,m}, \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

где

$$X_{nm} = \left(\frac{\xi_m}{\xi_{m+1}} \right) \frac{(2n+1)(n+m+1)(n+m+2)}{2n+3} ;$$

$$Y_{nm} = \left(\frac{\xi_m}{\xi_{m-1}} \right) \frac{(2n+1)(n-m+1)(n-m+2)}{2n+3} ;$$

$$Z_{nm} = \frac{(2n+1)(n+m+1)(n-m+1)}{2n+3} ;$$

$$\left(\frac{\xi_m}{\xi_{m+1}} \right) = \begin{cases} 1/2, & m=0 \\ 1, & m>0 \end{cases} ;$$

$$\left(\frac{\xi_m}{\xi_{m-1}} \right) = \begin{cases} 2, & m=1 \\ 1, & m>1 \end{cases} ;$$

1.4 Возмущения от приливных деформаций центрального тела

1.4.1 Вековые изменения

Как известно (IERS, 2010), первые зональные коэффициенты имеют вековое изменение и поэтому для высокоточного прогнозирования нужно учитывать это изменение, которое определяется по формуле

$$\bar{C}_{n0}(t) = \bar{C}_{n0}(t_0) + \frac{d\bar{C}_{n0}}{dt}(t-t_0), \quad (1.17)$$

где $\bar{C}_{n0}(t_0)$ – значение коэффициента на момент $t_0 = J2000.0$, $\frac{d\bar{C}_{n0}}{dt}$ – значения вековых изменений зональных коэффициентов (таблице 1.1).

Таблица 1.1 – Значения вековых изменений первых зональных коэффициентов

Порядок зональной гармоник, n	Значение коэффициентов на $t_0 = J2000.0$	Значение векового изменения, год^{-1}
2	$-0.48416948 \times 10^{-3}$	11.6×10^{-12}
3	0.9571612×10^{-6}	4.9×10^{-12}
4	0.5399659×10^{-6}	4.7×10^{-12}

1.4.2 Возмущения от твердых приливов

Возмущения от приливных деформаций Земли под действие притяжения Луны и Солнца вводятся как поправки в свободные от приливов коэффициенты $\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$ разложения гравитационного поля Земли (1.11). На первом шаге в рамках модели Лява (IERS, 2010) вычисляются поправки, обусловленные частотно независимыми величинами k_{nm} , по формуле:

$$\Delta \bar{C}_{nm} - \Delta \bar{S}_{nm} = \frac{k_{nm}}{2n+1} \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j}{GM_{\oplus}} \left(\frac{R_e}{r_j} \right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\sin \Phi_j) e^{-im\Lambda_j}, \quad (1.18)$$

где k_{nm} – номинальное число Лява степени n , порядка m , R_e , $GM_{\oplus}$ – как и ранее, экваториальный радиус Земли, и гравитационный параметр Земли соответственно, GM_j – гравитационные параметры Луны ($j = 2$) и Солнца ($j = 3$), r_j – расстояние от геоцентра до Луны или Солнца, Φ_j, Λ_j – соответственно широта и долгота Луны или Солнца в геоцентрической системе координат, фиксированной в теле Земли, $\bar{P}_{nm}$ – как и ранее, нормализованные присоединенные функции Лежандра.

Влияние на коэффициенты четвертой степени, производимое приливами второй степени вычисляется также по формуле (1.18), но вместо коэффициентов k_{nm} берутся коэффициенты k_{nm}^+ (IERS, 2010).

На втором шаге учитывается суперпозиция колебаний, связанных с твердым приливом и прецессионно-нутационными колебаниями. Эта часть приливных возмущений задается моделью Вара (Бордовицына и др., 2007). Различие между моделью Вара и Лява вводится в разложение V также в виде поправок к нормализованным гармоническим коэффициентам:

$$\Delta \bar{C}_{2,0} = \text{Re} \sum_{f(2,0)} (A_0 \delta k_f H_f) e^{i\theta_f} = \sum_{f(2,0)} \left[(A_0 \delta k_f^R H_f) \cos \theta_f - (A_0 \delta k_f^I H_f) \sin \theta_f \right], \quad (1.19)$$

$$\Delta \bar{C}_{2m} - i \Delta \bar{S}_{2m} = \eta_m \sum (A_m \delta k_f H_f) e^{i\theta_f}, \quad (m = 1, 2), \quad (1.20)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{R_e \sqrt{4\pi}} = 4.4228 \times 10^{-8} \text{ м}^{-1},$$

$$A_m = \frac{(-1)^m}{R_e \sqrt{8\pi}} = (-1)^m (3.1274 \times 10^{-8}) \text{ м}^{-1}, \quad (m \neq 0),$$

$$\eta_1 = -i, \quad \eta_2 = 1,$$

Здесь $\delta k_f = k_f - k_2$ (k_f – числа из модели Вара, k_2 – номинальное число Лява); H_f – амплитуда членов с индексом f (IERS, 2010);

$$\begin{aligned} \theta_f &= \bar{n} \cdot \bar{\beta} = \sum_{i=1}^6 n_i \beta_i, \\ \theta_f &= m(\theta_g + \pi) - \bar{N} \cdot \bar{F} = m(\theta_g + \pi) - \sum_{j=1}^5 N_j F_j, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где $\bar{N} = \{N_j\}$ – пятимерный вектор множителей к фундаментальным аргументам; $\bar{n} = \{n_j\}$ – шестимерный вектор множителей к переменным Дудсона; $\beta = \{\tau, s, h, p, N', p_s\}$ – переменные Дудсона, связанные с фундаментальными аргументами $F = \{l, l', F, D, \Omega\}$ соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{s} &= F + \Omega = \beta_2, & N &= -\Omega = \beta_5, \\ h &= \bar{s} - D = \beta_3, & \rho_1 &= \bar{s} - D - l' = \beta_6, \\ \rho &= \bar{s} - l = \beta_4, & \bar{\tau} &= h_g + \pi - \bar{s} = \beta_1, \end{aligned} \quad (1.22)$$

h_g – среднее звездное время нулевого меридиана.

Все коэффициенты, необходимые для вычисления поправок к $\bar{C}_{n,m}$ и $\bar{S}_{n,m}$ за счет различия моделей Вара и Лява приведены в IERS Conversation (IERS, 2010).

1.4.3 Возмущения от океанических приливов

Динамический эффект от океанических приливов учитывается в виде периодических вариаций нормализованных гармонических коэффициентов $\bar{C}_{n,m}$, $\bar{S}_{n,m}$. Вариации определяются формулой (IERS, 2010)

$$\Delta\bar{C}_{n,m} - i\Delta\bar{S}_{n,m} = F_{n,m} \sum_{s(n,m)} \sum_{\mp} (C_{s,n,m}^{\pm} \mp iS_{s,n,m}^{\pm}) e^{\pm i\theta_s}, \quad (1.23)$$

где

$$F_{n,m} = \frac{4\pi f \rho_{\omega}}{g} \left[\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0,m})} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+k'_n}{2n+1} \right);$$

$g = 9.798261 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$; f – универсальная гравитационная постоянная, равная $6.672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$; ρ_{ω} – плотность морской воды, $\rho_{\omega} = 1025 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$; k_n – нагрузочные деформационные коэффициенты ($k'_2 = -0.3075$, $k'_3 = -0.195$, $k'_4 = -0.132$, $k'_5 = -0.1032$, $k'_6 = -0.0892$); $C_{s,n,m}^{\pm}$, $S_{s,n,m}^{\pm}$ – океанические приливные коэффициенты по m для приливной составляющей s ; θ_s – аргумент приливной составляющей s , определенный формулой (1.21).

При вычислении суммы $\sum_{\mp}$ выбор верхнего знака означает суммирование выражений, связанных с наступающими волнами $C_{s,n,m}^{+}$ и $S_{s,n,m}^{+}$, выбор нижнего знака выражений, связанных с отступающими волнами $C_{s,n,m}^{-}$, $S_{s,n,m}^{-}$. Для удобства вычисления соотношения (1.23) могут быть записаны в нижеследующей форме:

$$\Delta\bar{C}_{n,m} = F_{n,m} \sum_{s(n,m)} [(C_{s,n,m}^{+} + C_{s,n,m}^{-}) \cos \theta_s + (S_{s,n,m}^{+} + S_{s,n,m}^{-}) \sin \theta_s] \quad (1.24)$$

$$\Delta\bar{S}_{n,m} = F_{n,m} \sum_{s(n,m)} [(S_{s,n,m}^{+} - S_{s,n,m}^{-}) \cos \theta_s - (C_{s,n,m}^{+} - C_{s,n,m}^{-}) \sin \theta_s]. \quad (1.25)$$

Коэффициенты $C_{s,n,m}^{\pm}$, $S_{s,n,m}^{\pm}$ и числа Дудсона для вычисления θ_s определяются используемой приливной моделью и их можно найти на сервере ftp.csr.utexas.edu.

1.4.4 Возмущения от полюсного прилива

В IERS соглашении 2000 г. предлагается учитывать влияние от твердотельного полюсного прилива по формуле:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{C}_{2,1} &= -1.333 \times 10^{-9} (m_1 + 0.0155 m_2) \\ \Delta\bar{S}_{2,1} &= -1.333 \times 10^{-9} (m_2 - 0.0155 m_1) \end{aligned},$$

где

$$\begin{aligned} m_1 &= (x_p - \bar{x}_p) \\ m_2 &= -(y_p - \bar{y}_p)' \end{aligned} \quad (1.26)$$

причем

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_p(t_0) + (t - t_0)\dot{\bar{x}}_p(t_0), \quad \bar{y}(t) = \bar{y}_p(t_0) + (t - t_0)\dot{\bar{y}}_p(t_0).$$

Коэффициенты и скорости среднего полюса определены, как $\bar{x}_p(t_0) = 0.054$, $\dot{\bar{x}}_p(t_0) = 0.00083$, $\bar{y}_p(t_0) = 0.357$, $\dot{\bar{y}}_p(t_0) = 0.00395$; t_0 – J2000.0. В последнем IERS соглашении (IERS, 2010) предлагается более точная формула определения координат среднего полюса $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, которая позволяет учитывать вековые изменения до 10^{-3} угловых секунд.

$$\bar{x}_p = \sum_{i=0}^3 (t - t_0)^i \times \bar{x}_p^i, \quad \bar{y}_p = \sum_{i=0}^3 (t - t_0)^i \times \bar{y}_p^i. \quad (1.27)$$

Координаты среднего полюса $\bar{x}_p, \bar{y}_p$ измеряются в секундах дуги, а $\dot{\bar{x}}_p, \dot{\bar{y}}_p$ – в секундах дуги в год (таблица 1.2); t_0 – J2000.0.

Таблица 1.2 – Скорости изменения координат среднего полюса

Степень i	До 01.01.2010 г.		После 01.01.2010 г.	
	$\bar{x}_p^i$, уг. сек/год	$\bar{y}_p^i$, уг. сек/год	$\bar{x}_p^i$, уг. сек/год	$\bar{y}_p^i$, уг. сек/год
0	55.974	346.346	23.513	358.891
1	1.8243	1.7896	7.6141	-0.6287
2	0.18413	-0.10729	0.0	0.0
3	0.007024	-0.000908	0.0	0.0

1.4.5 Возмущения от океанического полюсного прилива

Формулы для учета влияния океанического полюсного прилива на гармонические коэффициенты появились в последнем IERS соглашении

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{C}_{n,m} \\ \Delta \bar{S}_{n,m} \end{bmatrix} = R_n \left\{ \begin{bmatrix} \bar{A}_{n,m}^R \\ \bar{B}_{n,m}^R \end{bmatrix} (m_1 \gamma_2^R + m_2 \gamma_2^I) + \begin{bmatrix} \bar{A}_{n,m}^I \\ \bar{B}_{n,m}^I \end{bmatrix} (m_2 \gamma_2^R - m_1 \gamma_2^I) \right\}, \quad (1.28)$$

где

$$R_n = \frac{\Omega^2 a_E^4}{GM} \frac{4\pi G \rho_\omega}{g_e} \left\{ \frac{1 + k'_n}{2n + 1} \right\}$$

$g_e = 9.798261 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$; G – универсальная гравитационная постоянная, равная $6.672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$; a_E – астрономическая единица; ρ_ω – плотность морской воды, $\rho_\omega = 1025 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$; k_n – нагрузочные деформационные коэффициенты ($k'_2 = -0.3075$, $k'_3 = -0.195$, $k'_4 = -0.132$, $k'_5 = -0.1032$, $k'_6 = -0.0892$); $GM_\oplus$ – геоцентрическая гравитационная постоянная; $\gamma = \gamma_2^R + i\gamma_2^I = (1 + k_2 - h_2) = 0.6870 + i0.0036$. Коэффициенты $\bar{A}_{n,m} = \bar{A}_{n,m}^R + i\bar{A}_{n,m}^I$, $\bar{B}_{n,m} = \bar{B}_{n,m}^R + i\bar{B}_{n,m}^I$ определены до 360 порядка и степени в [3].

Вклад от влияния океанического полюсного прилива на коэффициенты гармоник до 2 порядка дает приблизительно 90 % от всего вклада океанического полюсного прилива (рисунок 1.1), а 99 % влияние океанического полюсного прилива дает учет поправок для коэффициентов гармоник до 10 порядка.

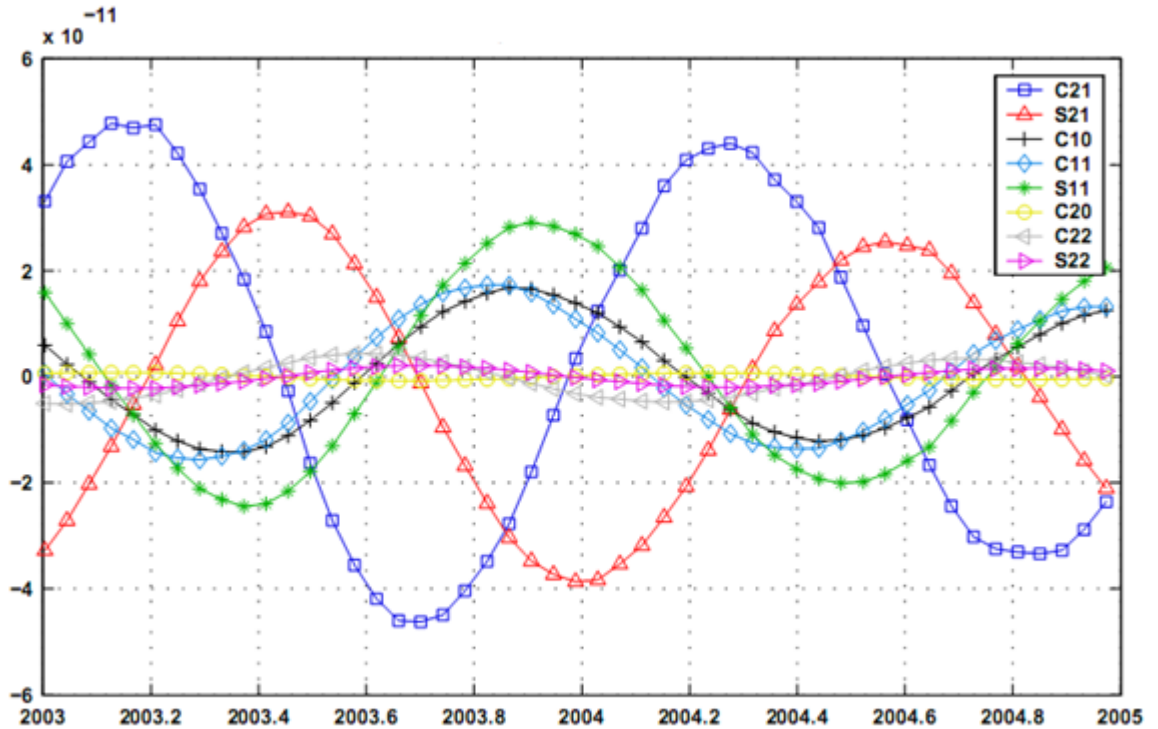


Рисунок 1.1 – Изменение первых коэффициентов гармоник за счет влияния океанического полюсного прилива.

1.5 Возмущения от третьего тела

При наличии в движении ИСЗ возмущений от третьего тела в уравнениях движения появляется сила, определяемая формулой (Бордовицына, Авдюшев, 2007)

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \mu' \left(\frac{\tilde{x}_i - x_i}{\Delta^3} - \frac{\tilde{x}_i}{r'^3} \right), \quad (1.29)$$

где $\Delta = \sqrt{(\tilde{x}_1 - x_1)^2 + (\tilde{x}_2 - x_2)^2 + (\tilde{x}_3 - x_3)^2}$ – расстояние от спутника до возмущающего тела; $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ – вектор положения возмущающего тела; $r' = |\tilde{x}|$, а μ' – произведение универсальной гравитационной постоянной на массу возмущающего тела. Отношение массы Солнца к массам больших планет задано в IERS соглашении 2010 года (IERS, 2010).

Для определения координат больших планет и Луны, в IERS соглашении 2010 года рекомендуется использовать эфемериды больших планет из фонда DE421/LE421. Ошибка в представлении координат больших планет и Луны в этом фонде имеет порядок одной миллисекунды дуги (Folkner and el, 2009).

Кроме того, необходимо рассматривать влияние на спутник Земли сжатия Луны. Эта поправка вводится в уравнения движения как разность точечного и полного потенциалов Луны, причем для учета влияния точечного потенциала используется формула (1.29). Коэффициенты гармоник разложения потенциала Луны приведены на сайте NASA <http://pds-geosciences.wustl.edu/missions/lunarp/shadr.html>.

1.6 Возмущения от светового давления

Перейдем к рассмотрению негравитационных возмущений, действующих на ИСЗ. Одним из таких возмущений является световое давление. Будем предполагать, что мощность потока солнечной радиации постоянна, сила светового давления всегда направлена по линии Земля-Солнце, орбита Земли круговая, спутник имеет сферическую форму. При этих предположениях сила прямого светового давления Солнца на спутник может быть задана формулой

$$P = L \frac{x}{|x|} - L \left(\frac{\dot{x} \cdot x}{c|x|} \frac{x}{|x|} + \frac{x}{c} \right), \quad (1.30)$$

$$L = \kappa \theta \frac{a_E^2}{|x|^2} \frac{\sigma}{m},$$

где c – скорость света; $\kappa = 1367 \text{ Вт/м}^2$ – солнечная постоянная (IERS, 1992); θ – постоянная, характеризующая отражающие свойства спутника ($\theta = 1$ соответствует зеркальному отражению); a_E – большая полуось Земли; σ и m – площадь миделева сечения, отнесенная к плоскости, перпендикулярной гелиоцентрическому вектору положения, и масса исследуемого объекта соответственно. Первая часть в формуле (1.30) отвечает за световое давление, вторая – за эффект Пойнтинга—Робертсона (Robertson, 1937). Влияние радиационного давления на спутник будет не точным, если не учитывать моменты пересечения орбиты спутника тени Земли. Поэтому формулу (1.30) нужно дополнить параметром функции тени Φ

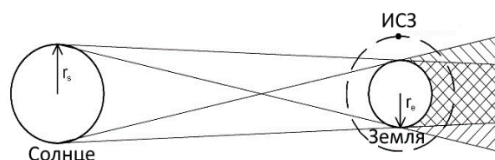
Если рассматривать с исторической точки зрения, то, наверное, первая функция тени и, следовательно, световая модель возникли сразу после запуска первого искусственного спутника (Polyakhova, 1963, Ferraz, 1963, 1966). Условно ее можно назвать «цилиндрической» (рис 1.2а), так как созданная Солнцем тень имеет цилиндрическую форму и четкую выраженную границу тени и света, а сама функция тени Φ ведёт себя как функция Хевисайда (ступенчатая функция):

$$\Phi = \begin{cases} 1, & r > r_E + r_S \\ 0, & r \leq r_E + r_S \end{cases} \quad (1.31)$$

где r – это угол, образованный между Солнцем, объектом и Землей; r_E и r_S – угловые размеры Земли и Солнца, соответственно, видимые с исследуемого объекта. Такой подход очень простой в реализации, однако грубо описывает физический процесс, происходящий в реальности.



а) «цилиндрическая» световая модель



б) «конусная» световая модель

Рисунок 1.2 – Геометрическая интерпретация световых моделей:
а) «цилиндрическая» световая модель; б) «конусная» световая модель

Разработка следующей световой модели связана с появлением быстродействующих ЭВМ. Эта модель (Бордовицына, 1992) отличается от предыдущей наличие полутени и условно которую можно назвать «конусная» световая модель (рис 1.2б), так как форма

тени напоминает конус. Функция тени Φ для данной световой модели имеет вид (Авдюшев, 2010)

$$\Phi = \begin{cases} 1, & \text{если } r > r_E + r_S \\ 1 - \frac{s_{SE}}{s}, & \text{если } r > |r_S - r_E| \\ 0, & \text{если } r < |r_S - r_E| \end{cases} \quad (1.32)$$

где s и s_{SE} – площадь дисков Солнца и площадь дисков пересечения Солнца и Земли, соответственно:

$$s = \pi r_S^2, s_{SE} = \frac{r_S^2}{2}(\varphi_S - \sin \varphi_S) + \frac{r_E^2}{2}(\varphi_E - \sin \varphi_E) \quad (1.33)$$

Величины φ_S и φ_E – это углы между радиальным направлением из центров дисков в точки пересечения их границ и они определяются, как

$$\varphi_S = 2 \arccos \left(\frac{r^2 + r_S^2 - r_E^2}{2rr_S} \right), \varphi_E = 2 \arccos \left(\frac{r^2 + r_E^2 - r_S^2}{2rr_E} \right) \quad (1.34)$$

Обычно для моделирования движения околоземных объектов применяют эти две представленные модели. Однако, для высокоточного численного моделирования, как пример «Численная модель движения систем ИСЗ и КА», нужно использовать модель, которая будет не только учитывать полутень от Земли, но и принимать во внимание двойное преломление солнечных лучей в земной атмосфере и сжатие Земли (рис 1.3). Все основные формулы и их вывод можно найти в работах (Vokrouhlicky and el, 1993a, Vokrouhlicky and el, 1993b, Vokrouhlicky and el, 1993c, Vokrouhlicky and el, 1996). В этой работе мы ограничимся, только основными выкладками и небольшими комментариями.

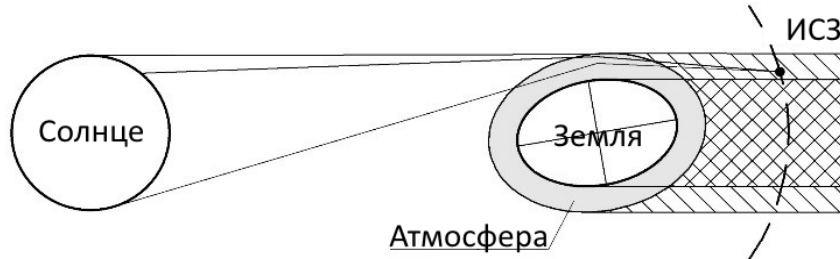


Рисунок 1.3 – Световая модель околоземного объекта, учитывающая двойное преломление света в атмосфере Земли и её несферичность.

Солнечное затмение на спутнике можно разделить на несколько стадий (рис 1.4):

$r < r_{A1}$; фаза 0. Нулевая фаза продолжается, пока спутник находится на Солнце. Этот момент длится до тех пор, пока край диска Солнца не коснется края атмосферы (рис 1.4a). За край атмосферы принято считать высоту, на которой коэффициент преломления света становится меньше единицы (42.6 километра).

Далее, при прохождении солнечных лучей сквозь атмосферу Земли происходит искажение диска Солнца, а вследствие этого изменения его геометрических размеров и уменьшение потока радиационного давления на объект. В этом процессе можно выделить две стадии.

$r_{A1} \leq r < r_{A2}$; фаза 1. Первая фаза продолжается до тех пор, пока диск Солнца не будет полностью погружен в атмосферу Земли (рис 1.4б).

$r_{A2} \leq r < r_P$; фаза 2. Вторая фаза – пока искаженный диск Солнца не коснется поверхности Земли (рис 1.4в). За это время происходит сильное преломление солнечных

лучей в плотных слоях атмосферы, что приводит к еще большему уменьшению радиационного давления.

$r_p \leq r < r_s$; фаза 3. После этого наступает «истинная полутьма» – явление, когда диск Солнца перекрывается диском Земли (рис 1.4г). С момента захода Солнца за поверхность Земли, наступает ночь.

Выход из тени Земли аналогичен описанному выше процессу только в обратном порядке.

Углы r_{A1}, r_{A2}, r_p и r_s определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} r_{A1} &= \frac{\pi}{2} - \Lambda_+ (\Psi_T; d_E; R_\odot; R) \\ r_{A2} &= \frac{3\pi}{2} - \Lambda_- (\Psi_T; d_E; R_\odot; R) \\ r_p &= \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{Re}(0) - \Lambda_+ (\Psi_0; d_E; R_\odot; R) \\ r_s &= \frac{3\pi}{2} + 2 \operatorname{Re}(0) - \Lambda_- (\Psi_0; d_E; R_\odot; R) \end{aligned} \quad (1.35)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_\pm (\Psi; d_E; R_\odot; R) &= \arcsin \left\{ \frac{\Psi}{d_E} \frac{p_2}{p'_2 p'_4} \left(p_1 + \frac{\Psi}{R} \right) \mp \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Psi}{d_E} \frac{p_2}{p'_2} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{p_1}{p'_4} \pm \frac{\Psi}{R} \right)^2 \right]} \right\}, \\ p_1 &= \frac{R_\odot}{R}, p_2 = \frac{d_E}{R} \\ \Psi &= \left(p'_3 + \frac{h_T}{R} \right) \frac{\kappa(h_T) d_E}{p'_2} \end{aligned} \quad (1.36)$$

причем d_E – геоцентрическое расстояние спутника; R – геоцентрическое расстояние Солнца; $R_\odot$ – радиус Солнца; $\operatorname{Re}(0)$ – коэффициент преломления воздуха на поверхности Земли; $\kappa(h_T)$ – индекс преломления на высоте $h_T = 42,6$ км;

$p'_3 = \frac{R_E (1-e^2)}{R} \left(\cos^2 \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{1-e^2} \right)^{3/2}$ – угловой размер сжатой Земли.

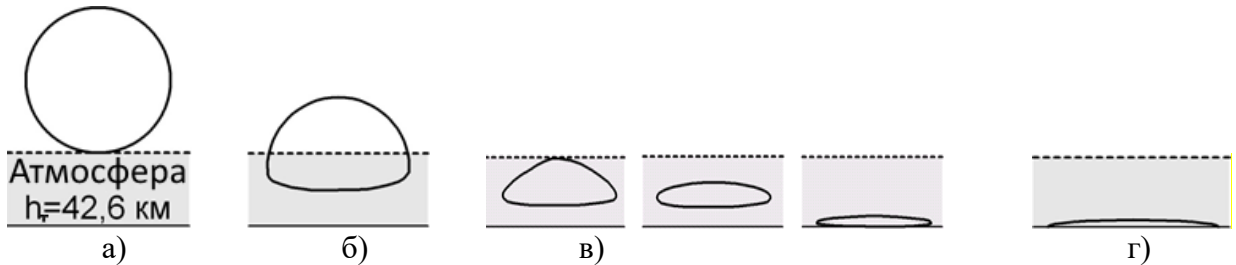


Рисунок 1.4 Преломление солнечных лучей в атмосфере Земли. а) край диска Солнца касается края атмосферы; б) – в) затмение Солнца атмосферой; г) затмение Солнца поверхностью Земли.

Так как солнечные лучи преломляются в атмосфере, изменение площади диска Солнца в атмосфере пропорционально потере интенсивности солнечной радиации, следовательно, нахождение функции тени сводится к нахождению отношения площади

диска Солнца в каждой фазе солнечного затмения к площади солнечного диска без ущерба. Определение площади сводится к нахождению углов преломления двух крайних лучей Солнца $\theta_{\pm 1}$ (рис 1.3).

$$\theta_{\pm 1} = \arcsin\left(\frac{\Psi_{\pm 1}}{r}\right) \quad (1.37)$$

причем

$$\frac{\Psi_{\pm 1}}{r} = \sin \varpi(h) \sqrt{\zeta(p'_2, p'_4, h) - \left(\frac{r_S}{p'_4}\right)^2} \pm \left(\frac{r_S}{p'_4}\right)^2 \left(\frac{p'_2 - p'_4 \cos \varpi(h)}{\zeta(p'_2, p'_4, h)}\right) \quad (1.38)$$

$$\zeta(p'_2, p'_4, h) = 1 + \left(\frac{p'_2}{p'_4}\right)^2 - 2 \frac{p'_2}{p'_4} \cos \varpi(h),$$

где $\varpi(h) = r - 2\text{Re}(h)$ – «истинный» центр диска Солнца с учетом двойного преломления в атмосфере Земли $\text{Re}(h)$ на высоте h ; $p_2'^2 = p_2^2 + p_n^2 + p_m^2 - 2p_2(p_m \cos \varphi + p_n \sin \varphi)$ – угловое расстояние от центра объекта до центра геоида; $p_4'^2 = 1 + p_m^2 + p_n^2 - 2[p_m \cos(\varphi + r) + p_n \sin(\varphi + r)]$ – угловое расстояние от центра Солнца до центра геоида; φ – широта подспутниковой точки объекта; r – угловое расстояние между Солнцем и Землей с орбиты спутника; r_S – угловой размер диска Солнца с орбиты спутника. Коэффициенты p_m, p_n вычисляются следующим образом:

$$p_m = \frac{R_E e^2 \cos^3 \lambda}{R}, \quad p_n = \frac{-R_E \sin^3 \lambda}{R} \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}},$$

где R_E – радиус Земли; R – геоцентрическое расстояние до Солнца; e – эксцентриситет Земли; λ – долгота подспутниковой точки объекта.

Трудность в вычислении углов $\theta_{\pm 1}$ (1.38) заключается в нахождении $\text{Re}(h)$ углов преломления на высоте h . Чтобы его определить, нужно объединить формулы (1.36) и (1.38) и решить его относительно h

$$\sin \varpi(h) \sqrt{\zeta(p'_2, p'_4, h) - \left(\frac{r_S}{p'_4}\right)^2} \pm \left(\frac{r_S}{p'_4}\right)^2 \left(\frac{p'_2 - p'_4 \cos \varpi(h)}{\zeta(p'_2, p'_4, h)}\right) - \left(\frac{p'_3 + h}{p'_2 R}\right) \kappa(h) d_E = 0, \quad (1.39)$$

где

$$\kappa(h) = 1 + \alpha \left(1 - 2\gamma^2 \frac{h}{R_{\oplus} + h}\right)^n \quad (1.40)$$

причем $\kappa(h)$ – индекс преломления на высоте h определяем по алгоритму предложенному Галфинкелом (Garfinkel, 1967); n – политропный индекс равный 4.256; α – индекс преломления на высоте $h=0$ над уровнем моря и равный 0.00029241; $2\gamma^2 = \frac{g_0 R_{\oplus}}{(n+1) \Re T_0}$ –

константа равная 151.687; знак $\pm$ – указывает на угол $\theta_{\pm 1}$; $R_{\oplus}$ – радиус Земли. Трансцендентное уравнение (1.39) можно решить с помощью метода дихотомии (метода половинного деления). Процесс достаточно быстро сходится, за 5-6 итераций. В качестве начальных значений можно взять значения функции (1.38) на отрезке $h \in [0, h_T]$.

Однако для нахождения индекса преломления $\text{Re}(h)$ можно не использовать сложные алгоритмы, а воспользоваться упрощенной формулой (<http://www.esrl.noaa.gov/gmd/grad/solcalc/calcdetails.html>)

$$\text{Re}(h) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \geq 85^\circ \text{ и } z < 90^\circ \\ \frac{1}{3600''} \left[\frac{58.1''}{\tan(z)} - \frac{0.07''}{\tan^3(z)} + \frac{0.000086''}{\tan^5(z)} \right], & \text{если } z \geq 5^\circ \text{ и } z < 85^\circ \\ \frac{1}{3600''} (1735'' - 518.2''z + 103.4''z^2 - 12.79''z^3 + 0.711''z^4), & \text{если } z \geq -0.575^\circ \text{ и } z < 5^\circ \\ \frac{1}{3600''} \left(\frac{-20.774''}{\tan(z)} \right), & \text{если } z < -0.575^\circ \end{cases} \quad (1.41)$$

где z – зенитный угол вычисляемый следующим образом

$$z = \arccos(\sin(\varphi)\sin(\delta) + \cos(\varphi)\cos(\delta)\cos(h)),$$

причем $h = s + \lambda - \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ – часовой угол, s – звездное время, $\delta = \arcsin\left(\frac{z}{R}\right)$.

$$\Phi = \begin{cases} 1, & \text{если } h_{+1} \geq h_T \\ \frac{s_{EL}}{s}, & \text{если } h_{+1} < h_T \text{ и } h_{-1} \geq 0 \\ \frac{s_{EL} - s_{ELS}}{s}, & \text{если } h_{+1} > 0 \text{ и } h_{-1} < 0 \\ 0, & \text{если } h_{+1} \leq 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

где $s_{EL} = \pi r_S \frac{\theta_{+1} - \theta_{-1}}{2}$ – площадь эллипса диска Солнца (1.33), s_{ELS} – площадь ущерба эллипса диска Солнца, вследствие его затмения диском Земли. Для того чтобы определить s_{ELS} нужно определить точки пересечения окружности (диск Земли) и эллипса (диск Солнца), для этого нужно совместно решить два уравнения: уравнение эллипса и уравнение окружности (рис 1.5):

$$\begin{cases} x_I^2 + y_I^2 = r_E^2 \\ \frac{(x_I + r)^2}{r_S^2} + \frac{2y_I^2}{\theta_{+1} - \theta_{-1}} = 1 \end{cases}$$

решая эту систему квадратных уравнений, мы определим два корня x_I^1, x_I^2 , выбирая корень который меньше r_E , находим радиус вектор от центра эллипса к точкам пересечения эллипса и окружности с помощью простых преобразований.

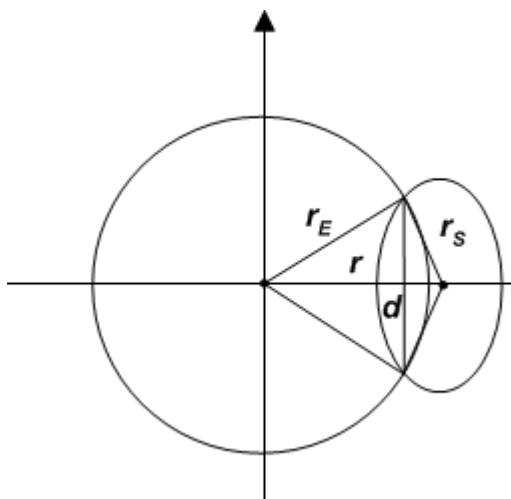


Рисунок 1.5 – Пересечение окружности и эллипса

Поведение функции тени на примере спутника Лагеос показано на рисунке 1.6, где SL_{CYLIN} – «цилиндрическая» модель, SL_{CONE} – «конусная» модель, SL_{ATM} – модель, учитывающая атмосферу и сжатие Земли. Видно, что при использовании полной световой модели поток радиационного давления, приходящего с Солнца, начинает уменьшаться раньше по причине перекрытия диска Солнца земной атмосферой, и затмение продолжается дольше из-за двойного преломления солнечных лучей в атмосфере. При таком подходе происходит в два раза больше обращений к правым частям дифференциальных уравнений в численной модели (рис 1.7), что приводит к падению быстродействия. Связано это с тем, что

интегратор, используемый в численной модели, пересчитывает шаг интегрирования при быстром изменении правых частей. Так как процесс длится не продолжительное время - примерно 30 секунд, то и падение быстродействия наблюдается только на этом интервале времени.

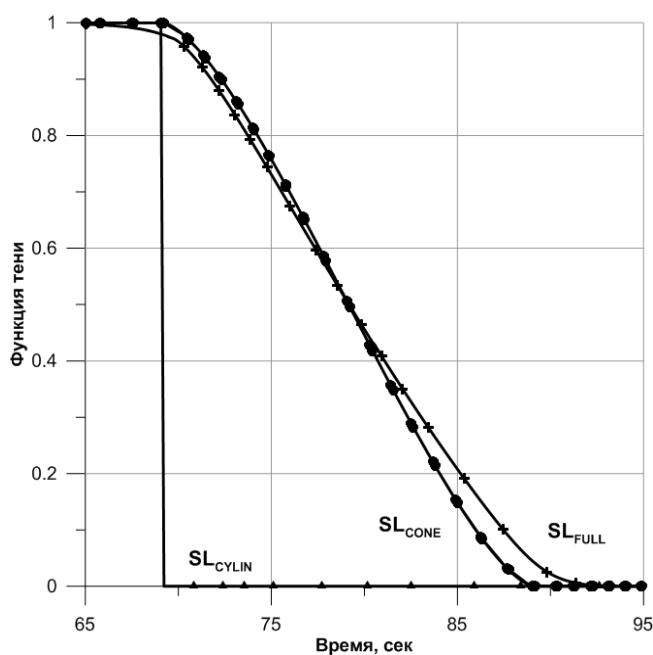


Рисунок 1.6 – Поведение функции тени Φ при различных световых моделях: SL_{CYLIN} – «цилиндрическая» модель, SL_{CONE} – «конусная» модель, SL_{ATM} – модель, учитывающая атмосферу и сжатие Земли

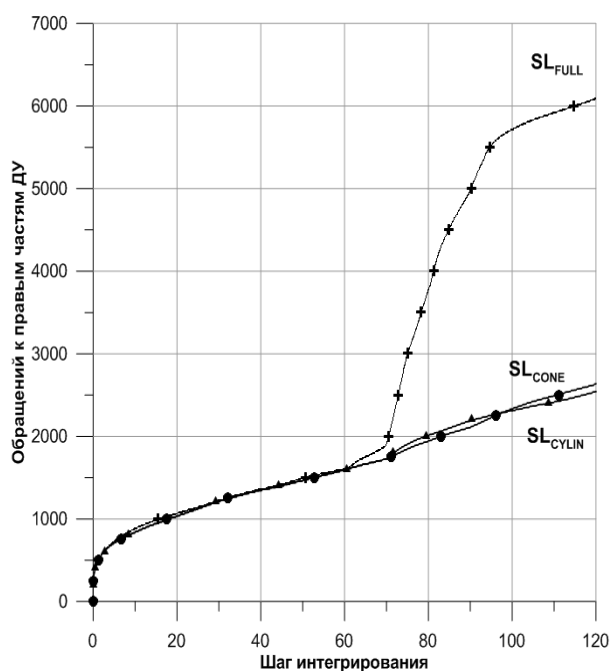


Рисунок 1.7 – Быстродействие численной модели в зависимости от используемой световой модели: SL_{CYLIN} – «цилиндрическая» модель, SL_{CONE} – «конусная» модель, SL_{ATM} – модель, учитывающая атмосферу и сжатие Земли

В таблице 1.3 показан вклад в движение каждой модели светового давления. Эксперимент проводился на 10 оборотах ИСЗ Лагеоса, на каждом обороте объект пересекал тень от Земли. В эксперименте проводилась оценка вклада световой модели в движение спутника. Видно, что модель, учитывающая атмосферу и сжатие Земли, дает значительный вклад в движение объекта в отличие от двух первых моделей. Это отличие

объясняется тем, что затмение для последней модели длится в полтора раза дольше, чем для «конусной» модели (рис 1.4). Поэтому интегратор успевает почувствовать быстрое изменение правых частей дифференциальных уравнений движения искусственного спутника Земли (рис 1.7) и уменьшить шаг интегрирования, что приводит к увеличению точности, но к уменьшению быстродействия. Для более простых моделей светового давления в программном комплексе интегрируются уравнения движения с большим шагом, пропускается быстрого изменения правых частей уравнения и, следовательно, «конусная» и «цилиндрическая» световая модель на этом интервале времени ведут себя примерно одинаково.

Таблица 1.3 – Влияние светового давления на движение спутника Лагос

	Влияние на движение, см
SL _{CYLIN}	10.555
SL _{CONE}	12.135
SL _{ATM}	12.643

Точно такой же вклад вносят световые модели, когда мы пытаемся с помощью численной модели движения уточнить координаты спутника Лагос на интервале времени 10 оборотов (таблице 1.4).

Таблица 1.4 – Влияние светового давления на определения положения спутника Лагос

	Влияние на движение, см
SL _{CYLIN}	8.168
SL _{CONE}	6.846
SL _{ATM}	6.008

Используя представленную световую модель, ошибка определения положения спутника уменьшалась почти в два раза, что является довольно хорошим результатом.

1.7 Релятивистские эффекты

Релятивистские поправки правых частей уравнений движения, записанных в геоцентрической системе координат, могут быть представлены согласно (Brumberg V.A., Ivanova , 2007) в виде

$$\Delta \ddot{x} = c^{-2} \sum_{n=1}^6 \Phi_n, \quad \Phi_n = \{\Phi_{n1}, \Phi_{n2}, \Phi_{n3}\}. \quad (1.42a)$$

Здесь c – скорость света; Φ_1 – шварцшильдовские возмущения, определяемые полем тяготения Земли, рассматриваемой как сферически-симметричное тело; Φ_2 – эффекты лenze-терринговской прецессии, порожденной вращением Земли; Φ_3 – релятивистские квадрупольные члены; обусловленные наличием у Земли моментов инерции второго порядка; Φ_4 – релятивистские члены, обусловленные взаимодействием Земли и внешних масс (Луны–Л, Солнца–С), они описывают нелинейную суперпозицию гравитационных полей Земли и внешних масс; Φ_5 – релятивистские члены, которые можно интерпретировать как приливные возмущения от внешних масс; Φ_6 – поправки к ньютоновским возмущениям от внешних масс. Формулы для вычисления релятивистских ускорений Φ_n можно найти в (Брумберг, 1972). Следует сказать, что только шварцшильдовские возмущения заметно проявляются в движении ИСЗ, попытки выявить

эффекты лenze-терринговской прецессии в движении спутников Лагеос и Лагеос II пока большим успехом не увенчались (Iorio, 2006, Iorio, 2010). Произошло это, прежде всего, из-за неизученности вековых изменений зональных коэффициентов гравитационного поля Земли, имеющих тот же или больший порядок влияния на движения спутника, чем тестируемые эффекты. Влияние всех остальных релятивистских возмущений еще меньше.

1.8 Структура возмущений для спутника ГЛОНАСС на 1 обороте и на 60 оборотах (30 суток)

На рисунке 1.8 представлена оценка влияния возмущающих факторов на движение спутника системы ГЛОНАСС на интервале времени равном одному обороту.

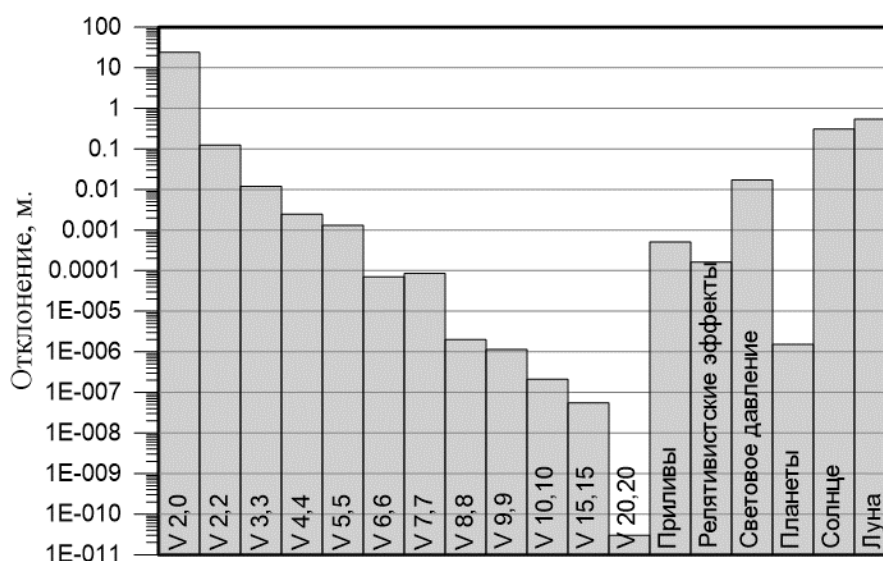


Рисунок 1.8 – Оценка влияния возмущающих факторов на движение спутника системы ГЛОНАСС на интервале времени 1 оборот.

На рисунке 1.9 представлена оценка влияния возмущающих факторов на движение спутника системы ГЛОНАСС на интервале времени равном 60 оборотов.

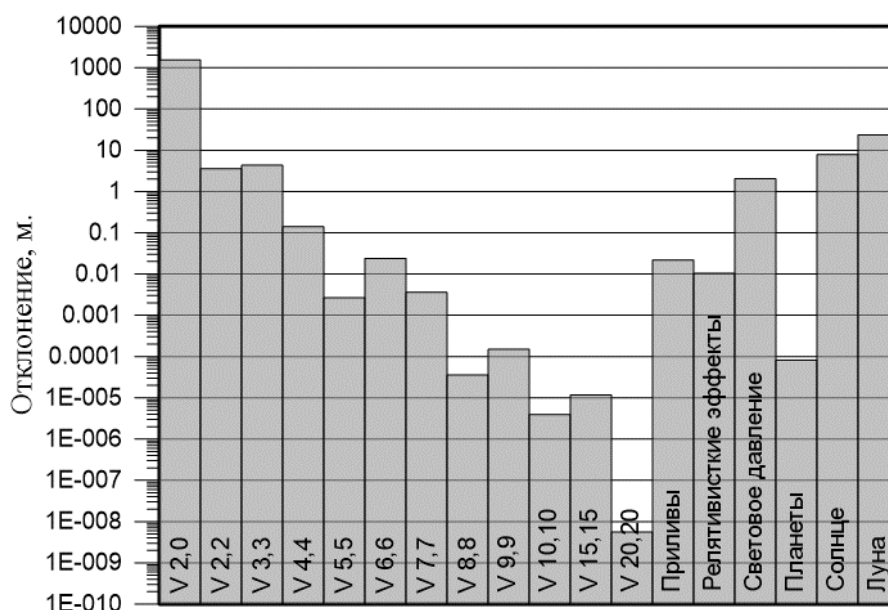


Рисунок 1.9 – Оценка влияния возмущающих факторов на движение спутника системы ГЛОНАСС на интервале времени 60 оборотов.

Из рисунков 1.8 и 1.9 видно, что наиболее весомыми являются влияние гармоник V 2.0, V 2.2, V 3.3, а также влияние Солнца, Луны и светового давления. Для поддержания необходимой точности решения, также необходимо учитывать гармоники V 3.3, V 4.4, V 5.5, V 6.6, V 7.7, а также влияние приливов, релятивистских эффектов и планет.

Гармониками выше 15 порядка и степени можно пренебречь из-за того, что они мало влияют на результат, и вносят свою дополнительную ошибку в результат. Структура влияния возмущающих факторов идентичны на разные промежутки времени, меняется только величина влияния.

1.9 Методы численного интегрирования

В 1973 г. Э. Эверхарт (Everhart, 1974) предложил интегратор, разработанный автором специально для численного исследования орбит, и продемонстрировал его высокую эффективность в задачах кометной динамики. По-видимому, обнаружив в дальнейшем принадлежность своего интегратора к семейству интеграторов типа Батчера, Эверхарт акцентировал внимание на оригинально реализованный им алгоритм интегрирования и обобщил его для численного решения любых обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков (Everhart, 1974). Тем самым ему удалось расширить область применения своего интегратора, который, тем не менее, остается одним из самых популярных именно в решении задач небесной механики.

1.9.1 Основные формулы

Предположим, на шаге h мы решаем задачу:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0). \quad (1.43)$$

Здесь t — независимая переменная, $\mathbf{q}$ — интегрируемые переменные, а $\mathbf{Q}$ — заданная вектор-функция t и $\mathbf{q}$. Введем переменную $\tau = (t - t_0)/h$ и представим правую часть уравнений (2.1) в виде полинома степени k :

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{1}{h} \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{A}_1\tau + \mathbf{A}_2\tau^2 + \mathbf{A}_3\tau^3 + \dots + \mathbf{A}_k\tau^k, \quad (1.44)$$

где коэффициенты $\mathbf{A}_i$ пока не определены. Интегрируя (1.44) по τ , получаем решение

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + h \left(\mathbf{Q}_0\tau + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1\tau^2 + \frac{1}{3}\mathbf{A}_2\tau^3 + \frac{1}{4}\mathbf{A}_3\tau^4 + \dots + \frac{1}{k+1}\mathbf{A}_k\tau^{k+1} \right). \quad (1.45)$$

Перепишем правую часть (1.44) в виде интерполяционного многочлена Ньютона на сетке $\tau_1, \dots, \tau_k$ ($\tau_0 = 0$):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau(\tau - \tau_1) + \alpha_3\tau(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2) + \dots + \alpha_k\tau(\tau - \tau_1)\dots(\tau - \tau_{k-1}). \quad (1.46)$$

Из соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{Q}_0 + \alpha_1\tau_1, \\ \mathbf{Q}_2 &= \mathbf{Q}_0 + \alpha_1\tau_2 + \alpha_2\tau_2(\tau_2 - \tau_1), \\ \mathbf{Q}_3 &= \mathbf{Q}_0 + \alpha_1\tau_3 + \alpha_2\tau_3(\tau_3 - \tau_1) + \alpha_3\tau_3(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2), \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.47)$$

получаем конечные разности α_i :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0) / \tau_1, \\ \alpha_2 &= ((\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0) / \tau_2 - \alpha_1) / (\tau_2 - \tau_1), \\ \alpha_3 &= (((\mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_0) / \tau_3 - \alpha_1) / (\tau_3 - \tau_1) - \alpha_2) / (\tau_3 - \tau_2), \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.48)$$

В свою очередь, сравнивая (1.46) и (1.48), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \alpha_1 + (-\tau_1)\alpha_2 + (\tau_1\tau_2)\alpha_3 + \dots + (-1)^{k-1}(\tau_1\dots\tau_{k-1})\alpha_k, \\ \mathbf{A}_2 &= \alpha_2 + (-\tau_1 - \tau_2)\alpha_3 + \dots, \\ &\dots \\ \mathbf{A}_k &= \alpha_k, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \dots + c_{k1}\alpha_k, \\ \mathbf{A}_2 &= c_{22}\alpha_2 + \dots + c_{k2}\alpha_k, \\ &\dots \\ \mathbf{A}_k &= c_{kk}\alpha_k. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Тогда обратный переход от $\mathbf{A}$ к α можно представить как

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= d_{11}\mathbf{A}_1 + d_{21}\mathbf{A}_2 + \dots + d_{k1}\mathbf{A}_k, \\ \alpha_2 &= d_{22}\mathbf{A}_2 + \dots + d_{k2}\mathbf{A}_k, \\ &\dots \\ \alpha_k &= d_{kk}\mathbf{A}_k. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Коэффициенты c_{ij} и d_{ij} являются числами Стирлинга, которые вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_{ii} = d_{ii} = 1, \quad c_{i0} = d_{i0} = 0 \quad (i > 0), \\ c_{ij} = c_{i-1,j-1} - \tau_{i-1}c_{i-1,j}, \quad d_{ij} = d_{i-1,j-1} - \tau d_{i-1,j} \quad (i > j > 0). \end{aligned} \quad (1.51)$$

В соответствии с (1.44) каждый коэффициент c_{ij} представляет собой сумму всевозможных произведений $i - j$ величин $\tau_1, \dots, \tau_{i-1}$ со знаком $(-1)^{i-j}$. Например,

$$c_{62} = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4 + \tau_1\tau_2\tau_3\tau_5 + \tau_1\tau_2\tau_4\tau_5 + \tau_1\tau_3\tau_4\tau_5 + \tau_2\tau_3\tau_4\tau_5.$$

Отсюда согласно теореме Виета значения $\tau_1, \dots, \tau_{i-1}$ будут являться корнями полинома

$$P_{i-1} = c_{i1} + c_{i2}\tau + c_{i3}\tau^2 + \dots + c_{ii}\tau^{i-1}. \quad (1.52)$$

1.9.2 Интегрирование на шаге

Величины α определяются по $\mathbf{Q}$, которые, в свою очередь, вычисляются по решениям $\mathbf{q}$. Согласно (2.2) эти решения будем задавать как

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \mathbf{q}_0 + h \left(\mathbf{Q}_0\tau_1 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1\tau_1^2 + \frac{1}{3}\mathbf{A}_2\tau_1^3 + \dots + \frac{1}{k+1}\mathbf{A}_k\tau_1^{k+1} \right), \\ &\dots \\ \mathbf{q}_k &= \mathbf{q}_0 + h \left(\mathbf{Q}_0\tau_k + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1\tau_k^2 + \frac{1}{3}\mathbf{A}_2\tau_k^3 + \dots + \frac{1}{k+1}\mathbf{A}_k\tau_k^{k+1} \right). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Формулы (1.53) представляют собой неявные уравнения относительно $\mathbf{q}$, поэтому они решаются итерационным способом.

Для получения начального приближения α на следующем шаге $\bar{h}$ используется информация о коэффициентах $\mathbf{A}$ на текущем шаге h . Безразмерная независимая переменная следующего шага будет $\bar{\tau} = (t - t_h) / \bar{h}$, где $t_h = t_0 + h$. Отсюда

$$\tau = r\bar{\tau} + 1, \quad (1.54)$$

где $r = \bar{h} / h$. Согласно (1.44)

$$\mathbf{Q}_0 + \mathbf{A}_1\tau + \mathbf{A}_2\tau^2 + \mathbf{A}_3\tau^3 + \dots + \mathbf{A}_k\tau^k = \bar{\mathbf{Q}}_0 + \bar{\mathbf{A}}_1\bar{\tau} + \bar{\mathbf{A}}_2\bar{\tau}^2 + \bar{\mathbf{A}}_3\bar{\tau}^3 + \dots + \bar{\mathbf{A}}_k\bar{\tau}^k. \quad (1.55)$$

Подставляя (1.54) в (1.55) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\bar{\tau}$, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_0 &= e_{00}\mathbf{Q}_0 + e_{10}\mathbf{A}_1 + e_{20}\mathbf{A}_2 + e_{30}\mathbf{A}_3 + \dots + e_{k0}\mathbf{A}_k, \\ \bar{\mathbf{A}}_1 &= r(e_{11}\mathbf{A}_1 + e_{21}\mathbf{A}_2 + e_{31}\mathbf{A}_3 + \dots + e_{k1}\mathbf{A}_k), \\ \bar{\mathbf{A}}_2 &= r^2(e_{22}\mathbf{A}_2 + e_{32}\mathbf{A}_3 + \dots + e_{k2}\mathbf{A}_k), \\ &\dots \\ \bar{\mathbf{A}}_k &= r^k e_{kk} \mathbf{A}_k, \end{aligned} \quad (1.56)$$

где e_{ij} — числа арифметического треугольника, вычисляемые по рекуррентным формулам

$$e_{ii} = e_{i0} = 1, \quad e_{ij} = e_{i-1,j-1} + e_{i-1,j} \quad (i > j > 0). \quad (1.57)$$

Пользуясь соотношениями (1.57) для $\bar{A}$, будем иметь начальное приближение $\bar{\alpha}$.

Оценку $\bar{A}$ для $\bar{h}$ можно существенно улучшить, если к ней добавлять поправку ΔA , получаемую как разность между значениями A после итераций и оценкой $\bar{A}$ на текущем шаге h .

Каждая итерация выполняется следующим образом. Сначала определяется решение q_1 , из которого по первой формуле (1.50) улучшается значение α_1 . Далее определяется q_2 , по которому улучшается α_2 , и так до q_k . Как правило, для получения достаточно хороших α необходимо всего лишь 2 итерации, очень редко — 3.

Как только величины α получены, решение на шаге h ($\tau=1$) будет

$$q_h = q_0 + h \left(Q_0 + \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{3} A_2 + \frac{1}{4} A_3 + \dots + \frac{1}{k+1} A_k \right). \quad (1.58)$$

В начале интегрирования, на первом шаге, в качестве α выбирают нулевые значения и запускается вышеописанный итерационный процесс. Если начальный шаг достаточно большой, чтобы обеспечить заданную локальную точность, то его следует уменьшить. При оптимально выбранном шаге высокая точность α достигается уже на 4 итерации.

1.9.3 Формулы интегратора как одно из представлений неявного метода Рунге—Кутты

Пользуясь (1.50), (1.51) и (1.52), нетрудно показать, что решение (1.58) представимо в виде

$$q_h = q_0 + h \sum_{i=0}^k b_i k_i, \quad \text{где} \quad k_i = Q(t_0 + h\tau_i, q_0 + h \sum_{j=0}^k a_{ij} k_j) \quad (i = 0, \dots, k), \quad (1.59)$$

а коэффициенты a_{ij} и b_i — постоянные, зависящие только от τ_i . Таким образом, интегратор Гаусса—Эверхарта фактически основан на видоизмененных формулах неявного метода Рунге—Кутты.

Произвольный выбор узлов t_i дает метод порядка $k+1$. Однако, используя свойства неявных методов Рунге—Кутты, Эверхарт выбрал разбиение Гаусса—Радона, что позволило ему повысить точность метода до порядка $2k+1$.

Узловые значения разбиения Гаусса—Радона можно получить из уравнения

$$(\tau^{k+1}(\tau-1)^k)_\tau^{(k)} = 0 \quad (1.60)$$

В (1.60) левый корень равен нулю ($\tau_0 = 0$). Если потребуем, чтобы правый корень был равен единице ($\tau_k = 1$), то для повышения порядка численного решения получим разбиение Гаусса—Лобатто, узловые значения которого также удовлетворяют уравнению

$$(\tau^k(\tau-1)^k)_\tau^{(k-1)} = 0 \quad (1.61)$$

Разбиение Гаусса—Лобатто симметрично относительно середины шага и дает численное решение порядка $2k$.

1.9.4 Выбор шага

В интеграторе Гаусса–Эверхарта контроль шага интегрирования осуществляется по величине последнего члена в (1.61).

Пусть $\|\mathbf{e}_{tol}\|$ — заданная точность. Потребуем, чтобы на следующем шаге выполнялось равенство

$$\frac{\bar{h}}{k+1} \|\bar{\mathbf{A}}_k\| = \|\mathbf{e}_{tol}\|. \quad (1.62)$$

Отсюда, используя последнее соотношение в (2.10), получаем оценку

$$\bar{h} = hr = h \left(\frac{k+1}{h} \frac{\|\mathbf{e}_{tol}\|}{\|\mathbf{A}_k\|} \right)^{\frac{1}{k+1}}. \quad (1.63)$$

Очевидно, при разбиениях Гаусса–Радона и Гаусса–Лобатто недостаток такой оценки состоит в том, что шаг по ней выбирается как для решения порядка k , поэтому, вообще говоря, она не обеспечивает сохранение локальной точности.

Во избежание слишком больших (и малых) локальных ошибок на r следует наложить ограничение:

$$\frac{1}{\sigma} < r^{k+1} < \sigma. \quad (1.64)$$

Для того чтобы величина последнего члена в (1.62) была ограничена в пределах одного порядка, значение σ должно быть равно $\sqrt{10}$. Это следует из того факта, что $\bar{h} \|\mathbf{A}_k\| \sim r^{k+1}$.

Выполнение обоих неравенств проверяется лишь в начале интегрирования при выборе стартового шага: если (1.64) не выполняется, то интегрирование повторяется с новым шагом $\bar{h} = hr$ и так далее, пока не выполнится условие (1.64). Обычно для получения стартового шага требуется не более 4 итераций. В дальнейшем для ограничения r проверяется только правое неравенство: если неравенство не выполняется, то r принимает значение правого предела.

Начальное приближение стартового шага получается из оценки (2.17) для $k=1$:

$$\bar{h} = \sqrt{\frac{2h \|\mathbf{e}_{tol}\|}{\|\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0\|}}, \quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}(t_0 + h, \mathbf{q}_0 + h\mathbf{Q}_0), \quad (1.65)$$

где h — малая величина. Если h настолько мала, что в компьютерной арифметике $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_0$, она увеличивается в 10 раз и оценка повторяется снова.

1.9.5 Выбор оптимальных параметров метода Гаусса–Эверхарда для интегрирования уравнений движения ИСЗ ГЛОНАСС

На точность решения дифференциальных уравнений влияют такие факторы, как порядок и параметр интегратора, шаг интегрирования. При неправильном выборе того или иного фактора, влияющего на решения уравнений движения спутника, возрастает ошибка интегрирования и, следовательно, ухудшается точность получаемого решения. Поэтому, варьируя параметр и порядок интегратора, определим те значения их, при которых среднеквадратическая ошибка интегрирования будет минимальна (рис. 1.10).

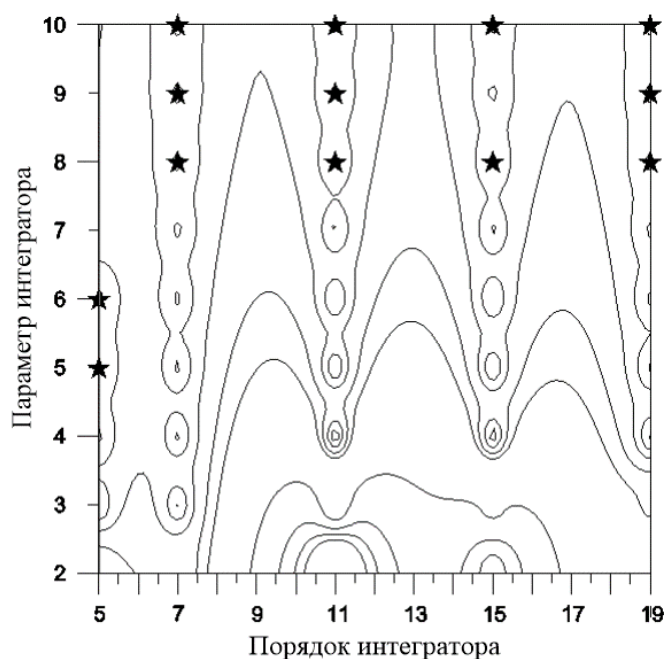


Рисунок 1.10 – Выбор оптимального порядка и параметра интегратора. Звездой помечены значения порядка и параметра интегратора с минимальной среднеквадратической ошибкой

Далее, для значений параметра и порядка интегратора с минимальной среднеквадратической ошибкой (рис. 1.10) было подсчитано количество обращений к правым частям уравнения, для выявления наиболее эффективного решения.

Таблица 1.5 – Быстродействие итерационного процесса. Серым цветом показано, выбранное нами значения для интегратора Эверхарта.

Порядок интегратора	Параметр интегратора	Среднеквадратическая ошибка интегрирования	Количество обращений к правым частям уравнения
5	5	0.00000001984	25189
5	6	0.00000000839	54245
7	8	0.00000000758	26798
7	9	0.00000000482	47617
7	10	0.00000000948	84644
11	8	0.00000002371	2977
11	9	0.00000009904	4314
11	10	0.00000004564	6300
15	8	0.00000008552	1276
15	10	0.00000007768	2034
19	8	0.00000016766	1467
19	9	0.00000077747	2073
19	10	0.00000035207	1890

Из таблицы 1.5 видно, что при порядке интегратора равном 15 и параметре интегратора равном 8 происходит наименьшее обращение к правым частям уравнения, что является оптимальными для нашей задачи.

1.10 Задача улучшения орбит

Обратная задача орбитальной динамики состоит в определении орбитальных параметров из наблюдений в рамках выбранной модели. В настоящей работе определение орбит осуществляется по измеренным значениям дальностей от объекта до 24 спутников ГЛОНАСС в геоцентрической системе координат.

Пусть имеем N измеренных по ГЛОНАСС дальностей $r_{i,k}$, полученные из псевдонаблюдений (<http://www.igs.org/>), на моменты времени t_i ($i=1, \dots, N$). Требуется по измерениям $r_{i,k}$ определить параметры $\mathbf{q}_0$ модели $r_k(\mathbf{q}_0, t_i)$. Таким образом, определение $\mathbf{q}_0$ сводится к минимизации следующей целевой функции

$$S = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^{24} p_{i,k} (r_k(\mathbf{q}_0, t_i) - r_{i,k})^2 \right) \rightarrow \min \quad (1.66)$$

Здесь $r_k(\mathbf{q}_0, t_i)$ – вычисленные дальности до объекта; $\mathbf{q}_0 = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_0)$ – вектор начального приближения; $p_{i,k}$ – весовой коэффициент, определяющий видимость k -того спутника в момент времени t_i , так как в задаче учитывается эффект экранирования Землей. Он может принимать значения 1 или 0: при $p_{i,k}=1$ k -тый спутник видим в момент t_i , при $p_{i,k}=0$ k -й спутник невидим в момент t_i . Для исключения «невидимых» спутников использовалось следующее условие видимости: $H < R$ (рис. 1.11), где R – радиус Земли, r_{12} – расстояние между двумя спутниками, r_1, r_2 – положения спутников 1 и 2 соответственно относительно центра Земли, H – перпендикуляр, опущенный к вектору r_{12} из центра Земли; R – средний радиус Земли (6378,1 км).

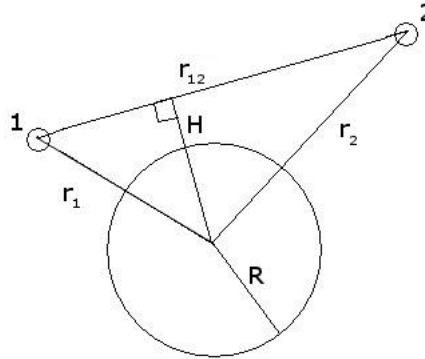


Рисунок 1.11 – Условие видимости

Минимум функции (1) находится из необходимого условия экстремума:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_0} = 2 \sum_{k=1}^{24} \left(p_{i,k} (r_k(\mathbf{q}_0, t_i) - r_{i,k})^T \frac{\partial r_k(\mathbf{q}_0, t_i)}{\partial \mathbf{q}_0} \right) = 0. \quad (1.67)$$

Из условия (1.66) получаем линеаризованную систему уравнений в матричном виде можно записать как:

$$\Delta \Lambda \mathbf{q} = \Delta \mathbf{R},$$

где $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \rho_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \rho_1}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial \rho_1}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial \rho_1}{\partial \dot{x}_3} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_i}{\partial x_2} & \frac{\partial \rho_i}{\partial x_3} & \frac{\partial \rho_i}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial \rho_i}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial \rho_i}{\partial \dot{x}_3} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial \rho_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_m}{\partial x_2} & \frac{\partial \rho_m}{\partial x_3} & \frac{\partial \rho_m}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial \rho_m}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial \rho_m}{\partial \dot{x}_3} \end{pmatrix}$ – матрица изохронных производных,

Δq – вектор столбец поправок к кеплеровым элементам, ΔR – вектор столбец невязок.

Для решения системы уравнений (1.66) обычно прибегают к итерационным методам типа Ньютона, где привлекаются вторые производные $\partial^2 S / \partial \mathbf{q}^2$ или их приближения в качестве дополнительной информации, уточняющей локальное поведение целевой функции. Согласно итерационной схеме Ньютона, поправка к текущему приближению $\mathbf{q}_0$ определяется как

$$\Delta \mathbf{q}_0 = - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}_0^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_0} \right)^T,$$

где $\partial^2 S / \partial \mathbf{q}_0^2$ – матрица Гессе:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}_0^2} = 2 \sum_{k=1}^{24} \left(\left(\frac{\partial r_k(\mathbf{q}_0, t_i)}{\partial \mathbf{q}_0} \right)^T \frac{\partial r_k(\mathbf{q}_0, t_i)}{\partial \mathbf{q}_0} - p_{i,k} (r_k(\mathbf{q}_0, t_i) - r_{i,k}) \frac{\partial^2 r_k(\mathbf{q}_0, t_i)}{\partial \mathbf{q}_0^2} \right). \quad (1.68)$$

Итерационный процесс считается завершенным при выполнении следующего условия

$$|q_i^{n+1} - q_i^n| < \varepsilon \quad (1.69)$$

где ε – заданная точность.

После завершения процесса вычисляется среднеквадратическая ошибка единицы веса по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [\Delta \rho_i]^2}{n - m}} \quad (1.70)$$

Среднеквадратические ошибки определяемых параметров определяются как произведение среднеквадратической ошибки единицы веса на диагональные элементы матрицы $(A^T A)^{-1}$.

2 ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕТОВОЙ МОДЕЛИ

2.1 Определение параметров световой модели для спутников ИСЗ ГЛОНАСС с помощью «Численной модели движения ИСЗ»

Главная проблема при моделировании эффекта радиационного давления (ссылка на формулу) для навигационных спутников связана с вычислением величины σ/m , которая сложным образом зависит от их формы, свойств внешних покрытий и ориентации.

Если посмотреть историю развития моделей светового давления для спутников GPS (информации по навигационным спутникам системы ГЛОНАСС нет в открытых источниках), то увидим, что первые стандартные модели радиационного давления, известные как ROCK4 и ROCK42 соответственно для аппаратов типа Block I и Block II, которые были разработаны в центре Rockwell с детальным учетом конструктивных особенностей. Поверхность спутников при этом разбивалась на множество элементарных площадок, по которым производилось суммирование. Модели, полученные таким образом, представляют собой компонент сил в спутникоцентрической системе координат. Позднее эти модели были пересмотрены и рекомендуемые сейчас модели (T20, T30) имеют вид (IERS, 1992):

$$\begin{aligned} X_{(T20,T30)} &= X_1 \sin B + X_3 \sin 3B + X_5 \sin 5B + X_7 \sin 7B \\ Z_{(T20,T30)} &= Z_1 \cos B + Z_3 \cos 3B + Z_5 \cos 5B \end{aligned}, \quad (2.1)$$

где $\cos B = e_z s / |e_z| |s|$, а единичные вектора в спутникоцентрической системе координат e_x, e_y, e_z определяются следующим способом:

$$\begin{aligned} e_x &= e_y \times e_z \\ e_y &= e_z \times s, \\ e_z &= -r / |r| \end{aligned}$$

где $s = (\mathbf{R}_S - \mathbf{r} / |\mathbf{R}_S - \mathbf{r}|)$.

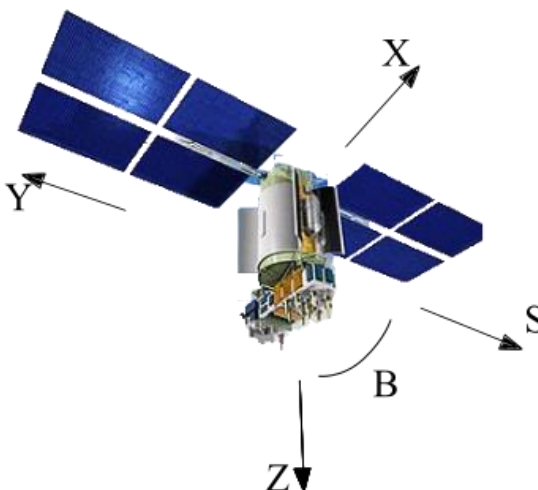


Рисунок 2.1 – Спутникоцентрическая система координат.

Коэффициенты модели (2.1) выраженные в единицах 10^{-5} Н, даны в таблице. 2.1.

Таблица 2.1 – Коэффициент стандартных моделей для системы GPS

Модель	X_1	X_3	X_5	X_7	Z_1	Z_3	Z_5
T20	-8.96	0.16	0.10	-0.07	-8.43	0	0
T30	-11.0	-0.2	0.2	0	-11.3	0.1	0.2

Оценки точности, получаемые с этой моделью светового давления для спутников GPS, находящихся на Солнце, не менее 30 см (Гаязов, 2006). Однако, как уже говорилось выше, эти коэффициенты даны для спутников GPS (Block I и Block II), поэтому применение их для световой модели навигационных спутников ГЛОНАСС не представляется возможным. Вследствие этого, нами были определены требуемые коэффициенты (условно назовем модель Г30) из псевдонаблюдений (Чувашов и др, 2014). Чтобы усреднить ошибку аппроксимации, на суточном интервале времени мы определяли эти коэффициенты на протяжении года для всех 24 навигационных спутников ГЛОНАСС рисунок 2.2

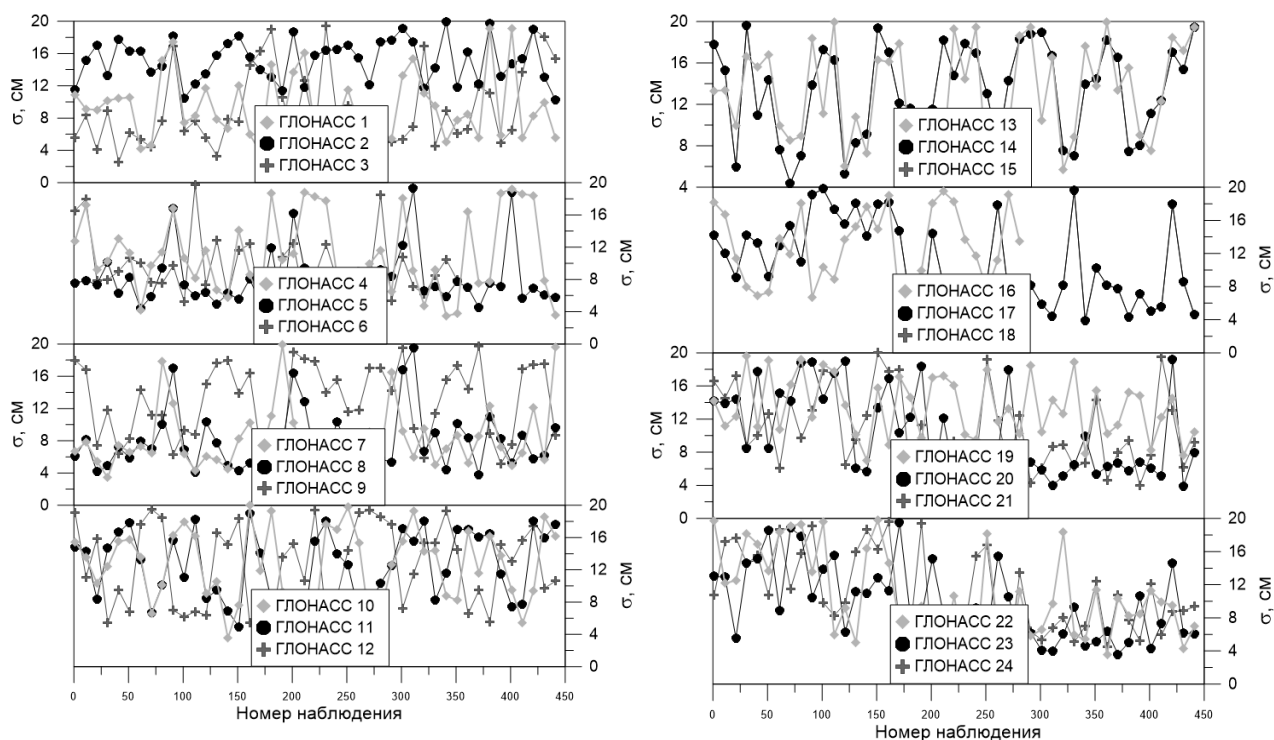


Рисунок 2.2 – Поведение среднеквадратической ошибки для спутников системы ГЛОНАСС

Усреднив полученные значения, мы определили коэффициенты для стандартной модели ГЛОНАСС (таблица 2.2). В качестве модели движения спутников ГЛОНАСС была выбрана численная модель движения системы объектов околоземного пространства, разработанная в отделе «Небесной механики и астрометрии» НИИПММ ТГУ (Бордовицына и др, 2007).

Таблица 2.2 Коэффициент стандартных моделей для системы ГЛОНАСС

Модель	X_1	X_3	X_5	X_7	Z_1	Z_3	Z_5
Г30	-25.45	-6.42	-2.37	-0.34	-17.57	2.61	1.42

Используя уже определенные значения для коэффициентов, мы еще раз уточнили параметры орбит на суточном интервале времени на протяжении одного года для всех спутников навигационной системы ГЛОНАСС и выяснили, что оценка точности световой

модели составляем не менее 20 см. Этот факт говорит, что наш эксперимент по определению коэффициентов для ГЛОНАСС спутников корректный и точность оценок сравнима с моделями T20 и T30 для навигационной системы GPS.

Из рисунка 2.3 видно, что колебания среднеквадратической ошибки округления изменяются в два раза с 20 см до 45 см. Считаем, что это связано с простой формой описания световой модели и для высокоточного решения она не подходит. Также в (2.1) не учитываются ускорения вдоль оси Y (табл. 2.1), а ускорения вдоль осей X, Z описывают не все динамические эффекты. Однако для решения задач быстрого определения орбит спутников ГЛОНАСС она применима.

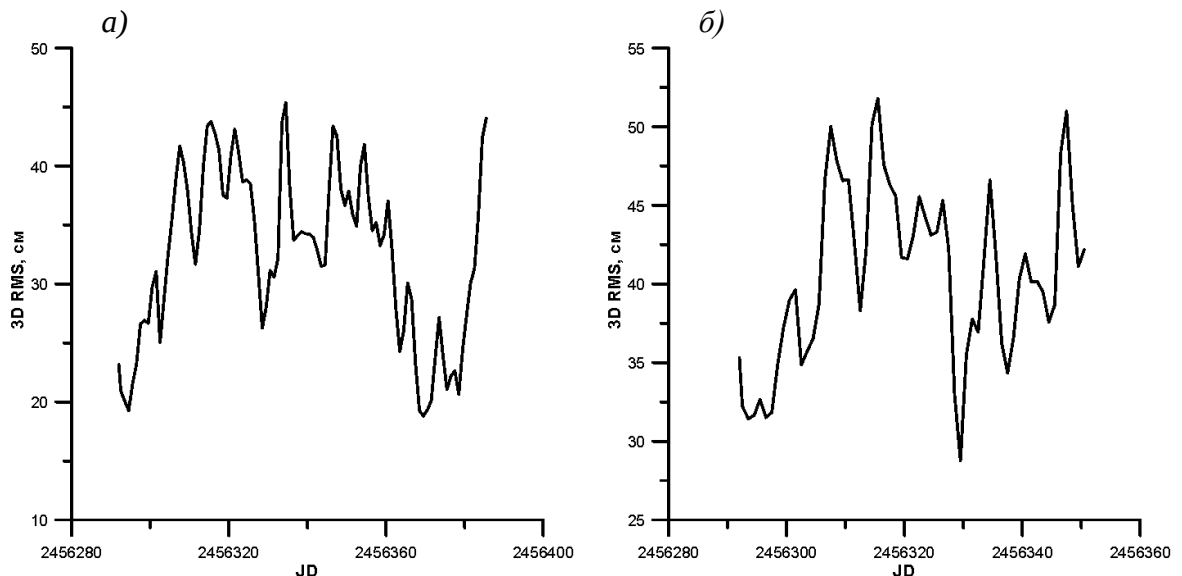


Рисунок 2.3 – Среднеквадратическая ошибка уточнения орбит ГЛОНАСС (а – ГЛОНАСС №1, б) – ГЛОНАСС №2) спутников на суточном интервале времени.

Формулу 2.1 можно расширить дополнительными коэффициентами (Гаязов, 2007) следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= C \sum_{k=0}^3 X_{2k+1} \sin[(2k+1)(B + \Delta B)] + X_{2s} \sin 2(u - u_0) \\ Y &= Y_0 + Y_{2s} \sin 2(u - u_0) + Y_{2c} \cos 2(u - u_0) \\ Z &= C \sum_{k=0}^2 Z_{2k+1} \cos[(2k+1)(B + \Delta B)] + Z_{2c} \cos 2(u - u_0) \end{aligned} \quad , \quad (2.2)$$

где $\sum_{k=0}^3 X_{2k+1}$, $\sum_{k=0}^2 Z_{2k+1}$ – коэффициенты из таблицы 2.2;

C , ΔB , X_{2s} , Y_0 , Y_{2s} , Y_{2c} , Z_{2c} – уточняемые параметры модели совместно с параметрами движения спутника; u , u_0 – аргумент широты спутника и Солнца, соответственно. Кроме, прямого светового давления существуют динамические эффекты, напрямую связанные со световым давлением. К ним относится эффект Ярковского: если на освещенном участке траектории в формулах (2.1) и 2.(2) заложено это влияние, то при нахождении спутника в тени Земли влияние от этого эффекта нужно дополнительно учитывать. Также существует эффект, связанный с отклонением от номинальной ориентации солнечных батарей при прохождении спутником тени Земли (Гаязов, 2007).

Используя формулу (2.2) для описания световой модели навигационных спутников ГЛОНАСС, можно получить точность представления псевдонаблюдений до 2–5 см. (таблица 2.3).

Таблица 3 Представление орбит при использовании моделей различной полноты

Модель для ГЛОНАСС спутников	3D RMS орбит (см) (Среднее значение по всем орбитам)
Г30	$\approx 20\text{--}50$
Г30+(C, ΔB , X_{2s} , Y_0 , Y_{2s} , Y_{2c} , Z_{2c})	$\approx 2\text{--}5$

Данные, приведенные в таблице 2.3, показывают, что, разработанная модель светового давления хорошо представляет псевдонаблюдения, полученные в IGS. Максимальные отклонения в представлении псевдонаблюдений в проекции на орбитальные оси координат S, T и W, полученные на последней итерации, приведены таблице 2.4. Здесь же приведены оценки точности эфемерид, даваемых СВОЭВП. Сравнение результатов объясняет, почему для оценки модели были взяты данные IGS.

Таблица 2.4 Оценки точности аппроксимации движения

Оценки	S, см	T, см	W, см
По предлагаемой модели	12	13	9
По данным СВОЭВП	20	50	10

Использование полной световой модели для спутников ГЛОНАСС может приводить к оттягиванию неучтенных динамических факторов в определяемые коэффициенты модели. Поэтому, для проверки выбранной стратегии моделирования светового давления была исследована устойчивость определяемых параметров световой модели на следующие сутки (рис.2.4).

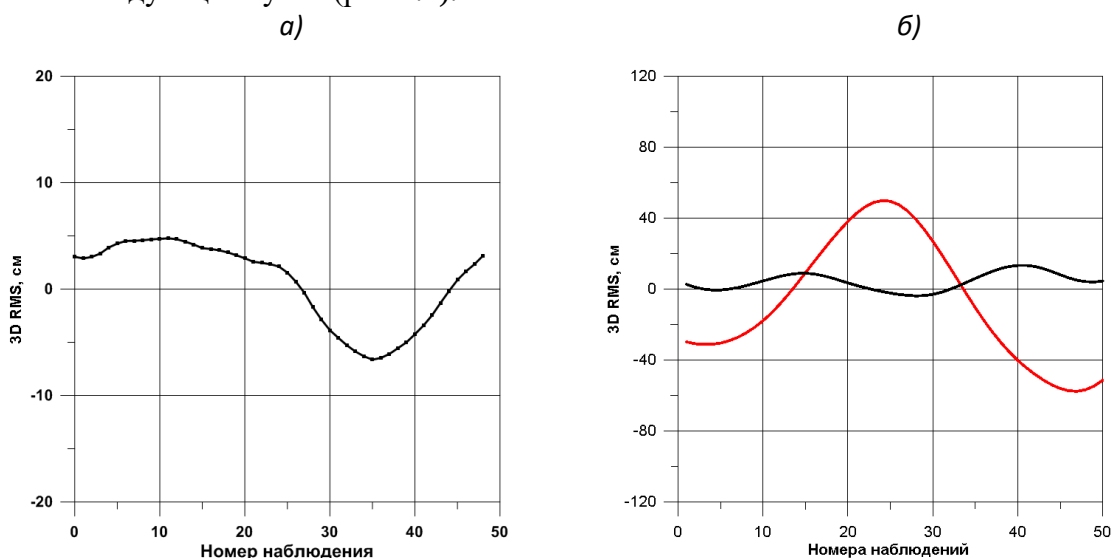


Рис. 2.4. Представление наблюдений для спутника GPS (а) и ГЛОНАСС (б) на следующие сутки. Красная линия на рисунке (б) – представление наблюдений для модели Г30.

На рисунке 2.4 показано, что полная световая модель для спутников GPS достаточно точно представляет псевдонаблюдения, ошибка не превышает 7 см, также видно, что полная световая модель для спутников ГЛОНАСС также достаточно точно представляет псевдонаблюдения. Однако, в ней существует систематика, природа которой, с нашей точки зрения, связана корреляцией параметров между собой. Поэтому формула (2.2) требует дальнейшего совершенствования. Но, даже с этой особенностью для высокоточного определения параметров движения из псевдонаблюдений световая модель, описанная в формуле (2.2), подходит.

2.2 Световая модель, используемая в бортовой модели ИСЗ ГЛОНАСС

Введем $OX_1X_2X_3$ новую систему координат. Пусть $\mathbf{r}_c, \mathbf{r}$ вектора положения Солнца и КА в инерциальной системе координат (CRS). Начало новой системы координат - центр масс космического аппарата (КА). Ось X_1 направлена по линии «Солнце - КА» в сторону космического аппарата (КА) ось X_2 направлена перпендикулярно плоскости СОЗ («Солнце-объект-Земля») по векторному произведению $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{r}$, а ось X_3 - достраивает систему до правой.

Ускорения от сил радиационного давления Солнца содержат две основные составляющие: номинальную и согласующую. Номинальная составляющая вычисляется для номинальной ориентации КА относительно Солнца без учета погрешностей ориентации, для априорных данных о геометрических размерах и априорных значений коэффициентов отражения элементов поверхности КА. Согласующая составляющая призвана компенсировать погрешности ориентации КА на Солнце, погрешности знания оптических коэффициентов элементов поверхности и другие отклонения от номинальной работы системы ориентации.

Номинальные ускорения от сил радиационного давления в проекциях на оси новой системы координат представляем в виде таких безразмерных функций по углу СОЗ

$$g_1(\psi_s), g_2(\psi_s), g_3(\psi_s),$$

где ψ_s - значение угла СОЗ, что для перехода к ускорениям безразмерные функции

необходимо умножить на коэффициент $\frac{\mu_c}{r_c^2}$, где μ_c - гравитационная постоянная Солнца,

$r_c = |\mathbf{r}_c|$. Функции вычисляем в табличном виде с некоторым шагом по углу ψ_s , значения функций между узлами таблицы вычисляем с использованием интерполяционных формул Лагранжа. Таблица значений в виде формы командно-программной информации закладывается на борт КА (Гречкосеев, 2011).

2.3 Описание эксперимента по бортовой модели

На основании работы (Гречкосеев, 2011) предлагается следующая последовательность уточнения опорных эфемерид на каждом навигационном КА.

1. На текущем мерном интервале $[t_o, t_o + T_{mi}]$ накапливаются собственные МСИ измерения псевдодальности, полученные на первом КА и эфемериды с других КА;
2. Определяются по измерениям номера всех КА, с которыми есть парные измерения у первого КА. Выбирается КА с номером j_1 , у которого не уточняются три параметра $T_o^{j_1}, W_o^{j_1}, W_o^{j_1}$;
3. Формируется вектор уточняемых параметров, и получают уточненные значения вектора поправок;

4. Далее используются только уточненные значения для первого КА;
5. Вычисляются уточненные начальные параметры движения первого КА в CRS, которые прогнозируются с использованием бортовой модели движения на интервале $[t_o, t_o + T_{ми} + T_{np}]$;
6. Прогнозируемые значения уточненных параметров движения КА на интервале $[t_o + T_{ми}, t_o + T_{ми} + T_{np}]$ используются для формирования новых эфемерид.
7. Мерный интервал сдвигается на величину T_{np} , вычисляются новые начальные параметры движения на момент $t_o + T_{np}$
8. Накапливаются измерения на новом мерном интервале и весь процесс уточнения и прогнозирования повторяется.

2.4 Сравнение результатов

Проведя эксперимент по уточнению вектора состояния на интервале времени 30 суток двумя моделями (численная и бортовая модель), были получены результаты отклонений от наблюдений в орбитальной системе координат (рис 2.5 2.7):



Рисунок 2.5 – Отклонение по радиусу-вектору на интервале 30 суток



Рисунок 2.6 – Отклонение по трансверсали на интервале 30 суток



Рисунок 2.7 – Отклонение по бинормали на интервале 30 суток

Из рисунков 2.5–2.7 видно, что численной модель лучше определяет вектор положения и скоростей на 60 оборотах спутника ГЛОНАСС чем бортовая модель. Ошибка по радиусу вектору и бинормали для двух моделей ведет себя одинаково и не превышает 2 метров. Однако по трансверсале наблюдается значительное расхождение двух моделей. Отклонение от наблюдений по бортовой модели линейно возрастает с 3 метров на первом обороте до 22 метров на 60-ом обороте спутника, что говорит о том, что в бортовой модели не учитываются силы, оказывающие существенное влияние на движение объекта. В отличие от бортовой модели отклонения от наблюдений, полученные с помощью численной модели, на всем интервале наблюдения не превышает 2 метров. Это является довольно хорошим результатом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было проведено исследование эффективности двух моделей: бортовой световой модели и численной модели движения ИСЗ. Были решены следующие задачи: была исследована математическая модель системы навигационных спутников ГЛОНАСС; были обработаны измерения, в качестве которых выступают дальности до спутников навигационной системы ГЛОНАСС; была исследована бортовая световая модель и световую модель численной модели движения ИСЗ и сравнена их эффективность; был проведен эксперимент по уточнению эфемерид на 30 суток.

Как показали результаты эксперимента, бортовая световая модель оказалась на порядок хуже, чем предложенная световая модель численной модели движения навигационных спутников ГЛОНАСС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 284 с.
2. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977. 360 с.
3. Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Кардаш А.В., Федяев Ю.А., Шарковский Н.А. // Изв. вузов. Физика. – 1992. – №35. – С. 62-70.
4. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения ИСЗ. Аналитические и численные методы. Томск: Изд-во ТГУ, 2007. 105 с.
5. Бордовицына Т.В. и др. // Изв. вузов. Физика. — 2009. — № 12/2. — С.5-11
6. Гаязов И.С. Использование высокоточных наблюдений геодезических и навигационных ИСЗ для решения задач геодинамики.– Диссертация на соискание степени доктора физ.-мат. наук- СПб: РГБ .2006. 217 с.
7. Гречкосеев А.К. Исследование наблюдаемости движения орбитального кристалла навигационной космической системы по межспутниковым измерениям дальности. Железногорск Красноярский край ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2011, № 3, с. 122-131
8. Хелали Я.Э., Батраков Ю.В. // Бюлл. ИТА АН СССР. – 1986. – №10 – 562-564.
9. Хелали Я.Э., Батраков Ю.В., Фоминов А.М. // Труды ИПА РАН. – 1999. – Вып. 4. – С. 300-309.
10. Brumberg V.A., Ivanova T.V. Precession/Nutation solution consistent with the general planetary theory // Celest. Mech. and Dyn. Astron. – 2007. – V. 97. – P. 189–210.
11. Butler J. Earth System Research Laboratory. – URL: <http://www.esrl.noaa.gov/gmd/grad/solcalc/calcdetails.html> (дата обращения 06.06.2016)
12. IERS Conventions 2000 – Dennis D. McCarthy (ed.) // IERS Technical note 29. – Paris. – 2000. – 98 p.
13. IERS Conventions 2010 [Электронный ресурс]. – URL: <ftp://tai.bipm.org/iers/convIERSupdt> (дата обращения: 06.06.2016).
14. Iorio L. A Critical Fnlisysis of a recent test of the Lense-Thirring effect with the Lageos satellites // J. Geod. 2006.. V. 80. P.128–136.
15. Iorio L. Conservative evaluation of the uncertainty in the Lagees–Lageos II Lense-Thirring test // Cent. Eur. J. Phys. - 2010. - V. 8(1). - P. 25–32.
16. Garfinkel B. // AJ. – 1967.–V72/2. – P. 235-254.
17. Ferraz-Mello S. // XIV Congress JAF. Paris. – 1963. – P. 41-50.
18. Ferraz-Mello S. // C.R. Acad. Sci. – 1966. –V258. – P. 463-466.
19. Folkner W., Williams J., Boggs D. // The planetary and lunar ephemeris DE 421 2009. P. 34
20. McCarthy D//IERS Standards (1992) — Paris. —1992.
21. Robertson H.P. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 1937. –V97. – P. 423–438.
22. Petiz G., Luzum B//IERS Conventions (2010) — Paris. —2010.
23. Polyakhova E.N. // Bull. Inst. Theor.Mech. – 1963. –V38 – P. 233.
24. Picone M., Hedin A.E., Drob D. NRLMSISE-00 Model 2001 [Электронный ресурс]: Naval Research Laboratory. - URL: <http://modelweb.gsfc.nasa.gov/atmos/nrlmsise00.html> (дата обращения 06.06.2016)
25. Vokrouhlicky D., Farinella P., and Mignard F. // Astron. Astroph. – 1993. –V280. – P. 295-312.
26. Vokrouhlicky D., Farinella P., and Mignard F. // Astron. Astroph. – 1993. –V285. – P. 333-343.
27. Vokrouhlicky D., Farinella P., and Mignard F.// Astron. Astroph. – 1993. –V290. – P. 324-334.
28. Vokrouhlicky D., Farinella P., and Mignard F. // Astron. Astroph. – 1996. –V307. – P. 635-644.
29. Vokrouhlicky D., and Sehnal L. // Celest. Mech., – 1993. –V57. – C.493-508.

Уважаемый пользователь! Обращаем ваше внимание, что система «Антиплагиат» отвечает на вопрос, является ли тот или иной фрагмент текста заимствованным или нет. Ответ на вопрос, является ли заимствованный фрагмент именно плагиатом, а не законной цитатой, система оставляет на ваше усмотрение.

Отчет о проверке № 1

ФИО: Кинзерский Владислав
дата загрузки: 07.06.2016 12:17:21
пользователь: kinzerski.wladis@mail.ru / ID: 3352019
отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»
на сайте <http://www.antiplagiat.ru>

Информация о документе

№ документа: 2
Имя исходного файла: Диплом Кинзерского.docx
Размер текста: 1682 кБ
Тип документа: Не указано
Символов в тексте: 51707
Слов в тексте: 6218
Число предложений: 241

Информация об отчете

Дата: Отчет от 07.06.2016 12:17:21 - Последний готовый отчет
Комментарии: не указано
Оценка оригинальности: 97.83%
Заимствования: 2.17%
Цитирование: 0%



Оригинальность: 97.83%
Заимствования: 2.17%
Цитирование: 0%

Источники

Доля в тексте	Источник	Ссылка	Дата	Найдено в
0.73%	[1] ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОКОЛОЗЕМНЫХ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ИСКУССТВЕННОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ - тема научной статьи по астрономии, читать бесплатно текст научно-исследовательской работы в электронной библиотеке ...	http://cyberleninka.ru	13.06.2013	Модуль поиска Интернет
0.55%	[2] Численное моделирование динамики околоземных космических объектов искусственного происхождения с использованием параллельных вычислений	http://sun.tsu.ru	раньше 2011 года	Модуль поиска Интернет
0.4%	[3] Полный текст (14/14)	http://istina.msu.ru	25.03.2016	Модуль поиска Интернет