

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Философский факультет
Кафедра истории философии и логики

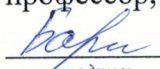
ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
канд. филос. наук, доцент
Ю.Н. Овсянникова
«14» июня 2023 г.

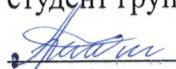


ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА
ВЫРАЗИТЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ЛЯМБДА-ОПЕРАТОРА В МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА

по основной образовательной программе подготовки бакалавров
направление подготовки 47.03.01 – Философия

Мухаметшина Индира Искандаровна

Руководитель ВКР
профессор, доктор филос. наук
 Е.В. Борисов
«14» июня 2023 г.

Автор работы
студент группы № 121901
 И.И. Мухаметшина
«14» июня 2023 г.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Философский факультет
Кафедра истории философии и логики

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ООП

канд. филос. наук, доцент

Ю.Н.Овсянникова

«16» января 2023 г.

ЗАДАНИЕ

студенту Мухаметшиной Индире Искандаровне группы №121901

1. Тема выпускной квалификационной работы: Выразительные возможности лямбда-оператора в модальных логиках первого порядка
2. Срок сдачи обучающимся выполненной выпускной квалификационной работы:
 - а) на кафедру – 24 мая 2023 года
 - б) в ГЭК – 12 июня 2023 года
3. Исходные данные к работе:

Цели исследования:

1. доказать корректность и полноту первопорядковой модальной логики K , построенной на языке с λ -оператором;
2. показать, что есть язык обладающий большими выразительными способностями.

Задачи:

- Описать язык $\mathcal{L}_1$, на котором строится первопорядковая модальная логика K ;
- Построить семантику для языка $\mathcal{L}_1$;
- Представить правила табличного построения деревьев K и определить логику K ;
- Изложить доказательство корректности и доказательство полноты K относительно семантики для языка $\mathcal{L}_1$;
- Описать язык $\mathcal{L}_2$;
- Построить семантику для языка $\mathcal{L}_2$;
- Определить перевод с языка $\mathcal{L}_1$ на язык $\mathcal{L}_2$;
- Сравнить выразительные способности языков $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

Объект исследования: логика, построенная на языке с λ -оператором.

Предмет исследования: выразительные возможности логики, построенной на языке с λ -оператором

Методы исследования:

- метод доказательства индукцией по структуре формулы;
- доказательство от противного.

4. Краткое содержание работы (перечень основных разделов, сроки их выполнения и ожидаемые результаты): во введении ставятся проблема, цели и задачи. Основная часть состоит из трех разделов. В первом разделе изложены язык $\mathcal{L}_1$, семантика для языка $\mathcal{L}_1$, теория доказательства и определяется логика **К**. Во втором разделе доказывается корректность и полнота логики **К** относительно семантики для языка $\mathcal{L}_1$. В третьем разделе изложены язык $\mathcal{L}_2$ и семантика для него, показано, что язык $\mathcal{L}_2$ обладает большей выразительной силой чем язык $\mathcal{L}_1$. В заключении подводятся итоги работы и намечаются перспективы для дальнейшего исследования.

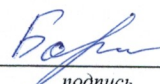
5. Организация или отрасль, по тематике которой выполняется работа, – кафедра истории философии и логики НИ ТГУ.

6. Перечень графического материала (с точным указанием обязательных чертежей) – отсутствует.

7. Дата выдачи задания «16» января 2023 г.

Руководитель выпускной квалификационной работы

профессор каф. истории философии и логики

 / Е.В. Борисов
подпись

Задание принял к исполнению

16.01.23  И.И. Мухаметшина
дата, подпись

АННОТАЦИЯ

В дипломной работе рассматриваются две первопорядковые модальные логики и сравниваются их выразительные возможности.

В первом разделе описан язык $\mathcal{L}_1$, построены семантика для языка $\mathcal{L}_1$, теория доказательства и определена логика **K**. Во втором разделе доказывается корректность и полнота логики **K** относительно семантики для языка $\mathcal{L}_1$. В третьем разделе описан язык $\mathcal{L}_2$, построена семантика для него и показано, что язык $\mathcal{L}_2$ обладает большей выразительной силой, чем язык $\mathcal{L}_1$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1 Язык $\mathcal{L}_1$, семантика и теория доказательства	6
1.1 Язык $\mathcal{L}_1$	6
1.2 Семантика языка $\mathcal{L}_1$	7
1.3 Теория доказательства	9
2 Корректность и полнота $\mathbf{K}$	12
2.1 Корректность $\mathbf{K}$	12
2.2 Полнота $\mathbf{K}$	17
3 Перевод с языка $\mathcal{L}_1$ на язык $\mathcal{L}_2$	26
3.1 Язык $\mathcal{L}_2$	26
3.2 Семантика языка $\mathcal{L}_2$	26
3.3 Сравнение выразительных возможностей языков $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$	28
Заключение	36
Список использованной литературы	37

ВВЕДЕНИЕ

Средств языка первопорядковой модальной логики, не содержащего λ -оператора или POSSIBILITY кванторов, не достаточно для формализации прочтений *de re* таких предложений как, например, «число планет необходимо больше семи». Формализация предложения «число планет необходимо больше семи» как $\Box(n > 7)$, где n – число планет, $\Box$ – оператор необходимости и $>$ понимается как в арифметике, отражает только прочтение *de dicto*. Для формализации, отражающей прочтение *de re*, требуется язык, обладающий большей выразительной силой.

Решение данной проблемы можно найти в книге М. Фиттинга и Р.Л. Мендельсона «First-order modal logic» (Fitting M., 1998, С.187–202). Авторы используют язык первопорядковой модальной логики с λ -оператором¹. Однако в данном решении есть некоторые недостатки:

1. Теория доказательства М. Фиттинга и Р.Л. Мендельсона позволяет доказывать только замкнутые формулы.
2. Не представлено доказательство корректности и полноты построенной логики.²

Исследовательская проблема заключается в том, что в литературе не найдена логика, позволяющая решить проблему формализации прочтений *de re*, доказывать открытые формулы и для которой при этом была бы доказана корректность и полнота.

Актуальность темы исследования. Первopядковые модальные логики используются как инструмент формализации рассуждений в философии языка, лингвистике, основаниях математики и т.д. Актуальность темы исследования обусловлена тем, что многообразие исследуемых рассуждений требует логик с большой выразительной силой.³

В соответствии с этим, перед дипломной работой стоит две цели:

1. доказать корректность и полноту первопорядковой модальной логики **K**, построенной на языке с λ -оператором;
2. показать, что есть язык обладающий большими выразительными способностями.

Объект исследования – логика, построенная на языке с λ -оператором.

Предмет исследования – выразительные возможности логики, построенной на языке с λ -оператором.

Реализация поставленной цели предполагает решение следующих исследовательских задач:

¹Основные идеи предикатных абстракций были введены в первопорядковую модальную логику Р. Сталнакером и Р. Томасоном (Stalnaker R., 1968)

²М.Фиттинг (Fitting M., 2015) дает доказательство полноты для модальной (не первопорядковой) логики с λ -оператором.

³В качестве примеров работ в этой области можно привести: «An introduction to non-classical logic. From if to is» Г. Приста (Priest G., 2008), «Subjunctivity and cross-world predication» К. Вемайера (Wehmeier K., 2012), «The problem of cross-world predication» А.Коцурека (Kocurek A.W., 2016), «Model theory for modal logic part I: the “de re/de dicto” distinction» К. Файн (Fine K., 1978). В отечественной литературе примеры таких исследований можно найти у Е.В. Борисова (Борисов Е.В., 2020; Борисов Е.В., 2021) И.Б. Микиртумова (Микиртумов И.Б., 2020).

1. Описать язык $\mathcal{L}_1$, на котором строится первопорядковая модальная логика $\mathbf{K}$;
2. Построить семантику для языка $\mathcal{L}_1$;
3. Представить правила табличного построения деревьев $\mathbf{K}$ и определить логику $\mathbf{K}$;
4. Изложить доказательство корректности и доказательство полноты $\mathbf{K}$ относительно семантики для языка $\mathcal{L}_1$;
5. Описать язык $\mathcal{L}_2$;
6. Построить семантику для языка $\mathcal{L}_2$;
7. Определить перевод с языка $\mathcal{L}_1$ на язык $\mathcal{L}_2$;
8. Сравнить выразительные способности языков $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

Используемые методы. Поскольку основная часть работы посвящена доказательству теорем о корректности, полноте и соотношении двух языков, используются такие методы как метод доказательства индукцией по структуре формулы и доказательство от противного.

Описание используемых источников и структуры работы. Первопорядковая модальная логика с λ -оператором изложена в книге «First-Order Modal Logic» М. Фиттинга и Р.Л. Мендельсона. Также в этой книге представлен метод доказательства корректности и полноты первопорядковой модальной логики (без λ -оператора). Другие варианты доказательства полноты первопорядковых модальных логик (без λ -оператора) представлены в книгах за авторством Д.Э. Хьюза и М.Д. Крессвелла «A companion to modal logic» (1984) и «A new introduction to modal logic» (1996).

Необходимые теоретико-множественные понятия осваивались по источникам: «A set theory workbook» И.Т. Адамсона, Л. Сиглера «Exercises in set theory», Э. Шиммерлинга «A course on set theory».

Тезисы работы:

1. Первопорядковая модальная логика, построенная на языке с λ -оператором, корректна и полна относительно семантики для этого языка.
2. Язык первопорядковой модальной логики, содержащий два вида кванторов (поссиблистские и актуалистские) и равенство, обладает большей выразительной силой, чем язык с λ -оператором и равенством.

1 Язык $\mathcal{L}_1$, семантика и теория доказательства

В данном разделе представлен язык $\mathcal{L}_1$, изложены семантика для языка $\mathcal{L}_1$, теория доказательства и определена логика **К**.

1.1 Язык $\mathcal{L}_1$

Определение 1.1.1. (Вокабуляр языка $\mathcal{L}_1$). Множество примитивных символов языка $\mathcal{L}_1$ включает в себя:

1. множество логических связок $\{\neg, \rightarrow\}$;
2. множество модальных операторов $\{\Box\}$;
3. множество кванторов $\{\forall\}$;
4. $\{\lambda\}$, (λ – лямбда-оператор);
5. бесконечное множество предикатных символов, имеющих форму P_k^n , где n – местность, $n \geq 1, k \geq 1$;
6. бесконечное множество функциональных символов, имеющих форму f_k^n , где n – местность, $n \geq 1, k \geq 1$;
7. бесконечное множество переменных: $x_1, x_2, \dots$;
8. бесконечное множество константных символов: $c_1, c_2, \dots$;
9. множество технических символов: $\{(,), , \}$.

Примечания к языку:

- Для удобства:
 - в качестве предикатных символов будут использоваться заглавные латинские буквы, местность которых либо указана, либо определяется из контекста;
 - в качестве функциональных символов будут использоваться строчные латинские буквы, чаще всего f, g, h , местность которых либо указана, либо определяется из контекста;
 - в качестве переменных будут использоваться строчные латинские буквы, чаще всего x, y, z ;
 - в качестве константных символов будут использоваться строчные латинские буквы, чаще всего a, b, c .
- Вместо предикатного символа P_1^2 мы будем использовать символ равенства « $=$ ». Символ $=$ будет использоваться также как метаязыковой символ для обозначения равенства. Из контекста всегда будет ясно в каком смысле использовано равенство.

Определение 1.1.2. (Терм) Множество термов определяется индуктивно с использованием формы Бэкуса-Наура следующим образом:

$$t ::= x \mid a \mid f(t_1, \dots, t_n),$$

где x – переменная, a – константа, f – n -местный функциональный терм, t – терм.

Определение 1.1.3. (Атомарная формула языка $\mathcal{L}_1$) Если P является n -местным пре-

дикатным символом и $x_1, \dots, x_n$ – переменные, то $P(x_1, \dots, x_n)$ – атомарная формула языка $\mathcal{L}_1$.

Заметим, что атомарные формулы языка $\mathcal{L}_1$ не могут содержать константы и функциональные термы, т.е., например, если c – константа, P – предикат, то $P(c)$ не является формулой.

Определение 1.1.4. (Множество формул языка $\mathcal{L}_1$) Множество формул языка $\mathcal{L}_1$, определяется индуктивно с использованием формы Бэкуса-Наура, следующим образом:

$$\Phi ::= P(x_1, \dots, x_n) \mid (\neg \Phi) \mid (\Phi_1 \rightarrow \Phi_2) \mid (\Box \Phi) \mid (\forall x \Phi) \mid ((\lambda x. \Phi)(t)),$$

где P – n -местный предикатный символ, t – терм, $x, x_1, \dots, x_n$ – переменные, Φ – формула.

Нотационная конвенция. $\mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$ – множество формул языка $\mathcal{L}_1$.

Конвенция о скобках. Внешние скобки в формулах не пишутся. Пример: выражение $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Omega)$ следует читать как формулу $(\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Omega))$.

Связки $\&$, $\vee$ определяются через $\neg$, $\rightarrow$, оператор $\Diamond$ определяется через $\Box$ и квантор $\exists$ определяется через $\forall$ следующим образом: для любых $\Phi, \Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$ и переменной x ,

- $\Phi \& \Psi \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\Phi \rightarrow \neg\Psi)$;
- $\Phi \vee \Psi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\Phi \rightarrow \Psi$;
- $\Diamond\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\Box\neg\Phi$;
- $\exists x \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\forall x\neg\Phi$.

Конвенция о скобках. $\&$ и $\vee$ имеют приоритет перед $\rightarrow$. Пример: выражения вида $\Phi \& \Psi \rightarrow \Omega$ читаются как $(\Phi \& \Psi) \rightarrow \Omega$.

1.2 Семантика языка $\mathcal{L}_1$

Определение 1.2.1. (Фрейм с переменным доменом (фрейм)) Фрейм – это упорядоченная тройка $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D} \rangle$, где $\mathcal{G}$ – непустое множество (множество возможных миров), $\mathcal{R}$ – бинарное отношение (отношение достижимости) на $\mathcal{G}$, т. е. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ и $\mathcal{D}$ – доменная функция, т. е. функция от миров к непустым множествам.

Определение 1.2.2. (Домен мира) Для любого $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{D}(\Gamma)$ – домен Γ .

Определение 1.2.3. (Домен фрейма) Пусть $\mathcal{F} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D} \rangle$ – фрейм. Домен фрейма обозначается $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ и равен $\bigcup \{ \mathcal{D}(\Gamma) : \Gamma \in \mathcal{G} \}$.

Определение 1.2.4. (Нежесткая интерпретация (интерпретация)) Интерпретацией во фрейме $\mathcal{F} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D} \rangle$ называется функция $\mathcal{I}$, такая что:

1. Для любого $n \geq 1$, каждому n -местному предикатному символу P и каждому $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}$ назначает некоторое n -местное отношение на домене фрейма.
2. Каждому константному символу c и каждому $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}$ назначает некоторый элемент домена фрейма, т. е. $\mathcal{I}(c, \Gamma) \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$.
3. Для любого $n \geq 1$, каждому n -местному функциональному символу f и каждому $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}$ назначает некоторую n -местную операцию на домене фрейма, т.е.

$$\mathcal{I}(f, \Gamma) : \mathcal{D}(\mathcal{F})^n \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{F}).$$

Определение 1.2.5. (Нормальная нежесткая модель с переменным доменом (модель))

Модель – это упорядоченная четверка $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, где $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D} \rangle$ – фрейм и $\mathcal{I}$ – нежесткая интерпретация в $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D} \rangle$, такая что для каждого $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}(=, \Gamma)$ – диагональ домена модели $\mathcal{M}$, $\mathbb{D}_{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$.

Определение 1.2.6. (Домен модели) Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель. Домен модели обозначается $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ и равен $\bigcup \{ \mathcal{D}(\Gamma) : \Gamma \in \mathcal{G} \}$. Как видно, домен модели равен домену фрейма, на котором она базируется.

Определение 1.2.7. (Означивание переменных в модели) Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель. Означивание переменных в модели $\mathcal{M}$ – это функция v , назначающая каждой переменной x некоторый элемент $v(x)$ домена модели $\mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Определение 1.2.8. (Вариант означивания) Для любого $\Gamma \in \mathcal{G}$, любой переменной x , любого означивания v и любого $e \in \mathcal{D}(\Gamma)$ означивание v_x^e называется x -вариантом означивания v если v_x^e и v согласны относительно всех переменных, кроме, возможно, x и $v_x^e(x) = e$.

Определение 1.2.9. (Денотация терма) Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель, $\Gamma \in \mathcal{G}$ и пусть v – означивание в $\mathcal{M}$. Для любого $\Gamma \in \mathcal{G}$ и любого терма t , денотат t в Γ обозначается $(v\mathcal{I})(t, \Gamma)$ и определяется следующим образом:

1. Если t – переменная, то $(v\mathcal{I})(t, \Gamma) = v(t)$;
2. Если t – константный символ, то $(v\mathcal{I})(t, \Gamma) = \mathcal{I}(t, \Gamma)$;
3. Если f – n -местный функциональный символ и $t_1, \dots, t_n$ – термы, то

$$(v\mathcal{I})(f(t_1, \dots, t_n), \Gamma) = \mathcal{I}(f, \Gamma)((v\mathcal{I})(t_1, \Gamma), \dots, (v\mathcal{I})(t_n, \Gamma)).$$

Определение 1.2.10. (Истинность формулы $\mathcal{L}_1$ в некотором мире модели). Определим отношение истинности ($\models$) между моделями, мирами, означиваниями переменных и формулами языка $\mathcal{L}_1$, так что, если $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель, Γ – возможный мир, v – означивание переменных в $\mathcal{M}$ и $\Phi, \Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$, то:

1. Если P является n -местным предикатным символом и $x_1, \dots, x_n$ – переменные, то $\mathcal{M}, \Gamma \models_v P(x_1, \dots, x_n) \iff \langle (v)(x_1), \dots, (v)(x_n) \rangle \in \mathcal{I}(P, \Gamma)$;⁴
2. $\mathcal{M}, \Gamma \models_v \neg \Phi \iff \mathcal{M}, \Gamma \not\models_v \Phi$;
3. $\mathcal{M}, \Gamma \models_v \Phi \rightarrow \Psi \iff (\mathcal{M}, \Gamma \models_v \Phi \Rightarrow \mathcal{M}, \Gamma \models_v \Psi)$;
4. $\mathcal{M}, \Gamma \models_v \Box \Phi \iff \forall \Delta (\Delta \in \mathcal{G} \ \& \ \Gamma \mathcal{R} \Delta \Rightarrow \mathcal{M}, \Delta \models_v \Phi)$;
5. $\mathcal{M}, \Gamma \models_v \forall x \Phi \iff \forall e (e \in \mathcal{D}(\Gamma) \Rightarrow \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_x^e} \Phi)$;
6. Для любого терма t , $\mathcal{M}, \Gamma \models_v \langle \lambda x. \Phi \rangle(t) \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_x^{(v\mathcal{I})(t, \Gamma)}} \Phi$.

Определение 1.2.11. (Истинность формулы языка $\mathcal{L}_1$ в модели при некотором означивании переменных) Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель, v – означивание переменных. Формула Φ языка $\mathcal{L}_1$ истинна в модели $\mathcal{M}$ при означивании v , если для любого $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{M}, \Gamma \models_v \Phi$. Для любой модели $\mathcal{M}$, любого означивания v в $\mathcal{M}$ и любой формулы Φ « $\mathcal{M} \models_v \Phi$ » означает, что Φ истинна в модели $\mathcal{M}$ при означивании v .

⁴Здесь и далее квантор $\forall$ и связка $\&$ используются и как объектные, и как метаязыковые символы. $\Rightarrow$ и $\iff$ используются как метаязыковые символы. « $\Phi \Rightarrow \Psi$ » следует читать как « Φ имплицирует Ψ »; $\Phi \iff \Psi$ – « Φ если и только если Ψ ».

Определение 1.2.12. (Общезначимость формулы языка $\mathcal{L}_1$ в модели) Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель. Формула Φ языка $\mathcal{L}_1$ общезначима в $\mathcal{M}$, если Φ истинна в любом мире $\mathcal{M}$ при любом означивании переменных в $\mathcal{M}$. Для любой модели $\mathcal{M}$ и любой формулы Φ « $\mathcal{M} \models \Phi$ » означает, что Φ общезначима в модели $\mathcal{M}$.

Определение 1.2.13. (Общезначимость формулы языка $\mathcal{L}_1$ во фрейме) Пусть $\mathcal{F} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D} \rangle$ – расширенный фрейм с переменным доменом. Формула Φ языка $\mathcal{L}_1$ общезначима в $\mathcal{F}$, если она истинна во всех моделях построенных на $\mathcal{F}$. Для любого фрейма $\mathcal{F}$ и любой формулы Φ « $\mathcal{F} \models \Phi$ » означает, что Φ общезначима во фрейме $\mathcal{F}$.

1.3 Теория доказательства

На языке $\mathcal{L}_1$ строится логика **К**. Изложение теории доказательства для этой логики следует начать с определения дерева и связанных с ним определений.

Определение 1.3.1. (Дерево) Под деревом понимается множество, состоящее из следующих элементов⁵:

1. Множество элементов $\mathcal{P}$, называемых точками. Точки обозначаются строчными буквами греческого алфавита.
2. Функция l , назначающая каждой точке α натуральное число $l(\alpha)$, называемое уровнем α .
3. Отношение $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}^2$. $\alpha \mathcal{H} \beta$ читается как « α предок β » или « β наследник α ». Это отношение удовлетворяет следующим условиям:

C_1 : Существует только одна точка на уровне 1. Эта точка называется корнем дерева.

C_2 : Каждая точка, кроме корня, имеет только одного предка.

C_3 : Для любых точек α, β , если β наследник α , то $l(\beta) = l(\alpha) + 1$

Точка α называется конечной точкой, если она не имеет наследников. Путь – конечная или счетная последовательность точек, начинающаяся с корня, такая что каждый член последовательности (кроме последнего, если такой существует) является предком следующего. Ветвь – путь, последним членом которого является конечная точка дерева или бесконечный путь.

Прежде чем дать определение дерева по правилам **К** для некоторой формулы Φ , сделаем замечания относительно языка $\mathcal{L}'_1$, на котором будут строиться деревья. Язык $\mathcal{L}'_1$ расширен относительно языка $\mathcal{L}_1$ использованием дополнительных множеств символов.

Определение 1.3.2. (Префикс) Префикс – конечная последовательность целых положительных чисел. Например, 1, 14.48.1 и т.д.

Определение 1.3.3. (Параметр, ассоциированный с префиксом) Помимо бесконечного множества переменных $x_1, x_2, \dots$ (эти переменные далее называются «обычные переменные»), добавим в язык $\mathcal{L}_1$ для каждого префикса σ бесконечное множество переменных $y_{1\sigma}, y_{2\sigma}, \dots$, называемых параметрами, ассоциированными с префиксом σ . Будем использовать термины «параметр, ассоциированный с префиксом» и «параметр» как синонимы. Для любого префикса σ , параметры, ассоциированные с σ будут обозначаться строчными латинскими

⁵Воспроизводится по: Smullyan R.M. First-order logic. Dover Publications, Inc. New York, 1995, С. 3-4

буквами с субскриптом σ , например, $p_\sigma, q_\sigma, r_\sigma$.

Определение 1.3.4. (Расширенный терм) Расширенный терм – терм, в котором некоторые константные и функциональные символы имеют в качестве субскрипта некоторый префикс, либо терм, в котором ни один константный и функциональный символ не имеет субскрипта.

Определение 1.3.5. (Фундированный терм) Фундированный терм – расширенный терм, в котором все константные и функциональные символы имеют в качестве субскрипта некоторый префикс.

Из этих определений следует, что параметры, переменные, константы и функциональные термы, в которых ни один терм не имеет субскрипта, также являются расширенными термами и что параметры и переменные языка $\mathcal{L}'_1$ также относятся к фундированным термам. Синтаксически фундированные термы – переменные языка $\mathcal{L}'_1$.

Нотационная конвенция. Для любого префикса σ , любого расширенного термина t , $t@_\sigma$ – фундированный терм, в котором каждый константный и функциональный символ в t , не имеющий субскрипта, получает субскрипт σ . Например, если $f_{1.1}(c_1, g(x, d))$ – расширенный терм, то $f_{1.1}(c_1, g(x, d))@_{1.1.1} = f_{1.1}(c_1, g_{1.1.1}(x, d_{1.1.1}))$.

Учитывая эти изменения в языке, в формулах встречающихся в деревьях построенных по правилам **К** в формулах могут встречаться фундированные термы, также как и обычные переменные, но они не могут быть связанными кванторами или λ -оператором.

Определение 1.3.6. (Формула с префиксом) Формула с префиксом – выражение формы $\sigma \Phi$, где σ – префикс, а Φ – формула.

Нотационная конвенция. Для любой формулы Φ , формула Φ' – формула, полученная в результате следующей замены: для любой обычной переменной x , все свободные вхождения переменной x в Φ заменяются вхождениями фундированного параметра x_2 .

Нотационная конвенция. Запись $\Phi(x)$ говорит о том, что в формуле Φ могут быть свободные вхождения переменной x . Это, однако, не значит, что в Φ есть свободные вхождения переменной x или что в Φ нет свободных вхождений других переменных.

Определение 1.3.7. (Дерево по правилам К для некоторой формулы) Пусть Φ – формула. Дерево по правилам **К** для Φ – дерево, корнем которого является формула с префиксом $1 \sim \Phi'$ и ветви которого образуются по следующим правилам:

Конъюнктивные правила. Для любого префикса σ ,

$$\begin{array}{ccc} \frac{\sigma \Psi \ \& \ \Omega}{\sigma \Psi} & \frac{\sigma \sim (\Psi \vee \Omega)}{\sigma \sim \Psi} & \frac{\sigma \sim (\Psi \rightarrow \Omega)}{\sigma \Psi} \\ \sigma \Omega & \sigma \sim \Omega & \sigma \sim \Omega \end{array}$$

Дизъюнктивные правила. Для любого префикса σ ,

$$\frac{\sigma \Psi \vee \Omega}{\sigma \Psi \mid \sigma \Omega} \quad \frac{\sigma \sim (\Psi \ \& \ \Omega)}{\sigma \sim \Psi \mid \sigma \sim \Omega} \quad \frac{\sigma (\Psi \rightarrow \Omega)}{\sigma \sim \Psi \mid \sigma \Omega}$$

Правило двойного отрицания. Для любого префикса σ ,

$$\frac{\sigma \sim \sim \Psi}{\sigma \Psi}$$

Правила возможности. Если префикс $\sigma.n$ является новым для ветви, то

$$\frac{\sigma \Diamond \Psi}{\sigma.n \Psi} \quad \frac{\sigma \sim \Box \Psi}{\sigma.n \sim \Psi}$$

Ограничение на правило: для любой формулы с префиксом формы $\sigma \Diamond \Psi$ или $\sigma \sim \Box \Psi$, для любой ветви $\mathcal{B}$ правило возможности к $\sigma \Diamond \Psi$ или $\sigma \sim \Box \Psi$ на ветви $\mathcal{B}$ можно применить только один раз.

Правила необходимости. Если префикс $\sigma.n$ уже встречался на ветви, то

$$\frac{\sigma \Box \Psi}{\sigma.n \Psi} \quad \frac{\sigma \sim \Diamond \Psi}{\sigma.n \sim \Psi}$$

Правила для универсальной квантификации. Для любого параметра p_σ , ассоциированного с префиксом σ ,

$$\frac{\sigma \forall x \Psi(x)}{\sigma \Psi(p_\sigma)} \quad \frac{\sigma \sim \exists x \Psi(x)}{\sigma \sim \Psi(p_\sigma)},$$

где $\Psi(p_\sigma)$ – результат замены всех свободных вхождений всех свободных вхождений переменной x в $\Psi(x)$ вхождениями параметра p_σ .

Правила для экзистенциальной квантификации. Для любого параметра p_σ , ассоциированного с префиксом σ , если p_σ – новый для ветви,

$$\frac{\sigma \exists x \Psi(x)}{\sigma \Psi(p_\sigma)} \quad \frac{\sigma \sim \forall x \Psi(x)}{\sigma \sim \Psi(p_\sigma)},$$

где $\Psi(p_\sigma)$ – результат замены всех свободных вхождений всех свободных вхождений переменной x в $\Psi(x)$ вхождениями параметра p_σ .

Ограничение на правило: для любой формулы с префиксом формы $\sigma \exists x \Psi(x)$ или $\sigma \sim \forall x \Psi(x)$, для любой ветви $\mathcal{B}$ правило возможности к $\sigma \exists x \Psi(x)$ или $\sigma \sim \forall x \Psi(x)$ на ветви $\mathcal{B}$ можно применить только один раз.

Правила абстракции. Для любого расширенного терма t ,

$$\frac{\sigma \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle (t)}{\sigma \Psi(t@ \sigma)} \quad \frac{\sigma \sim \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle (t)}{\sigma \sim \Psi(t@ \sigma)},$$

где $\Psi(t@ \sigma)$ – результат замены всех свободных вхождений всех свободных вхождений переменной x в $\Psi(x)$ вхождениями $t@ \sigma$.

Правило рефлексивности. Для любого расширенного терма p и любого префикса σ ,

$$\overline{\sigma p = p}.$$

Правило замены равных. Пусть $\Psi(x)$ – формула, в которой x имеет свободные вхождения.

Для любых расширенных термов p и q и любых префиксов σ и δ ,

$$\frac{\sigma p = q \quad \delta \Psi(p)}{\sigma \Psi(q)},$$

где $\Psi(p)$ и $\Psi(q)$ – результат замены всех свободных вхождений переменной x в $\Psi(x)$ вхождениями p и q соответственно.

Далее будем использовать термины «дерево по правилам $\mathbf{K}$ для некоторой формулы» и «дерево» как синонимы. Точками в деревьях будут формулы с префиксами.

Определение 1.3.8. (Замкнутая ветвь) Под замкнутой ветвью понимается ветвь, содержащая $\sigma \Psi$ и $\sigma \sim \Psi$, где Ψ – некоторая формула. Незамкнутая ветвь называется открытой.

Определение 1.3.9. (Замкнутое дерево) Замкнутое дерево – дерево, каждая ветвь которого замкнута.

Определение 1.3.10. (Доказательство формулы Φ) Доказательством формулы Φ является замкнутое дерево для Φ .

Определение 1.3.11. (Логика $\mathbf{K}$) Логика $\mathbf{K}$ – множество формул, имеющих доказательство.

Определение 1.3.12. (Теорема $\mathbf{K}$) Формула Φ называется теоремой логики $\mathbf{K}$, если Φ принадлежит $\mathbf{K}$. Это обозначается $\vdash_{\mathbf{K}} \Phi$.

2 Корректность и полнота $\mathbf{K}$

В данном разделе представлено доказательство корректности и полноты логики $\mathbf{K}$ относительно семантики для языка $\mathcal{L}_1$.

2.1 Корректность $\mathbf{K}$

Определение 2.1.1. (Корректность $\mathbf{K}$) Логика $\mathbf{K}$ называется корректной относительно семантики для языка $\mathcal{L}_1$, если все формулы, являющиеся теоремами $\mathbf{K}$ общезначимы во всех моделях.

В доказательствах корректности и полноты потребуется следующая лемма.

Лемма 2.1.1. Пусть $\mathcal{L}, \mathcal{L}^*$ – языки с одинаковым набором связей и операторов, но, возможно, разными множествами переменных, $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – произвольная модель, $\Gamma \in \mathcal{G}$, v_1 – функция от множества переменных языка $\mathcal{L}$ к $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ и v_2 – функция от множества переменных языка $\mathcal{L}^*$ к $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ и Φ – формула, принадлежащая как множеству формул на языке $\mathcal{L}$, так и множеству формул на языке $\mathcal{L}^*$. Если v_1 и v_2 согласны относительно всех свободных переменных в Φ , то

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_{v_1} \Phi \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_2} \Phi.$$

Доказательство осуществляется индукцией по структуре формулы и является рутинным, по-

этому мы его опускаем.

Для того, чтобы доказать, что **K** корректна относительно изложенной семантики, нужно определить, что такое выполнимость множества и доказать два предложения. Также потребуются несколько лемм.

Лемма 2.1.2. Пусть:

1. $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – произвольная модель, $\Gamma \in \mathcal{G}$, и v_1 и v_2 – означивания в $\mathcal{M}$;
2. переменная y свободна для x в формуле $\Phi(x)$;
3. $\Phi(y)$ получена в результате замены всех свободных вхождений переменной x в $\Phi(x)$ вхождениями y ;
4. v_1 и v_2 согласны относительно всех свободных переменных в $\Phi(x)$ кроме, возможно, x и $v_1(x) = v_2(y)$.

Тогда

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_{v_1} \Phi(x) \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_2} \Phi(y).$$

Определение 2.1.2. (Выполнимость множества в модели при некотором означивании переменных) Пусть $\mathcal{S}$ – множество формул с префиксом, $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ – множество префиксов, имеющих вхождения формулы в $\mathcal{S}$ как префиксы формул. $\mathcal{S}$ называется выполнимым, если есть модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, означивание переменных v в $\mathcal{M}$ и функция $\theta : \mathcal{P}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{G}$, такие что:

1. $\sigma, \sigma.n \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}} \Rightarrow \theta(\sigma) \mathcal{R} \theta(\sigma.n)$;
2. если p_{σ} – параметр, имеющий вхождения в $\mathcal{S}$, и $\sigma \neq 2$, то $v(p_{\sigma}) \in \mathcal{D}(\theta(\sigma))$;
3. если a_{σ} – фундированная константа, имеющая вхождение в $\mathcal{S}$, $v(a_{\sigma}) = \mathcal{I}(a, \theta(\sigma))$;
4. если $f(t_1, \dots, t_n)@_{\sigma}$, где f – n -местный функциональный символ, а $t_1, \dots, t_n$ – расширенные термы, имеет вхождение в какую-либо формулу в $\mathcal{S}$, то

$$v(f(t_1, \dots, t_n)@_{\sigma}) = \mathcal{I}(f, \theta(\sigma))(v(t_1@_{\sigma}), \dots, v(t_n@_{\sigma}));$$

5. если $\sigma \Phi \in \mathcal{S}$, то $\mathcal{M}, \theta(\sigma) \models_v \Phi$.

Далее термины «выполнимость множества в модели при некотором означивании переменных» и «выполнимость множества» будут употребляться как синонимы.

Определение 2.1.3. (Выполнимая ветвь) Ветвь дерева называется выполнимой, если множество формул с префиксом на этой ветви выполнимо в некоторой модели.

Определение 2.1.4. (Выполнимое дерево) Дерево называется выполнимым, если выполнима хотя бы одна его ветвь.

Предложение 2.1.1. Если дерево замкнуто, то оно не выполнимо.

Доказательство. Доказательство осуществляется методом от противного. Допустим, что существует замкнутое и выполнимое дерево. Т. к. оно выполнимо, есть некоторая выполнимая ветвь $\mathcal{B}$ этого дерева. Пусть $\mathcal{S}$ – множество формул с префиксом, встречающихся на $\mathcal{B}$. Допустим, что $\mathcal{S}$ выполнимо в модели $\mathcal{M}$ при означивании v и функции θ . Поскольку дерево

замкнуто, существуют формула Ψ и префикс σ , такие что $\sigma \Psi, \sigma \sim \Psi \in \mathcal{S}$. Но тогда,

$$\mathcal{M}, \theta(\sigma) \models_v \Psi \text{ и } \mathcal{M}, \theta(\sigma) \models_v \sim \Psi,$$

т. е.

$$\mathcal{M}, \theta(\sigma) \models_v \Psi \text{ и } \mathcal{M}, \theta(\sigma) \not\models_v \Psi,$$

что противоречиво. Следовательно, не существует замкнутого и выполнимого дерева. Таким образом, если дерево замкнуто, то оно не выполнимо. ■

Для доказательства следующего предложения потребуются лемма.

Лемма 2.1.3. Для любого префикса σ , для любого терма $t@_\sigma$,

$$v(t@_\sigma) = v\mathcal{I}(t, \theta(\sigma)).$$

Доказательство. Доказательство осуществляется методом индукции по структуре $t@_\sigma$. Базовый случай представлен двумя пунктами: $t@_\sigma$ – обычная переменная и $t@_\sigma$ – константа.

Пусть t – обычная переменная. Очевидно, что $v(t@_\sigma) = v(t)$. Значит, по определению денотации терма $v(t@_\sigma) = v\mathcal{I}(t, \theta(\sigma))$.

Пусть t – константа. Тогда, согласно 3 пункту определения выполнимости множества, $v(t@_\sigma) = \mathcal{I}(t, \theta(\sigma))$. Отсюда, с учетом определения денотации терма, следует, что $v(t@_\sigma) = v\mathcal{I}(t, \theta(\sigma))$.

Индуктивный случай. Пусть $t = f(s_1, \dots, s_n)$, где $n \geq 1$, f_σ – n -местный функциональный символ и для каждого j , такого что $1 \leq j \leq n$, $s_j@_\sigma$ – фундированный терм. Значит, $t@_\sigma = f_\sigma(s_1@_\sigma, \dots, s_n@_\sigma)$. По определению выполнимого множества, с учетом индуктивной гипотезы,

$$\begin{aligned} v(f_\sigma(s_1@_\sigma, \dots, s_n@_\sigma)) &= \mathcal{I}(f, \theta(\sigma))(v(s_1@_\sigma), \dots, v(s_n@_\sigma)) = \\ &= \mathcal{I}(f, \theta(\sigma))(v\mathcal{I}(s_1, \theta(\sigma)), \dots, v\mathcal{I}(s_n, \theta(\sigma))). \end{aligned}$$

Следовательно, $v(t@_\sigma) = v\mathcal{I}(t, \theta(\sigma))$. Таким образом, для любого префикса σ , любого фундированного терма $t@_\sigma$,

$$v(t@_\sigma) = v\mathcal{I}(t, \theta(\sigma)). \quad \blacksquare$$

Предложение 2.1.2. Если одно из правил **K** применено к некоторой формуле на выполнимой ветви выполнимого дерева, то в результате получается другое выполнимое дерево.

Доказательство предложения 2.1.2. Допустим $\mathcal{B}$ – выполнимая ветвь выполнимого дерева $\mathcal{T}$, к некоторой формуле на которой применяется соответствующее правило **K**. $\mathcal{S}$ – множество формул с префиксом, встречающихся на ветви $\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{S}$ выполнимо в модели $\mathcal{M}$ при означивании v и функции θ . Доказательство этой леммы заключается в том, чтобы рассмотреть все случаи применения правил **K** и показать, что в каждом из этих случаев дерево, получившееся в результате применения правил **K**, выполнимо.

Тривиальный случай. Рассмотрим некоторую выполнимую ветвь B' дерева $\mathcal{T}$, отличную от B . Очевидно, что применение правил **K** к ветви B не влияет на B' , следовательно, B' остается выполнимой, значит дерево $\mathcal{T}'$, получившееся в результате применения правил к B , также выполнимо.

Далее доказательство делится на случаи в зависимости от того, какое правило **K** применялось к ветви B . Поскольку доказательство для пунктов с применением правил для логических связок и модальных операторов в основном повторяет доказательство, изложенное у М. Фиттинга и Р.Л. Мендельсона⁶ доказательство для этих пунктов пропустим и рассмотрим только случаи с применением правил для экзистенциальной квантификации и правил абстракции.

Случай, когда применяются правила для экзистенциальной квантификации. Допустим на B находится $\sigma \exists x \Psi(x)$, т. е. $\sigma \exists x \Psi(x) \in \mathcal{S}$. Применив правило для $\exists$, добавим к B $\sigma \Psi(p_\sigma)$, где p_σ – новый для ветви параметр. Получившееся дерево назовем $\mathcal{T}'$, получившуюся ветвь – B' , а множество $\mathcal{S} \cup \{\sigma \Psi(p_\sigma)\}$ обозначим $\mathcal{S}'$. Нужно показать, что $\mathcal{T}'$ выполнимо. Для этого нужно показать, что $\mathcal{S}'$ выполнимо.

Т.к. $\mathcal{S}$ выполнимо в модели $\mathcal{M}$ при означивании v и функции θ , $\mathcal{M}, \theta(\sigma) \models_v \exists x \Psi(x)$. Следовательно,

$$\exists a (a \in \mathcal{D}(\theta(\sigma)) \ \& \ \mathcal{M}, \theta(\sigma) \models_{v_x^a} \Psi(x)).$$

Выберем такое a и получим, что

$$\mathcal{M}, \theta(\sigma) \models_{v_x^a} \Psi(x). \quad (1)$$

Из того, что $a \in \mathcal{D}(\theta(\sigma))$ и $v_{p_\sigma}^a(p_\sigma) = a$, следует, что $v_{p_\sigma}^a(p_\sigma) \in \mathcal{D}(\theta(\sigma))$. Это и то, что, во-первых, p_σ встречается на B' и, во-вторых, $v_{p_\sigma}^a$ согласна с v относительно всех переменных кроме, возможно, p_σ , влечет, что $v_{p_\sigma}^a$ удовлетворяет второму условию определения выполнимости множества. Поскольку $v_{p_\sigma}^a$ согласна с v относительно всех переменных кроме, возможно, p_σ и p_σ не имеет вхождений в какие-либо формулы в $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ выполнимо в модели $\mathcal{M}$ при означивании $v_{p_\sigma}^a$ и функции θ . Следовательно, чтобы показать, что $\mathcal{S}'$ выполнимо в модели $\mathcal{M}$ при означивании $v_{p_\sigma}^a$, нужно показать, что $\mathcal{M}, \theta(\sigma) \models_{v_{p_\sigma}^a} \Psi(p_\sigma)$.

Поскольку p_σ является новым параметром для B , p_σ не имеет вхождений в $\Psi(x)$. Т.к. $v_{p_\sigma}^a$ согласна с v_x^a относительно всех переменных кроме, возможно, p_σ и x , и p_σ не имеет вхождений в $\Psi(x)$, $v_{p_\sigma}^a$ согласна с v_x^a относительно всех свободных переменных в $\Psi(x)$ кроме, возможно, x . С учетом этого и того, что $v_x^a(x) = v_{p_\sigma}^a(p_\sigma)$ из (1) по лемме 2.1.2 следует, что

$$\mathcal{M}, \theta(\sigma) \models_{v_{p_\sigma}^a} \Psi(p_\sigma).$$

Следовательно, $\mathcal{S}'$ выполнимо в модели $\mathcal{M}$ при означивании $v_{p_\sigma}^a$ и функции θ , а значит B' выполнима и $\mathcal{T}'$ выполнимо. Доказательство для другого случая применения правила для экзистенциальной квантификации аналогично.

Случай, когда применяются правила абстракции. Пусть формула с префиксом $\sigma \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle (t)$,

⁶Fitting M., Mendelsohn R.L. First-Order Modal Logic. New York: Springer-Science+Business Media, B.Y., 1998. С. 58-59.

где t – расширенный терм, находится на $\mathcal{B}$, т.е. $\sigma \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle(t) \in \mathcal{S}$. Применив правило для λ , добавим $\sigma \Psi(t@ \sigma)$ к $\mathcal{B}$. Получившееся дерево назовем $\mathcal{T}'$, получившуюся ветвь – $\mathcal{B}'$, а множество $S \cup \{\sigma \Psi(t@ \sigma)\}$ обозначим $\mathcal{S}'$. Нужно показать, что $\mathcal{T}'$ выполнимо. Для этого, поскольку $\mathcal{S}$ выполнимо в модели $\mathcal{M}$ при означивании v и функции θ , достаточно показать, что $\mathcal{M}, \theta(\sigma) \models_v \Psi(t@ \sigma)$.

Поскольку $\mathcal{S}$ выполнимо в модели $\mathcal{M}$ при означивании v и функции θ ,

$$\mathcal{M}, \theta(\sigma) \models_v \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle(t).$$

По определению истинности формулы в мире модели,

$$\mathcal{M}, \theta(\sigma) \models_{v_x^{I(t, \theta(\sigma))}} \Psi(x). \quad (2)$$

Применив лемму 2.1.3 к (2), получим:

$$\mathcal{M}, \theta(\sigma) \models_{v_x^{v(t@ \sigma)}} \Psi(x). \quad (3)$$

Ввиду того, что:

1. $\Psi(t@ \sigma)$ – результат замены всех свободных вхождений переменной x в формуле $\Psi(x)$ вхождениями $t@ \sigma$;
2. $t@ \sigma$ свободен для x в $\Psi(x)$, т.к. все обычные переменные в Ψ были заменены на параметры с субскриптом 2;
3. $v_x^{v(t@ \sigma)}$ и v согласны относительно всех переменных кроме возможно x ;
4. по определению варианта означивания, $v_x^{v(t@ \sigma)}(x) = v(t@ \sigma)$;

из (3) по лемме 2.1.2 следует

$$\mathcal{M}, \theta(\sigma) \models_v \Psi(t@ \sigma).$$

Значит $\mathcal{S}'$ выполнимо в модели $\mathcal{M}$ при означивании v и функции θ , следовательно, $\mathcal{B}'$ выполнима и $\mathcal{T}'$ выполнимо. ■

Теорема 2.1.1. *Логика К корректна относительно изложенной семантики.*

Доказательство теоремы 2.1.1. Доказательство осуществляется контрапозитивно. Допустим, что формула Φ ложна в некотором мире Γ некоторой модели $\mathcal{M}$, при означивании v и покажем, что в таком случае формула Φ не имеет доказательства.

$$\mathcal{M}, \Gamma \not\models_v \Phi. \quad (4)$$

Дерево $1 \sim \Phi'$, состоящее из одной формулы, обозначим $\mathcal{T}$. Пусть $\mathcal{S} = \{1 \sim \Phi'\}$. Определим функцию θ и означивание w переменных языка $\mathcal{L}'_1$ так, что $\theta(1) = \Gamma$ и для любой обычной переменной x , $w(x_2) = v(x)$. Поскольку:

1. Φ' получена из Φ в результате замены, при которой для любой обычной переменной x , все свободные вхождения переменной x в Φ заменяются свободными вхождениями параметра x_2 ;

2. для любой обычной переменной x в Φ , x_2 свободна для x в Φ , т.к. параметры не квантифицируются;
 3. v согласна с w относительно всех свободных переменных в Φ , т.к. для любой обычной переменной x в Φ нет свободных вхождений x_2 ;
 4. для любой обычной переменной x в Φ , $v(x) = w(x_2)$, по определению w ;
- из (4) по лемме 2.1.1 получим:

$$\mathcal{M}, \theta(1) \not\models_w \Phi'$$

Отсюда, по определению истинности формулы в мире модели, $\mathcal{M}, \theta(1) \models_w \sim \Phi'$. Поскольку в Φ' нет вхождений фундированных констант, фундированных функциональных термов и параметров с субскриптом не равным 2, означивание w удовлетворяет условиям определения выполнимости множества, следовательно, согласно этому определению, множество $\{1 \sim \Phi'\}$ выполнимо в модели $\mathcal{M}$, при означивании w и функции θ . Следовательно, дерево $\mathcal{T}$ выполнимо. Согласно предложению 2.1.2, любое дерево, корнем которого является $1 \sim \Phi'$, выполнимо. Из контрапозитивного прочтения предложения 2.1.1 следует, что любое дерево, корнем которого является $1 \sim \Phi'$, незамкнуто. Значит Φ не имеет доказательства. Таким образом, обобщив по Φ , контрапозитивно получим, что для любой формулы Φ , если Φ теорема, то Φ общезначима во всех моделях. ■

2.2 Полнота К

Определение 2.2.1. (Полнота К) Логика **К** называется полной относительно семантики для языка $\mathcal{L}_1$, если все формулы, общезначимые во всех моделях, являются теоремами **К**.

Доказательство того, что логика **К** полна относительно изложенной семантики будет осуществляться контрапозитивно. Мы допустим, что формула Φ не имеет доказательства. Далее нужно будет показать, что существует модель, в которой формула Φ не является общезначимой. Для этого нужно определить процедуру систематического построения дерева по правилам **К**, в результате выполнения которой получалось бы насыщенное дерево (т.е. такое дерево, в котором правила применены везде, где это возможно). Далее, по некоторой незамкнутой ветви данного дерева нужно построить модель и показать, что формула Φ' ложна в некотором мире этой модели при некотором означивании переменных языка $\mathcal{L}'_1$ в этой модели. В конце концов нужно показать, что формула Φ ложна в некотором мире построенной модели при некотором означивании переменных языка $\mathcal{L}_1$ в этой модели.

Начнем с определения процедуры систематического построения дерева по правилам **К**.

Процедура систематического построения дерева по правилам К. Сформируем список $p_1, p_2, p_3, \dots$, где для любого $i \geq 1$, p_i – параметр, ассоциированный с некоторым префиксом. Этот список сформирован так, что для каждого префикса σ каждый параметр, ассоциированный с σ имеет в него вхождение.

Построение дерева по правилам **К** происходит поэтапно. Допустим, мы пытаемся построить дерево по правилам **К** для формулы Φ . Этап 1 представляет собой дерево, состоящее

из одной ветви и одной формулы: $1 \sim \Phi'$.

Для любого натурального n , если сделано n этапов и дерево не замкнулось, совершается этап $n + 1$. Он заключается в том, что, начиная с первой слева открытой ветви для каждой формулы с префиксом, F , находящейся на этой ветви, сверху вниз совершается следующее:

1. Если $F = \sigma \sim \Psi$, к каждой открытой ветви, на которой находится F добавляем $\sigma \Psi$, если $\sigma \Psi$ еще не находится на ветви.
- 2.1. Если $F = \sigma \Psi \& \Omega$, к каждой открытой ветви, на которой находится F , добавляем $\sigma \Phi$ и $\sigma \Omega$, если $\sigma \Phi$ и $\sigma \Omega$ еще не находятся на ветви.
- 2.2. Если $F = \sigma \sim (\Psi \vee \Omega)$, к каждой открытой ветви, на которой находится F , добавляем $\sigma \sim \Phi$ и $\sigma \Omega$, если $\sigma \sim \Phi$ и $\sigma \Omega$ еще не находятся на ветви.
- 2.3. Если $F = \sigma \sim (\Psi \rightarrow \Omega)$, к каждой открытой ветви, на которой находится F , добавляем $\sigma \Phi$ и $\sigma \sim \Omega$, если $\sigma \Phi$ и $\sigma \sim \Omega$ еще не находятся на ветви.
- 3.1. Если $F = \sigma \Psi \vee \Omega$, каждую открытую ветвь, на которой находится F и не находится ни $\sigma \Phi$, ни $\sigma \Omega$, делим на две ветви, к одной из которых добавляем $\sigma \Phi$, а к другой – $\sigma \Omega$.
- 3.2. Если $F = \sigma \sim (\Psi \& \Omega)$, каждую открытую ветвь, на которой находится F и не находится ни $\sigma \sim \Phi$, ни $\sigma \sim \Omega$, делим на две ветви, к одной из которых добавляем $\sigma \sim \Phi$, а к другой – $\sigma \sim \Omega$.
- 3.3. Если $F = \sigma \Psi \rightarrow \Omega$, каждую открытую ветвь, на которой находится F и не находится ни $\sigma \sim \Phi$, ни $\sigma \Omega$, делим на две ветви, к одной из которых добавляем формулу с префиксом $\sigma \sim \Phi$, а к другой – $\sigma \Omega$.
- 4.1. Если $F = \sigma \Diamond \Psi$, то на каждой открытой ветви, на которой находится F , выбираем наименьшее натуральное n , такое что $\sigma.n$ не встречался на ветви и добавляем к ней $\sigma.n \Psi$.
- 4.2. Если $F = \sigma \sim \Box \Psi$, то на каждой открытой ветви, на которой находится F , выбираем наименьшее натуральное n , такое что $\sigma.n$ не встречался на ветви и добавляем к ней $\sigma.n \sim \Psi$.
- 5.1. Если $F = \sigma \Box \Psi$, то к каждой открытой ветви, на которой находится F и не находится $\sigma.n \Psi$, добавляем $\sigma.n \Psi$, где $\sigma.n$ – префикс, встречавшийся на ветви.
- 5.2. Если $F = \sigma \sim \Diamond \Psi$, то к каждой открытой ветви, на которой находится F и не находится $\sigma \sim \Diamond \Psi$, добавляем $\sigma.n \sim \Psi$, где $\sigma.n$ – префикс, встречавшийся на ветви.
- 6.1. Если $F = \sigma \exists x \Psi(x)$, к каждой открытой ветви, на которой находится F , если формула формы $\Psi(p_\sigma)$, где p_σ – параметр, ассоциированный с σ , не встречается на ветви, выбираем первый ранее не встречавшийся на ветви ассоциированный с σ параметр p_i из списка фундированных параметров и добавляем $\sigma \Psi(p_i)$ к концу ветви.
- 6.2. Если $F = \sigma \sim \forall x \Psi(x)$, к каждой открытой ветви, на которой находится F , если формула формы $\sim \Psi(p_\sigma)$, где p_σ – параметр, ассоциированный с σ , не встречается на ветви, выбираем первый ранее не встречавшийся на ветви ассоциированный с σ параметр p_i из списка фундированных параметров и добавляем $\sigma \sim \Psi(p_i)$ к концу ветви.
- 7.1. Если $F = \sigma \forall x \Psi(x)$, к каждой открытой ветви, на которой находится F , добавляем $\sigma \Psi(p_\sigma)$ для каждого ранее встречавшегося на ветви параметра p_σ , ассоциированного с σ , если $\sigma \Psi(p_\sigma)$ не находится на ветви; если на ветви не встречался ни один параметр,

ассоциированный с σ , то берем первый параметр p_i , ассоциированный с σ из списка фундированных параметров и добавляем $\sigma \Psi(p_i)$ к каждой открытой ветви, на которой находится $\sigma \forall x \Psi(x)$.

- 7.2 Если $F = \sigma \sim \exists x \Psi(x)$, к каждой открытой ветви, на которой находится F , добавляем $\sigma \sim \Psi(p_\sigma)$ для каждого ранее встречавшегося на ветви параметра p_σ , ассоциированного с σ , если $\sigma \Psi(p_\sigma)$ не находится на ветви; если на ветви не встречался ни один параметр, ассоциированный с σ , то берем первый параметр p_i , ассоциированный с σ из списка фундированных параметров и добавляем $\sigma \sim \Psi(p_i)$ к каждой открытой ветви, на которой находится $\sigma \sim \exists x \Psi(x)$.
- 8.1. Если $F = \sigma \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle(t)$, где t – расширенный терм, к каждой открытой ветви, на которой находится F и не находится $\sigma \Psi(t@_\sigma)$, добавляем $\sigma \Psi(t@_\sigma)$.
- 8.2. Если $F = \sigma \sim \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle(t)$, где t – расширенный терм, к каждой открытой ветви, на которой находится F и не находится $\sigma \sim \Psi(t@_\sigma)$, добавляем $\sigma \sim \Psi(t@_\sigma)$.
9. Если на ветку введен новый префикс σ , дописываем к концу ветви $\sigma t = t$ для каждого фундированного терма t , встречающегося на ветке, если.
10. Если на ветку введен новый фундированный терм t , дописываем к концу ветви $\sigma t = t$ для каждого префикса σ , встречающегося на ветке.
11. Если на ветке встречаются $\sigma t = u$ и $\delta \Phi(t)$, где t, u – фундированные термы, то дописываем к концу ветви $\delta \Phi(u)$, при условии, что $\delta \Phi(u)$ ранее не встречалась на ветке.

После того как всё это применено к первой слева открытой ветви дерева, это же совершается со следующими открытыми ветвями до первой справа (включительно). Это завершает этап $n + 1$.

Поскольку мы допустили, что формула Φ не имеет доказательства, существует открытая ветвь $\mathcal{B}$ и множество формул в префиксом на ней $\mathcal{S}$, обладающее следующими свойствами:

1. Для любой формулы Ψ , $\sigma \Psi$ и $\sigma \sim \Psi$ не могут одновременно принадлежать $\mathcal{S}$.
2. Если $\sigma \sim \sim \Psi \in \mathcal{S}$, то $\sigma \Psi \in \mathcal{S}$.
- 3.1. Если $\sigma \Psi \& \Omega \in \mathcal{S}$, то $\sigma \Psi \in \mathcal{S}$ и $\sigma \Omega \in \mathcal{S}$.
- 3.2. Если $\sigma \sim (\Psi \vee \Omega) \in \mathcal{S}$, то $\sigma \sim \Psi \in \mathcal{S}$ и $\sigma \sim \Omega \in \mathcal{S}$.
- 3.3. Если $\sigma \sim (\Psi \rightarrow \Omega) \in \mathcal{S}$, то $\sigma \Psi \in \mathcal{S}$ и $\sigma \sim \Omega \in \mathcal{S}$.
- 4.1. Если $\sigma \Psi \vee \Omega \in \mathcal{S}$, то $\sigma \Psi \in \mathcal{S}$ или $\sigma \Omega \in \mathcal{S}$.
- 4.2. Если $\sigma \sim (\Psi \& \Omega) \in \mathcal{S}$, то $\sigma \sim \Psi \in \mathcal{S}$ или $\sigma \sim \Omega \in \mathcal{S}$.
- 4.3. Если $\sigma \Psi \rightarrow \Omega \in \mathcal{S}$, то $\sigma \sim \Psi \in \mathcal{S}$ или $\sigma \Omega \in \mathcal{S}$.
- 5.1. Если $\sigma \Diamond \Psi \in \mathcal{S}$, то существует n , такой что $\sigma.n \Psi \in \mathcal{S}$.
- 5.2. Если $\sigma \sim \Box \Psi \in \mathcal{S}$, то существует n , такой что $\sigma.n \sim \Psi \in \mathcal{S}$.
- 6.1. Если $\sigma \Box \Psi \in \mathcal{S}$, то для каждого встречающегося на $\mathcal{B}$ префикса $\sigma.n$ $\sigma.n \Psi \in \mathcal{S}$.
- 6.2. Если $\sigma \sim \Diamond \Psi \in \mathcal{S}$, то для каждого встречающегося на $\mathcal{B}$ префикса $\sigma.n$ $\sigma.n \sim \Psi \in \mathcal{S}$.
- 7.1. Если $\sigma \exists x \Psi(x) \in \mathcal{S}$, то существует параметр p_σ , ассоциированный с σ , такой что $\sigma \Psi(p_\sigma) \in \mathcal{S}$.
- 7.2. Если $\sigma \sim \forall x \Psi(x) \in \mathcal{S}$, то существует параметр p_σ , ассоциированный с σ , такой что $\sigma \sim \Psi(p_\sigma) \in \mathcal{S}$.

- 8.1. Если $\sigma \forall x \Psi(x) \in \mathcal{S}$, то для всех встречающихся на ветви параметров p_σ , ассоциированных с σ , $\sigma \Psi(p_\sigma) \in \mathcal{S}$.
- 8.2. Если $\sigma \sim \exists x \Psi(x) \in \mathcal{S}$, то для всех встречающихся на ветви параметров p_σ , ассоциированных с σ , $\sigma \sim \Psi(p_\sigma) \in \mathcal{S}$.
- 9.1. Если $\sigma \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle(t) \in \mathcal{S}$, где t – расширенный терм, то $\sigma \Psi(t@_\sigma) \in \mathcal{S}$.
- 9.2. Если $\sigma \sim \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle(t) \in \mathcal{S}$, где t – расширенный терм, то $\sigma \sim \Psi(t@_\sigma) \in \mathcal{S}$.
10. Для любого префикса σ , для любого фундированного терма t , встречающихся на $\mathcal{B}$, $\sigma t = t \in \mathcal{S}$.
11. Для любых префиксов σ, δ и любых фундированных термов t, u , если $\sigma t = u \in \mathcal{S}$ и $\delta \Phi(t) \in \mathcal{S}$, то $\delta \Phi(u) \in \mathcal{S}$.

Далее определим модель, построенную по некоторой открытой ветви насыщенного, систематически построенного дерева по правилам **К**.

Определение 2.2.2. (Модель $\mathcal{M}$) Пусть:

- $\mathcal{B}$ – открытая ветвь насыщенного систематически построенного дерева для Φ ;
- $\mathcal{S}$ – множество формул с префиксом на $\mathcal{B}$;
- $\mathcal{P}_\mathcal{S}$ – множество префиксов, встречающихся на $\mathcal{B}$;
- $\mathcal{PAR}_\mathcal{S}$ – множество параметров, имеющих вхождения в формулы множества $\mathcal{S}$;
- $\mathcal{GT}$ – множество фундированных термов;
- $\mathcal{GT}_\mathcal{S}$ – множество фундированных термов, имеющих вхождения в формулы множества $\mathcal{S}$.

Определим модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ на фрейме $\mathcal{F} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D} \rangle$ следующим образом:

1. $\mathcal{G} = \mathcal{P}_\mathcal{S} \cup \{2\}$. Важно, что 2 – префикс, не встречающийся на $\mathcal{B}$;
2. $\mathcal{R} = \{(\sigma, \sigma.n) : \sigma, \sigma.n \in \mathcal{G}\}$; Поскольку построение дерева всегда начинается с формулы с префиксом 1, $2 \notin \text{Dom}\mathcal{R} \cup \text{Range}\mathcal{R}$.
3. $\sim$ – отношение на $\mathcal{GT}$, определенное следующим образом:

$$\sim \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, u) : t, u \in \mathcal{GT} \ \& \ \exists \sigma (\sigma t = u \in \mathcal{S})\} \cup \{(t, t) : t \in \mathcal{GT}\}.$$

$\sim$ является отношением эквивалентности. Этот факт легко доказывается с помощью свойств 10 и 11 для $\mathcal{S}$, поэтому его доказательство пропустим. Для каждого фундированного терма $t \in \mathcal{GT}$, $\bar{t} \stackrel{\text{def}}{=} \{u : t \sim u\}$.

Домены миров определены следующим образом:

- 3.1. для любого $\sigma \in \mathcal{P}_\mathcal{S}$, если в $\mathcal{PAR}_\mathcal{S}$ существует хотя бы один параметр ассоциированный с σ , то $\mathcal{D}(\sigma) = \{\bar{p}_\sigma : p_\sigma \in \mathcal{PAR}_\mathcal{S}\}$;
- 3.2. для любого $\sigma \in \mathcal{P}_\mathcal{S}$, если $\mathcal{PAR}_\mathcal{S}$ не существует ни одного параметра, ассоциированного с σ , то $\mathcal{D}(\sigma) = \{\bar{r}_\sigma\}$;
- 3.3. $\mathcal{D}(2) = \{\bar{t} : t \in \mathcal{GT}\}$;

Таким образом, $\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{G}} \mathcal{D}(\sigma) \cup \{\bar{r}_\sigma\}$.

4. интерпретация определена следующим образом:

- 4.1. для любого k -местного предиката P , кроме $=$, для любых фундированных термов

$t_1, \dots, t_k$ и для любого $\sigma \in \mathcal{G}$,

$$\mathcal{I}(P, \sigma) = \{ \langle \overline{t_1}, \dots, \overline{t_k} \rangle : \sigma P(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{S} \};$$

4.2. для любого $\sigma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}(=, \sigma) = \mathfrak{D}_{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$;

4.3. для любой константы c , для любого префикса $\sigma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}(c, \sigma) = \overline{c_\sigma}$;

4.4. для любого $n \geq 1$, для любого n -местного функционального символа f , для любого $\sigma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}(f, \sigma)$ – n -местная функция на $\mathcal{D}(\mathcal{F})$, такая что для любых $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$,

$$\mathcal{I}(f, \sigma)(\overline{t_1}, \dots, \overline{t_n}) = \overline{f(t_1, \dots, t_n)@_\sigma}.$$

Определим функцию v , назначающую каждой переменной языка $\mathcal{L}'_1$ некоторый элемент $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, следующим образом: для каждой переменной x языка $\mathcal{L}'_1$, $v(x) = \overline{x}$. Функцию v будем называть означиванием переменных языка $\mathcal{L}'_1$ в модели $\mathcal{M}$.

Определение модели требует некоторых пояснений.

К пункту 1. В ходе доказательства полноты **K** нам нужно показать, что если для некоторой формулы Φ можно построить насыщенное незамкнутое дерево, то по некоторой незамкнутой ветви этого дерева можно построить модель и означивание переменных, такие что Φ' ложна в мире 1 этой модели при данном означивании переменных в этой модели. Но, если при построении модели мы поместим фундированные константы, фундированные функциональные термы или параметры с субскриптом 2 в домены миров, встречающихся на $\mathcal{B}$, может случиться так, что формула Φ' будет истинна в мире 1 построенной модели. Чтобы этого избежать, вводится префикс 2.

Приведем пример. Допустим, что префикс 2 не был введен (соответственно, $\mathcal{D}(2)$ не определен). Попробуем по незамкнутой ветви систематически построенного дерева для формулы $\forall x P(x) \rightarrow P(x)$ построить модель $\mathcal{M}$ и означивание v переменных языка $\mathcal{L}'_1$, такие что формула $\forall x P(x) \rightarrow P(x_2)$ будет ложна в некотором мире модели $\mathcal{M}$ при означивании v . Построим насыщенное дерево для формулы $\forall x P(x) \rightarrow P(x)$:

$$\begin{array}{ll} 1 & \sim (\forall x P(x) \rightarrow P(x_2)) \quad 1 \\ 1 & \forall x P(x) \quad 2(1) \\ 1 & \sim P(x_2) \quad 3(2) \\ 1 & P(p_1) \quad 4(2) \end{array}$$

Обозначим единственную ветвь этого дерева $\mathcal{B}$, $\mathcal{S}$ – множество формул с префиксом на $\mathcal{B}$, $\mathcal{GT}$ – множество фундированных термов, $\mathcal{GT}_{\mathcal{S}}$ – множество фундированных термов, входящих в $\mathcal{S}$. Поскольку мы допустили, что префикс 2 не был введен, мы располагаем только миром 1. Тогда модель, построенная по незамкнутой ветви приведенного выше дерева будет выглядеть так: $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, где $\mathcal{G} = \{1\}$, $\mathcal{R} = \emptyset$, $\mathcal{D}(1) = \{\overline{p_1}, \overline{x_2}\}$, $\mathcal{I}(P, 1) = \{\overline{p_1}\}$. Означивание v определено следующим образом: для каждой переменной x языка $\mathcal{L}'_1$, $v(x) = \overline{x}$. Формула $\forall x P(x) \rightarrow P(x)$ должна быть ложна в некотором мире $\mathcal{M}$ при некотором означивании переменных v в $\mathcal{M}$. Но, согласно определению истинности формулы в мире модели, $\mathcal{M}, 1 \not\models_v \forall x P(x)$,

поскольку $\overline{x_2} \notin \mathcal{I}(P, 1)$. Значит, $\forall x P(x) \rightarrow P(x_2)$ не является ложной в некотором мире модели $\mathcal{M}$ при означивании v . Следовательно нельзя просто поместить $\overline{x_2}$ в $\mathcal{D}(1)$.

Теперь построим модель согласно данному выше определению: $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, где $\mathcal{G} = \{1, 2\}$, $\mathcal{R} = \emptyset$, $\mathcal{D}(1) = \{\overline{p_1}\}$, $\mathcal{D}(2) = \{\overline{p_1}, \overline{x_2}\} \cup \{t@2 : t@2 \in \mathcal{GT} - \mathcal{GT}_S\}$, $\mathcal{I}(P, 1) = \{\overline{p_1}\}$. Означивание v определено следующим образом: для каждой переменной x языка $\mathcal{L}'_1$, $v(x) = \overline{x}$. Поскольку только $\overline{p_1} \in \mathcal{D}(1)$ и $\mathcal{I}(P, 1) = \{\overline{p_1}\}$, для любого $e \in \mathcal{D}(1)$, $e \in \mathcal{I}(P, 1)$. Значит, по определению истинности формулы в мире модели, $\mathcal{M}, 1 \models_v \forall x P(x)$. Поскольку $v(x_2) = \overline{x_2}$ и $\overline{x_2} \notin \mathcal{I}(P, 1)$, $\mathcal{M}, 1 \not\models_v P(x_2)$. Из того, что $\mathcal{M}, 1 \models_v \forall x P(x)$ и $\mathcal{M}, 1 \not\models_v P(x_2)$, следует: $\mathcal{M}, 1 \not\models_v \forall x P(x) \rightarrow P(x_2)$, что и требовалось.

К пункту 3.2. Этот пункт нужен, чтобы избежать пустых доменов миров. Например, если мы возьмем дерево для формулы $\forall x \Box P(x)$

$$\begin{array}{lll} 1 & \sim \forall x \Box P(x) & 1 \\ 1 & \sim \Box P(p_1) & 2(1) \\ 1.1 & \sim P(p_1) & 3(2) \end{array}$$

и попробуем построить модель, то нам необходим пункт 3.2, т.к. без него $\mathcal{D}(1.1)$ окажется пустым. Можно сказать, что, для каждого мира σ , если домен $\mathcal{D}(\sigma)$ нельзя «населить» параметрами, ассоциированными с σ , просто переписав их с ветви $\mathcal{B}$, то $\mathcal{D}(\sigma)$ «заселяется» классом $\overline{r_\sigma}$, чтобы $\mathcal{D}(\sigma)$ не оказался пустым.

К пункту 3.3. В $\mathcal{D}(2)$ нужны классы эквивалентности фундированных термов с префиксом 2, не встречающихся на $\mathcal{B}$, чтобы определить денотаты констант и функциональных термов в мире 2.

Чтобы доказать нужное для доказательства теоремы 2.2.2 предложение потребуются следующие леммы.

Лемма 2.2.4. Пусть:

1. $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – произвольная модель, $\Gamma \in \mathcal{G}$, и v_1 и v_2 – означивания переменных языка $\mathcal{L}'_1$ в $\mathcal{M}$;
2. y свободна для x в формуле $\Phi(x)$;
3. $\Phi(y)$ получена в результате замены всех свободных вхождений переменной x в $\Phi(x)$ вхождениями y ;
4. v_1 и v_2 согласны относительно всех свободных переменных в $\Phi(x)$ кроме, возможно, x и $v_1(x) = v_2(y)$.

Тогда

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_{v_1} \Phi(x) \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_2} \Phi(y).$$

Доказательство. Доказательство леммы осуществляется индукцией по структуре формулы и является рутинным, поэтому мы его опускаем.

Рассмотрим базовый случай. Пусть $\Omega = P(t_1, \dots, t_n)$, где P – n -местный предикатный символ, $t_1, \dots, t_n$ – фундированные термы. По определению $\mathcal{I}$, из $\sigma P(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}$ следует, что $\langle \overline{t_1}, \dots, \overline{t_n} \rangle \in \mathcal{I}(P, \sigma)$. Т.к. для любого фундированного терма t , $v(t) = \overline{t}$, $\langle v(t_1), \dots, v(t_n) \rangle \in$

$\mathcal{I}(P, \sigma)$. Отсюда, по определению истинности формулы в мире модели следует, что $\mathcal{M}, \sigma \models_v P(t_1, \dots, t_n)$. Обобщив по σ получим, что для любого префикса $\sigma \in \mathcal{G}$,

$$\sigma P(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{M}, \sigma \models_v P(t_1, \dots, t_n). \blacksquare$$

Лемма 2.2.5. Для любого терма t , любого $\sigma \in \mathcal{G}$ $v\mathcal{I}(t, \sigma) = \overline{t@ \sigma}$.

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по структуре терма. Доказательство для случаев, когда t – переменная или константа очевидно.

Допустим, что $t = f(t_1, \dots, t_n)$, где f – n -местный функциональный символ, $t_1, \dots, t_n$ – термы. С учетом определений денотации, $\mathcal{I}$ и индуктивной гипотезы:

$$\begin{aligned} v\mathcal{I}(f(t_1, \dots, t_n), \sigma) &= \mathcal{I}(f, \sigma)(v\mathcal{I}(t_1, \sigma), \dots, v\mathcal{I}(t_n, \sigma)) = \\ &= \mathcal{I}(f, \sigma)(\overline{t_1@ \sigma}, \dots, \overline{t_n@ \sigma}) = \overline{f(t_1, \dots, t_n)@ \sigma}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого t – терма t , любого $\sigma \in \mathcal{G}$ $v\mathcal{I}(t, \sigma) = \overline{t@ \sigma}$. $\blacksquare$

Теперь докажем относительно модели $\mathcal{M}$ и означивания v следующее предложение.

Предложение 2.2.1. Для любого префикса $\sigma \in \mathcal{G}$, для любой формулы Ω в языке $\mathcal{L}'_1$,

$$\begin{aligned} \sigma \Omega \in \mathcal{S} &\Rightarrow \mathcal{M}, \sigma \models_v \Omega; \\ \sigma \sim \Omega \in \mathcal{S} &\Rightarrow \mathcal{M}, \sigma \not\models_v \Omega. \end{aligned}$$

Доказательство предложения 2.2.1. Доказательство осуществляется индукцией по структуре формулы. Ограничимся доказательством базового случая и пунктов для $\exists$ и λ -оператора. В доказательствах понадобится следующая лемма.

Пусть $\Omega = \sim P(t_1, \dots, t_n)$, где P – n -местный предикатный символ, $t_1, \dots, t_n$ – фундаментальные термы. Доказательство для этого случая отличается от предыдущего тем, что первым шагом мы оговариваем, что, по свойству 1 для $\mathcal{S}$, из $\sigma \sim P(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}$ следует, что $\sigma P(t_1, \dots, t_n) \notin \mathcal{S}$. Далее доказательство аналогично доказательству для случая, когда $\Omega = P(t_1, \dots, t_n)$.

Пусть $\Omega = \exists x \Psi(x)$. По свойству 7.1., если $\sigma \exists x \Psi(x) \in \mathcal{S}$, то существует параметр p_σ , такой что формула $\sigma \Psi(p_\sigma) \in \mathcal{S}$. Применив индуктивную гипотезу к $\sigma \Psi(p_\sigma)$ получим, что существует параметр p_σ , такой что $\mathcal{M}, \sigma \models_v \Psi(p_\sigma)$. Отсюда, поскольку p_σ свободен для x в $\Psi(x)$, $v_x^{\overline{p_\sigma}}$ и v согласны относительно всех термов кроме, возможно, x и $v_x^{\overline{p_\sigma}}(x) = v(p_\sigma)$, по лемме 2.2.4 следует, что $\mathcal{M}, \sigma \models_{v_x^{\overline{p_\sigma}}} \Psi(x)$. Поскольку $\mathcal{D}(\sigma) = \{\overline{p_\sigma} : \sigma \in \mathcal{PAR}_S\}$,

$$\exists e(e \in \mathcal{D}(\sigma) \ \& \ \mathcal{M}, \sigma \models_{v_x^e} \Psi(x)).$$

Отсюда, по определению истинности, $\mathcal{M}, \sigma \models_v \exists x \Psi(x)$. Обобщив по σ получим, что для любого префикса $\sigma \in \mathcal{G}$,

$$\sigma \exists x \Psi(x) \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{M}, \sigma \models_v \exists x \Psi(x).$$

Пусть $\Omega = \sim \exists x \Psi(x)$. Доказательство для этого случая отличается от предыдущего тем, что первым шагом мы оговариваем, что, по свойству 1 для $\mathcal{S}$, из $\sigma \sim \exists x \Psi(x) \in \mathcal{S}$ следует, что $\sigma \exists x \Psi(x) \notin \mathcal{S}$. Далее доказательство аналогично доказательству для случая, когда $\Omega = \exists x \Psi(x)$.

Пусть $\Omega = \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle(t)$, где t – расширенный терм. Предварительно докажем следующую лемму.

По свойству 9.1, из $\sigma \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle(t) \in \mathcal{S}$ следует, что $\sigma \Psi(t@ \sigma) \in \mathcal{S}$, а значит, согласно индуктивной гипотезе, $\mathcal{M}, \sigma \models_v \Psi(t@ \sigma)$. Отсюда, поскольку $t@ \sigma$ свободен для x в $\Psi(x)$, $v_x^{t@ \sigma}$ и v согласны относительно всех термов кроме, возможно, x и $v_x^{t@ \sigma}(x) = v(p_\sigma)$, по лемме 2.2.4 имеем $\mathcal{M}, \sigma \models_{v_x^{t@ \sigma}} \Psi(x)$, и следовательно, по лемме 2.2.5, $\mathcal{M}, \sigma \models_{v_x^{I(t, \sigma)}} \Psi(x)$. Отсюда, по определению истинности, $\mathcal{M}, \sigma \models_v \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle(t)$. Обобщив по σ получим, что для любого префикса $\sigma \in \mathcal{G}$,

$$\sigma \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle(t) \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{M}, \sigma \models_v \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle(t).$$

Пусть $\Omega = \sim \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle(t)$, где t – расширенный терм. Доказательство для этого случая отличается от предыдущего тем, что первым шагом мы оговариваем, что, по свойству 1 для $\mathcal{S}$, из $\sigma \sim \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle(t) \in \mathcal{S}$ следует, что $\sigma \langle \lambda x. \Psi(x) \rangle(t) \notin \mathcal{S}$. Далее доказательство аналогично доказательству для предыдущего случая.

Таким образом, для любого префикса $\sigma \in \mathcal{G}$, для любой формулы Ω в языке $\mathcal{L}'_1$,

$$\begin{aligned} \sigma \Omega \in \mathcal{S} &\Rightarrow \mathcal{M}, \sigma \models_v \Omega; \\ \sigma \sim \Omega \in \mathcal{S} &\Rightarrow \mathcal{M}, \sigma \not\models_v \Omega. \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема 2.2.2. *Логика $\mathbf{K}$ полна относительно изложенной семантики.*

Доказательство теоремы 2.2.2. Доказательство осуществляется контрапозитивно. Допустим, что формула Φ не имеет доказательства. Значит, пользуясь процедурой систематического построения дерева, можно построить насыщенную незамкнутое дерево, в котором есть открытая ветвь $\mathcal{B}$. Далее, по этой ветви построим модель $\mathcal{M}$ и определим означивание v , так как описано выше. Т. к. ветвь $\mathcal{B}$ начинается с $1 \sim \Phi'$, согласно предложению 2.2.1,

$$\mathcal{M}, 1 \not\models_v \Phi'. \quad (5)$$

Определим означивание переменных языка $\mathcal{L}'_1$ w в $\mathcal{M}$, так, что

$$w(x) = \begin{cases} \overline{x_2}, & \text{если } x \text{ – обычная переменная;} \\ v(x), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку:

1. Φ' получена из Φ в результате замены, при которой для любой обычной переменной x , все свободные вхождения переменной x в Φ заменяются свободными вхождениями параметра x_2 ;
2. для любой обычной переменной x в Φ , x_2 свободна для x в Φ , т.к. параметры не кванти-

фицируются;

3. w согласна с v относительно всех свободных переменных в Φ кроме, возможно, некоторых или всех обычных переменных;
4. для любой обычной переменной x в Φ , $w(x) = v(x_2)$,

по лемме 2.2.4 из (5) имеем:

$$\mathcal{M}, 1 \not\models_w \Phi. \quad (6)$$

Теперь определим u – означивание переменных языка $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{M}$, так, что для любой обычной переменной x , $u(x) = \overline{x_2}$. Поскольку в Φ свободные вхождения имеют только обычные переменные, w и u согласны относительно всех свободных переменных в Φ . Следовательно, по лемме 2.1.1 из (6) имеем

$$\mathcal{M}, 1 \not\models_u \Phi.$$

Значит, существуют модель $\mathcal{M}$, мир Γ и означивание переменных языка $\mathcal{L}_1$ u в модели $\mathcal{M}$, такие что $\mathcal{M}, \Gamma \not\models_u \Phi$. Следовательно, Φ не является общезначимой во всех моделях. Контрапозитивно получим, что если Φ общезначима во всех моделях, то Φ – теорема. ■

3 Перевод с языка $\mathcal{L}_1$ на язык $\mathcal{L}_2$

В этом разделе изложен язык $\mathcal{L}_2$. Основное отличие $\mathcal{L}_2$ от $\mathcal{L}_1$ заключается в том, что в вокабуляре $\mathcal{L}_1$ присутствует λ -оператор и отсутствует квантор Π и наоборот, в $\mathcal{L}_2$ есть Π , но нет λ -оператора. Также определен перевод с языка $\mathcal{L}_1$ на язык $\mathcal{L}_2$ и показано, что обратного перевода не существует, т.е. что язык $\mathcal{L}_2$ обладает большими выразительными возможностями, чем язык $\mathcal{L}_1$.

3.1 Язык $\mathcal{L}_2$

Вокабуляр языка $\mathcal{L}_2$. Пусть $PS(\mathcal{L}_1)$ – множество примитивных символов языка $\mathcal{L}_1$. Множество примитивных символов языка $\mathcal{L}_2$ равно $(PS(\mathcal{L}_1) - \{\lambda\}) \cup \{\Pi\}$ (Π – квантор). Примечания к языку $\mathcal{L}_2$ аналогичны примечаниям к языку $\mathcal{L}_1$. Множества переменных, предикатных, константных и функциональных символов в вокабулярах $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ равны, поэтому, вместо «переменная языка $\mathcal{L}_1$ » будем говорить просто «переменная». Также для предикатных, константных и функциональных символов.

Множество термов $\mathcal{L}_2$ равно множеству термов $\mathcal{L}_1$. Поскольку множества переменных, предикатных, константных и функциональных символов в вокабулярах $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ равны, множество термов $\mathcal{L}_1$ равно множеству термов $\mathcal{L}_2$. Поэтому вместо «терм $\mathcal{L}_1$ » и «терм $\mathcal{L}_2$ » будем говорить «терм».

Определение 3.1.1. (Атомарная формула языка $\mathcal{L}_2$) Если P является n -местным предикатным символом и $t_1, \dots, t_n$ – термы, то $P(t_1, \dots, t_n)$ – атомарная формула.

В отличие от языка $\mathcal{L}_1$, в языке $\mathcal{L}_2$ атомарные формулы *могут* содержать константы и функциональные термы.

Определение 3.1.2. (Множество формул языка $\mathcal{L}_2$) Множество формул языка $\mathcal{L}_2$, определяется рекурсивно с использованием формы Бэкуса-Наура, следующим образом:

$$\Phi ::= P(t_1, \dots, t_n) \mid \neg \Phi \mid \Phi_1 \rightarrow \Phi_2 \mid \Box \Phi \mid \forall x \Phi \mid \Pi x \Phi,$$

где P – n -местный предикатный символ, x – переменная, $t_1, \dots, t_n$ – термы, Φ – формула.

Нотационная конвенция. $\mathbb{F}(\mathcal{L}_2)$ – множество формул языка $\mathcal{L}_2$.

Связки $\&$, $\vee$ определяются через $\neg$, $\rightarrow$, квантор $\exists$ определяется через $\forall$ (так же как для языка $\mathcal{L}_1$) и квантор Σ определяется через Π следующим образом: для любой формулы Φ и переменной x ,

$$\Sigma x \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \neg \Pi x \neg \Phi.$$

Конвенции относительно скобок аналогичны конвенциям относительно скобок для языка $\mathcal{L}_1$.

3.2 Семантика языка $\mathcal{L}_2$

Определения фрейма, домена мира, домена фрейма, интерпретации, модели, домена модели, озаничивания и варианта означивания, денотации терма такие же как в описании семанти-

ки для языка $\mathcal{L}_1$. Семантика $\mathcal{L}_2$ отличается от семантики $\mathcal{L}_1$ определением истинности.

Определение 3.2.1. (Истинность формулы $\mathcal{L}_2$ в некотором мире модели (истинность-2)) Определим отношение истинности ($\models^2$) между моделями, мирами, означиваниями переменных и формулами языка $\mathcal{L}_2$, так что, если $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель, Γ – возможный мир, v – означивание переменных в $\mathcal{M}$ и $\Phi, \Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$, то:

1. Если P является n -местным предикатным символом и $t_1, \dots, t_n$ – термы, то $\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 P(t_1, \dots, t_n) \iff \langle (v\mathcal{I})(t_1, \Gamma), \dots, (v\mathcal{I})(t_n, \Gamma) \rangle \in \mathcal{I}(P, \Gamma)$;
2. $\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \neg \Phi \iff \mathcal{M}, \Gamma \not\models_v^2 \Phi$;
3. $\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Phi \rightarrow \Psi \iff (\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Phi \Rightarrow \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Psi)$;
4. $\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Box \Phi \iff \forall \Delta (\Delta \in \mathcal{G} \ \& \ \Gamma \mathcal{R} \Delta \Rightarrow \mathcal{M}, \Delta \models_v^2 \Phi)$;
5. $\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \forall x \Phi \iff \forall e (e \in \mathcal{D}(\Gamma) \Rightarrow \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_x^e}^2 \Phi)$;
6. $\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Pi x \Phi \iff \forall e (e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_x^e}^2 \Phi)$.

Предложение 3.2.1. Для любой модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, любого $\Gamma \in \mathcal{G}$, любого означивания v переменных в модели $\mathcal{M}$, для любых термов t_1, t_2 ,

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 t_1 = t_2 \iff (v\mathcal{I})(t_1, \Gamma) = (v\mathcal{I})(t_2, \Gamma).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель, $\Gamma \in \mathcal{G}$, v – означивание переменных в модели $\mathcal{M}$. По определению истинности-2,

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 t_1 = t_2 \iff \langle v(t_1), v(t_2) \rangle \in \mathcal{I}(=, \Gamma) \quad (7)$$

Поскольку $\mathcal{M}$ нормальна,

$$\langle v(t_1), v(t_2) \rangle \in \mathcal{I}(=, \Gamma) \iff \langle v(t_1), v(t_2) \rangle \in \mathbb{D}_{\mathcal{D}(\mathcal{M})}. \quad (8)$$

Из (7), (8) и

$$\langle v(t_1), v(t_2) \rangle \in \mathbb{D}_{\mathcal{D}(\mathcal{M})} \iff v(t_1) = v(t_2),$$

следует:

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 t_1 = t_2 \iff v(t_1) = v(t_2). \quad (9)$$

Обобщив по $t_1, t_2, v, \Gamma, \mathcal{M}$, получим, что для любой модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, любого $\Gamma \in \mathcal{G}$, любого означивания v переменных в модели $\mathcal{M}$, для любых переменных x, y ,

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 t_1 = t_2 \iff v(t_1) = v(t_2). \blacksquare$$

Нотационная конвенция. Для любой формулы Φ , и любых переменных x, y Φ_x^y – результат замены всех свободных вхождений переменной x вхождениями переменной y .

Определение 3.2.2. (Истинность формулы языка $\mathcal{L}_2$ в модели при некотором означивании переменных) Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель, v – означивание переменных. Формула Φ языка $\mathcal{L}_2$ истинна в модели $\mathcal{M}$ при означивании v , если для любого $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Phi$. Для любой модели $\mathcal{M}$, любого означивания v в $\mathcal{M}$ и любой формулы Φ « $\mathcal{M} \models_v^2 \Phi$ » означает,

что Φ истинна в модели $\mathcal{M}$ при означивании v .

Определение 3.2.3. (Общезначимость формулы языка $\mathcal{L}_2$ в модели) Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель. Формула Φ языка $\mathcal{L}_2$ общезначима в $\mathcal{M}$, если Φ истинна в любом мире $\mathcal{M}$ при любом означивании переменных в $\mathcal{M}$. Для любой модели $\mathcal{M}$ и любой формулы Φ « $\mathcal{M} \models^2 \Phi$ » означает, что Φ общезначима в модели $\mathcal{M}$.

Определение 3.2.4. (Общезначимость формулы языка $\mathcal{L}_2$ во фрейме с переменным доменом) Пусть $\mathcal{F} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D} \rangle$ – расширенный фрейм с переменным доменом. Формула Φ языка $\mathcal{L}_2$ общезначима в $\mathcal{F}$, если она истинна во всех моделях построенных на $\mathcal{F}$. Для любого фрейма $\mathcal{F}$ и любой формулы Φ « $\mathcal{F} \models^2 \Phi$ » означает, что Φ общезначима в модели $\mathcal{M}$.

3.3 Сравнение выразительных возможностей языков $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$

В данном подразделе дано определение перевода и доказаны теоремы о соотношении языков $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

Определение 3.3.1. (Перевод формулы с языка $\mathcal{L}_1$ на язык $\mathcal{L}_2$) Пусть $\mathbb{T} : \mathbb{F}(\mathcal{L}_1) \rightarrow \mathbb{F}(\mathcal{L}_2)$, такая что для любых $\Phi, \Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$:

1. Если P – n -местный предикатный символ и $x_1, \dots, x_n$ – переменные, то $\mathbb{T}(P(x_1, \dots, x_n)) = P(x_1, \dots, x_n)$;
2. $\mathbb{T}(\neg \Phi) = \neg \mathbb{T}(\Phi)$;
3. $\mathbb{T}(\Phi \rightarrow \Psi) = \mathbb{T}(\Phi) \rightarrow \mathbb{T}(\Psi)$;
4. $\mathbb{T}(\Box \Phi) = \Box \mathbb{T}(\Phi)$;
5. $\mathbb{T}(\forall x \Phi) = \forall x \mathbb{T}(\Phi)$;
6. $\mathbb{T}(\langle \lambda x. \Phi \rangle(t)) = \Sigma y(y = t \ \& \ \mathbb{T}(\Phi_x^y))$, где y не имеет вхождений в $\langle \lambda x. \Phi \rangle(t)$.

Пример. На языке $\mathcal{L}_1$ прочтение *de re* предложения «Число планет необходимо больше семи» формализуется следующим образом:

$$\langle \lambda x. \Box x > 7 \rangle(n),$$

где n – число планет. С помощью определения перевода с языка $\mathcal{L}_1$ получим формализацию прочтения *de re* того же предложения на языке $\mathcal{L}_2$:

$$\Sigma y(y = n \ \& \ \Box y > 7),$$

где n – число планет.

Для доказательства теоремы о том, что перевод сохраняет истинностное значение формул потребуется следующая лемма.

Лемма 3.3.1. Для любого означивания v , любого x , любого x -варианта означивания $v v_x^e$, любого Γ , терма t , если t не имеет вхождений переменной x , то

$$(v_x^e \mathcal{I})(t, \Gamma) = (v \mathcal{I})(t, \Gamma).$$

Доказательство леммы 3.3.1. Лемма доказывается индукцией по структуре терма. Доказательство очевидно.

Теорема 3.3.1. Для любой формулы $\Phi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$, для любой модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, любого $\Gamma \in \mathcal{G}$, любого означивания v переменных в модели $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v \Phi \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \mathbb{T}(\Phi).$$

Доказательство теоремы 3.3.1. Докажем теорему индукцией по структуре формулы.

Пусть Φ – атомарная формула $P(x_1, \dots, x_n)$, где n -местный предикат, $x_1, \dots, x_n$ – переменные. Поскольку по определению перевода,

$$\mathbb{T}(P(x_1, \dots, x_n)) = P(x_1, \dots, x_n)$$

и определение истинности-1 согласна с определением истинности-2 относительно формулы $P(x_1, \dots, x_n)$,

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v P(x_1, \dots, x_n) \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \mathbb{T}(P(x_1, \dots, x_n)).$$

Отсюда:

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v \Phi \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \mathbb{T}(\Phi).$$

Пусть $\Phi = \neg \Psi$, где $\Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$. По определению истинности-1,

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v \neg \Psi \iff \mathcal{M}, \Gamma \not\models_v \Psi. \quad (10)$$

Применив к $\mathcal{M}, \Gamma \not\models_v \Psi$ индуктивную гипотезу, получим:

$$\mathcal{M}, \Gamma \not\models_v \Psi \iff \mathcal{M}, \Gamma \not\models_v^2 \mathbb{T}(\Psi). \quad (11)$$

По определению истинности-2 и определению перевода,

$$\mathcal{M}, \Gamma \not\models_v^2 \mathbb{T}(\Psi) \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \mathbb{T}(\neg \Psi). \quad (12)$$

Из (10)-(12) следует, что

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v \neg \Psi \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \mathbb{T}(\neg \Psi).$$

Отсюда:

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v \Phi \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \mathbb{T}(\Phi).$$

Доказательство для случаев: $\Phi = \Psi \rightarrow \Omega$, $\Phi = \Box \Psi$ и $\Phi = \forall x \Psi$ где $\Psi, \Omega \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$, аналогичны доказательству для случая, когда $\Phi = \neg \Psi$.

Пусть $\Phi = \langle \lambda x. \Psi \rangle(t)$, где $\Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$, t – терм. Рассмотрим три подслучая:

1. t – переменная;

2. t – константа;
 3. $t = f(t_1, \dots, t_n)$, где f – n -местный функциональный символ и $t_1, \dots, t_n$ – термы.
- Пусть $\Phi = \langle \lambda x. \Psi \rangle(t)$, где t – переменная. По определению перевода,

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \mathbb{T}(\langle \lambda x. \Psi \rangle(t)) \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Sigma y(y = t \& \mathbb{T}(\Psi_x^y)), \quad (13)$$

где y не имеет вхождений в $\langle \lambda x. \Psi \rangle(t)$. По определению истинности-2,

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Sigma y(y = t \& \mathbb{T}(\Psi)) \iff \exists e(e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \& \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e}^2 y = t \& \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e}^2 \mathbb{T}(\Psi_x^y)). \quad (14)$$

Применим к $\mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e}^2 \mathbb{T}(\Psi_x^y)$ индуктивную гипотезу и преобразуем $\mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e}^2 y = t$ согласно предложению 3.2.1 и определению денотации (мы можем это сделать, т.к. y не имеет вхождений в $\langle \lambda x. \Psi \rangle(t)$). В результате получим:

$$\begin{aligned} \exists e(e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \& \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e}^2 y = t \& \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e}^2 \mathbb{T}(\Psi_x^y)) &\iff \\ &\iff \exists e(e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \& e = v(t) \& \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e} \Psi_x^y). \end{aligned} \quad (15)$$

В результате преобразования правой часть (15) с учетом равенства $e = v(t)$ и того, что по определению интерпретации, $\mathcal{I}(t, \Gamma) \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, получим:

$$\exists e(e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \& e = v(t) \& \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e} \Psi_x^y) \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_x^{v(t)}} \Psi_x^y \quad (16)$$

Поскольку y не имеет вхождений в $\langle \lambda x. \Psi \rangle(t)$, можем заменить все вхождения y в Ψ_x^y вхождениями x и по определению истинности-1 получим:

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_{v_x^{v(t)}} \Psi_x^y \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v \langle \lambda x. \Psi \rangle(t). \quad (17)$$

Из (13)-(17) следует, что

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v \langle \lambda x. \Psi \rangle(t) \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \mathbb{T}(\langle \lambda x. \Psi \rangle(t)).$$

Отсюда:

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v \Phi \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \mathbb{T}(\Phi).$$

Пусть $\Phi = \langle \lambda x. \Psi \rangle(t)$, где t – константа. Доказательство для этого случая аналогично доказательству для случая, когда t – переменная.

Пусть $\Phi = \langle \lambda x. \Psi \rangle(t)$, где $t = f(t_1, \dots, t_n)$ и f – n -местный функциональный символ, $t_1, \dots, t_n$ – термы. По определению перевода,

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \mathbb{T}(\langle \lambda x. \Psi \rangle(f(t_1, \dots, t_n))) \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Sigma y(y = f(t_1, \dots, t_n) \& \mathbb{T}(\Psi_x^y)), \quad (18)$$

где y не имеет вхождений в $\langle \lambda x. \Psi \rangle(t)$. По определению истинности-2,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Sigma y(y = f(t_1, \dots, t_n) \& \mathbb{T}(\Psi_x^y)) &\iff \\ \iff \exists e(e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \& \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e}^2 y = f(t_1, \dots, t_n) \& \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e}^2 \mathbb{T}(\Psi_x^y)). \end{aligned} \quad (19)$$

Применим к $\mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e}^2 \mathbb{T}(\Psi_x^y)$ индуктивную гипотезу и преобразуем $\mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e}^2 y = f(t_1, \dots, t_n)$ согласно предложению 3.2.1 и определению денотации. В результате получим:

$$\begin{aligned} \exists e(e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \& \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e}^2 y = f(t_1, \dots, t_n) \& \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e}^2 \mathbb{T}(\Psi_x^y)) &\iff \\ \iff \exists e(e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \& e = \mathcal{I}(f, \Gamma)((v_y^e \mathcal{I})(t_1, \Gamma), \dots, (v_y^e \mathcal{I})(t_n, \Gamma)) \& \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e} \Psi_x^y). \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом равенства $e = \mathcal{I}(f, \Gamma)((v_y^e \mathcal{I})(t_1, \Gamma), \dots, (v_y^e \mathcal{I})(t_n, \Gamma))$, леммы 3.3.1 и того, что, по определению интерпретации, $\mathcal{I}(f, \Gamma)((v \mathcal{I})(t_1, \Gamma), \dots, (v \mathcal{I})(t_n, \Gamma)) \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, преобразуем правую часть (20) и в результате получим:

$$\begin{aligned} \exists e(e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \& e = \mathcal{I}(f, \Gamma)((v_y^e \mathcal{I})(t_1, \Gamma), \dots, (v_y^e \mathcal{I})(t_n, \Gamma)) \& \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_y^e} \Psi_x^y) &\iff \\ \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_{v_x^{\mathcal{I}(f, \Gamma)((v \mathcal{I})(t_1, \Gamma), \dots, (v \mathcal{I})(t_n, \Gamma))}} \Psi_x^y. \end{aligned} \quad (21)$$

Поскольку y не имеет вхождений в $\langle \lambda x. \Psi \rangle(t)$, можем заменить все вхождения y в Ψ_x^y вхождениями x и по определению истинности-1 получим:

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_{v_x^{\mathcal{I}(f, \Gamma)((v \mathcal{I})(t_1, \Gamma), \dots, (v \mathcal{I})(t_n, \Gamma))}} \Psi_x^y \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v \langle \lambda x. \Psi \rangle(f(t_1, \dots, t_n)). \quad (22)$$

Из (18)-(22) следует, что

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v \langle \lambda x. \Psi \rangle(f(t_1, \dots, t_n)) \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \mathbb{T}(\langle \lambda x. \Psi \rangle(f(t_1, \dots, t_n))).$$

Отсюда:

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v \Phi \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \mathbb{T}(\Phi).$$

Таким образом, обобщив по $\mathcal{M}, \Gamma, v$ получим, что для любой формулы Φ языка $\mathcal{L}_1$, для любой модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, любого $\Gamma \in \mathcal{G}$, любого означивания v переменных в $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v \Phi \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \mathbb{T}(\Phi). \blacksquare$$

Теперь покажем, что не существует перевода с языка $\mathcal{L}_2$ на язык $\mathcal{L}_1$. Чтобы доказать теорему об отсутствии обратного перевода потребуется следующее определение и две леммы.

Определение 3.3.2. (Модель $\mathcal{M}'$) Пусть $\Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$ и Ψ не общезначима. Поскольку Ψ не общезначима, существуют модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, мир Γ и означивание переменных v в $\mathcal{M}$, такие что $\mathcal{M}, \Gamma \not\models_v \Psi$. Возьмем такие $\mathcal{M}$ и Γ и построим модель $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{G}', \mathcal{R}, \mathcal{D}', \mathcal{I}' \rangle$ так что:

- $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cup \{E\}$, причем $E \notin \mathcal{G}$;
- $\mathcal{D}'$ определена следующим образом:

- $\mathcal{D}'(E) = \{p\}$, причем $p \notin \mathcal{D}(\mathcal{M})$,
 - для любого $\Delta \in \mathcal{G}$, $\mathcal{D}'(\Delta) = \mathcal{D}(\Delta)$;
- $\mathcal{I}'$ определена следующим образом:
- $\mathcal{I}'(P, \Gamma) = \mathcal{I}(P, \Gamma) \cup \{p\}$,
 - для любого $\Delta \in \mathcal{G}$, для любого предикатного символа Q , если $\Delta \neq \Gamma$ или $Q \neq P$, то $\mathcal{I}'(Q, \Delta) = \mathcal{I}(Q, \Delta)$,
 - для любого предикатного символа Q , $\mathcal{I}'(Q, E) = \emptyset$,
 - для любого константного символа c , для любого $\Delta \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}'(c, \Delta) = \mathcal{I}(c, \Delta)$,
 - для любого константного символа c , $\mathcal{I}'(c, E) = p$,
 - для любого $n \geq 1$, любого n -местного функционального символа f и любого $\Delta \in \mathcal{G}$,

$$\mathcal{I}'(f, \Delta) \mid \mathcal{D}(\mathcal{M})^n = \mathcal{I}(f, \Delta),$$

Означивание переменных v в $\mathcal{M}$ является также означиванием переменных в $\mathcal{M}'$.

Лемма 3.3.2. Для любой модели $\mathcal{M}$, для любого означивания v в $\mathcal{M}$, любого $\Delta \in \mathcal{G}$, любого терма t ,

$$(v\mathcal{I})(t, \Delta) = (v\mathcal{I}')(t, \Delta).$$

Доказательство леммы 3.3.2. Лемма доказывается индукцией по структуре терма. Доказательство для случаев, когда t переменная или константа очевидно.

Пусть t – функциональный терм $g(s_1, \dots, s_k)$, где $k \geq 1$, g – k -местный функциональный терм. С помощью определений денотации и $\mathcal{I}'$ можем построить цепочку равенств

$$\begin{aligned} (v\mathcal{I})(g(s_1, \dots, s_k), \Delta) &= \mathcal{I}'(g, \Delta) \mid \mathcal{D}(\mathcal{M})^n((v\mathcal{I})(s_1, \Delta), \dots, (v\mathcal{I})(s_k, \Delta)) = \\ &= \mathcal{I}'(g, \Delta)((v\mathcal{I})(s_1, \Delta), \dots, (v\mathcal{I})(s_k, \Delta)) = (v\mathcal{I}')(g(s_1, \dots, s_k), \Delta) \end{aligned}$$

в которой второе равенство обосновывается так: т.к. $(v\mathcal{I})(s_1, \Delta), \dots, (v\mathcal{I})(s_k, \Delta) \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, к $(v\mathcal{I})(s_1, \Delta), \dots, (v\mathcal{I})(s_k, \Delta)$ можно применить индуктивную гипотезу.

Таким образом, для любого означивания v , любого $\Delta \in \mathcal{G}$, любого терма t ,

$$(v\mathcal{I})(t, \Delta) = (v\mathcal{I}')(t, \Delta). \blacksquare$$

Лемма 3.3.3. Для любой модели $\mathcal{M}$, любого $\Delta \in \mathcal{G}$, любого означивания переменных v в $\mathcal{M}$ и любой формулы $X \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$,

$$\mathcal{M}, \Delta \models_v X \iff \mathcal{M}', \Delta \models_v X.$$

Доказательство леммы 3.3.3. Доказательство осуществляется индукцией по структуре формулы.

Пусть X – атомарная формула $Q(x_1, \dots, x_n)$, где n -местный предикат, $x_1, \dots, x_n$ – пере-

менные. Рассмотрим два случая:

1. $\Delta = \Gamma$ и $Q = P$;
2. $\Delta \neq \Gamma$ или $Q \neq P$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $\mathcal{M}', \Gamma \models_v P(x)$, где x – переменная. Тогда, по определению истинности-1 и определению денотации, имеем: $v(x) \in \mathcal{I}'(P, \Gamma)$. Поскольку $v(x) \neq p$ и $\mathcal{I}'(P, \Gamma) = \mathcal{I}(P, \Gamma) \cup \{p\}$, $v(x) \in \mathcal{I}'(P, \Gamma)$ тогда и только тогда, когда $v(x) \in \mathcal{I}(P, \Gamma)$, а значит,

$$\mathcal{M}', \Gamma \models_v P(x) \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v P(x). \quad (23)$$

Рассмотрим второй случай. Согласно определению истинности-1 и определению денотации, $\mathcal{M}, \Delta \models_v Q(x_1, \dots, x_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $(v(x_1), \dots, v(x_n)) \in \mathcal{I}(Q, \Delta)$, т.е., поскольку $\mathcal{I}(Q, \Delta) = \mathcal{I}'(Q, \Delta)$, когда $\mathcal{M}', \Delta \models_v Q(x_1, \dots, x_n)$. Значит,

$$\mathcal{M}, \Delta \models_v Q(x_1, \dots, x_n) \iff \mathcal{M}', \Delta \models_v Q(x_1, \dots, x_n). \quad (24)$$

Из (23) и (24) следует, что

$$\mathcal{M}, \Delta \models_v X \iff \mathcal{M}', \Delta \models_v X.$$

Пусть $X = \neg\Omega$, где Ω – формула. По определению истинности-1, $\mathcal{M}, \Delta \models_v \neg\Omega$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}, \Delta \not\models_v \Omega$, т.е., согласно индуктивной гипотезе, когда $\mathcal{M}', \Delta \not\models_v \Omega$, т.е., по определению истинности-1, $\mathcal{M}', \Delta \models_v \neg\Omega$. Исходя из этого,

$$\mathcal{M}, \Delta \models_v \neg\Omega \iff \mathcal{M}', \Delta \models_v \neg\Omega.$$

Отсюда:

$$\mathcal{M}, \Delta \models_v X \iff \mathcal{M}', \Delta \models_v X.$$

Доказательство для случая $X = \Omega \rightarrow \Upsilon$, где $\Omega, \Upsilon \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$ аналогично доказательству для случая $X = \neg\Omega$.

Пусть $X = \Box\Omega$, где Ω – формула. С помощью определения истинности-1, учитывая то, что $\mathcal{R}$ в $\mathcal{M}$ не отличается от $\mathcal{R}$ в $\mathcal{M}'$, можем построить цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, \Delta \models_v \Box\Omega &\iff \forall Z (\Delta \mathcal{R} Z \Rightarrow \mathcal{M}, Z \models_v \Omega) \iff \\ &\iff \forall Z (\Delta \mathcal{R} Z \Rightarrow \mathcal{M}', Z \models_v \Omega) \iff \mathcal{M}', \Delta \models_v \Box\Omega, \end{aligned} \quad (25)$$

в которой переход от второго к третьему звену мотивирован применением индуктивной гипотезы к $\mathcal{M}, Z \models_v \Omega$. Из (25) следует, что:

$$\mathcal{M}, \Delta \models_v X \iff \mathcal{M}', \Delta \models_v X.$$

Пусть $X = \forall x\Omega$, где Ω – формула и x – переменная. По определению истинности-1, учитывая то, что для любого $e \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, v_x^e в $\mathcal{M}$ равна v_x^e в $\mathcal{M}'$, можем построить цепочку

эквивалентностей

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, \Delta \models_v \forall x \Omega &\iff \forall e (e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathcal{M}, \Delta \models_{v_x^e} \Omega) \iff \\ &\iff \forall e (e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathcal{M}', \Delta \models_{v_x^e} \Omega) \iff \mathcal{M}', \Delta \models_v \forall x \Omega, \end{aligned} \quad (26)$$

в которой переход от второго к третьему звену мотивирован применением индуктивной гипотезы к $\mathcal{M}, \Delta \models_{v_x^e} \Omega$. Из (26) следует, что:

$$\mathcal{M}, \Delta \models_v X \iff \mathcal{M}', \Delta \models_v X.$$

Пусть $X = \langle \lambda x. \Omega \rangle(t)$, где Ω – формула, t – терм. Предварительно докажем лемму.

С учетом определения истинности-1 и леммы ?? построим цепочку эквивалентностей

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, \Delta \models_v \langle \lambda x. \Omega \rangle(t) &\iff \mathcal{M}, \Delta \models_{v_x^{(v\mathcal{I})(t, \Delta)}} \Omega \iff \\ &\iff \mathcal{M}, \Delta \models_{v_x^{(v\mathcal{I}')(t, \Delta)}} \Omega \iff \mathcal{M}', \Delta \models_v \langle \lambda x. \Omega \rangle(t), \end{aligned} \quad (27)$$

в которой переход от третьего к четвертому звену мотивирован применением индуктивной гипотезы к $\mathcal{M}, \Delta \models_{v_x^{(v\mathcal{I}')(t, \Delta)}} \Omega$. Из (27) следует:

$$\mathcal{M}, \Delta \models_v X \iff \mathcal{M}', \Delta \models_v X.$$

Таким образом, для любой модели $\mathcal{M}$, любого $\Delta \in \mathcal{G}$, любого означивания переменных v в $\mathcal{M}$ и любой формулы $X \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$,

$$\mathcal{M}, \Delta \models_v X \iff \mathcal{M}', \Delta \models_v X. \blacksquare$$

Теорема 3.3.2. *Существует формула $\Phi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_2)$, которой не эквивалентна ни одна из формул языка $\mathcal{L}_1$, т.е. для любой формулы $\Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$ существуют модель $\mathcal{M}$, мир Γ и означивание v , такие что*

$$(\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Phi \ \& \ \mathcal{M}, \Gamma \not\models_v \Psi) \vee (\mathcal{M}, \Gamma \not\models_v^2 \Phi \ \& \ \mathcal{M}, \Gamma \models_v \Psi).$$

Доказательство теоремы 3.3.2. Определим Φ как $\Sigma x P(x)$. Возьмем $\Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$. Рассмотрим два случая: Ψ общезначима и Ψ не общезначима.

Пусть Ψ общезначима. Тогда для любой модели $\mathcal{M}$, мира Γ и означивания v , $\mathcal{M}, \Gamma \models_v \Psi$. Построим модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ так что: $\mathcal{G} = \{\Gamma\}$, $\mathcal{R} = \emptyset$, $\mathcal{D}(\Gamma) = \{p\}$ и $\mathcal{I}(P, \Gamma) = \emptyset$. Поскольку $\mathcal{I}(P, \Gamma) = \emptyset$ для любого $e \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, $e \notin \mathcal{I}(P, \Gamma)$, следовательно, $\mathcal{M}, \Gamma \not\models_v^2 \Sigma x P(x)$. Значит,

$$\mathcal{M}, \Gamma \not\models_v^2 \Phi \ \& \ \mathcal{M}, \Gamma \models_v \Psi$$

и, следовательно, существуют модель $\mathcal{M}$, мир Γ и означивание v , такие что:

$$(\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Phi \ \& \ \mathcal{M}, \Gamma \not\models_v \Psi) \vee (\mathcal{M}, \Gamma \not\models_v^2 \Phi \ \& \ \mathcal{M}, \Gamma \models_v \Psi).$$

Пусть Ψ не общезначима. Тогда существуют модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, мир Γ и означивание переменных v в $\mathcal{M}$, такие что $\mathcal{M}, \Gamma \not\models_v \Psi$. Возьмем такие $\mathcal{M}$ и Γ и построим модель $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{G}', \mathcal{R}, \mathcal{D}', \mathcal{I}' \rangle$ так, как описано в определении 3.3.2.

С учетом леммы 3.3.3 из того, что $\mathcal{M}, \Gamma \not\models_v \Psi$, следует, что $\mathcal{M}', \Gamma \not\models_v \Psi$. Покажем, что $\mathcal{M}', \Gamma \models_v^2 \Sigma x P(x)$. Поскольку $p \in \mathcal{I}'(P, \Gamma)$, существует $e \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}')$, такое что $e \in \mathcal{I}'(P, \Gamma)$. Значит, по определению истинности-2, $\mathcal{M}', \Gamma \models_v^2 \Sigma x P(x)$. Таким образом, имеем:

$$\mathcal{M}', \Gamma \models_v^2 \Phi \ \& \ \mathcal{M}', \Gamma \not\models_v \Psi$$

и, следовательно, существуют модель $\mathcal{M}$, мир Γ и означивание v , такие что:

$$(\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Phi \ \& \ \mathcal{M}, \Gamma \not\models_v \Psi) \vee (\mathcal{M}, \Gamma \not\models_v^2 \Phi \ \& \ \mathcal{M}, \Gamma \models_v \Psi).$$

Таким образом, существует формула $\Phi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_2)$, такая что для любой формулы $\Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$ существуют модель $\mathcal{M}$, мир Γ и означивание v , такие что

$$(\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Phi \ \& \ \mathcal{M}, \Gamma \not\models_v \Psi) \vee (\mathcal{M}, \Gamma \not\models_v^2 \Phi \ \& \ \mathcal{M}, \Gamma \models_v \Psi). \blacksquare$$

Теоремы 3.3.1 и 3.3.2 показывают, что язык $\mathcal{L}_2$ обладает большими выразительными возможностями, чем язык $\mathcal{L}_1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первом разделе дипломной работы были изложены язык $\mathcal{L}_1$, семантика для языка $\mathcal{L}_1$, теория доказательства, позволяющая доказывать открытые формулы, и определена логика **К**.

Во втором разделе представлено доказательство корректности и полноты логики **К** относительно семантики для языка $\mathcal{L}_1$.

В третьем разделе представлено решение проблемы формализации прочтений *de re* без использования λ -оператора. Для этого был описан язык $\mathcal{L}_2$, отличие которого от языка $\mathcal{L}_1$ заключается в наличии двух видов кванторов (актуалистских и POSSIBILITY-кванторов) и отсутствии λ -оператора. Далее был определен перевод с языка $\mathcal{L}_1$ на язык $\mathcal{L}_2$ и показано, что перевод сохраняет истинностное значение формул. В завершение было показано преимущество языка $\mathcal{L}_2$ перед языком $\mathcal{L}_1$, а именно было показано, что обратного перевода не существует, из чего следует, что язык $\mathcal{L}_2$ обладает большей выразительной силой, чем язык $\mathcal{L}_1$.

Перспективы дальнейшего исследования заключаются в построении теории доказательства для логики, построенной на языке $\mathcal{L}_2$, и доказательстве ее корректности и полноты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов Е. В. Кросс-мировая предикация в естественном языке и в логической семантике // *Логико-философские штудии*. 2021. Т. 19, No 4. С. 260–272.
2. Борисов Е. В. Логика для кросс-мировой предикации // *Наука как общественное благо: сборник научных статей / науч. ред. и сост. Л. В. Шиповалова, И. Т. Касавин: В 7 т. Т. 4. [Электронный ресурс]*. М.: Издательство «Русское общество истории и философии науки», 2020. С. 205–209. URL: <http://rshps.ru/books/congress2020t4.pdf> (дата обращения: 30.04.2023).
3. Микиртумов И.Б. Логика отношения именования и идентификация // *Логико-философские штудии*. 2020. Т. 18, No 2. С. 260–272.
4. Adamson I.T. A set theory workbook. – Dundee: The University of Dundee, Birkhäuser, 1998. – 154, [8] с.
5. Benthem J. van. Modal logic for open minds. / J. van Benthem – CSLI, 2000. – 378[11] с.
6. Butterfield J. Predicate Modifiers in Tense Logic / J. Butterfield, C. Stirling // *Logique et Analyse*. – 1987. – Vol. 30, no. 117/118. – P. 31–50.
7. Fine K. Model Theory for Modal Logic Part I: The “de re/de dicto” distinction // *Journal of Philosophical Logic*. – 1978. – Vol. 7, No. 1. – P. 125–156.
8. Fitting M. First-order modal logic. / M. Fitting, R.L. Mendelsohn. – New York : Springer-Science+Business Media, B.Y., 1998. – 287, [13] с.
9. Fitting, M. On height and happiness, *Rohit Parikh on Logic, Language and Society*, ed. by C. Baskent et al. Cham: Springer, 2017, pp. 235–258.
10. Hughes G.E. A companion to modal logic. / G.E. Hughes, M.J. Cresswell. – London : Methuen., 1984 – 203 [17] с.
11. Hughes G.E. A new introduction to modal logic. / G.E. Hughes, M.J. Cresswell. – London : Routledge., 1996 – 421 [10] с.
12. Goldblatt R. Logics of time and computation. Second Edition, Revised and Expanded. / R. Goldblatt. – [Переиздание] – Stanford : Leland Stanford Junior University, CSLI, 1992. – 180, [20] с.
13. Kocurek, A. W. The problem of cross-world predication // *Journal of Philosophical Logic* 45 (6). – 2016. – P. 697–742.
14. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Fifth edition. / E. Mendelson. – New York : CRC Press, 2010. – 469, [24] с.
15. Priest G. An introduction to non-classical logic. From if to is. Second Edition. / G. Priest – New York : Cambridge University Press., 2008. – 613, [26] с.
16. Shimmerling E. A course on set theory. / E. Shimmerling. – Cambridge : Cambridge University Press., 2011. – 168, [10] с.

17. Sigler L.E. Exercises in set theory. / L.E. Sigler. – New York : Springer-Verlag New York Inc., 1976. – 133 c.
18. Smullyan R.M. First-order logic. Dover Publications, Inc. New York, 1995. – 158, [13] c.
19. Stalnaker, R. Abstraction in first-order modal logic / R. Stalnaker, R. Thomason – 1968. – Theoria 34. – P. 203–207.
20. Wehmeier K. Subjunctivity and cross-world predication // Philosophical Studies: An international journal for philosophy in the analytic tradition. – 2012. – Vol. 159. – P. 107–122.

СПРАВКА

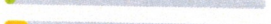
Томский Государственный Университет

о результатах проверки текстового документа
на наличие заимствований

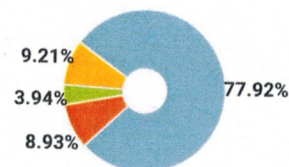
ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНА В СИСТЕМЕ АНТИПЛАГИАТ.ВУЗ

Автор работы: Мухаметшина Индира Искандаровна
Самоцитирование
рассчитано для: Мухаметшина Индира Искандаровна
Название работы: Мухаметшина 121901
Тип работы: Не указано
Подразделение:

РЕЗУЛЬТАТЫ

СОВПАДЕНИЯ		8.93%
ОРИГИНАЛЬНОСТЬ		77.92%
ЦИТИРОВАНИЯ		3.94%
САМОЦИТИРОВАНИЯ		9.21%

ДАТА ПОСЛЕДНЕЙ ПРОВЕРКИ: 06.06.2023



Структура
документа:
Модули поиска:

Проверенные разделы: титульный лист с.1, основная часть с.2-4, 6-19, 21-38, содержание с.5, 20, библиография с.39-40
ИПС Адилет; Библиография; Сводная коллекция ЭБС; Интернет Плюс*; Сводная коллекция РГБ; Цитирование; Переводные заимствования (RuEn); Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu); Переводные заимствования по коллекции Гарант: аналитика; Переводные заимствования по коллекции Интернет в английском сегменте; Переводные заимствования по Интернету (EnRu); Переводные заимствования по коллекции Интернет в русском сегменте; Переводные заимствования издательства Wiley; eLIBRARY.RU; СПС ГАРАНТ: аналитика; СПС ГАРАНТ: нормативно-правовая документация; Медицина; Диссертации НББ; Коллекция НБУ; Перефразирования по eLIBRARY.RU; Перефразирования по СПС ГАРАНТ: аналитика; Перефразирования по Интернету; Перефразирования по Интернету (EN); Перефразированные заимствования по коллекции Интернет в английском сегменте; Перефразированные заимствования по коллекции Интернет в русском сегменте; Перефразирования по коллекции

Работу проверил: Фаненштиль Татьяна Владимировна

ФИО проверяющего

Дата подписи:

13.06.2023



Подпись проверяющего



Чтобы убедиться
в подлинности справки, используйте QR-код,
который содержит ссылку на отчет.

Ответ на вопрос, является ли обнаруженное заимствование
корректным, система оставляет на усмотрение проверяющего.
Предоставленная информация не подлежит использованию
в коммерческих целях.