Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ОПОП
д-р техн. наук, профессор
____________ А.В. Замятин
«29» мая 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

МОДЕЛИ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА С НЕНАСТОЙЧИВЫМИ ЗАЯВКАМИ, КОЛЛИЗИЯМИ И ОТКАЗАМИ

по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика,
направленность (профиль) «Интеллектуальный анализ больших данных»

Полховская Анна Васильевна

Научный руководитель ВКР
д-р. физ.-мат. наук, профессор
____________С.П. Моисеева
«29» мая 2023 г.

Автор работы
студент группы № 932128
____________А.В. Полховская
«29» мая 2023 г.

Томск – 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации.
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ОПОП
д-р техн. наук, профессор
________ А.В. Замятин
подпись
«09» ноября 2022 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы магистра обучающемуся
Полховской Анне Васильевне
Фамилия Имя Отчество обучающегося

по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика, направленность (профиль) «Интеллектуальный анализ больших данных»

1 Тема выпускной квалификационной работы
Модели систем случайного множественного доступа с ненастойчивыми заявками, коллизиями и отказами

2 Срок сдачи обучающимся выполненной выпускной квалификационной работы:
а) в учебный офис / деканат – 29.05.2023 б) в ГЭК – 07.06.2023

3 Исходные данные к работе:
Объект исследования – системы с ненастойчивыми заявками, коллизиями и отказами.
Предмет исследования – распределения вероятностей состояний прибора и числа заявок на орбите.
Цель исследования – исследование математических моделей RQ-систем вида M|M|1 в ситуациях с конфликтами заявок, отказами, различными видами настойчивостей (H и H1, H2), с нетерпеливостью заявок и без, и системы вида MMPP|M|1 в ситуации с конфликтами заявок, H настойчивыми заявками и отказами.

Задачи:
1. Построение функциональных моделей систем совместного доступа M|M|1 с H и с H1, H2 настойчивыми заявками, конфликтами и отказами,
2. Построение математических моделей RQ-систем вида M|M|1 с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами; с H1, H2 настойчивыми заявками, конфликтами и отказами; с конфликтами, H настойчивыми и нетерпеливыми заявками; вида MMPP|M|1 с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами,
3. Исследование методом асимптотического анализа RQ-систем вида M|M|1 с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами; с H1, H2 настойчивыми заявками, конфликтами и отказами; с конфликтами, H настойчивыми и нетерпеливыми заявками; вида MMPP|M|1 с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами,
4. Разработка численных методов расчета допредельных вероятностно-временных характеристик RQ-систем вида M|M|1 с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами; с H1, H2 настойчивыми заявками, конфликтами и отказами; с конфликтами, H настойчивыми и нетерпеливыми заявками,
5. Составление комплекса проблемно-ориентированных программ, реализующих

предложенные численные методы.

Методы исследования:

методы теории вероятностей и случайных процессов, метод асимптотического анализа, метод итерационной алгоритмизации, матричный метод.

Организация или отрасль, по тематике которой выполняется работа, – Национальный исследовательский Томский государственный университет, кафедра теории вероятности и математической статистики.

4 Краткое содержание работы

(01.09.2022-29.09.2022) Исследование RQ-системы M|M|1 с конфликтами, H настойчивыми заявками и отказами.

(29.09.2022-15.10.2022) Исследование RQ-системы M|M|1 с конфликтами, H настойчивыми и нетерпеливыми заявками.

(16.10.2022-20.02.2023) Исследование RQ-системы с коллизиями и H1, H2 настойчивыми заявками и отказами.

(21.02.2023-15.05.2023) Исследование RQ-системы MMPP/M/1 с коллизиями и H настойчивыми заявками

(16.05.2023-22.05.2023) Расчет технических характеристик функционирования рассмотренных систем.

Научный руководитель выпускной квалификационной работы

профессор кафедры ТВиМС / С. П. Моисеева

должность, место работы *подпись* *И.О. Фамилия*

Задание принял к исполнению

/ А. В. Полховская

должность, место работы *подпись* *И.О. Фамилия*

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В следствие развития и распространения современных инфокоммуникационных систем и сетей связи, абонентам открывается множество различных услуг для использования. Помимо этого, в современных условиях пользователем является не только человек, но и множество устройств, подключенных к сети. Растет нагрузка, вызывая перегрузки на отдельных участках сети, что ведет к ухудшению качества связи. Также, растет и влияние пользователя на формирование входящих потоков своим поведением: частоту посылки вызова, длину сообщений, их количества и т.д.

Подобные условия могут вызывать временную недоступность сервиса. В этом случае, важным фактором становится повторный вызов предоставления услуги или сервиса. Такие запросы могут в автоматическом режиме генерироваться множеством мультимедийных и служебных приложений на абонентских устройствах, не имея при этом каких-либо ограничений (например, ограничений, связанных со временем набора номера или терпеливостью абонента). Такой неучтенный трафик будет сверх нормы занимать канальный ресурс под нагрузку от первичных потоков вызовов. На участках сети начинают появляться переполнения, которые приводят к отказу в обслуживании заявок, а это, в свою очередь, порождает множество повторных обращений к системе. Нагрузка от потока повторных вызовов, как правило, не является учтенной, это приводит к выходу из строя участков сети, до полного отказа ее работы. Выявление и исследование влияния подобных аспектов поведения на качество работы сети позволяет заранее спланировать и подготовить сеть таким образом, чтобы снизить потери вызовов на ее участках. Наибольший интерес для практики представляет рассмотрение экстремальных условий работы, то есть условия перегрузки, отличающие ее от нормального (планируемого) состояния.

Все это определяет актуальность создания теоретических основ для построения математических моделей, позволяющих модифицировать, совершенствовать и разрабатывать методы анализа и расчета показателей качества обслуживания в коммуникационных системах и сетях связи. Растёт потребность в проведении исследований математических моделей сетей связи для увеличения их производительности, надёжности передачи и доставки требований, объема передаваемой информации, выбора оптимального сетевого оборудования.

Теория систем массового обслуживания с повторными вызовами (Retrial Queueing system, RQ-системы) является важным разделом современной теории телетрафика. Актуальность данного раздела обусловлена тем, что его исследования имеют широкие практические применения в различных областях, например, в области оценивания производительности и проектировании широковещательных и мобильных сотовых радиосетей, локальных вычислительных сетей с протоколами случайного множественного доступа. В таких системах запрос поступивший в систему и не получивший обслуживание не уходит из системы, как в системах с отказами и не становится в очередь, как в системах с ожиданием, а повторяет попытки через случайное время, пока не поступит на обслуживание. Появление повторных попыток является важной чертой описанных систем передачи данных. В случае, когда повторные заявки может привести к значительным погрешностям при принятии инженерных решений.

В 1908-1922 были опубликованы первые работы по теории массового обслуживания А. К. Эрланга [34], которые были посвящены анализу функционирования телефонных станций, и задачам теории систем массового обслуживания с отказами. Позднее были опубликованы фундаментальные работы теории массового обслуживания А. Н. Колмогоровым [35], А. Я. Хинчиным [36-38].

В 70-е годы начинают исследоваться системы с повторными вызовами [39, 40]. К настоящему моменту, исследованию RQ-систем посвящено большое количество работ, например, в монографии Artalejo J. R., Gomez-Corral A. [1] приведено более семисот ссылок на работы по этой тематике. В работах R. Wilkinson, J. Cohen, G. Gosztony и др. [2–5] математические модели RQ-систем (Retrial Queueing Systems, или системы с повторными вызовами) применяются для проектирования и оптимизации реальных информационно-коммуникационных систем различного уровня (локальных, глобальных), управляемых протоколами случайного множественного доступа, цифровых сетей связи, а также сетей сотовой связи, вычислительных кластеров, call-центров и др. Имеющиеся на сегодняшний день научные публикации в данной области предлагают достаточно много различных задач и подходов к их решению.

Например, в работах [6,7] представлен анализ марковских однолинейных RQ-систем с двумя типами обслуживания, получена производящая функция числа заявок на орбите, разработан численный алгоритм получения распределения вероятностей состояний системы, применен метод стохастической декомпозиции. RQ-системы с заявками, покидающими систему после неудачной попытки получить обслуживание, исследовались такими учеными как: Cohen J.W. [3], Falin G.I., Templeton J.G.C. [5], Yang T., Posner M., Templeton J. [8], Krishnamoorthy A., Deepak T., Joshua V. [9] и др. [10–13].

В литературе основными методами исследования RQ-систем являются матричные методы [14–17], численные методы [5,18,19], имитационное моделирование, так как точные аналитические формулы удается получить лишь для самых простых моделей. В 60-х годах исследователи стали применять метод асимптотического анализа RQ-систем, заключающийся в получении каких-либо характеристик исследуемого процесса при выполнении некоторого предельного условия. В числе таких исследователей были, например, J.W. Cohen [3], J. Riordan [49], G.I. Falin [50-53], J.R. Artalejo [54], А.А. Назаров и его ученики [55, 50-53, 58-60, 65, 77-82, 130] и другие.

Рассмотрение RQ-систем с ситуацией конфликта заявок подразумевает, что заявка, нашедшая прибор занятым в момент прибытия ее в систему и заявка, находящаяся на обслуживании, вступают в конфликт.

Вопросами анализа RQ-систем с конфликтами заявок занимались B. Krishna Kumar, G. Vijayalakshmi, A. Krishnamoorthy, S. Sadiq Basha [20], И.И. Хомичков (I.I. Khomichkov) [21,22], П. Русков и Б. Димитров [23], а также В.В. Анисимов (V.V. Anisimov) и Х.Л. Атаджанов (H.L. Atadzanov) [24]. Наиболее комплексное исследование было проведено в работах Назарова А.А. и Судыко Е.А. [25-33].

RQ-системы с конфликтами заявок имитируют поведение многих реальных ситуаций, например, в телекоммуникационных сетях, где передача данных должна быть гарантирована безошибочной точностью с некоторой заданной вероятностью.

В реальной жизни нетерпеливость к ожиданию является наиболее заметной особенностью людей, когда они хотят получить обслуживание, мы всегда чувствуем беспокойство и нетерпение во время длительного ожидания услуги в реальной жизни. Однако, как правило, этот факт обычно игнорируется при исследовании классических моделей. Для характеристики поведения нетерпеливых клиентов в ТМО используются две терминологии: отказ, определяемый как решение не присоединяться к линии вообще, и отказ, определяемый как присоединение к линии, но оставление без обслуживания, определяемое как присоединение к орбите повтор запроса через случайное количество времени.

Изучению и анализу таких моделей посвящена данная выпускная квалификационная работа магистра. Целью работы является исследование математических моделей RQ-систем вида M|M|1 в ситуациях с конфликтами заявок, отказами, различными видами настойчивостей (H и H1, H2), с нетерпеливостью заявок и без, и системы вида MMPP|M|1 в ситуации с конфликтами заявок, H настойчивыми заявками и отказами.

В соответствии с целью были поставлены и решены следующие задачи:

1. Построение функциональных моделей систем совместного доступа M|M|1 с H и с H1, H2 настойчивыми заявками, конфликтами и отказами;

2. Построение математических моделей RQ-систем вида M|M|1 с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами; с H1, H2 настойчивыми заявками,

конфликтами и отказами; с конфликтами, H настойчивыми и нетерпеливыми заявками; вида MMPP|M|1 с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами;

3. Исследование методом асимптотического анализа RQ-систем вида M|M|1 с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами; с H1, H2 настойчивыми заявками, конфликтами и отказами; с конфликтами, H настойчивыми и нетерпеливыми заявками; вида MMPP|M|1 с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами;

4. Разработка численных методов расчета допредельных вероятностно-временных характеристик RQ-систем вида M|M|1 с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами; с H1, H2 настойчивыми заявками, конфликтами и отказами; с конфликтами, H настойчивыми и нетерпеливыми заявками;

5. Составление комплекса проблемно-ориентированных программ, реализующих предложенные численные методы.

1 RQ-система M/M/1 с H настойчивыми заявками, коллизиями и отказами

1.1 Функциональная модель системы совместного доступа с *H* настойчивыми заявками, конфликтами и отказами

Прежде чем построить математическую модель анализируемой системы связи, определим функциональную модель, являющуюся ее функциональным прототипом. Формализуем работу системы: выделим перечень событий, которые имеют существенное значение при использовании анализируемого ресурса передачи информации [23].

Рассмотрим однолинейную (с одним обслуживающим прибором) систему с конфликтами заявок и отказами.

На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его, и начинается обслуживание, которое заканчивается успешно, если во время него другие заявки не поступали.

Если прибор занят, то между пришедшей на обслуживание и обслуживаемой заявками возникает конфликт (коллизия), и в общем случае [7–9,11,12] обе заявки мгновенно переходят на орбиту и повторяют попытку успешно обслужиться через случайное время. В настоящей статье в случае возникновения коллизии заявка, находившаяся на обслуживании (на приборе), уходит на орбиту с вероятностью 1, а поступившая на прибор и вызвавшая конфликт заявка с вероятностью H уходит на орбиту, а с вероятностью $(1 - H)$ отказывается от обслуживания и покидает систему.

Будем разделять поступающие на прибор заявки на две категории: первичные и повторные. Первичные заявки – заявки, поступившие в систему извне; повторные заявки – заявки, оказавшиеся на орбите системы в результате коллизии, и осуществляющие повторную попытку занять прибор для обслуживания. На рисунке 1 приведена схема формирования суммарного входящего потока.

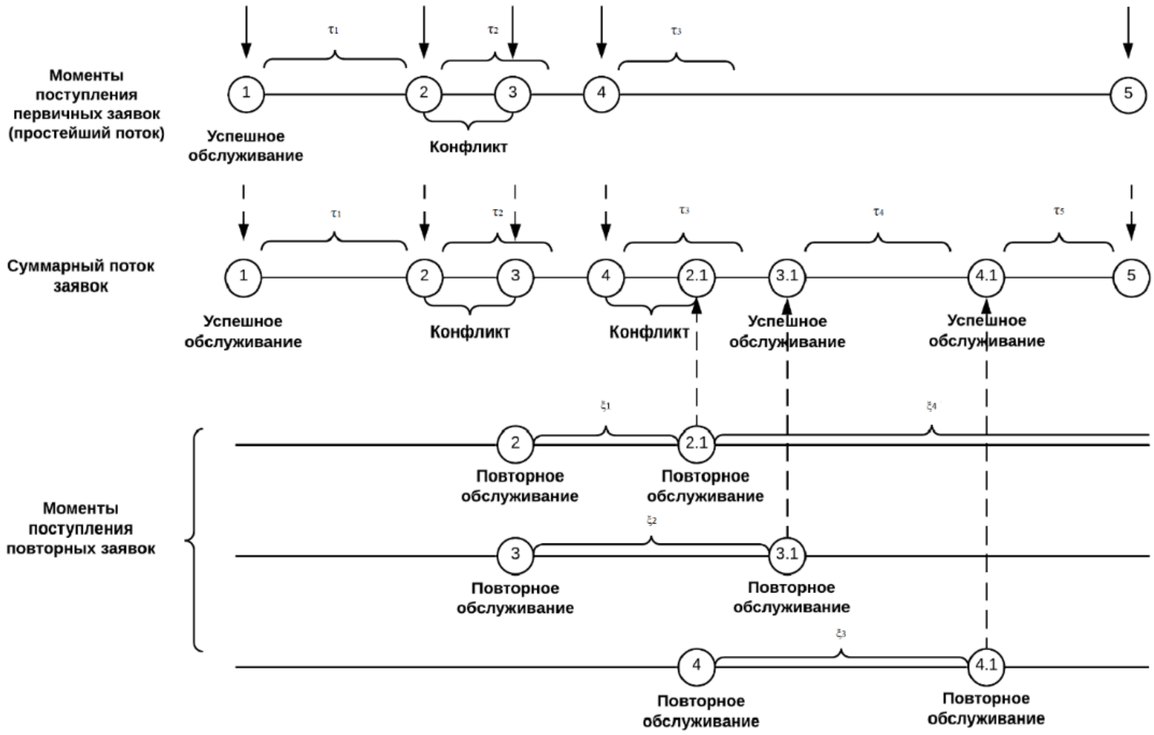


Рисунок 1 – Схема реконструкции входящего потока заявок

Время обслуживания первичной или повторной заявки не зависит от её типа и имеет экспоненциальное распределение с параметром μ, и для обслуживания заявок используется одна единица ресурса линии. Случайная задержка, которую осуществляет заявка на орбите, экспоненциально распределена с параметром σ.

Таким образом, описанная процедура доступа к канальному ресурсу (обсуживающему прибору) и образования орбиты, показана на рисунке 2 как функциональная модель системы.

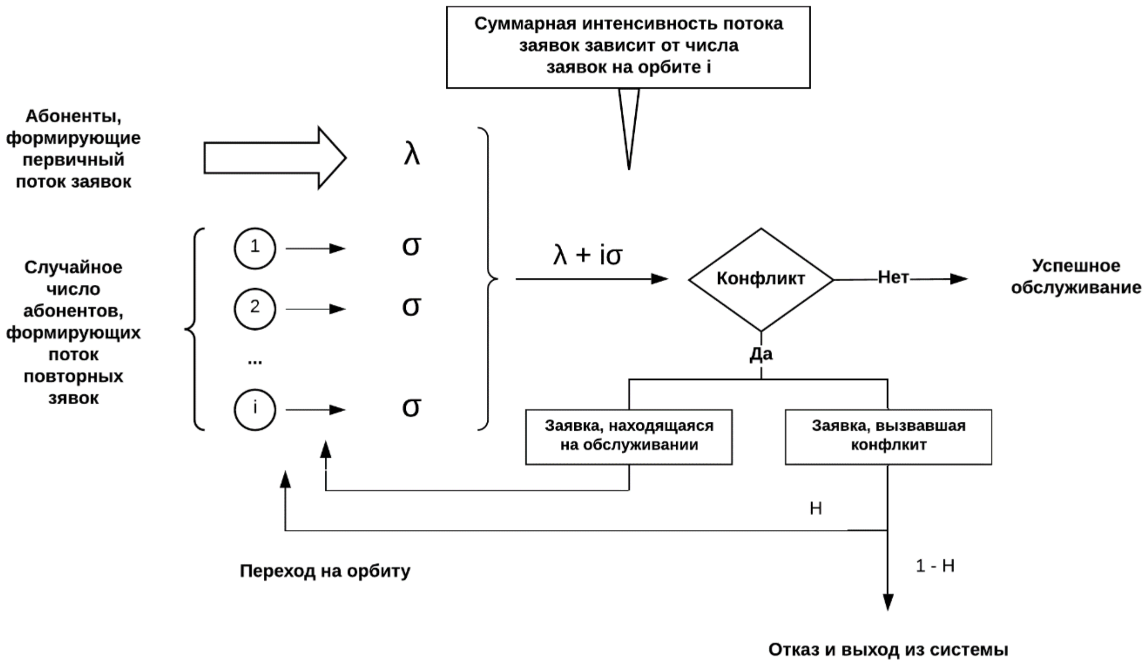


Рисунок 2 – Схема функционирования модели (функциональная модель системы)

1.2 Математическая модель системы совместного доступа с *H* настойчивыми заявками, конфликтами и отказами

Рассмотрим однолинейную RQ-систему с *H* настойчивыми заявками, конфликтами и отказами, изображенную на рисунке 3.

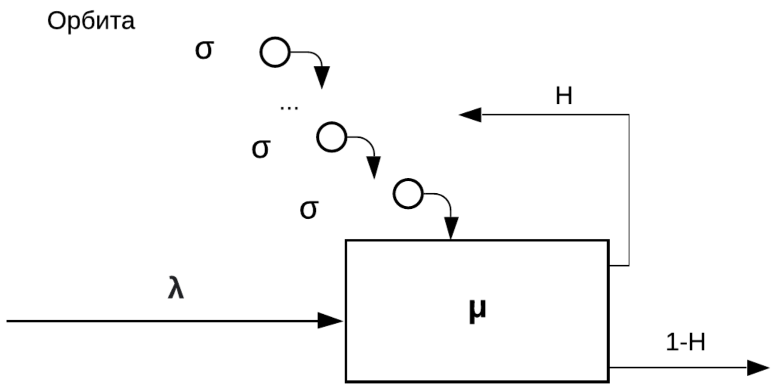


Рисунок 3 – RQ-система M/M/1 с *H* настойчивыми заявками, конфликтами и отказами

Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его и начинает обслуживание, которое заканчивается успешно, если во время него другие заявки не поступали. Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки вступают в конфликт. При этом, будем считать, что заявка с прибора уходит на орбиту с вероятностью 1, заявка, вызвавшая конфликт, уходит на орбиту с вероятностью H, а с вероятностью 1 - H покидает систему.

На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Продолжительность обслуживания имеет экспоненциальную функцию распределения с параметром μ. Случайная задержка, которую осуществляет заявка на орбите в случае возникновения конфликта, экспоненциально распределена с параметром σ.

Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t, $l(t)$ будет определять состояние прибора следующим образом:

$$l(t) = \begin{cases} 0, \text{если прибор свободен}, \\ 1, \text{если прибор занят}. \end{cases}$$

$P\{l(t) = l,\ i(t) = i\} = P_l(i,t)$ – вероятность того, что прибор в момент времени находится в состоянии l, и в источнике повторных вызовов i заявок.

Так как входящий поток – простейший, и время обслуживания – экспоненциальное, то случайный процесс $\{l(t), i(t)\}$ изменения во времени состояний описанной RQ-системы является двумерной цепью Маркова с непрерывным временем.

Ставится задача исследования случайного процесса $\{l(t), i(t)\}$.

1.2.1 Система уравнений Колмогорова

Для распределения вероятностей $P_l(i,\ t)$ согласно теореме о полной вероятности можно составить равенства:

$i = 0$:

$$\begin{cases} P_0(0, t + \Delta t) = P_0(0, t)(1 - \lambda \Delta t) + P_1(0, t)\mu \Delta t + o(\Delta t), \\ P_1(0, t + \Delta t) = P_1(0, t)(1 - \mu \Delta t)(1 - \lambda \Delta t) + P_0(0, t)\lambda \Delta t + \\ +P_0(1, t)(1 - \lambda \Delta t)\sigma \Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

$i = 1$:

$$\begin{cases} P_0(1, t + \Delta t) = P_0(1, t)(1 - \lambda \Delta t)(1 - \sigma \Delta t) + P_1(1, t)\mu \Delta t + P_1(0, t)\lambda \Delta t(1 - H) + \\ +P_1(1, t)\sigma \Delta t(1 - H) + o(\Delta t), \\ P_1(1, t + \Delta t) = P_1(1, t)(1 - \mu \Delta t)(1 - \lambda \Delta t)(1 - \sigma \Delta t) + P_0(1, t)(1 - \sigma \Delta t)\lambda \Delta t + \\ +P_0(2, t)(1 - \lambda \Delta t)2\sigma \Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

$i > 2$:

$$
\begin{cases}
P_0(i,t+\Delta t) = P_0(i,t)(1-\lambda\Delta t)(1-i\sigma\Delta t) + P_1(i,t)\mu\Delta t + P_1(i-2,t)\lambda\Delta t H + \\
\quad + P_1(i-1,t)\lambda\Delta t(1-H) + P_1(i-1,t)(i-1)\sigma\Delta t H + \\
\quad + P_1(i,t)i\sigma\Delta t(1-H) + o(\Delta t), \\
P_1(i,t+\Delta t) = P_1(i,t)(1-\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t)(1-i\sigma\Delta t) + P_0(i,t)(1-i\sigma\Delta t)\lambda\Delta t + \\
\quad + P_0(i+1,t)(1-\lambda\Delta t)(i+1)\sigma\Delta t + o(\Delta t).
\end{cases}
$$

Откуда не трудно получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

i = 0:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial P_0(0,t)}{\partial t} = -\lambda P_0(0,t) + \mu P_1(0,t), \\
\frac{\partial P_1(0,t)}{\partial t} = -(\mu+\lambda)P_1(0,t) + \lambda P_0(0,t) + \sigma P_0(1,t).
\end{cases}
$$

i = 1:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial P_0(1,t)}{\partial t} = -(\lambda+\sigma)P_0(1,t) + \mu P_1(1,t) + (1-H)\lambda P_1(0,t) + (1-H)\sigma P_1(1,t), \\
\frac{\partial P_1(1,t)}{\partial t} = -(\mu+\lambda+\sigma)P_1(1,t) + \lambda P_0(1,t) + 2\sigma P_0(2,t).
\end{cases}
$$

i > 2:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -(\lambda+i\sigma)P_0(i,t) + \mu P_1(i,t) + H\lambda P_1(i-2,t) + (1-H)\lambda P_1(i-1,t) + \\
\quad + H(i-1)\sigma P_1(i-1,t) + (1-H)i\sigma P_1(i,t), \\
\frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = -(\mu+\lambda+i\sigma)P_1(i,t) + \lambda P_0(i,t) + \sigma(i+1)P_0(i+1,t).
\end{cases} \tag{1.2.1}
$$

Запишем систему (1.2.1) в стационарном режиме $\lim_{t\to\infty} P_l(i,t) = \Pi_l(i)$:

i = 0:

$$
\begin{cases}
0 = -\lambda\Pi_0(0) + \mu\Pi_1(0), \\
0 = -(\mu+\lambda)\Pi_1(0) + \lambda\Pi_0(0) + \sigma\Pi_0(1).
\end{cases}
$$

i = 1:

$$
\begin{cases}
0 = -(\lambda+\sigma)\Pi_0(1) + \mu\Pi_1(1) + (1-H)\lambda\Pi_1(0) + (1-H)\sigma\Pi_1(1), \\
0 = -(\mu+\lambda+\sigma)\Pi_1(1) + \lambda\Pi_0(1) + 2\sigma\Pi_0(2).
\end{cases}
$$

i > 2:

$$
\begin{cases}
0 = -(\lambda+i\sigma)\Pi_0(i) + \mu\Pi_1(i) + \lambda H\lambda\Pi_1(i-2) + (1-H)\lambda\Pi_1(i-1) + \\
\quad + H(i-1)\sigma\Pi_1(i-1) + (1-H)i\sigma\Pi_1(i), \\
0 = -(\mu+\lambda+i\sigma)\Pi_1(i) + \lambda\Pi_0(i) + \sigma(i+1)\Pi_0(i+1).
\end{cases} \tag{1.2.2}
$$

Для решения системы (1.2.2) построим итерационный (рекурсивный) алгоритм. Положим $\Pi(0) = a$, где a – некоторая произвольная положительная константа, $\Pi(i) = \Pi_0(i) + \Pi_1(i)$, $i = 0,1,2\ldots N$ и запишем следующие равенства:

$$\begin{cases} \text{Для } i = 0: \\ \Pi_1(0) = \frac{\lambda}{\mu}\Pi_0(0), \\ \Pi_0(1) = \frac{1}{\sigma}\big((\lambda+\mu)\Pi_1(0) - \lambda\Pi_0(0)\big). \\ \text{Для } i = 1: \\ \Pi_1(1) = \frac{1}{\mu+\sigma(1-H)}\big((\lambda+\sigma)\Pi_0(1) - \lambda(1-H)\Pi_1(0)\big), \\ \Pi_0(2) = \frac{1}{2\sigma}\big((\lambda+\mu+\sigma)\Pi_1(1) - \lambda\Pi_0(1)\big). \\ \text{Для } i \geq 2: \\ \Pi_1(i) = \frac{1}{\mu+i\sigma(1-H)}\big((\lambda+i\sigma)\Pi_0(i) - (\lambda(1-H)+(i-1)\sigma H)\Pi_1(i-1) - \\ -\lambda H\Pi_1(i-2)\big), \\ \Pi_0(i+1) = \frac{1}{(i+1)\sigma}\big((\lambda+\mu+i\sigma)\Pi_1(i) - \lambda\Pi_0(i)\big). \end{cases} \tag{1.2.3}$$

С помощью системы (1.2.3) найдем $\Pi(i) = \Pi_0(i) + \Pi_1(i)$, $i = 0,1,2\ldots N$, после чего нормируем $\Pi\Pi(i) = \frac{\Pi(i)}{\sum_{i=0}^{N}\Pi(i)}$.

Алгоритм довольно прост в реализации и позволяет численно получить допредельные характеристики исследуемой RQ-системы. Алгоритм применим только для исследования RQ-системы с простейшим входящим потоком, однако позволяет сделать предположения о виде распределения вероятностей числа заявок на орбите при различных параметрах системы. Результаты реализации данного рекуррентного алгоритма представлены в главе 1.4.1.

1.3 Асимптотический анализ системы совместного доступа с коллизиями с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами

Введем частичные характеристические функции:

$$h_l(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui}\Pi_l(i), \qquad l = \{0,1\},$$

$$-j\frac{\partial h_l(u)}{\partial u} = \sum_{i=0}^{\infty} ie^{jui}\Pi_l(i),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Тогда из системы (1.2.2) получим систему двух уравнений относительно функций $h_l(u)$:

$$\begin{cases} -\lambda h_0(u) + j\sigma \frac{\partial h_0(u)}{\partial u} + \mu h_1(u) + \lambda H e^{2ju} h_1(u) + \lambda(1-H)e^{ju} h_1(u) - \\ \qquad -j\sigma H e^{ju} \frac{\partial h_1(u)}{\partial u} - j\sigma(1-H)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \\ -\mu h_1(u) - \lambda h_1(u) + j\sigma \frac{\partial h_1(u)}{\partial u} + \lambda h_0(u) - j\sigma e^{-ju}\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} = 0. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Умножив второе уравнение системы (1.3.1) на e^{ju} и суммируя уравнения системы, получим дополнительное уравнение:

$$(e^{ju}-1)\lambda h_0(u) + \{-\mu(e^{ju}-1) + \lambda e^{ju}(-1 + (1-H) + He^{ju}))h_1(u) - j\sigma((1-H) + $$
$$+He^{ju} - e^{ju})\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0,$$

$$(e^{ju}-1)\lambda h_0(u) + \{-\mu(e^{ju}-1) + \lambda e^{ju}(e^{ju}-1)\}\, h_1(u) -$$
$$-j\sigma(1-e^{ju})(H-1)\ \frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0. \quad (1.3.2)$$

Разделим уравнение (1.3.2) на $(e^{ju}-1)$:

$$\lambda h_0(u) + \left(\lambda H e^{ju} - \mu\right) h_1(u) + j\sigma(1-H)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0.$$

Получим систему:

$$\begin{cases} -\lambda h_0(u) + \{\mu + \lambda((1-H)e^{ju} + He^{2ju}))h_1(u) + j\sigma \frac{\partial h_0(u)}{\partial u} - \\ \qquad -j\sigma\left((1-H) + He^{ju}\right)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \\ \lambda h_0(u) - (\lambda+\mu)h_1(u) - je^{-ju}\sigma\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} + j\sigma\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \\ \lambda h_0(u) + \left(\lambda H e^{ju} - \mu\right)h_1(u) + j\sigma(1-H)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \end{cases} \quad (1.3.3)$$

которую будем решать методом асимптотического анализа в предельном условии $\sigma \to 0$.

1.3.1 Асимптотика первого порядка

Для нахождения асимптотики первого порядка в системе (1.3.3) выполним следующие замены:

$$\sigma = \varepsilon, u = \varepsilon w, h_k(u) = f_k(\varepsilon, w). \quad (1.3.4)$$

Тогда система уравнений (1.3.3) примет вид:

$$\begin{cases} -\lambda f_0(\varepsilon,w)+\left\{\mu+\lambda\left((1-H)e^{j\varepsilon w}+He^{2j\varepsilon w}\right)\right)f_1(\varepsilon,w)+j\varepsilon\frac{\partial f_0(\varepsilon,w)}{\partial w}- \\ -j\varepsilon\left(1-H\left(1-e^{j\varepsilon w}\right)\right)\frac{\partial f_1(\varepsilon,w)}{\partial w}=0, \\ \lambda f_0(\varepsilon,w)-(\lambda+\mu)f_1(\varepsilon,w)-je^{-j\varepsilon w}\varepsilon\frac{\partial f_0(\varepsilon,w)}{\partial w}+j\varepsilon\frac{\partial f_1(\varepsilon,w)}{\partial w}=0, \\ \lambda f_0(\varepsilon,w)+\left(\lambda He^{j\varepsilon w}-\mu\right)f_1(\varepsilon,w)+j(1-H)\frac{\partial f_1(\varepsilon,w)}{\partial w}=0. \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Решение для $f_k(\varepsilon,w)$ будем искать в виде:

$$f_k(\varepsilon,w)=r_k\Phi(\mathrm{w})+\mathrm{o}(\varepsilon) \quad (1.3.6)$$

где $r_0+r_1=1,\ r_k=h_k(0)=f_k(0)$.

Подставляя (1.3.6) в (1.3.5), получаем систему дифференциальных уравнений относительно функции Φ(w):

$$\begin{cases} -\lambda r_0\Phi(w)+\left\{\mu+\lambda\left((1-H)+H\right)\right)r_1\Phi(w)+jr_0\frac{\partial\Phi(w)}{\partial w}-jr_1\frac{\partial\Phi(w)}{\partial w}=0, \\ \lambda r_0\Phi(w)-(\lambda+\mu)r_1\Phi(w)-jr_0\frac{\partial\Phi(w)}{\partial w}+jr_1\frac{\partial\Phi(w)}{\partial w}=0, \\ \lambda r_0\Phi(w)+(\lambda H-\mu)r_1\Phi(w)+j(1-H)r_1\frac{\partial\Phi(w)}{\partial w}=0. \end{cases} \quad (1.3.7)$$

Из первого и второго уравнения системы (1.3.7) получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{\lambda r_0-(\mu+\lambda)r_1}{j(r_0-r_1)}=\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}.$$

Из третьего уравнения системы (1.3.7) получаем:

$$-\frac{\lambda r_0-(\lambda H-\mu)r_1}{j(1-H)r_1}=\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}.$$

Отсюда, добавив условие нормировки, получаем систему уравнений для нахождения r_0, r_1:

$$\begin{cases} -\frac{\lambda r_0+(\lambda H-\mu)r_1}{(1-H)r_1}=\frac{\lambda r_0-(\mu+\lambda)r_1}{(r_0-r_1)}, \\ r_0+r_1=1, \end{cases} \quad (1.3.8)$$

$$\begin{cases} -\frac{\lambda(1-r_1)+(\lambda H-\mu)r_1}{(1-H)r_1}=\frac{\lambda(1-r_1)-(\mu+\lambda)r_1}{(r_0-r_1)}, \\ r_0+r_1=1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\lambda-\lambda r_1+\lambda H r_1-\mu r_1}{(1-H)r_1}=\dfrac{\lambda-\lambda r_1-\mu r_1-\lambda r_1}{(r_0-r_1)}, \\ r_0+r_1=1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\lambda-\mu r_1}{(1-H)r_1}+\lambda=\lambda-\dfrac{\mu r_1}{(1-2r_1)}, \\ r_0+r_1=1. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем:

$$(1-2r_1)(\lambda-\mu r_1)=\mu(1-H)r_1^2,$$

$$\lambda-(\mu+2\lambda)r_1+\mu(1+H)r_1^2=0,$$

$$\mu(1+H)r_1^2-(\mu+2\lambda)r_1+\lambda=0. \qquad (1.3.9)$$

Обозначим $\frac{\lambda}{\mu}=\rho$, тогда получаем квадратное уравнение относительно r_1 вида:

$$(1+H)r_1^2-(1+2\rho)r_1+\rho=0. \qquad (1.3.10)$$

Нас интересуют решения, принадлежащие отрезку [0,1].

Найдем корни квадратного уравнения (1.3.10):

$$D=(1+2\rho)^2-4(1+H)\rho=1+4\rho^2+4\rho-4\rho-H\rho=1+4\rho^2-4H\rho\geq 0.$$

Всегда $4\rho^2-4H\rho+1\geq 0$.

$$D_2=16H^2-16=16(H^2-1)\leq 0$$

$$D=1+4\rho^2-4H\rho=(1+2\rho)^2-4\rho-4H\rho=(1+2\rho)^2-4\rho(1+H)\leq(1+2\rho)^2$$

$$0\leq D\leq(1+\rho)^2$$

Следовательно, оба корня положительны $r_1=\frac{1+2\rho\pm\sqrt{D}}{2(1+H)}$.

Вершина параболы $r_1{}^0=\frac{1+2\rho}{2(1+H)}$.

$$y(\,r_1)=(1+H)r_1{}^2-(1+2\rho)r_1+\rho,$$

$$y(0)=\rho>0,$$

$$y(1)=(1+H)\cdot 1-(1+2\rho)\cdot 1+\rho=H-\rho.$$

Если:

1) $H > \rho$ один корень меньше 1,
2) $H < \rho$ оба корня лежат от 0 до 1.

Отметим, что при H = 1:

$$r_1 = \frac{1 + 2\rho \pm (1 - 2\rho)}{4} = \begin{bmatrix} 1/2, \\ \rho, \end{bmatrix}$$

что соответствует известным результатам для аналогичных систем без отказов в обслуживании [23].

Вернемся к (1.3.9):

$$-\frac{\lambda r_0 + (\lambda H - \mu) r_1}{(1 - H) r_1} = \frac{\lambda r_0 - (\mu + \lambda) r_1}{(r_0 - r_1)} = -\kappa,$$

$$-\frac{\lambda - \mu r_1}{(1 - H) r_1} + \lambda = \lambda - \frac{\mu r_1}{(1 - 2r_1)} = -\kappa,$$

$$-\kappa = j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)},$$

$$j\kappa = \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)},$$

$$\Phi(w) = e^{j\kappa t},$$

где $\kappa = \frac{\mu r_1}{1 - 2r_1} - \lambda$.

Вернемся к исходной характеристической функции с помощью обратных изменений и поставим ε = σ. Тогда

$$h_k(u) = f_k(\varepsilon, w) = f_k(w) + o(\varepsilon) \approx f_k(w) = f_k\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) = r_k e^{\frac{\kappa_1}{\sigma} ju}.$$

Принимая во внимание условие нормировки $r_0 + r_1 = 1$, получим, что асимптотическая характеристическая функция первого порядка имеет вид

$$h^{(1)}(u) = h_0(u) + h_1(u) = e^{\frac{\kappa_1}{\sigma} ju}.$$

Полученная величина κ_1 определяет асимптотическое среднее значение κ_1/σ числа заявок на орбите в системе совместного доступа с ненастойчивыми заявками, конфликтами и отказами. Для построения гауссовской аппроксимации распределения вероятностей числа *i(t)* заявок на орбите рассмотрим асимптотику второго порядка.

1.3.2 Асимптотика второго порядка

Выполнив в системе (1.3.3) замены

$$h_k(u) = e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} h_k{}^{(2)}(u), \tag{1.3.11}$$

Получим

$$\begin{cases} -\lambda h_0(u) + \left\{\mu + \lambda\left((1-H)e^{ju} + He^{2ju}\right)\right) h_1(u) + j\sigma \dfrac{\partial h_0(u)}{\partial u} - \\ \qquad -j\sigma\left((1-H) + He^{ju}\right)\dfrac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \\ \lambda h_0(u) - (\lambda+\mu)h_1(u) - je^{-ju}\sigma\dfrac{\partial h_0(u)}{\partial u} + j\sigma\dfrac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \\ \lambda h_0(u) + \left(\lambda He^{ju} - \mu\right)h_1(u) + j\sigma(1-H)\dfrac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\kappa_1)h_0{}^{(2)}(u) + \left\{\mu + \lambda\left((1-H)e^{ju} + He^{2ju}\right)\right) + \left((1-H) + He^{ju}\right)\kappa_1\} h_1{}^{(2)}(u) + \\ \qquad + j\sigma\dfrac{\partial h_0{}^{(2)}(u)}{\partial u} - j\sigma\left((1-H) + He^{ju}\right)\dfrac{\partial h_1{}^{(2)}(u)}{\partial u} = 0, \\ \left(\lambda + e^{ju}\kappa_1\right)h_0{}^{(2)}(u) - (\lambda+\mu+\kappa_1)h_1{}^{(2)}(u) - je^{-ju}\sigma\dfrac{\partial h_0{}^{(2)}(u)}{\partial u} + j\sigma\dfrac{\partial h_1{}^{(2)}(u)}{\partial u} = 0, \\ \lambda h_0{}^{(2)}(u) + \left(\lambda He^{ju} - \mu - (1-H)\kappa_1\right)h_1{}^{(2)}(u) + j\sigma(1-H)\dfrac{\partial h_1{}^{(2)}(u)}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Сделаем замены

$$\sigma = \varepsilon^2, u = \varepsilon w, h_k{}^{(2)}(u) = f_k{}^{(2)}(\varepsilon, w),$$

тогда

$$\begin{cases} -(\lambda+\kappa_1)f_0{}^{(2)}(\varepsilon,w) + (\mu + \lambda\left((1-H)e^{j\varepsilon w} + He^{2j\varepsilon w}\right)) + \left((1-H) + He^{j\varepsilon w}\right)\cdot \\ \qquad \kappa_1)\cdot f_1{}^{(2)}(\varepsilon,w) + j\varepsilon\frac{\partial f_0{}^{(2)}(\varepsilon,w)}{\partial w} - j\varepsilon\left((1-H) + He^{j\varepsilon w}\right)\frac{\partial f_1{}^{(2)}(\varepsilon,w)}{\partial w} = 0, \\ \left(\lambda + e^{j\varepsilon w}\kappa_1\right)f_0{}^{(2)}(\varepsilon,w) - (\lambda+\mu+\kappa_1)f_1{}^{(2)}(\varepsilon,w) - je^{-j\varepsilon w}\varepsilon\frac{\partial f_0{}^{(2)}(u)}{\partial w} + \\ \qquad + j\sigma\frac{\partial f_1{}^{(2)}(u)}{\partial w} = 0, \\ \lambda f_0{}^{(2)}(\varepsilon,w) + \left(\lambda He^{j\varepsilon w} - \mu - (1-H)\kappa_1\right)f_1{}^{(2)}(\varepsilon,w) + j\varepsilon(1-H)\frac{\partial f_1{}^{(2)}(\varepsilon,w)}{\partial w} = 0. \end{cases} \tag{1.3.12}$$

В систему (1.3.12) подставим разложение

$$f_k^{(2)}(\varepsilon, w) = (r_k + jw\varepsilon g_k)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) + O(\varepsilon^2),$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\kappa_1)(r_0+jw\varepsilon g_0)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) + \Big(\mu + \lambda\Big((1-H)e^{j\varepsilon w} + He^{2j\varepsilon w}\Big)\Big) + \\ +\Big((1-H)+He^{j\varepsilon w}\Big)\kappa_1\}(r_1+jw\varepsilon g_1)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) + j\varepsilon\Big((r_0+jw\varepsilon g_0)\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + \\ +j\varepsilon g_0\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\Big) - j\varepsilon\Big((1-H)+He^{j\varepsilon w}\Big)\cdot \\ \cdot\Big((r_1+jw\varepsilon g_1)\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + j\varepsilon g_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\Big) = 0, \\ \big(\lambda + e^{j\varepsilon w}\kappa_1\big)(r_0+jw\varepsilon g_0)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) - (\lambda+\mu+\kappa_1)\cdot \\ \cdot(r_1+jw\varepsilon g_1)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) - je^{-j\varepsilon w}\varepsilon((r_0+jw\varepsilon g_0)\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + \\ +j\varepsilon g_0\Phi^{(2)}(\mathrm{w})) + j\varepsilon\Big((r_1+jw\varepsilon g_1)\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + j\varepsilon g_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\Big) = 0, \\ \lambda(r_0+jw\varepsilon g_0)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) + \big(\lambda He^{j\varepsilon w} - \mu - (1-H)\kappa_1\big)(r_1+jw\varepsilon g_1)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) + \\ +j\varepsilon(1-H)\Big((r_1+jw\varepsilon g_1)\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + j\varepsilon g_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\Big) = 0. \end{cases} \quad (1.3.13)$$

Полученную систему (1.3.13) поделим на $\Phi^{(2)}(\mathrm{w})$ и выполним предельный переход, при $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{cases} -(\lambda+\kappa_1)r_0\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) + \big(\mu + \lambda\big((1-H)+H\big) + \kappa_1\big)r_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) = 0, \\ (\lambda+\kappa_1)r_0\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) - (\lambda+\mu+\kappa_1)r_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) = 0, \\ \lambda r_0\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) + (\lambda H - \mu - (1-H)\kappa_1)r_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\kappa_1)r_0 + (\mu+\lambda+\kappa_1)r_1 = 0, \\ (\lambda+\kappa_1)r_0 - (\lambda+\mu+\kappa_1)r_1 = 0, \\ \lambda r_0 + (\lambda H - \mu - (1-H)\kappa_1)r_1 = 0. \end{cases}$$

Значения κ_1 для первой и второй асимптотики совпадают, следовательно, в (1.3.13) слагаемые при ε в нулевой степен обращаются в ноль.

Теперь систему (1.3.13) поделим на $\Phi^{(2)}(\mathrm{w})$ и соберем слагаемые, при ε^1:

$$\begin{cases} -(\lambda+\kappa_1)g_0 + (\lambda(1+H)+H\kappa_1)R_1 + (\mu+\lambda+\kappa_1)g_1 = (R_1-R_0)\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}, \\ (\lambda+\kappa_1)g_0 - \kappa_1R_0 - (\lambda+\mu+\kappa_1)g_1 = -(R_1-R_0)\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\mathrm{w}\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}, \\ \lambda g_0 + (\lambda H - \mu - (1-H)\kappa_1)g_1 + \lambda HR_1 = -(1-H)R_1\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\mathrm{w}\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}. \end{cases} \quad (1.3.14)$$

Из (1.3.14) следует, что

$$\frac{\partial\Phi^{(2)}(w)}{w\Phi^{(2)}(w)\partial w} = const = \kappa_2.$$

То есть

$$\Phi^{(2)}(\text{w}) = e^{\kappa_2 \frac{(jw)^2}{2}}.$$

Если сложить первых два уравнения, то получится тождество

$$\lambda(1+H)R_1 + H\kappa_1 R_1 - \kappa_1 R_0 = 0.$$

Поэтому в (1.3.14) оставляем два уравнения для нахождения κ_2 и добавим дополнительное условие $g_0 + g_1 = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{(\lambda+\kappa_1)g_0 - \kappa_1 R_0 - (\lambda+\mu+\kappa_1)g_1}{(R_1 - R_0)} = -\kappa_2, \\ \dfrac{\lambda g_0 + (\lambda H - \mu - (1-H)\kappa_1)g_1 + \lambda H R_1}{(1-H)R_1} = -\kappa_2, \\ g_0 + g_1 = 0. \end{cases}$$

Откуда имеем выражение

$$\kappa_2 = \frac{(\lambda+\kappa_1)g_0 - \kappa_1 R_0 - (\lambda+\mu+\kappa_1)g_1}{(R_1 - R_0)},$$

в котором g_0, g_1 являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{(\lambda+\kappa_1)g_0 - \kappa_1 R_0 - (\lambda+\mu+\kappa_1)g_1}{(R_1 - R_0)} = \dfrac{\lambda g_0 + (\lambda H - \mu - (1-H)\kappa_1)g_1 + \lambda H R_1}{(1-H)R_1}, \\ g_0 + g_1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_0 = \dfrac{\dfrac{\lambda H}{1-H} + \dfrac{\kappa_1 R_0}{R_1 - R_0}}{\dfrac{2\lambda + 2\kappa_1 + \mu}{R_1 - R_0} - \dfrac{\lambda + \lambda H - \mu - (1-H)\kappa_1}{R_1(1-H)}}, \\ g_1 = -g_0. \end{cases}$$

Делая обратные замены, получаем:

$$h_k{}^{(2)}(u) = f_k{}^{(2)}(\varepsilon, w) = \left(R_k + jw\varepsilon g_k\right)e^{\kappa_2 \frac{(jw)^2}{2}} + o(\varepsilon^2) \approx R_k e^{\frac{\kappa_2}{\sigma}\frac{(ju)^2}{2}},$$

затем, выражения (1.3.11), можно записать как

$$h_k{}^{(2)}(u) = e^{\frac{\kappa_1}{\sigma}ju} h_k{}^{(2)}(u) \approx R_k e^{\frac{\kappa_1}{\sigma}ju + \frac{\kappa_2}{\sigma}\frac{(ju)^2}{2}}.$$

Для асимптотической характеристической функции числа заявок на орбите с учетом (1.3.11) имеем

$$h(u) = e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} h^{(2)}(u) = e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} e^{\frac{j^2u^2\kappa_2}{2\sigma}} = e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}+\frac{(ju)^2\kappa_2}{2\sigma}}.$$

Таким образом, найденная асимптотика второго порядка показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа *i(t)* заявок на орбите в рассматриваемой системе является гауссовским с асимптотическим средним κ_1/σ и дисперсией κ_2/σ.

1.4 Нахождение численных результатов распределения вероятностей числа заявок на орбите

1.4.1 Рекуррентный алгоритм для RQ-системы с H настойчивыми заявками, коллизиями и отказами

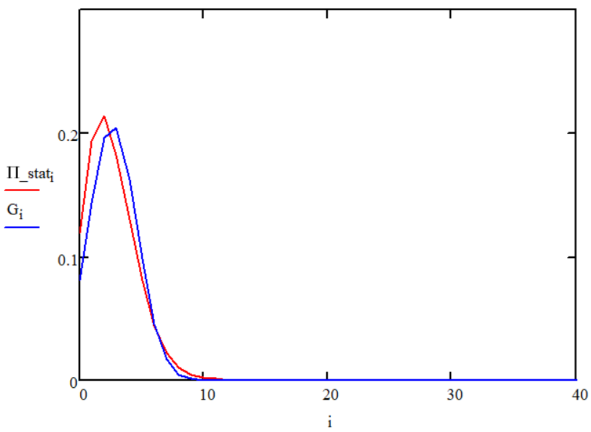
С помощью равенств (1.2.3), полученных в главе 1.2, был реализован рекуррентный алгоритм в виде рабочих листов системы Mathcad. В таблице 1 представлен текст программы рекуррентного алгоритма для RQ-системы с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами.

Таблица 1 – Блок вычисления распределения вероятностей числа заявок для RQ-системы с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами с помощью рекуррентного алгоритма

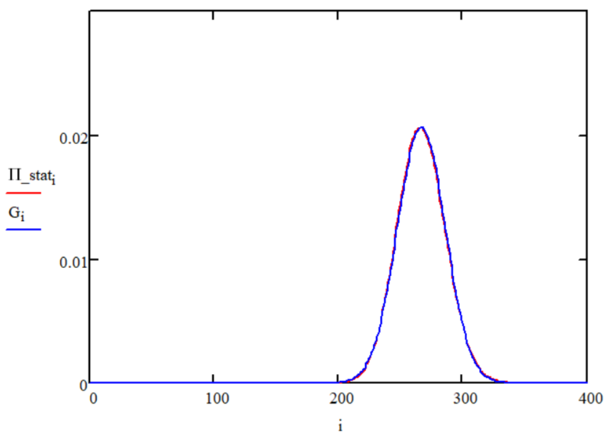
Параметры потока	
$\lambda := 0.4$	– интенсивность потока заявок;
$\mu := 1$	– интенсивность обслуживания;
$\sigma := 0.1$	– интенсивность задержки заявки на орбите;
$H := 0.5$	– вероятность настойчивости;
$a := 0.005$	– произвольная константа a;
$n := 50$	– предельное число заявок на орбите (такое, что вероятность превышения этого значения равна нулю);
$\Pi stat :=$ for $i \in 0$: $\Pi 0_i \leftarrow a$; $\Pi 1_i \leftarrow \frac{\lambda}{\mu} \Pi 0_i$	– расчет стационарных вероятностей состояния прибора, при i = 0, где i – число заявок на орбите;

$\begin{array}{l} \text{for } i \in 1 \\ \quad \Pi0_i \leftarrow \frac{1}{\sigma}\left[(\mu+\lambda)\cdot\Pi1_{i-1} - \lambda\cdot\Pi0_{i-1}\right] \\ \quad \Pi1_i \leftarrow \frac{1}{\mu+\sigma\cdot(1-H)}\left[(\lambda+\sigma)\cdot\Pi0_i - \lambda\cdot(1-H)\cdot\Pi1_{i-1}\right] \end{array}$	– расчет стационарных вероятностей состояния прибора, при i = 1;
$\begin{array}{l} \text{for } i \in 2..n \\ \quad \Pi0_i \leftarrow \frac{1}{i\cdot\sigma}\left[\left[\mu+\lambda+(i-1)\cdot\sigma\right]\cdot\Pi1_{i-1} - \lambda\cdot\Pi0_{i-1}\right] \\ \quad \Pi1_i \leftarrow \frac{1}{\mu+i\cdot\sigma\cdot(1-H)}\left[(\lambda+i\cdot\sigma)\cdot\Pi0_i - \lambda\cdot(1-H)\cdot\Pi1_{i-1} - H\cdot\sigma\cdot(i-1)\cdot\Pi1_{i-1} - \lambda\cdot H\cdot\Pi1_{i-2}\right] \end{array}$	
– расчет стационарных вероятностей состояния прибора, при i = n;	
$\begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \quad S\Pi_i \leftarrow \Pi0_i + \Pi1_i \\ S\Pi \end{array}$	– сумма полученных вероятностей;
$B := \sum_i \Pi stat_i$	– сумма полученных вероятностей для нормировочной константы;
$\Pi\_stat_i := \left(\frac{\Pi stat_i}{B}\right)$	– распределение числа заявок на орбите.

В результате численных экспериментов было выявлено, что при уменьшении случайной задержки, которую осуществляет заявка на орбите в случае возникновения конфликта, распределение числа заявок на орбите имеет вид гауссовского. На рисунках 4, 5 изображены графики распределения вероятностей числа заявок на орбите, полученного с помощью рекуррентного алгоритма и дискретизированного нормального распределения, при разных значениях вероятности *H* и параметра *σ*.



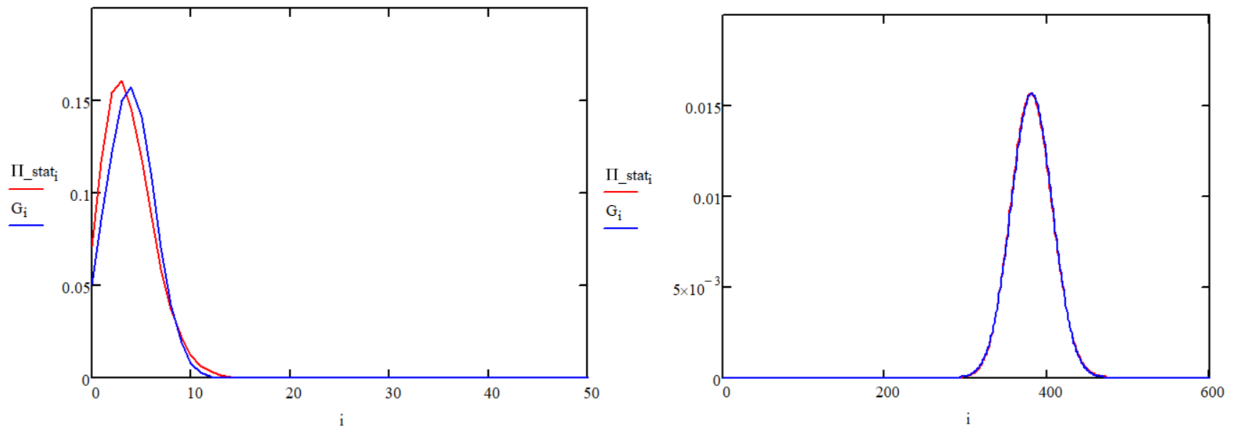
а) λ = 0.4, μ = 1, σ = 0,1



б) λ = 0.4, μ = 1, σ = 0,001

Рисунок 4 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите для RQ-системы с коллизиями, *H*-настойчивостью и отказами при *H* = 0,4

(Дискретизированное нормальное распределение–«G_i», Рекуррентный алгоритм–«$П\_stat_i$»)



а) λ = 0.4, μ = 1, σ = 0,1 б) λ = 0.4, μ = 1, σ = 0,001

Рисунок 5 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите для RQ-системы с коллизиями,

H-настойчивостью и отказами при *H* = 0,6

(Дискретизированное нормальное распределение–«G_i», Рекуррентный алгоритм–«$П\_stat_i$»)

Для сравнения распределения вероятностей, полученного с помощью рекуррентного алгоритма *ПП(i)*, и дискретизированного нормального распределения G_i воспользуемся расстоянием Колмогорова:

$$d = \max_{0 \le i < \infty} \left| \sum_{n=0}^{i} \left(P_{\text{рекуррентное}}(n) - P_{\text{нормальное}}(n) \right) \right|.$$

Результаты сравнения для различных значений параметра σ приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Расстояние Колмогорова для RQ-системы с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами при уменьшении σ

	σ = 0,1	σ = 0,05	σ = 0,01
λ = 0,4, μ = 1, *H* = 0,4	0,049	0,023	0,004
λ = 0,4, μ = 1, *H* = 0,8	0,022	0,01	0,0018
λ = 0,8, μ = 1, *H* = 0,4	0,010	0,005	0,0009
λ = 0,8, μ = 1, *H* = 0,8	0,002	0,01	0,0002

Приведенные в таблице значения показывают, что с уменьшением значения параметра σ и точность аппроксимации возрастает.

Следует отметить, что существование стационарного режима в рассматриваемой системе зависит от значения H. Для $H < 1$ стационарный режим существует для любых значений интенсивности поступления первичных заявок. Если выполняется соотношение $H = 1$, то для существования стационарного режима необходимо ограничить поток первичных заявок [17].

1.4.2 Численный анализ области применимости гауссовской аппроксимации

Благодаря полученным в главе 1.3 равенствам для определения асимптотической средней и дисперсии, можем вычислить асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите.

В таблице 3 представлен текст программы для вычисления асимптотического распределения вероятностей для RQ-системы с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами, реализованной в виде рабочих листов системы Mathcad.

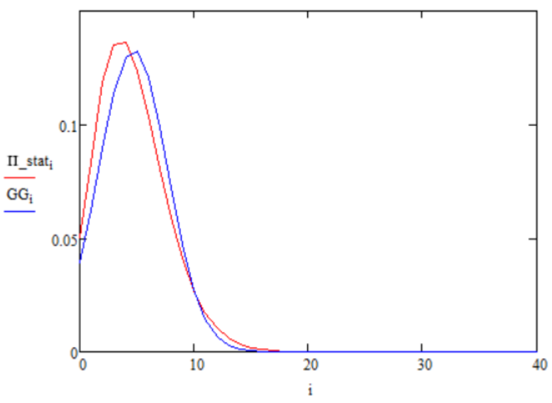
Таблица 3 – Блок вычисления асимптотического распределения вероятностей для RQ-системы с H настойчивыми заявками, конфликтами и отказами

Параметры потока	
$\lambda := 0.4$	– интенсивность потока заявок;
$\mu := 1$	– интенсивность обслуживания;
$\sigma := 0.1$	– интенсивность задержки заявки на орбите;
$H := 0.5$	– вероятность настойчивости;
$D := (1 + 2\cdot\rho)^2 - 4\cdot\rho\cdot(1 + H)$	– дискриминант квадратного уравнения относительно R_1
$R1 := \dfrac{1 + 2\cdot\rho - \sqrt{D}}{2(1 + H)}$	– стационарная вероятность того, что прибор занят;
$R0 := 1 - R1$	– стационарная вероятность того, что прибор свободен;
Асимптотическое среднее	
$\kappa1 := -\lambda + \dfrac{R1\cdot\mu}{(1 - 2R1)}$	
Асимптотическая дисперсия	
$\kappa2 := \dfrac{(\kappa1 + \lambda)\cdot g0 - \kappa1\cdot R0 - (\lambda + \mu + \kappa1)\cdot g1}{(R1 - R0)}$	

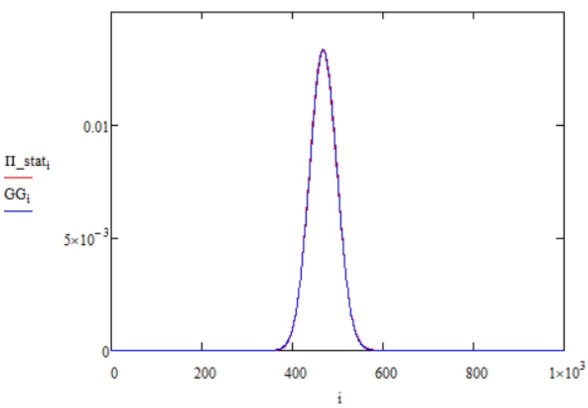
$$g0 := \frac{\frac{H\cdot\lambda}{1-H} + \frac{\kappa1\cdot R0}{(R1-R0)}}{\frac{2(\kappa1+\lambda)+\mu}{R1-R0} - \frac{\lambda}{R1\cdot(1-H)} + \frac{\lambda\cdot H-\mu-(1-H)\kappa1}{R1\cdot(1-H)}}$$ $$g1 := -g0$$	– коэффициенты разложения;
Асимптотическое распределение числа заявок на орбите	
$$L(i) := \text{pnorm}\left(i, \frac{\kappa_1}{\sigma}, \sqrt{\frac{\kappa_2}{\sigma}}\right)$$	– кумулятивное распределение вероятности для i числа заявок на орбите;
$$PP(i) := \frac{L(i+0.5)-L(i-0.5)}{1-L(-0.5)}$$	– дискретное распределение числа заявок на орбите;

Для сопровождения теоретических выводов, получены численные результаты, показывающие сходимость асимптотических результатов к предельным (полученным с использованием рекуррентного алгоритма), и определены границы области применения представленного приближения в зависимости от значений параметров системы.

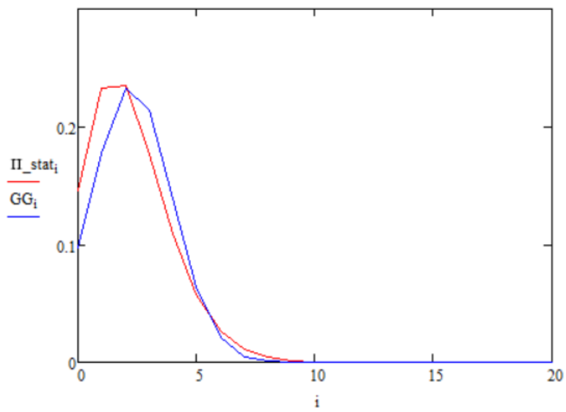
Была проведена серия экспериментов с уменьшением значений σ. Сравним асимптотические распределения вероятностей с распределением, полученным с помощью рекуррентного алгоритма. На рисунке 6 изображены графики распределения вероятностей числа заявок на орбите, в таблице 4 приведены значения расстояния Колмогорова между соответствующими распределениями.

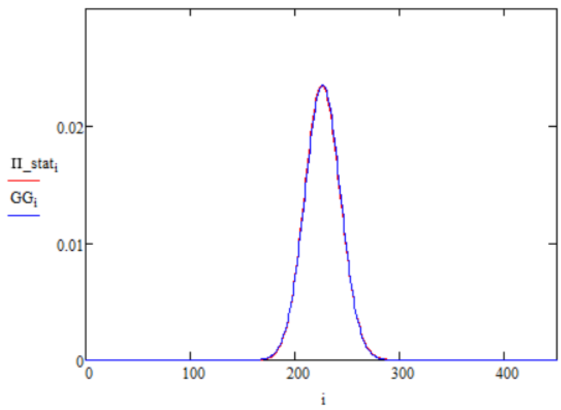


а) λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.1, H = 0.7



б) λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.001, H = 0.7





а) λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.1, H = 0.3　　　　б) λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.001, H = 0.3

Рисунок 6 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите

(Асимптотические результаты – «GG_i», Рекуррентные результаты – «$П\_stat_i$»)

Для определения области применимости гауссовской аппроксимации рассчитаем расстояние Колмогорова:

$$d = \max_{0 \le i < \infty} \left| \sum_{n=0}^{i} \left(P_{\text{допредельное}}(n) - P_{\text{асимптотическое}}(n) \right) \right|.$$

Таблица 4 – Расстояние Колмогорова d между допредельным и асимптотическим распределениями при уменьшении σ

H = 0.3				
σ	λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.1	λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.05	λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.01	λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.001
d	0,055	0,026	0,0049	0,0005
H = 0.7				
σ	λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.1	λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.05	λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.01	λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.001
d	0,03	0,013	0,0023	0,0002

Из таблицы 4 и рисунка 6 можем сделать вывод о том, что точность аппроксимации возрастает при уменьшении параметра σ (при уменьшении случайной задержки, которую осуществляет заявка на орбите) и при σ = 0.05 принимает значения меньше 5%.

2 RQ-система M/M/1 с коллизиями, H настойчивыми и нетерпеливыми заявками

2.1 Математическая модель системы совместного доступа с конфликтами, H настойчивыми и нетерпеливыми заявками

Теперь рассмотрим однолинейную RQ-систему с конфликтами, H настойчивыми и нетерпеливыми заявками, изображенную на рисунке 7.

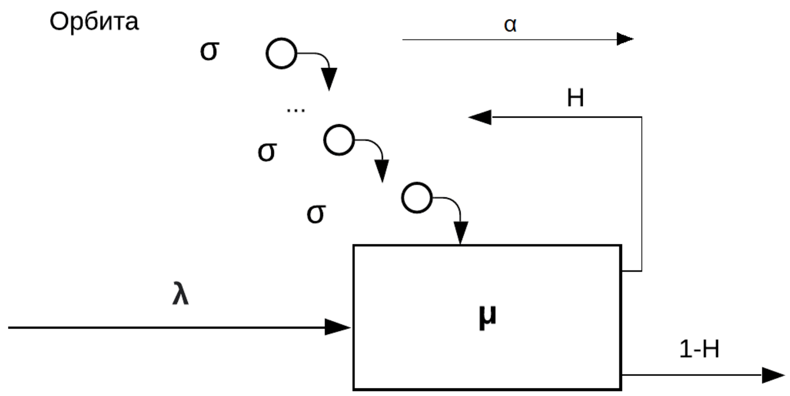


Рисунок 7 – RQ-система M/M/1 с конфликтами, H настойчивыми и нетерпеливыми заявками

Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его и начинает обслуживание, которое заканчивается успешно, если во время него другие заявки не поступали. Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки вступают в конфликт. При этом, будем считать, что заявка с прибора уходит на орбиту с вероятностью 1, заявка, вызвавшая конфликт, уходит на орбиту с вероятностью H, а с вероятностью 1-H покидает систему. С вероятностью α заявка с орбиты покидает систему.

На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Продолжительность обслуживания имеет экспоненциальную функцию распределения с параметром μ. Случайная задержка, которую осуществляет заявка на орбите в случае возникновения конфликта, экспоненциально распределена с параметром σ.

Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t, $k(t)$ будет определять состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, \text{если прибор свободен,}, \\ 1, \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

2.1.1 Система уравнений Колмогорова

Для распределения вероятностей $P_k\,(i,\ t)$ согласно теореме о полной вероятности можно составить равенства:

$i = 0$:

$$\begin{cases} P_0(0,t+\Delta t) = P_0(0,t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(0,t)\mu\Delta t + P_0(1,t)\alpha\Delta t + o(\Delta t), \\ P_1(0,t+\Delta t) = P_1(0,t)(1-\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t) + P_0(0,t)\lambda\Delta t + \\ +P_0(1,t)(1-\lambda\Delta t)\sigma\Delta t + P_1(1,t)\alpha\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

$i = 1$:

$$\begin{cases} P_0(1,t+\Delta t) = P_0(1,t)(1-\lambda\Delta t)(1-\sigma\Delta t)(1-\alpha\Delta t) + P_1(1,t)\mu\Delta t + \\ +P_1(0,t)\lambda\Delta t(1-H) + P_1(1,t)\sigma\Delta t(1-H) + P_0(2,t)2\alpha\Delta t + o(\Delta t), \\ P_1(1,t+\Delta t) = P_1(1,t)(1-\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t)(1-\sigma\Delta t)(1-\alpha\Delta t) + \\ +P_0(1,t)(1-\sigma\Delta t)\lambda\Delta t + P_0(2,t)(1-\lambda\Delta t)2\sigma\Delta t + P_1(2,t)2\alpha\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

$i > 2$:

$$\begin{cases} P_0(i,t+\Delta t) = P_0(i,t)(1-\lambda\Delta t)(1-i\sigma\Delta t)(1-i\alpha\Delta t) + P_1(i,t)\mu\Delta t + \\ +P_1(i-2,t)\lambda\Delta tH + P_1(i-1,t)\lambda\Delta t(1-H) + P_1(i-1,t)(i-1)\sigma\Delta tH + \\ +P_1(i,t)i\sigma\Delta t(1-H) + P_1(i+1,t) + P_0(i+1,t)(i+1)\alpha\Delta t + o(\Delta t), \\ P_1(i,t+\Delta t) = P_1(i,t)(1-\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t)(1-i\sigma\Delta t)(1-i\alpha\Delta t) + P_0(i,t)(1-i\sigma\Delta t)\lambda\Delta t + \\ +P_0(i+1,t)(1-\lambda\Delta t)(i+1)\sigma\Delta t + P_1(i+1,t)(i+1)\alpha\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

Откуда не трудно получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$i = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(0,t)}{\partial t} = -\lambda P_0(0,t) + \mu P_1(0,t) + \alpha P_0(1,t), \\ \frac{\partial P_1(0,t)}{\partial t} = -(\mu+\lambda)P_1(0,t) + \lambda P_0(0,t) + \alpha P_1(1,t) + \sigma P_0(1,t). \end{cases}$$

$i = 1$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(1,t)}{\partial t} = -(\lambda+\sigma+\alpha)P_0(1,t) + \mu P_1(1,t) + (1-H)\lambda P_1(0,t) + \\ +(1-H)\sigma P_1(1,t) + 2\alpha P_0(2,t), \\ \frac{\partial P_1(1,t)}{\partial t} = -(\mu+\lambda+\sigma+\alpha)P_1(1,t) + \lambda P_0(1,t) + 2\sigma P_0(2,t) + 2\alpha P_1(2,t). \end{cases}$$

$i > 2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma + i\alpha)P_0(i,t) + \mu P_1(i,t) + H\lambda P_1(i-2,t) + (1-H)\lambda P_1(i-1,t) + \\ \qquad + H(i-1)\sigma P_1(i-1,t) + (1-H)i\sigma P_1(i,t) + \alpha(i+1)P_0(i+1,t), \\ \dfrac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = -(\mu + \lambda + i\sigma + i\alpha)P_1(i,t) + \lambda P_0(i,t) + \sigma(i+1)P_0(i+1,t) \\ \qquad + \alpha(i+1)P_1(i+1,t). \end{cases}$$

В стационарном режиме $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(i,t) = \Pi_k(i)$:

i = 0:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda\Pi_0(0) + \mu\Pi_1(0) + \alpha\Pi_0(1), \\ 0 = -(\mu+\lambda)\Pi_1(0) + \lambda\Pi_0(0) + \sigma\Pi_0(1) + \alpha\Pi_1(1). \end{cases}$$

i = 1:

$$\begin{cases} 0 = -(\lambda + \sigma + \alpha)\mathit{\Pi}_0(1) + \mu\mathit{\Pi}_1(1) + (1-H)\lambda\mathit{\Pi}_1(0) + (1-H)\sigma\mathit{\Pi}_1(1) + 2\alpha\Pi_0(2), \\ 0 = -(\mu + \lambda + \sigma + \alpha)\Pi_1(1) + \lambda\Pi_0(1) + 2\sigma\Pi_0(2) + 2\alpha\Pi_1(2). \end{cases}$$

i > 2:

$$\begin{cases} 0 = -(\lambda + i\sigma + i\alpha)\Pi_0(i) + \mu\Pi_1(i) + \lambda H\mathit{\Pi}_1(i-2) + (1-H)\lambda\mathit{\Pi}_1(i-1) + \\ \qquad + H(i-1)\sigma\mathit{\Pi}_1(i-1) + (1-H)i\sigma\mathit{\Pi}_1(i) + \alpha(i+1)\Pi_0(i+1), \\ 0 = -(\mu + \lambda + i\sigma + i\alpha)\Pi_1(i) + \lambda\Pi_0(i) + \sigma(i+1)\Pi_0(i+1) + \\ \qquad + \alpha(i+1)\Pi_1(i+1). \end{cases} \tag{2.1.1}$$

2.2 Матричный метод нахождения распределения вероятностей

Стационарное распределение вероятностей можно найти численно с помощью матричного метода, который позволяет решить систему линейных алгебраических уравнений через обратную матрицу.

Для этого систему приведем к следующему виду:

$$\boldsymbol{Ax = B}, \tag{2.1.2}$$

где **x** – вектор-столбец стационарных вероятностей $\Pi_l(i)$ = при i = 0,1, …, N, l = 0,1 размерности 2(N+1):

$$\boldsymbol{x} = \big(P_0(0), P_1(0), P_0(1), P_1(1), \dots, P_0(N), P_1(N)\big).$$

Матрица коэффициентов **A** размерности ((2N + 1) + 1) × 2(N + 1) определяется следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{A}_{01} & \dots & \mathbf{A}_{0\mathrm{N}} \\ \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1\mathrm{N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{\mathrm{N}0} & \mathbf{A}_{\mathrm{N}1} & \dots & \mathbf{A}_{\mathrm{NN}} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

B – вектор-столбец свободных членов системы уравнений размерности $((2N + 1) + 1)$, которая содержит свободные коэффициенты $\mathbf{B}_i = 0$ для $i = 0,1,\dots,2(N + 1)$, и $\mathbf{B}_{2(N+1)+1} = 1$:

$$\mathbf{B} = (0,0,0,...0,1).$$

Так как матрица **A** прямоугольная, то для нахождения решения умножим обе части уравнения (2.1.2) на транспонированную матрицу **A**:

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}.$$

Тогда $\Pi_k(i)$ можно будет найти через обратную матрицу:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

Очевидно, что полученное решение зависит от значения N. Остановка увеличения значения N осуществляется либо по условию нормировки, либо, когда $\Pi_k(i) = 0$.

Теперь сложим значения вероятностей $\Pi_k(i)$ по k и получим стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите для $\lambda = 0.4$, $\sigma = 0.1$, $\mu = 1$, H1 = 0.4, H2 = 0.8, которое изображено на рисунке 8.

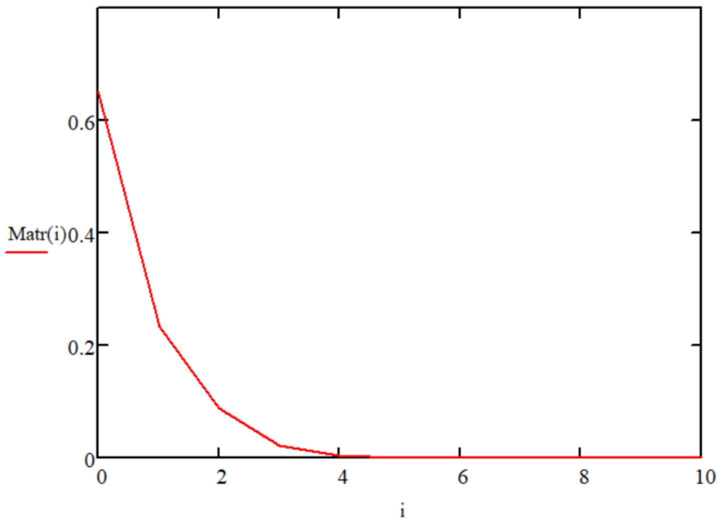
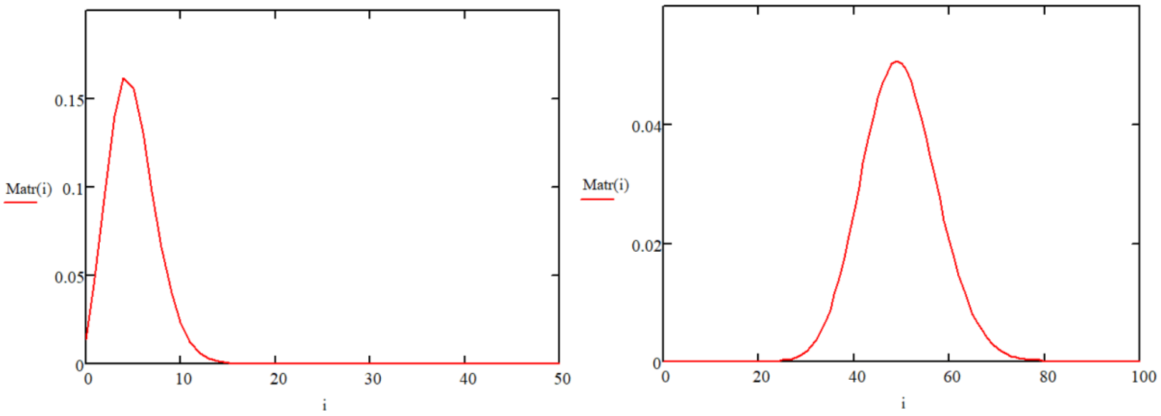


Рисунок 8 – График распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов для $\lambda = 0.4$, $\sigma = 0.1$, $\mu = 1$, H = 0.4, $\alpha = 0.2$

Для определения влияния параметров на распределение вероятностей, проведем серию экспериментов с уменьшением значений σ. На рисунках 9, 10 изображены графики распределения вероятностей числа заявок на орбите.

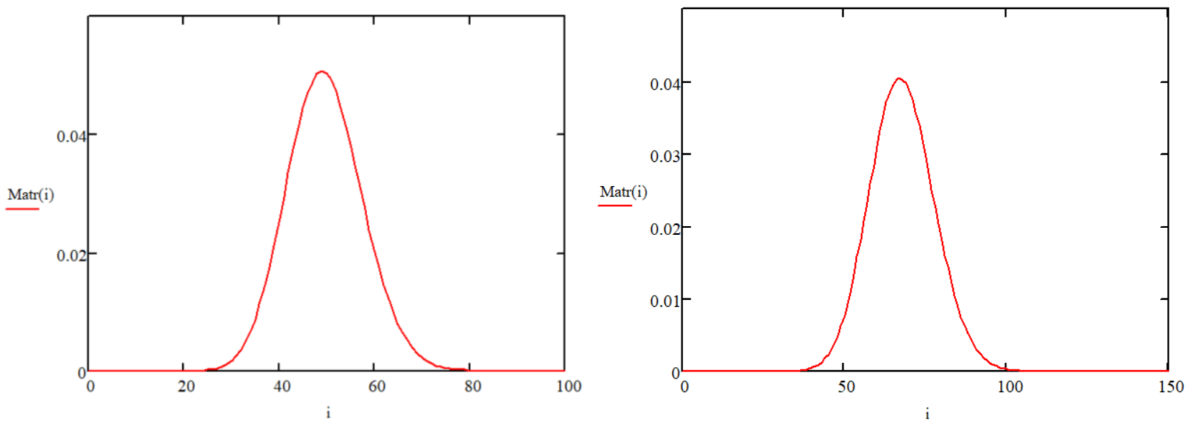


А) λ = 0.4, σ = 0.01, μ = 1, α = 0.02 Б) λ = 0.4, σ = 0.001, μ = 1, α = 0.002

Рисунок 9 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите для RQ-системы с конфликтами, ненастойчивыми и нетерпеливыми заявками, при H1 = 0.4.

Из полученных результатов следует, что при уменьшении случайной задержки, которую осуществляет заявка на орбите в случае возникновения конфликта, распределение числа заявок на орбите имеет вид гауссовского.

На рисунке 10 видно, что при увеличении параметров вероятности отказа H среднее число заявок на орбите также увеличивается.



А) H = 0.4 Б) H = 0.8

Рисунок 10 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите для RQ-системы с конфликтами, ненастойчивыми и нетерпеливыми заявками, при λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.001, α = 0.002

Было получено численное решение системы (2.1.1) при помощи математического пакета Mathcad, алгоритм представлен в главе 2.4.1.

2.3 Асимптотический анализ

Введем частичные характеристические функции:

$$h_k(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui}\Pi_k(i), \qquad k = \{0,1\},$$

$$-j\frac{\partial h_k(u)}{\partial u} = \sum_{i=0}^{\infty} ie^{jui}\Pi_k(i),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Тогда из системы (2.1.1) получим систему двух уравнений относительно функций $h_l(u)$:

$$\begin{cases} -\lambda h_0(u) + j\sigma\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} + j\alpha\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} + \mu h_1(u) + \lambda He^{2ju}h_1(u) + \lambda(1-H)e^{ju}h_1(u) - \\ \quad -j\sigma He^{ju}\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} - j\sigma(1-H)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} - j\alpha e^{-ju}\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} = 0, \\ -\mu h_1(u) - \lambda h_1(u) + j\sigma\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} + j\alpha\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} + \lambda h_0(u) - j\sigma e^{-ju}\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} - \\ \quad -j\alpha e^{-ju}\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Умножив второе уравнение системы (2.3.1) на e^{ju} и суммируя уравнения системы, получим дополнительное уравнение:

$$(e^{ju}-1)\lambda h_0(u) + \{-\mu(e^{ju}-1) + \lambda He^{ju}(e^{ju}-1)\}\,h_1(u) - j\alpha e^{-ju}(e^{ju}-1)\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} -$$
$$-j\sigma\left(1-e^{ju}\right)(H-1)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} + j\alpha(e^{ju}-1)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0. \tag{2.3.2}$$

Разделим уравнение (2.3.2) на $(e^{ju}-1)$:

$$\lambda h_0(u) + \left(\lambda He^{ju} - \mu\right)h_1(u) - j\alpha e^{-ju}\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} + j\sigma(1-H)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} + j\alpha\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0.$$

Получим систему:

$$\begin{cases} -\lambda h_0(u) + j\sigma\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} + j\alpha\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} + \mu h_1(u) + \lambda He^{2ju}h_1(u) + \lambda(1-H)e^{ju}h_1(u) - \\ \quad -j\sigma He^{ju}\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} - j\sigma(1-H)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} - j\alpha e^{-ju}\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} = 0, \\ -\mu h_1(u) - \lambda h_1(u) + j\sigma\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} + j\alpha\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} + \lambda h_0(u) - j\sigma e^{-ju}\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} - \\ \quad -j\alpha e^{-ju}\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \\ \lambda h_0(u) + \left(\lambda He^{ju} - \mu\right)h_1(u) - j\alpha e^{-ju}\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} + j\sigma(1-H)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} + \\ \quad +j\alpha\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

которую будем решать методом асимптотического анализа в предельном условии σ → 0.

2.3.1 Асимптотика первого порядка

Для нахождения асимптотики первого порядка в системе (2.3.3) выполним следующие замены:

$$\sigma = \varepsilon, \alpha = \varepsilon\gamma, u = \ \varepsilon w, h_k(u) = f_k(\varepsilon, w).$$

Тогда система уравнений (2.3.3) примет вид:

$$\begin{cases} -\lambda f_0(\varepsilon, w) + \left\{\mu + \lambda\left((1-H)e^{j\varepsilon w} + He^{2j\varepsilon w}\right)\right) f_1(\varepsilon, w) + j\frac{\partial f_0(\varepsilon, w)}{\partial w} - \\ -j\left(1 - H\left(1 - e^{j\varepsilon w}\right)\right)\frac{\partial f_1(\varepsilon, w)}{\partial w} + j(1 - e^{-j\varepsilon w})\gamma\frac{\partial f_0(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0, \\ \lambda f_0(\varepsilon, w) - (\lambda + \mu) f_1(\varepsilon, w) - je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial f_0(\varepsilon, w)}{\partial w} + j\frac{\partial f_1(\varepsilon, w)}{\partial w} + j(1 - e^{-j\varepsilon w})\gamma\frac{\partial f_1(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0, \\ \lambda f_0(\varepsilon, w) + \left(\lambda He^{j\varepsilon w} - \mu\right) f_1(\varepsilon, w) + j(1-H)\frac{\partial f_1(\varepsilon, w)}{\partial w} - je^{-j\varepsilon w}\gamma\frac{\partial f_0(\varepsilon, w)}{\partial w} + j\gamma\frac{\partial f_1(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0. \end{cases}$$

Решение для $f_k(\varepsilon, w)$ будем искать в виде:

$$f_k(\varepsilon, w) = r_k\Phi(\mathrm{w}) + \mathrm{o}(\varepsilon)$$

где $r_0 + r_1 = 1,\ r_k = h_k(0) = f_k(0)$.

Подставляя, получаем систему дифференциальных уравнений относительно функции Φ(w):

$$\begin{cases} -\lambda r_0 \Phi(w) + \left\{\mu + \lambda\left((1-H) + H\right)\right) r_1 \Phi(w) + jr_0\frac{\partial \Phi(w)}{\partial w} - jr_1\frac{\partial \Phi(w)}{\partial w} = 0, \\ \lambda r_0 \Phi(w) - (\lambda + \mu) r_1 \Phi(w) - jr_0\frac{\partial \Phi(w)}{\partial w} + jr_1\frac{\partial \Phi(w)}{\partial w} = 0, \\ \lambda r_0 \Phi(w) + (\lambda H - \mu) r_1 \Phi(w) + j(1-H) r_1\frac{\partial \Phi(w)}{\partial w} - j\gamma r_0\frac{\partial \Phi(w)}{\partial w} + j\gamma r_1\frac{\partial \Phi(w)}{\partial w} = 0. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Из первого уравнения системы (2.3.4) получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{\lambda r_0 - (\mu + \lambda) r_1}{r_0 - r_1} = j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}.$$

Из второго уравнения системы (2.3.4) получаем:

$$\frac{\lambda r_0 - (\mu + \lambda) r_1}{r_0 - (1+\gamma) r_1} = j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}.$$

Из третьего уравнения системы (2.3.4) получаем:

$$-\frac{\lambda r_0-(\lambda H-\mu)r_1}{\big((1-H)+\gamma\big)r_1-\gamma r_0}=j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}.$$

Отсюда, добавив условие нормировки, получаем систему уравнений для нахождения r_0 ,r_1:

$$\begin{cases}-\dfrac{\lambda r_0-(\lambda H-\mu)r_1}{\big((1-H)+\gamma\big)r_1-\gamma r_0}=\dfrac{\lambda r_0-(\mu+\lambda)r_1}{r_0-r_1},\\ r_0+r_1=1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{\lambda(1-r_1)+(\lambda H-\mu)r_1}{\big((1-H)+\gamma\big)r_1-\gamma r_0}=\dfrac{\lambda(1-r_1)-(\mu+\lambda)r_1}{(r_0-r_1)},\\ r_0+r_1=1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{\lambda-\lambda r_1+\lambda H r_1-\mu r_1}{\big((1-H)+\gamma\big)r_1-\gamma r_0}=\dfrac{\lambda-\lambda r_1-\mu r_1-\lambda r_1}{(r_0-r_1)},\\ r_0+r_1=1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{\lambda(1-r_1)-(\lambda H-\mu)r_1}{(1-H+2\gamma)r_1-\gamma}=\dfrac{\lambda r_0-(\mu+\lambda)r_1}{(r_0-r_1)}=-\kappa_1,\\ r_0+r_1=1,\end{cases}$$

$$-\frac{\lambda(1-r_1)-(\lambda H-\mu)r_1}{(1-H+2\gamma)r_1-\gamma}=\lambda-\frac{\mu r_1}{(1-2r_1)}=-\kappa_1,$$

$$-\kappa_1=j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)},$$

$$j\kappa_1=\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)},$$

$$\Phi(w)=e^{j\kappa_1 t},$$

где $\kappa=\lambda-\frac{\mu r_1}{(1-2r_1)}$.

Вернемся к исходной характеристической функции с помощью обратных изменений и поставим ε = σ. Тогда

$$h_k(u)=f_k(\varepsilon,w)=f_k(w)+o(\varepsilon)\approx f_k(w)=f_k\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)=r_k e^{\frac{\kappa_1}{\sigma}ju}.$$

Принимая во внимание условие нормировки $r_0 + r_1 = 1$, получим, что асимптотическая характеристическая функция первого порядка имеет вид:

$$h^{(1)}(u)=h_0(u)+h_1(u)=e^{\frac{\kappa_1}{\sigma}ju}.$$

Полученная величина κ_1 определяет асимптотическое среднее значение κ_1/σ числа заявок на орбите в системе совместного доступа с ненастойчивыми заявками, конфликтами и отказами. Для построения гауссовской аппроксимации распределения вероятностей числа *i(t)* заявок на орбите рассмотрим асимптотику второго порядка.

2.3.2 Асимптотика второго порядка

Выполнив в системе (2.3.3) замены

$$h_k(u) = e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} h_k{}^{(2)}(u), \tag{2.3.5}$$

Получим:

$$\begin{cases} -(\lambda+\kappa_1)h_0{}^{(2)}(u) + \left(\mu + \lambda\left((1-H)e^{ju} + He^{2ju}\right)\right) + \left(\left((1-H)+He^{ju}\right)\kappa_1\right)h_1{}^{(2)}(u) + \\ \quad +j\sigma\frac{\partial h_0{}^{(2)}(u)}{\partial u} + j\alpha(1-e^{-ju})\frac{\partial h_0{}^{(2)}(u)}{\partial u} - j\sigma\left((1-H)+He^{ju}\right)\frac{\partial h_1{}^{(2)}(u)}{\partial u} = 0, \\ \left(\lambda + e^{ju}\kappa_1\right)h_0{}^{(2)}(u) - (\lambda+\mu+\kappa_1)h_1{}^{(2)}(u) - je^{-ju}\sigma\frac{\partial h_0{}^{(2)}(u)}{\partial u} + j\sigma\frac{\partial h_1{}^{(2)}(u)}{\partial u} + \\ \quad +j\alpha(1-e^{-ju})\frac{\partial h_1{}^{(2)}(u)}{\partial u} = 0, \\ \lambda h_0{}^{(2)}(u) + \left(\lambda He^{ju} - \mu - (1-H)\kappa_1\right)h_1{}^{(2)}(u) + j\sigma(1-H)\frac{\partial h_1{}^{(2)}(u)}{\partial u} - \\ \quad -j\alpha e^{-ju}\frac{\partial h_0{}^{(2)}(u)}{\partial u} + j\alpha\frac{\partial h_1{}^{(2)}(u)}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Сделаем замены

$$\sigma = \varepsilon^2, \alpha = \varepsilon^2\gamma, u = \varepsilon w, h_k{}^{(2)}(u) = f_k{}^{(2)}(\varepsilon, w),$$

тогда

$$\begin{cases} -(\lambda+\kappa_1)f_0{}^{(2)}(\varepsilon,w) + (\mu + \lambda\left((1-H)e^{j\varepsilon w} + He^{2j\varepsilon w}\right)) + \\ \quad +\left(\left((1-H)+He^{j\varepsilon w}\right)\kappa_1\right)f_1{}^{(2)}(\varepsilon,w) + j\varepsilon\frac{\partial f_0{}^{(2)}(\varepsilon,w)}{\partial w} - \\ \quad -j\varepsilon\left((1-H)+He^{j\varepsilon w}\right)\frac{\partial f_1{}^{(2)}(\varepsilon,w)}{\partial w} + j\varepsilon\gamma(1-e^{-j\varepsilon w})\frac{\partial f_0{}^{(2)}(\varepsilon,w)}{\partial w} = 0, \\ \left(\lambda + e^{j\varepsilon w}\kappa_1\right)f_0{}^{(2)}(\varepsilon,w) - (\lambda+\mu+\kappa_1)f_1{}^{(2)}(\varepsilon,w) - je^{-j\varepsilon w}\varepsilon\frac{\partial f_0{}^{(2)}(u)}{\partial w} + \\ \quad +j\varepsilon\frac{\partial f_1{}^{(2)}(u)}{\partial w} + j\varepsilon\gamma\left(1-e^{-j\varepsilon w}\right)\frac{\partial f_1{}^{(2)}(\varepsilon,w)}{\partial w} = 0, \\ \lambda f_0{}^{(2)}(\varepsilon,w) + \left(\lambda He^{j\varepsilon w} - \mu - (1-H)\kappa_1\right)f_1{}^{(2)}(\varepsilon,w) + j\varepsilon(1-H)\frac{\partial f_1{}^{(2)}(\varepsilon,w)}{\partial w} - \\ \quad -je^{-j\varepsilon w}\varepsilon\gamma\frac{\partial f_0{}^{(2)}(u)}{\partial w} + j\varepsilon\gamma\frac{\partial f_1{}^{(2)}(u)}{\partial w} = 0. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

В систему (2.3.6) подставим разложение

$$f_k^{(2)}(\varepsilon, w) = (r_k + jw\varepsilon g_k)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) + O(\varepsilon^2),$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\kappa_1)(r_0+jw\varepsilon g_0)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) + \left(\mu + \lambda\left((1-H)e^{j\varepsilon w} + He^{2j\varepsilon w}\right)\right) + \\ + \left((1-H) + He^{j\varepsilon w}\right)\kappa_1)(r_1 + jw\varepsilon g_1)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) + \\ + j\varepsilon\left((r_0 + jw\varepsilon g_0)\frac{\partial \Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + j\varepsilon g_0 \Phi^{(2)}(\mathrm{w})\right) - \\ - j\varepsilon\left((1-H) + He^{j\varepsilon w}\right)\left((r_1 + jw\varepsilon g_1)\frac{\partial \Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + j\varepsilon g_1 \Phi^{(2)}(\mathrm{w})\right) + \\ + j\varepsilon\gamma(1 - e^{-j\varepsilon w})\left((r_0 + jw\varepsilon g_0)\frac{\partial \Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + j\varepsilon g_0 \Phi^{(2)}(\mathrm{w})\right) = 0, \\ \left(\lambda + e^{j\varepsilon w}\kappa_1\right)(r_0 + jw\varepsilon g_0)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) - (\lambda + \mu + \kappa_1)(r_1 + jw\varepsilon g_1)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) - \\ - je^{-j\varepsilon w}\varepsilon\left((r_0 + jw\varepsilon g_0)\frac{\partial \Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + j\varepsilon g_0 \Phi^{(2)}(\mathrm{w})\right) + \\ + j\varepsilon\left((r_1 + jw\varepsilon g_1)\frac{\partial \Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + j\varepsilon g_1 \Phi^{(2)}(\mathrm{w})\right) + j\varepsilon\gamma\left(1 - e^{-j\varepsilon w}\right) \cdot \\ \cdot \left((r_1 + jw\varepsilon g_1)\frac{\partial \Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + j\varepsilon g_1 \Phi^{(2)}(\mathrm{w})\right) = 0, \\ \lambda(r_0 + jw\varepsilon g_0)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) + \left(\lambda He^{j\varepsilon w} - \mu - (1-H)\kappa_1\right)(r_1 + jw\varepsilon g_1)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) + \\ + j\varepsilon(1-H)\left((r_1 + jw\varepsilon g_1)\frac{\partial \Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + j\varepsilon g_1 \Phi^{(2)}(\mathrm{w})\right) - \\ - je^{-j\varepsilon w}\varepsilon\gamma\left((r_0 + jw\varepsilon g_0)\frac{\partial \Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + j\varepsilon g_0 \Phi^{(2)}(\mathrm{w})\right) + \\ + j\varepsilon\gamma\left((r_1 + jw\varepsilon g_1)\frac{\partial \Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + j\varepsilon g_1 \Phi^{(2)}(\mathrm{w})\right) = 0. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Поделим систему (2.3.7) на $\Phi^{(2)}(\mathrm{w})$ и соберем слагаемые, при ε^1:

$$\begin{cases} -(\lambda+\kappa_1)g_0 + (\lambda(1+H) + H\kappa_1)R_1 + (\mu + \lambda + \kappa_1)g_1 = (R_1 - R_0)\frac{\partial \Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}, \\ (\lambda + \kappa_1)g_0 - \kappa_1 R_0 - (\lambda + \mu + \kappa_1)g_1 = -(R_1 - R_0)\frac{\partial \Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\mathrm{w}\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}, \\ \lambda g_0 + (\lambda H - \mu - (1-H)\kappa_1)g_1 + \lambda H R_1 = \left(\left((1-H) + \gamma\right)R_1 - \gamma R_0\right)\frac{\partial \Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\mathrm{w}\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Из (2.3.8) следует, что

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{w\Phi^{(2)}(w)\partial w} = const = \kappa_2.$$

То есть

$$\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) = e^{\kappa_2 \frac{(jw)^2}{2}}.$$

Добавим дополнительное условие $g_0 + g_1 = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{(\lambda+\kappa_1)g_0-\kappa_1 R_0-(\lambda+\mu+\kappa_1)g_1}{(R_1-R_0)}=-\kappa_2 \\ \dfrac{\lambda g_0+(\lambda H-\mu-(1-H)\kappa_1)g_1+\lambda H R_1}{\left(\left((1-H)+\gamma\right)R_1-\gamma R_0\right)}=-\kappa_2 \\ g_0+g_1=1 \end{cases}$$

Откуда имеем

$$\kappa_2=\frac{(\lambda+\kappa_1)g_0-\kappa_1 R_0-(\lambda+\mu+\kappa_1)g_1}{(R_1-R_0)},$$

в которой g_0, g_1 являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{(\lambda+\kappa_1)g_0-\kappa_1 R_0-(\lambda+\mu+\kappa_1)g_1}{(R_1-R_0)}=\dfrac{\lambda g_0+(\lambda H-\mu-(1-H)\kappa_1)g_1+\lambda H R_1}{\left(\left((1-H)+\gamma\right)R_1-\gamma R_0\right)}, \\ g_0+g_1=0. \end{cases}$$

Делая обратные замены, получаем

$$h_k{}^{(2)}(u)=f_k{}^{(2)}(\varepsilon,w)=\left(R_k+jw\varepsilon g_k\right)e^{\kappa_2\frac{(jw)^2}{2}}+o(\varepsilon^2)\approx R_k e^{\frac{\kappa_2}{\sigma}\frac{(ju)^2}{2}},$$

затем, выражения (2.3.5), можно записать как

$$h_k{}^{(2)}(u)=e^{\frac{\kappa_1}{\sigma}ju}h_k{}^{(2)}(u)\approx R_k e^{\frac{\kappa_1}{\sigma}ju+\frac{\kappa_2}{\sigma}\frac{(ju)^2}{2}}.$$

Для асимптотической характеристической функции числа заявок на орбите с учетом (2.3.5) имеем

$$h(u)=e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}h^{(2)}(u)=e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}e^{\frac{j^2u^2\kappa_2}{2\sigma}}=e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}+\frac{(ju)^2\kappa_2}{2\sigma}}.$$

Таким образом, найденная асимптотика второго порядка показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа *i(t)* заявок на орбите в рассматриваемой системе является гауссовским с асимптотическим средним κ_1/σ и дисперсией κ_2/σ. Вычисление асимптотического распределения вероятностей числа заявок на орбите при помощи математического пакета Mathcad представлено в главе 2.4.2.

2.4 Нахождение численных результатов распределения вероятностей числа заявок на орбите

В данной главе представлено описание численного анализа вероятностно-временных характеристик системы совместного доступа с конфликтами, H настойчивыми и нетерпеливыми заявками.

Программное обеспечение для моделирования данной СМО на базе математической модели реализовано в виде рабочих листов системы Mathcad.

2.4.1 Алгоритм нахождения распределения вероятностей с помощью матричного метода

В таблице 5 представлен текст программы для нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите с помощью матричного метода, реализованной в виде рабочих листов системы Mathcad.

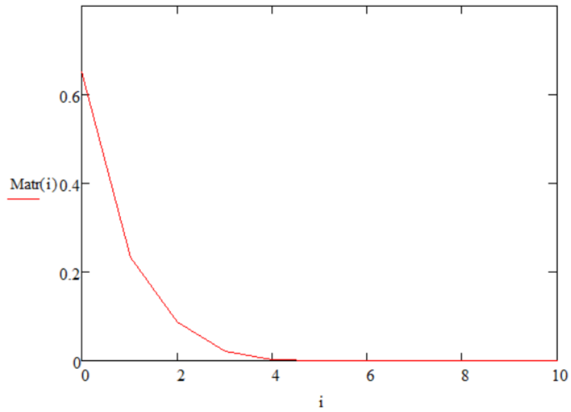
Таблица 5 – Блок вычисления распределения вероятностей числа заявок на орбите с помощью матричного метода

Параметры потока	
$n := 100$ $i := 0..n$	– количество заявок на орбите, которое меняется от 0 до некоторого значения n;
$\lambda := 0.4$	– интенсивность потока заявок;
$\mu := 1$	– интенсивность обслуживания;
$\sigma := 0.1$	– интенсивность задержки заявки на орбите;
$H := 0.4$	– вероятность ухода заявки на орбиту;
$\gamma := 2$ $\alpha := \sigma \cdot \gamma = 0.02$	– вероятность ухода из системы заявки с орбиты;
Нахождение распределения числа заявок на орбите	

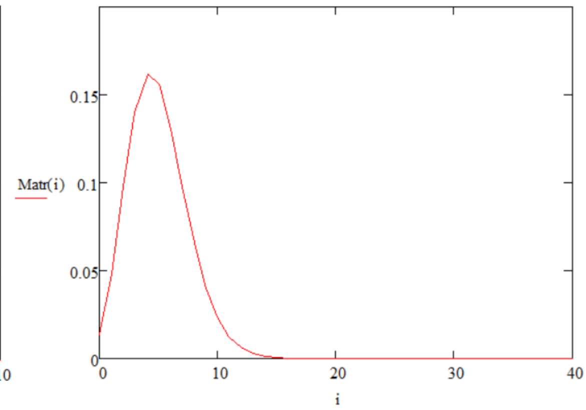
$A1 :=$ for $i \in 0..2\cdot n$ for $k \in 0..2n$ $A1_{i,k} \leftarrow 0$ $A1_{0,0} \leftarrow -\lambda$ $A1_{1,0} \leftarrow \mu$ $A1_{0,1} \leftarrow \lambda$ $A1_{1,1} \leftarrow -(\lambda + \mu)$ $A1_{2,0} \leftarrow \alpha$ $A1_{2,1} \leftarrow \sigma$ $A1_{3,1} \leftarrow \alpha$	– коэффициенты матрицы **A** для i = 0;
for $k \in 1$ $A1_{2k-1,2\cdot k} \leftarrow \lambda\cdot(1-H)$ $A1_{2\cdot k,2\cdot k} \leftarrow -(\lambda + \sigma + \alpha)$ $A1_{2\cdot k+1,2\cdot k} \leftarrow \mu + (1-H)\sigma$ $A1_{2\cdot k+2,2\cdot k} \leftarrow 2\alpha$ $A1_{2\cdot k,2\cdot k+1} \leftarrow \lambda$ $A1_{2\cdot k+1,2\cdot k+1} \leftarrow -(\lambda + \mu + \sigma + \alpha)$ $A1_{2\cdot k+2,2\cdot k+1} \leftarrow 2\sigma$ $A1_{2k+3,2\cdot k+1} \leftarrow 2\alpha$	– коэффициенты матрицы **A** для i = 1;
for $k \in 2..n-1$ $A1_{(2\cdot k-2)-1,2k} \leftarrow \lambda\cdot H$ $A1_{2\cdot k-1,2\cdot k} \leftarrow (1-H)\cdot\lambda + H\cdot(k-1)\sigma$ $A1_{2\cdot k,2\cdot k} \leftarrow -(\lambda + k\cdot\sigma + k\cdot\alpha)$ $A1_{2\cdot k+1,2\cdot k} \leftarrow \mu + (1-H)\cdot k\cdot\sigma$ $A1_{2\cdot k+2,2\cdot k} \leftarrow \alpha\cdot(k+1)$ $A1_{2k,2\cdot k+1} \leftarrow \lambda$ $A1_{2\cdot k+1,2\cdot k+1} \leftarrow -(\mu + \lambda + k\cdot\sigma + k\cdot\alpha)$ $A1_{2\cdot k+2,2\cdot k+1} \leftarrow (k+1)\cdot\sigma$ $A1_{2\cdot k+3,2\cdot k+1} \leftarrow (k+1)\cdot\alpha$	– коэффициенты матрицы **A** для i = 2, 3, …, n-1;
$A1_{2n,2n} \leftarrow -(\lambda + n\cdot\sigma + n\cdot\alpha)$ $A1_{2n-1,2n} \leftarrow (1-H)\lambda + H\cdot(n-1)\sigma$ $A1_{2n-3,2n} \leftarrow \lambda\cdot H$ $A1_{2n+1,2n} \leftarrow \mu + (1-H)\cdot n\cdot\sigma$ $A1_{2n,2\cdot n+1} \leftarrow \lambda$ $A1_{2n+1,2\cdot n+1} \leftarrow -(\mu + \lambda + n\cdot\sigma + n\cdot\alpha)$ for $i \in 0..2\cdot n+1$ $A1_{i,2\cdot n+2} \leftarrow 1$ $A1$	– коэффициенты матрицы **A** для i = n;

$v := \left\lvert \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2 \cdot n+1 \\ \quad v_i \leftarrow 0 \\ v_{2 \cdot n+2} \leftarrow 1 \\ v \end{array} \right.$	– формируем вектор-столбец **B**
$Pstat21 := v^T \cdot A1^T \cdot \left(A1 \cdot A1^T\right)^{-1}$	– находим вектор-столбец **X** путем решения алгебраических уравнений через обратную матрицу

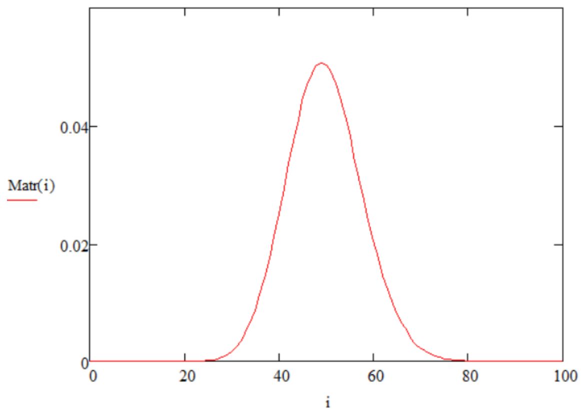
Определим распределения вероятностей числа заявок на орбите, при σ = {0.1, 0.01, 0.001}:



А) λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.1, H = 0.4, α = 0.2



Б) λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.01, H = 0.4, α = 0.02



В) λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.001, H = 0.4, α = 0.002

Рисунок 11 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите для RQ-системы с конфликтами, ненастойчивыми и нетерпеливыми заявками

Из полученных результатов следует, что при уменьшении случайной задержки, которую осуществляет заявка на орбите в случае возникновения конфликта, распределение числа заявок на орбите приближается к нормальному, рисунок 11 демонстрирует это.

2.4.2 Численный анализ асимптотического распределения вероятностей числа заявок на орбите

Благодаря полученным в главе 2.3 равенствам для определения асимптотической средней и дисперсии, можем вычислить асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите.

В таблице 6 представлен текст программы для вычисления асимптотического распределения вероятностей для RQ-системы с конфликтами, H настойчивыми и нетерпеливыми заявками, реализованной в виде рабочих листов системы Mathcad.

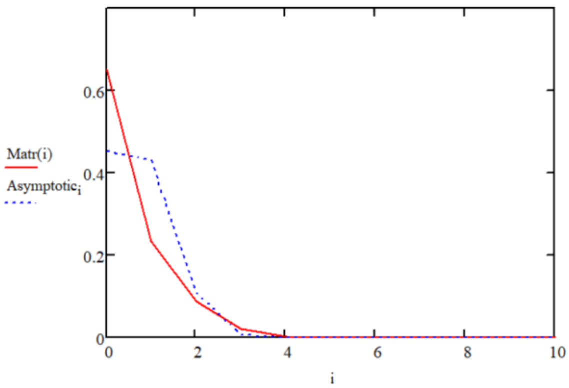
Таблица 6 – Блок вычисления асимптотического распределения вероятностей для RQ-системы с конфликтами, H настойчивыми и нетерпеливыми заявками

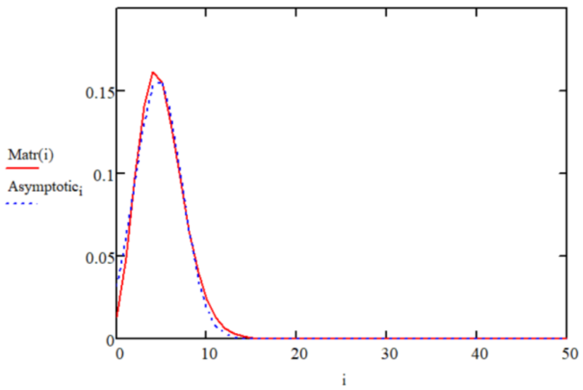
Параметры потока	
$n := 100$ $i := 0..n$	– количество заявок на орбите, которое меняется от 0 до некоторого значения n;
$\lambda := 0.4$	– интенсивность потока заявок;
$\mu := 1$	– интенсивность обслуживания;
$\sigma := 0.1$	– интенсивность задержки заявки на орбите;
$H := 0.4$	– вероятность ухода заявки на орбиту;
$\gamma := 2$ $\alpha := \sigma\cdot\gamma = 0.02$	– вероятность ухода из системы заявки с орбиты;
Given $-\dfrac{\lambda - \lambda\cdot r1 + \lambda\cdot H\cdot r1 - \mu\cdot r1}{(1 - H - \gamma)\cdot r1 - \gamma\cdot r0} = \dfrac{\lambda - \lambda\cdot r1 - \mu\cdot r1 - \lambda\cdot r1}{r0 - r1}$ $r1 + r0 = 1$	– поиск стационарных вероятностей состояний прибора;
Асимптотическое среднее	
$\kappa1 := \lambda - \dfrac{\mu\cdot r1}{1 - 2r1}$	
Асимптотическая дисперсия	
$\kappa2 := \dfrac{(\lambda + \kappa1)\cdot g0 - \kappa1\cdot r0 - (\lambda + \mu + \kappa1)\cdot g1}{r0 - r1}$	
Given $\dfrac{(\lambda + \kappa1)\cdot g0 - \kappa1\cdot r0 - (\lambda + \mu + \kappa1)\cdot g1}{r1 - r0} = \dfrac{\lambda\cdot g0 + \left[\lambda\cdot H - \mu - (1 - H)\cdot\kappa1\right]\cdot g1 + \lambda\cdot H\cdot r1}{(1 - H - 2\gamma)\cdot r1 - \gamma}$ $g1 + g0 = 1$	
– коэффициенты разложения;	
Асимптотическое распределение числа заявок на орбите	

$L(i) := \mathrm{pnorm}\left(i, \frac{\kappa_1}{\sigma}, \sqrt{\frac{\kappa_2}{\sigma}}\right)$	– кумулятивное распределение вероятности для i числа заявок на орбите;
$PP(i) := \frac{L(i+0.5) - L(i-0.5)}{1 - L(-0.5)}$	– дискретное распределение числа заявок на орбите;

Получены численные результаты, показывающие сходимость асимптотических результатов к предельным (полученным с помощью матричного метода), и определены границы области применения представленного приближения в зависимости от значений параметров системы.

Была проведена серия экспериментов с уменьшением значений σ. Сравним асимптотические распределения вероятностей с распределением, полученным с помощью матричного метода. На рисунке 12 изображены графики распределения вероятностей числа заявок на орбите, в таблице 7 приведены значения расстояния Колмогорова между соответствующими распределениями.





а) λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.1, H = 0.4, α = 0.2 б) λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.01, H = 0.4, α = 0.02

Рисунок 12 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите

(Асимптотические результаты – «Asymptotic$_i$», Матричный метод – «Matr(i)»)

Для определения области применимости гауссовской аппроксимации рассчитаем расстояние Колмогорова:

$$d = \max_{0 \le i < \infty} \left| \sum_{n=0}^{i} \left(P_{\text{матричный}}(n) - P_{\text{асимптотическое}}(n) \right) \right|.$$

Таблица 7 – Расстояние Колмогорова d между допредельным и асимптотическим распределениями при уменьшении σ

H = 0.4				
σ	λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.1, α = 0.2	λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.05, α = 0.01	λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.01, α = 0.02	λ = 0.4, μ = 1, σ = 0.001, α = 0.002
d	0.199	0.146	0.019	0.012

Из таблицы 7 и рисунка 12 можем сделать вывод о том, что точность аппроксимации возрастает при уменьшении параметра σ (при уменьшении случайной задержки, которую осуществляет заявка на орбите) и при $\sigma = 0.01$ принимает значения меньше 5%.

3 RQ-система M/M/1 с коллизиями и H_1, H_2 настойчивыми заявками и отказами

3.1 Функциональная модель системы совместного доступа с коллизиями и H_1, H_2 настойчивыми заявками и отказами

Для системы совместного доступа с коллизиями и H1, H2 настойчивыми заявками и отказами, также, определим функциональную модель, являющуюся ее функциональным прототипом.

Таким образом, описанная в главе 1.2 процедура доступа к канальному ресурсу и образования орбиты, показана на рисунке 13, как функциональная модель системы.

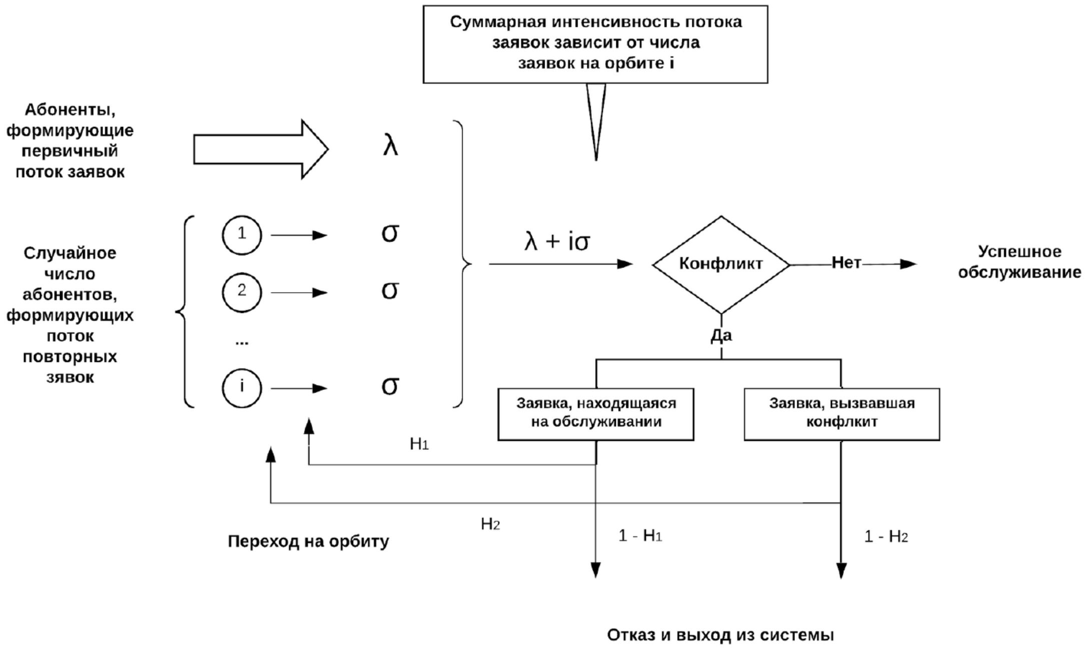


Рисунок 13 – Схема функционирования модели (функциональная модель системы)

3.2 Математическая модель системы совместного доступа с коллизиями и H1, H2 настойчивыми заявками и отказами

Рассмотрим однолинейную RQ-систему с конфликтами заявок и H_1, H_2 настойчивыми заявками и отказами, изображенную на рисунке 14.

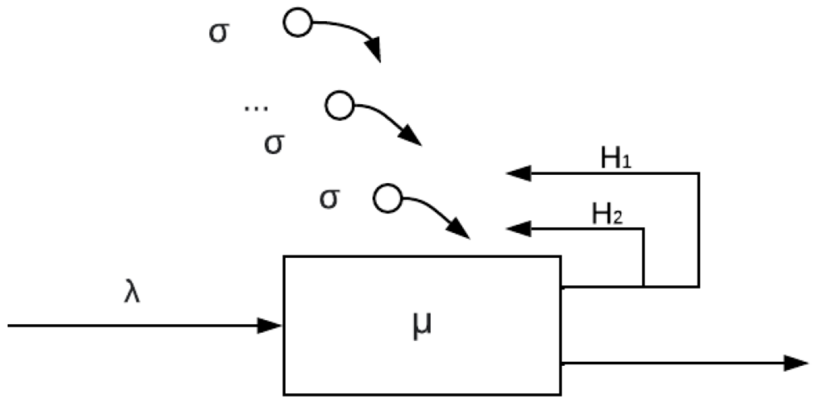


Рисунок 14 – RQ-система M/M/1 с коллизиями и H_1, H_2 настойчивыми заявками и отказами

Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его и начинает обслуживание, которое заканчивается успешно, если во время него другие заявки не поступали. Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки вступают в конфликт. При этом, будем считать, что заявка с прибора уходит на орбиту с вероятностью H_1, заявка, вызвавшая конфликт, уходит на орбиту с вероятностью H_2, а с вероятностью $1 - H_i$ покидает систему.

На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Продолжительность обслуживания имеет экспоненциальную функцию распределения с параметром μ. Случайная задержка, которую осуществляет заявка на орбите в случае возникновения конфликта, экспоненциально распределена с параметром σ.

Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t, $l(t)$ будет определять состояние прибора следующим образом:

$$l(t) = \begin{cases} 0, \text{если прибор свободен,} \\ 1, \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

$P\{l(t) = l,\ i(t) = i\} = P_l(i, t)$ – вероятность того, что прибор в момент времени находится в состоянии l, и в источнике повторных вызовов i заявок.

Так как входящий поток – простейший, и время обслуживания – экспоненциальное, то случайный процесс $\{l(t), i(t)\}$ изменения во времени состояний описанной RQ-системы является двумерной цепью Маркова с непрерывным временем.

Ставится задача исследования случайного процесса $\{l(t), i(t)\}$.

3.2.1 Система уравнений Колмогорова

Для распределения вероятностей $P_l(i,t)$ согласно теореме о полной вероятности можно составить равенства:

$i = 0$:

$$\begin{cases} P_0(0,t+\Delta t) = P_0(0,t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(0,t)\mu\Delta t + P_1(1,t)\sigma\Delta t(1-H_1)(1-H_2) + \\ +P_1(0,t)\lambda\Delta t(1-H_1)(1-H_2) + o(\Delta t), \\ P_1(0,t+\Delta t) = P_1(0,t)(1-\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t) + P_0(0,t)\lambda\Delta t + \\ +P_0(1,t)(1-\lambda\Delta t)\sigma\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

$i = 1$:

$$\begin{cases} P_0(1,t+\Delta t) = P_0(1,t)(1-\lambda\Delta t)(1-\sigma\Delta t) + P_1(1,t)\mu\Delta t + P_1(0,t)\lambda\Delta t(1-H_2)H_1 + \\ +P_1(0,t)\lambda\Delta t(1-H_1)H_2 + P_1(1,t)\lambda\Delta t(1-H_1)(1-H_2) + P_1(1,t)\sigma\Delta t(1-H_2)H_1 + \\ +P_1(1,t)\sigma\Delta t(1-H_1)H_2 + P_1(2,t)2\sigma\Delta t(1-H_1)(1-H_2) + o(\Delta t), \\ P_1(1,t+\Delta t) = P_1(1,t)(1-\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t)(1-\sigma\Delta t) + P_0(1,t)(1-\sigma\Delta t)\lambda\Delta t + \\ +P_0(2,t)(1-\lambda\Delta t)2\sigma\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

$i \geq 2$:

$$\begin{cases} P_0(i,t+\Delta t) = P_0(i,t)(1-\lambda\Delta t)(1-i\sigma\Delta t) + P_1(i,t)\mu\Delta t + P_1(i-2,t)\lambda\Delta t H_1 H_2 + \\ +P_1(i-1,t)\lambda\Delta t\big(H_1(1-H_2) + H_2(1-H_1)\big) + P_1(i,t)\lambda\Delta t(1-H_1)(1-H_2) + \\ +P_1(i-1,t)(i-1)\sigma\Delta t H_1 H_2 + P_1(i,t)i\sigma\Delta t\big(H_1(1-H_2) + H_2(1-H_1)\big) + \\ +P_1(i+1,t)(i+1)\sigma\Delta t(1-H_1)(1-H_2) + o(\Delta t), \\ P_1(i,t+\Delta t) = P_1(i,t)(1-\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t)(1-i\sigma\Delta t) + P_0(i,t)(1-i\sigma\Delta t)\lambda\Delta t + \\ +P_0(i+1,t)(1-\lambda\Delta t)(i+1)\sigma\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

Откуда не трудно получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$i = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(0,t)}{\partial t} = -\lambda P_0(0,t) + \mu P_1(0,t) + \lambda(1-H_1)(1-H_2)P_1(0,t) + \\ +\sigma(1-H_1)(1-H_2)P_1(1,t), \\ \frac{\partial P_1(0,t)}{\partial t} = -(\mu+\lambda)P_1(0,t) + \lambda P_0(0,t) + \sigma P_0(1,t). \end{cases}$$

$i = 1$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_0(1,t)}{\partial t} = -(\lambda+\sigma)P_0(1,t) + \mu P_1(1,t) + \lambda(1-H_2)H_1P_1(0,t) + \lambda(1-H_1)H_2P_1(0,t) + \\ +\lambda(1-H_1)(1-H_2)P_1(1,t) + \sigma(1-H_2)H_1P_1(1,t) + \sigma(1-H_1)H_2P_1(1,t) + \\ +2\sigma(1-H_1)(1-H_2)P_1(2,t), \\ \dfrac{\partial P_1(1,t)}{\partial t} = -(\mu+\lambda+\sigma)P_1(1,t) + \lambda P_0(1,t) + 2\sigma P_0(2,t). \end{cases}$$

$i \geq 2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -(\lambda+i\sigma)P_0(i,t) + \mu P_1(i,t) + \lambda H_1H_2P_1(i-2,t) + \\ +\lambda(1-H_1)H_2P_1(i-1,t) + +\lambda(1-H_2)H_1P_1(i-1,t) + \\ +\lambda(1-H_1)(1-H_2)P_1(i,t) + (i-1)\sigma H_1H_2P_1(i-1,t) + i\sigma(1-H_1)\cdot \\ \cdot H_2P_1(i,t) + i\sigma(1-H_1)H_2P_1(i,t) + i\sigma(1-H_2)H_1P_1(i,t) + \\ +(i+1)\sigma(1-H_1)(1-H_2)P_1(i+1,t), \\ \frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = -(\mu+\lambda+i\sigma)P_1(i,t) + \lambda P_0(i,t) + \sigma(i+1)P_0(i+1,t). \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Запишем систему (3.2.1) в стационарном режиме $\lim\limits_{t\to\infty} P_l(i,t) = \Pi_l(i)$:

$i = 0$:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda\Pi_0(0) + \mu\Pi_1(0) + \lambda(1-H_1)(1-H_2)\Pi_1(0) + \sigma(1-H_1)(1-H_2)\Pi_1(1), \\ 0 = -(\mu+\lambda)\Pi_1(0) + \lambda\Pi_0(0) + \sigma\Pi_0(1). \end{cases}$$

$i = 1$:

$$\begin{cases} 0 = -(\lambda+\sigma)\Pi_0(1) + \mu\Pi_1(1) + \lambda(1-H_2)H_1\Pi_1(0) + \lambda(1-H_1)H_2\Pi_1(0) + \\ +\lambda(1-H_1)(1-H_2)\Pi_1(1) + \sigma(1-H_2)H_1\Pi_1(1) + \sigma(1-H_1)H_2\Pi_1(1) + \\ +2\sigma(1-H_1)(1-H_2)\Pi_1(2), \\ 0 = -(\mu+\lambda+\sigma)\Pi_1(1) + \lambda\Pi_0(1) + 2\sigma\Pi_0(2). \end{cases}$$

i ≥ 2:

$$\begin{cases} 0 = -(\lambda+i\sigma)\Pi_0(i) + \mu\Pi_1(i) + \lambda H_1H_2\Pi_1(i-2) + \\ +\lambda\big(H_1(1-H_2) + H_2(1-H_1)\big)\Pi_1(i-1) + \lambda(1-H_1)(1-H_2)\Pi_1(i) + \\ +(i-1)\sigma H_1H_2\Pi_1(i-1) + i\sigma\big(H_1(1-H_2) + H_2(1-H_1)\big)\Pi_1(i) + \\ +(i+1)\sigma(1-H_1)(1-H_2)\Pi_1(i+1), \\ 0 = -(\mu+\lambda+i\sigma)\Pi_1(i) + \lambda\Pi_0(i) + \sigma(i+1)\Pi_0(i+1). \end{cases} \tag{3.2.2}$$

3.2.2 Метод характеристических функций

Введем частичные характеристические функции:

$$h_k(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} \Pi_k(i), \qquad k = \{0,1\},$$

$$-j \frac{\partial h_k(u)}{\partial u} = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{jui} \Pi_k(i),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Тогда из системы (3.2.2) получим систему двух уравнений относительно функций $h_k(u)$:

$$\begin{cases} -\lambda h_0(u) + j\sigma \frac{\partial h_0(u)}{\partial u} + \mu h_1(u) + \lambda H_1 H_2 e^{2ju} h_1(u) + \\ +\lambda\big(H_1(1-H_2) + H_2(1-H_1)\big) e^{ju} h_1(u) + \lambda(1-H_1)(1-H_2) h_1(u) - \\ -j\sigma H_1 H_2 e^{ju} \frac{\partial h_1(u)}{\partial u} - j\sigma\big(H_1(1-H_2) + H_2(1-H_1)\big) \frac{\partial h_1(u)}{\partial u} - \\ -j\sigma(1-H_1)(1-H_2) e^{-ju} \frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \\ -\mu h_1(u) - \lambda h_1(u) + j\sigma \frac{\partial h_1(u)}{\partial u} + \lambda h_0(u) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial h_0(u)}{\partial u} = 0. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Найти допредельные решения системы разностных уравнений (3.2.3) методами производящих функций невозможно. Так как в системе уравнений содержатся частные производные, избавиться от которых нельзя. Поэтому далее, в главе 3.3, решим систему M/M/1 с коллизиями и H_1, H_2 настойчивыми заявками матричным методом.

3.3 Матричный метод нахождения распределения вероятностей

Стационарное распределение вероятностей можно найти численно с помощью матричного метода, который позволяет решить систему линейных алгебраических уравнений через обратную матрицу.

Для этого систему приведем к следующему виду:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B}, \tag{3.3.1}$$

где **x** – вектор-столбец стационарных вероятностей Π_l(i) = при i = 0,1 ..., N, k = 0,1, …, N размерности 2(N + 1):

$$\boldsymbol{x} = \big(P_0(0), P_1(0), P_0(1), P_1(1), \dots, P_0(N), P_1(N)\big).$$

Матрица коэффициентов **A** размерности ((2N + 1) + 1) × 2(N + 1) определяется следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{A}_{01} & \dots & \mathbf{A}_{0N} \\ \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{N0} & \mathbf{A}_{N1} & \dots & \mathbf{A}_{NN} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

B – вектор-столбец свободных членов системы уравнений размерности $((2N + 1) + 1)$, которая содержит свободные коэффициенты $\mathbf{B}_i = 0$ для $i = 0, 1, \dots, 2(N+1)$, и $\mathbf{B}_{2(N+1)+1} = 1$:

$$\mathbf{B} = (0,0,0,\dots 0,1).$$

Так как матрица **A** прямоугольная, то для нахождения решения умножим обе части уравнения (3.3.1) на транспонированную матрицу **A**:

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}.$$

Тогда $\Pi_k(i)$ можно будет найти через обратную матрицу:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

Очевидно, что полученное решение зависит от значения N. Остановка увеличения значения N осуществляется либо по условию нормировки, либо, когда $\Pi_k(i) = 0$.

Теперь сложим значения вероятностей $\Pi_k(i)$ по k, таким образом получим стационарное распределение вероятностей числа на орбите для $\lambda = 0.4$, $\sigma = 0.1$, $\mu = 1$, $H_1 = 0.4$, $H_2 = 0.8$, которое изображено на рисунке 14.

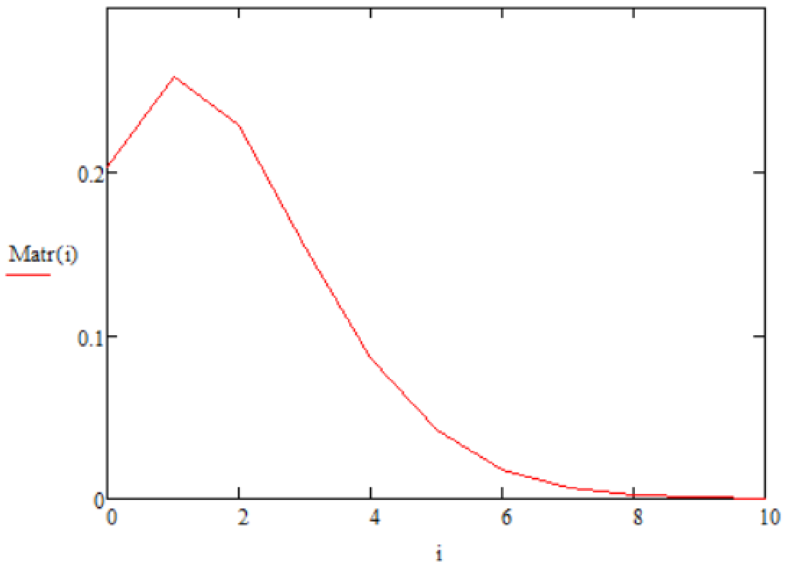


Рисунок 15 – График распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов для $\lambda = 0.4$, $\sigma = 0.1$, $\mu = 1$, $H_1 = 0.4$, $H_2 = 0.8$

Было получено численное решение системы (3.2.3) при помощи математического пакета Mathcad, алгоритм представлен в главе 3.5.

3.4 Асимптотический анализ системы совместного доступа с коллизиями и H_1, H_2 настойчивыми заявками и отказами

Система уравнений (3.2.3) имеет вид:

$$\begin{cases} -\lambda h_0(u) + \mu h_1(u) + \lambda(Ae^{2ju}+Be^{ju}+C)h_1(u) + j\sigma\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} - \\ \quad -j\sigma(Ae^{ju}+B+Ce^{-ju})\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \\ \lambda h_0(u) - \mu h_1(u) - \lambda h_1(u) - j\sigma e^{-ju}\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} + j\sigma\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \end{cases} \tag{3.4.1}$$

где $A = H_1H_2; B = H_1(1-H_2) + H_2(1-H_1); C = (1-H_1)(1-H_2)$.

Умножим второе уравнение системы на e^{ju}:

$$\lambda e^{ju}h_0(u) - \mu e^{ju}h_1(u) - \lambda e^{ju}h_1(u) - j\sigma\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} + j\sigma e^{ju}\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0. \tag{3.4.2}$$

Суммируя уравнения (3.4.2) с первым уравнением системы (3.4.1), получим:

$$\lambda\left(e^{ju}-1\right)h_0(u) + \mu\left(1-e^{ju}\right)h_1(u) + \lambda\left(Ae^{2ju} - e^{ju} + Be^{ju} + C\right)h_1(u) - \\ -j\sigma(Ae^{ju} - e^{ju} + +B + Ce^{-ju})\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0. \tag{3.4.3}$$

Сгруппируем слагаемые уравнения (3.4.3) относительно $h_1(u)$:

$$\lambda e^{ju}\left(\left(H_1H_2e^{ju}-1\right) + (H_1+H_2-2H_1H_2) + (1-(H_1+H_2)+H_1H_2)e^{-ju}\right)h_1(u) =$$
$$= \lambda e^{ju}\left(H_1H_2e^{ju} - 1 + H_1 + H_2 - 2H_1H_2 + e^{-ju} - H_1e^{-ju} - H_2e^{-ju} + H_1H_2e^{-ju})\right)h_1(u) =$$
$$= \lambda e^{ju}\left(H_1H_2(e^{ju} - 2 + e^{-ju}) + (e^{-ju}-1) + (H_1+H_2)(1-e^{-ju})\right)h_1(u) =$$
$$= \lambda e^{ju}\left(H_1H_2((e^{ju}-1) + (e^{-ju}-1)) + e^{-ju}(1-e^{ju}) + e^{-ju}(e^{ju}-1)(H_1+H_2)\right)h_1(u) =$$
$$= \lambda e^{ju}\left(H_1H_2((e^{ju}-1) + e^{-ju}(1-e^{ju})) + e^{-ju}(1-e^{ju}) + e^{-ju}(e^{ju}-1)(H_1+H_2)\right)h_1(u)$$
$$= \lambda e^{ju}\left(H_1H_2(e^{ju}-1)(1-e^{-ju}) - e^{-ju}(e^{ju}-1) + e^{-ju}(e^{ju}-1)(H_1+H_2)\right)h_1(u) =$$
$$= \lambda e^{ju}(e^{ju}-1)\left(H_1H_2(1-e^{-ju}) - e^{-ju} + e^{-ju}(H_1+H_2)\right)h_1(u) =$$
$$= \lambda e^{ju}(e^{ju}-1)\left(H_1H_2\left(1-e^{-ju}\right) + e^{-ju}(H_1+H_2-1)\right)h_1(u).$$

Сгруппируем слагаемые уравнения (3.4.3) относительно $\frac{\partial h_1(u)}{\partial u}$:

$$-j\sigma\big((H_1H_2e^{ju}-e^{ju}\big)+(H_1+H_2-2H_1H_2)+((1-(H_1{+}H_2)+H_1H_2)e^{-ju}))\frac{\partial h_1(u)}{\partial u}=$$

$$=-j\sigma(H_1H_2e^{ju}-e^{ju}+(H_1+H_2)-2H_1H_2+e^{-ju}-e^{-ju}(H_1{+}H_2)+e^{-ju}H_1H_2)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u}=$$

$$=-j\sigma(H_1H_2(e^{ju}-2+e^{-ju})+e^{-ju}-e^{ju}+(H_1+H_2)(1-e^{-ju}))\frac{\partial h_1(u)}{\partial u}=$$

$$=-j\sigma(H_1H_2\left(\left(e^{ju}-1\right)-\left(1{-}e^{-ju}\right)\right)+\left(e^{-ju}-1\right)-\left(e^{ju}-1\right)+$$

$$+(H_1+H_2)(1-e^{-ju}))\frac{\partial h_1(u)}{\partial u}=-j\sigma(H_1H_2((e^{ju}-1)$$

$$-e^{-ju}(e^{ju}-1))-e^{-ju}(e^{ju}-1)-(e^{ju}-1)+\ (H_1+H_2)e^{-ju}\cdot$$

$$\cdot\,(e^{ju}-1))\frac{\partial h_1(u)}{\partial u}=-j\sigma(e^{ju}-1)(H_1H_2(1-e^{-ju})\ +$$

$$+(H_1+H_2)e^{-ju}-e^{-ju}-1)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u}.$$

Таким образом, уравнение (3.4.3) примет вид:

$$\lambda\big(e^{ju}-1\big)h_0(u)+\mu\big(1-e^{ju}\big)h_1(u)+\lambda e^{ju}(e^{ju}-1)\left(H_1H_2\big(1-e^{-ju}\big)\right)$$

$$+e^{-ju}(H_1\ +H_2-1)h_1(u)-j\sigma(e^{ju}-1)(H_1H_2(1-e^{-ju})$$

$$+(H_1+H_2)e^{-ju}+e^{-ju}-1)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u}=0,$$

$$\big(e^{ju}-1\big)\left(\lambda h_0(u)-\mu h_1(u)+\lambda e^{ju}\left(H_1H_2\big(1-e^{-ju}\big)\right)+e^{-ju}(H_1+H_2-1\right)\cdot$$

$$\cdot\,h_1(u)-j\sigma\big(H_1H_2\big(1-e^{-ju}\big)+(H_1+H_2\big)e^{-ju}-e^{-ju}-1)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u})=0,$$

$$\lambda h_0(u)-\mu h_1(u)+\lambda e^{ju}\big(H_1H_2\big(1-e^{-ju}\big)+e^{-ju}(H_1+H_2-1)\big)h_1(u)-$$
$$-j\sigma\big(H_1H_2\big(1-e^{-ju}\big)+(H_1+H_2\big)e^{-ju}-e^{-ju}-1)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u}=0,$$

$$\lambda h_0(u)-\mu h_1(u)+\lambda e^{ju}(A-Ce^{-ju})h_1(u)-j\sigma\big(A+Ce^{-ju}-1\big)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u}=0. \quad (3.4.5)$$

Получим систему

$$\begin{cases} -\lambda h_0(u)+\mu h_1(u)+\lambda(Ae^{2ju}{+}Be^{ju}+C)h_1(u)+j\sigma\frac{\partial h_0(u)}{\partial u}- \\ -j\sigma(Ae^{ju}+B+Ce^{-ju})\frac{\partial h_1(u)}{\partial u}=0, \\ \lambda h_0(u)-\mu h_1(u)-\lambda h_1(u)-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial h_0(u)}{\partial u}+j\sigma\frac{\partial h_1(u)}{\partial u}=0, \\ \lambda h_0(u)-\mu h_1(u)+\lambda e^{ju}(A-Ce^{-ju})h_1(u)-j\sigma\big(A+Ce^{-ju}-1\big)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u}=0. \end{cases} \quad (3.4.6)$$

которую будем решать методом асимптотического анализа в предельном условии $\sigma\to 0$.

3.4.1 Асимптотика первого порядка

Для нахождения асимптотики первого порядка в системе (3.4.1) и в уравнении (3.4.5) выполним следующие замены:

$$\sigma = \varepsilon, u = \varepsilon w, h_k(u) = f_k(\varepsilon, w).$$

Тогда система уравнений (3.4.1) примет вид:

$$\begin{cases} -\lambda f_0(\varepsilon, w) + \mu f_1(\varepsilon, w) + \lambda(Ae^{2j\varepsilon w} + Be^{j\varepsilon w} + C)f_1(\varepsilon, w) + \\ \quad + j\frac{\partial f_0(\varepsilon, w)}{\partial w} - j(Ae^{j\varepsilon w} + B + Ce^{-j\varepsilon w})\frac{\partial f_1(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0, \\ \lambda f_0(\varepsilon, w) - \mu f_1(\varepsilon, w) - \lambda f_1(\varepsilon, w) - je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial f_0(\varepsilon, w)}{\partial w} + j\frac{\partial f_1(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0. \end{cases} \quad (3.4.7)$$

Уравнение (3.4.5) примет вид:

$$\lambda f_0(\varepsilon, w) - \mu f_1(\varepsilon, w) + \lambda e^{j\varepsilon w}\left(A - Ce^{-j\varepsilon w}\right)f_1(\varepsilon, w) -$$
$$-j\left(A + Ce^{-j\varepsilon w} - 1\right)\frac{\partial f_1(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0. \quad (3.4.8)$$

Решение для $f_k(\varepsilon, w)$ будем искать в виде:

$$f_k(\varepsilon, w) = r_k\Phi(\mathrm{w}) + \mathrm{o}(\varepsilon) \quad (3.4.9)$$

где $r_0 + r_1 = 1,\ r_k = h_k(0) = f_k(0)$.

Подставляя (3.4.9) в (3.4.6) и (3.4.7), получаем систему дифференциальных уравнений относительно функции Φ(w):

$$\begin{cases} -\lambda r_0\Phi(\mathrm{w}) + \mu r_1\Phi(\mathrm{w}) + \lambda(Ae^{2j\varepsilon w} + Be^{j\varepsilon w} + C)r_1\Phi(\mathrm{w}) + jr_0\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} - \\ \quad -(Ae^{j\varepsilon w} + B + Ce^{-j\varepsilon w})jr_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + \mathrm{o}(\varepsilon) = 0, \\ \lambda r_0\Phi(\mathrm{w}) - \mu r_1\Phi(\mathrm{w}) - \lambda r_1\Phi(\mathrm{w}) - jr_0e^{-j\varepsilon w}\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + jr_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + \mathrm{o}(\varepsilon) = 0, \\ \lambda r_0\Phi(\mathrm{w}) - \mu r_1\Phi(\mathrm{w}) + \lambda e^{j\varepsilon w}\left(A - Ce^{-j\varepsilon w}\right)r_1\Phi(\mathrm{w}) - \\ \quad -\left(A + Ce^{-j\varepsilon w} - 1\right)jr_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} + \mathrm{o}(\varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (3.4.10)$$

Из первого уравнения системы (3.4.10) получаем:

$$(-\lambda r_0 + \mu r_1 + \lambda\left(Ae^{2j\varepsilon w} + Be^{j\varepsilon w} + C\right)r_1\big)\Phi(\mathrm{w}) = -(r_0 - \left(Ae^{j\varepsilon w} + B + Ce^{-j\varepsilon w}\right)jr_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w},$$

$$(-\lambda r_0 + \mu r_1 + \lambda(A(1 + 2j\varepsilon w) + B(1 + j\varepsilon w) + C)r_1)\Phi(\mathrm{w}) =$$
$$= -(r_0 - (A(1 + j\varepsilon w) + B + C(1 - j\varepsilon w))r_1)j\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w},$$

$$(-\lambda r_0 + \mu r_1 + \lambda(A+B+C)r_1)\Phi(\mathrm{w}) = -(r_0 - (A+B+C)r_1)j\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w},$$

$$\frac{j\Phi'(w)}{\Phi(\mathrm{w})} = \frac{-\lambda r_0 + \mu r_1 + \lambda(A+B+C)r_1}{-(r_0 - (A+B+C)r_1)},$$

$$\frac{j\Phi'(w)}{\Phi(\mathrm{w})} = \frac{-\lambda r_0 + \mu r_1 + \lambda(H_1H_2+H_1(1-H_2)+H_2(1-H_1)+(1-H_1)(1-H_2))r_1}{-(r_0 - (H_1H_2+H_1(1-H_2)+H_2(1-H_1)+(1-H_1)(1-H_2))r_1)},$$

$$\frac{j\Phi'(w)}{\Phi(\mathrm{w})} = \frac{-\lambda r_0 + \mu r_1 + \lambda(H_1H_2+H_1-H_1H_2+H_2-H_2H_1+1-H_2-H_1+H_1H_2))r_1}{-(r_0 - (H_1H_2+H_1-H_1H_2+H_2-H_2H_1+1-H_2-H_1+H_1H_2)r_1)},$$

$$\frac{j\Phi'(w)}{\Phi(\mathrm{w})} = \frac{\lambda r_0 - \mu r_1 - \lambda r_1}{r_0 - r_1}.$$

Из второго уравнения системы (11) получаем:

$$\lambda r_0\Phi(\mathrm{w}) - \mu r_1\Phi(\mathrm{w}) - \lambda r_1\Phi(\mathrm{w}) = jr_0\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} - jr_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w},$$

$$(\lambda r_0 - \mu r_1 - \lambda r_1)\Phi(\mathrm{w}) = (r_0 - r_1)j\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w},$$

$$\frac{j\Phi'(w)}{\Phi(\mathrm{w})} = \frac{\lambda r_0 - \mu r_1 - \lambda r_1}{r_0 - r_1}.$$

Из третьего уравнения системы (3.4.10) получаем:

$$\left(\lambda r_0 - \mu r_1 + \lambda e^{j\varepsilon w}\left(H_1H_2\left(1-e^{-j\varepsilon w}\right) + e^{-j\varepsilon w}(H_1+H_2-1)\right)r_1\right)\Phi(\mathrm{w}) =$$
$$= \left(H_1H_2\left(1-e^{-j\varepsilon w}\right) + (H_1+H_2)e^{-j\varepsilon w} - e^{-j\varepsilon w} - 1\right)jr_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w},$$

$$\left(\lambda r_0 - \mu r_1 + \lambda e^{j\varepsilon w}\left(H_1H_2 - e^{-j\varepsilon w}H_1H_2 + e^{-j\varepsilon w}(H_1+H_2-1)\right)r_1\right)\Phi(\mathrm{w}) =$$
$$= \left(H_1H_2 - H_1H_2e^{-j\varepsilon w} + H_1e^{-j\varepsilon w} + H_2e^{-j\varepsilon w} - e^{-j\varepsilon w} - 1\right)jr_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w},$$

$$\left(\lambda r_0 - \mu r_1 + \lambda e^{j\varepsilon w}\left(H_1H_2 - e^{-j\varepsilon w}(H_1H_2 - H_1 - H_2 + 1)\right)r_1\right)\Phi(\mathrm{w}) =$$
$$= (H_1H_2 - e^{-j\varepsilon w}(H_1H_2 - H_1 - H_2 + 1) - 1)jr_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w},$$

$$\left(\lambda r_0 - \mu r_1 + \lambda e^{j\varepsilon w}(A - Ce^{-j\varepsilon w})r_1\right)\Phi(\mathrm{w}) = (A + Ce^{-j\varepsilon w} - 1)jr_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w},$$

$$(\lambda r_0 - \mu r_1 + \lambda(A - C)r_1)\Phi(\mathrm{w}) = (A + C - 1)jr_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w},$$

$$\frac{j\Phi'(w)}{\Phi(w)} = \frac{\lambda r_0 - \mu r_1 + \lambda(A-C)r_1}{(A+C-1)r_1},$$

$$\frac{j\Phi'(w)}{\Phi(w)} = -\frac{\lambda r_0 + \mu r_1 - \lambda(A-C)r_1}{(1-A-C)r_1},$$

где $A = H_1 H_2;\ B = H_1(1-H_2) + H_2(1-H_1);\ C = (1-H_1)(1-H_2)$.

Отсюда, добавив условие нормировки, получаем систему уравнений для нахождения r_0, r_1:

$$\begin{cases} -\dfrac{\lambda r_0 - \mu r_1 + \lambda(A-C)r_1}{(1-A-C)r_1} = \dfrac{\lambda r_0 - \mu r_1 - \lambda r_1}{r_0 - r_1}, \\ r_0 + r_1 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\lambda(1-r_1) - \mu r_1 + \lambda(A-C)r_1}{(1-A-C)r_1} = \lambda - \dfrac{\mu r_1}{r_0 - r_1}, \\ r_0 + r_1 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\lambda - \mu r_1}{(1-A-C)r_1} + \lambda = \lambda - \dfrac{\mu r_1}{1 - 2r_1}, \\ r_0 + r_1 = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем

$$(1-2r_1)(\lambda - \mu r_1) = \mu r_1^2(1-A-C),$$

$$\lambda - (\mu + 2\lambda)r_1 + \mu r_1^2(1+A+C) = 0,$$

$$\mu r_1^2(1+A+C) - (\mu + 2\lambda)r_1 + \lambda = 0.$$

Обозначим $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$, тогда получаем квадратное уравнение относительно r_1 вида:

$$(1+A+C)r_1^2 - (1+2\rho)r_1 + \rho = 0.$$

Найдем корни квадратного уравнения:

$$D = (1+2\rho)^2 - 4(1+A+C)\rho = 1 + 4\rho^2 + 4\rho - 4\rho - 4A\rho - 4C\rho =$$
$$= 4\rho^2 - 4\rho(A+C) + 1 \geq 0,$$

$$D = 4\rho^2 - 4\rho(A+C) + 1 = (1+2\rho)^2 - 4\rho - 4\rho(A+C) =$$
$$= (1+2\rho)^2 - 4\rho(1+A+C) \leq (1+2\rho)^2,$$

$$0 \leq D \leq (1+\rho)^2.$$

Следовательно, оба корня положительны $r_1 = \frac{1+2\rho\pm\sqrt{D}}{2(1+A+C)}$.

Вершина параболы $r_1{}^0 = \frac{1+2\rho}{2(1+A+C)}$.

$$y(\,r_1) = (1+A+C)r_1{}^2 - (1+2\rho)r_1 + \rho,$$

$$y(0) = \rho > 0,$$

$$y(1) = (1+A+C)\cdot 1 - (1+2\rho)\cdot 1 + \rho = A + C - \rho.$$

Если:

1) $A + C > \rho$ один корень меньше 1,
2) $A + C < \rho$ оба корня лежат от 0 до 1.

Вернемся к первому уравнению системы для нахождения r0, r1:

$$-\frac{\lambda r_0 - \mu r_1 + \lambda(A-C)r_1}{(1-A-C)r_1} = \frac{\lambda r_0 - \mu r_1 - \lambda r_1}{r_0 - r_1} = -\kappa,$$

$$-\frac{\lambda - \mu r_1}{(1-A-C)r_1} + \lambda = \lambda - \frac{\mu r_1}{1-2r_1} = -\kappa,$$

$$-\kappa = j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)},$$

$$j\kappa = \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)},$$

$$\Phi(w) = e^{j\kappa w},$$

где $\kappa 1 = \frac{\mu r_1}{1-2r_1} - \lambda$.

Вернемся к исходной характеристической функции с помощью обратных изменений и поставим ε = σ. Тогда:

$$h_k(u) = f_k(\varepsilon, w) = f_k(w) + o(\varepsilon) \approx f_k(w) = f_k\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) = r_k e^{\frac{\kappa_1}{\sigma}ju}.$$

Принимая во внимание условие нормировки $r_0 + r_1 = 1$, получим, что асимптотическая характеристическая функция первого порядка имеет вид:

$$h^{(1)}(u) = h_0(u) + h_1(u) = e^{\frac{\kappa_1}{\sigma}ju}.$$

Полученная величина κ_1 определяет асимптотическое среднее значение κ_1/σ числа заявок на орбите в системе совместного доступа с ненастойчивыми заявками, конфликтами и отказами. Для построения гауссовской аппроксимации распределения вероятностей числа *i(t)* заявок на орбите рассмотрим асимптотику второго порядка.

3.4.2 Асимптотика второго порядка

Выполнив в системе (3.4.6) замены

$$h_k(u) = e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} h_k{}^{(2)}(u), \tag{3.4.11}$$

$$\begin{cases} -\lambda h_0(u) + \mu h_1(u) + \lambda(Ae^{2ju} + Be^{ju} + C)h_1(u) + j\sigma\dfrac{\partial h_0(u)}{\partial u} - \\ \quad -j\sigma(Ae^{ju} + B + Ce^{-ju})\dfrac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \\ \lambda h_0(u) - \mu h_1(u) - \lambda h_1(u) - j\sigma e^{-ju}\dfrac{\partial h_0(u)}{\partial u} + j\sigma\dfrac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \\ \lambda h_0(u) - \mu h_1(u) + \lambda e^{ju}\left(A - Ce^{-ju}\right)h_1(u) - \\ \quad -j\sigma\left(A + Ce^{-ju} - 1\right)\dfrac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \end{cases}$$

где $A = H_1H_2; B = H_1(1 - H_2) + H_2(1 - H_1); C = (1 - H_1)(1 - H_2)$, получим:

$$\begin{cases} -\lambda h_0{}^{(2)}(u)e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} + \mu h_1{}^{(2)}(u)e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} + \lambda\left(Ae^{2ju} + Be^{ju} + C\right)h_1{}^{(2)}(u)e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} + \\ \quad +j\sigma\left(\dfrac{\partial h_0{}^{(2)}(u)}{\partial u}e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} + j\dfrac{\kappa_1}{\sigma}h_0{}^{(2)}(u)e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}\right) - j\sigma\left(Ae^{ju} + B + Ce^{-ju}\right)\cdot \\ \quad \cdot\left(\dfrac{\partial h_1(u)}{\partial u}e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} + j\dfrac{\kappa_1}{\sigma}h_1{}^{(2)}(u)e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}\right) = 0, \\ \lambda h_0{}^{(2)}(u)e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} - \mu h_1{}^{(2)}(u)e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} - \lambda h_1{}^{(2)}(u)e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} - \\ \quad -j\sigma e^{-ju}\left(\dfrac{\partial h_0(u)}{\partial u}e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} + j\dfrac{\kappa_1}{\sigma}h_0{}^{(2)}(u)e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}\right) + \\ \quad +j\sigma\left(\dfrac{\partial h_1(u)}{\partial u}e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} + j\dfrac{\kappa_1}{\sigma}h_1{}^{(2)}(u)e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}\right) = 0, \\ \lambda h_0{}^{(2)}(u)e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} - \mu h_1{}^{(2)}(u)e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} + \lambda e^{ju}\left(A - Ce^{-ju}\right)h_1{}^{(2)}(u)e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} - \\ \quad -j\sigma\left(A + Ce^{-ju} - 1\right)\left(\dfrac{\partial h_1(u)}{\partial u}e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} + j\dfrac{\kappa_1}{\sigma}h_1{}^{(2)}(u)e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}\right) = 0, \end{cases} \tag{3.4.12}$$

где $A = H_1H_2; B = H_1(1 - H_2) + H_2(1 - H_1); C = (1 - H_1)(1 - H_2)$.

Поделим каждое уравнение системы (3.4.12) на $e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}$:

$$\begin{cases} -\lambda {h_0}^{(2)}(u) + \mu {h_1}^{(2)}(u) + \lambda\left(Ae^{2ju} + Be^{ju} + C\right){h_1}^{(2)}(u) + \\ j\sigma\left(\frac{\partial {h_0}^{(2)}(u)}{\partial u} + j\frac{\kappa_1}{\sigma}{h_0}^{(2)}(u)\right) - \\ -j\sigma\left(Ae^{ju} + B + Ce^{-ju}\right)\left(\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} + j\frac{\kappa_1}{\sigma}{h_1}^{(2)}(u)\right) = 0, \\ \lambda {h_0}^{(2)}(u) - \mu {h_1}^{(2)}(u) - \lambda {h_1}^{(2)}(u) - j\sigma e^{-ju}\left(\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} + j\frac{\kappa_1}{\sigma}{h_0}^{(2)}(u)\right) + \\ +j\sigma\left(\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} + j\frac{\kappa_1}{\sigma}{h_1}^{(2)}(u)\right) = 0, \\ \lambda {h_0}^{(2)}(u) - \mu {h_1}^{(2)}(u) + \lambda e^{ju}\left(A - Ce^{-ju}\right){h_1}^{(2)}(u) - \\ -j\sigma\left(A + Ce^{-ju} - 1\right)\left(\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} + j\frac{\kappa_1}{\sigma}{h_1}^{(2)}(u)\right) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\lambda + \kappa_1){h_0}^{(2)}(u) + (\mu + \lambda\left(Ae^{2ju} + Be^{ju} + C\right) + \left(Ae^{ju} + B + Ce^{-ju}\right)\kappa_1){h_1}^{(2)}(u) + \\ +j\sigma\frac{\partial {h_0}^{(2)}(u)}{\partial u} - j\sigma\left(Ae^{ju} + B + Ce^{-ju}\right)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \\ (\lambda + e^{-ju}\kappa_1){h_0}^{(2)}(u) - (\mu + \lambda + \kappa_1){h_1}^{(2)}(u) - j\sigma e^{-ju}\frac{\partial h_0(u)}{\partial u} + j\sigma\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \\ \lambda {h_0}^{(2)}(u) + (\lambda e^{ju}\left(A - Ce^{-ju}\right) - \mu + \left(A + Ce^{-ju} - 1\right)\kappa_1){h_1}^{(2)}(u) - \\ -j\sigma\left(A + Ce^{-ju} - 1\right)\frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Сделаем замены:

$$\sigma = \varepsilon^2, u = \varepsilon w, {h_k}^{(2)}(u) = {f_k}^{(2)}(\varepsilon, w),$$

тогда

$$\begin{cases} -(\lambda + \kappa_1){f_0}^{(2)}(\varepsilon, w) + (\mu + \lambda\left(Ae^{2j\varepsilon w} + Be^{j\varepsilon w} + C\right) + \left(Ae^{j\varepsilon w} + B + Ce^{-j\varepsilon w}\right)\kappa_1) \cdot \\ \cdot {f_1}^{(2)}(\varepsilon, w) + j\varepsilon\frac{\partial {h_0}^{(2)}(\varepsilon, w)}{\partial w} - j\varepsilon\left(Ae^{j\varepsilon w} + B + Ce^{-j\varepsilon w}\right)\frac{\partial f_1(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0, \\ (\lambda + e^{-j\varepsilon w}\kappa_1){f_0}^{(2)}(\varepsilon, w) - (\mu + \lambda + \kappa_1){f_1}^{(2)}(\varepsilon, w) - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}\frac{\partial f_0(\varepsilon, w)}{\partial w} + \\ +j\varepsilon\frac{\partial f_1(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0, \\ \lambda {f_0}^{(2)}(\varepsilon, w) + (\lambda e^{j\varepsilon w}(A - Ce^{-j\varepsilon w}) - \mu + \left(A + Ce^{-j\varepsilon w} - 1\right)\kappa_1){f_1}^{(2)}(\varepsilon, w) - \\ -j\varepsilon\left(A + Ce^{-j\varepsilon w} - 1\right)\frac{\partial f_1(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0. \end{cases}$$

Подставим в систему разложение:

$$ {f_k}^{(2)}(\varepsilon, w) = (R_k + jw\varepsilon g_k)\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) + O(\varepsilon^2),$$

и получим

$$
\begin{cases}
-(\lambda+\kappa_1)(R_0+jw\varepsilon g_0)\Phi^{(2)}(\mathrm{w})+\big(\mu+\lambda\big(Ae^{2j\varepsilon w}+Be^{j\varepsilon w}+C\big)+ \\
+\big(Ae^{j\varepsilon w}+B+Ce^{-j\varepsilon w}\big)\kappa_1\big)(R_1+jw\varepsilon g_1)\Phi^{(2)}(\mathrm{w})+ \\
+j\varepsilon\left(j\varepsilon g_0\Phi^{(2)}(\mathrm{w})+(R_0+jw\varepsilon g_0)\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\partial w}\right)- \\
-j\varepsilon\big(Ae^{j\varepsilon w}+B+Ce^{-j\varepsilon w}\big)\left(j\varepsilon g_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w})+(R_1+jw\varepsilon g_1)\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\partial w}\right)=0, \\
(\lambda+e^{-j\varepsilon w}\kappa_1)(R_0+jw\varepsilon g_0)\Phi^{(2)}(\mathrm{w})-(\mu+\lambda+\kappa_1)(R_1+jw\varepsilon g_1)\Phi^{(2)}(\mathrm{w})- \\
-j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}\left(j\varepsilon g_0\Phi^{(2)}(\mathrm{w})+(R_0+jw\varepsilon g_0)\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\partial w}\right)+ \\
+j\varepsilon\left(j\varepsilon g_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w})+(R_1+jw\varepsilon g_1)\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\partial w}\right)=0, \\
\lambda(R_0+jw\varepsilon g_0)\Phi^{(2)}(\mathrm{w})+(\lambda e^{j\varepsilon w}\big(A-Ce^{-j\varepsilon w}\big)-\mu+ \\
+\big(A+Ce^{-j\varepsilon w}-1\big)\kappa_1)(R_1+jw\varepsilon g_1)\Phi^{(2)}(\mathrm{w})- \\
-j\varepsilon\big(A+Ce^{-j\varepsilon w}-1\big)\left(j\varepsilon g_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w})+(R_1+jw\varepsilon g_1)\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\partial w}\right)=0
\end{cases}
\qquad (3.4.13)
$$

В полученной системе (3.4.13) выполним предельный переход, при $\varepsilon \to 0$:

$$
\begin{cases}
-(\lambda+\kappa_1)R_0\Phi^{(2)}(\mathrm{w})+(\mu+\lambda(A+B+C)+(A+B+C)\kappa_1)R_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w})=0, \\
(\lambda+\kappa_1)R_0\Phi^{(2)}(\mathrm{w})-(\mu+\lambda+\kappa_1)R_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w})=0, \\
\lambda R_0\Phi^{(2)}(\mathrm{w})+(\lambda(A-C)-\mu+(A+C-1)\kappa_1))R_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w})=0.
\end{cases}
$$

Поделим систему на $\Phi^{(2)}(\mathrm{w})$:

$$
\begin{cases}
-(\lambda+\kappa_1)R_0+(\mu+\lambda(A+B+C)+(A+B+C)\kappa_1)R_1=0, \\
(\lambda+\kappa_1)R_0-(\mu+\lambda+\kappa_1)R_1=0, \\
\lambda R_0+(\lambda(A-C)-\mu+(A+C-1)\kappa_1)R_1=0.
\end{cases}
\qquad (3.4.14)
$$

Из первого уравнения системы (3.4.14) получим:

$$-(\lambda+\kappa_1)R_0+(\mu+\lambda(A+B+C)+(A+B+C)\kappa_1)R_1=0,$$

т.к. $A+B+C=1$, имеем

$$-\lambda R_0+\mu R_1+\lambda R_1=\kappa_1(R_0-R_1),$$

$$\frac{-\lambda R_0+\mu R_1+\lambda R_1}{R_0-R_1}=\kappa_1.$$

Из второго уравнения системы (3.4.14) получим:

$$(\lambda+\kappa_1)R_0-(\mu+\lambda+\kappa_1)R_1=0,$$

$$\lambda R_0-\mu R_1-\lambda R_1=\kappa_1(R_1-R_0),$$

$$\frac{-\lambda R_0+\mu R_1+\lambda R_1}{R_0-R_1}=\kappa_1.$$

Из третьего уравнения системы (3.4.13) получим:

$$\lambda R_0 + (\lambda(A - C) - \mu + (A + C - 1)\kappa_1)R_1 = 0,$$

$$\lambda R_0 + \lambda(A - C)R_1 - \mu R_1 = -(A + C - 1)\kappa_1 R_1,$$

$$-\frac{\lambda R_0 + \mu R_1 - \lambda(A - C)R_1}{(1 - A - C)R_1} = \kappa_1.$$

Значения κ_1 для первой и второй асимптотики совпадают, следовательно, в (3.4.13) слагаемые при ε в нулевой степен обращаются в ноль.

Теперь систему (3.4.13) поделим на $\Phi^{(2)}(\mathrm{w})$ и соберем слагаемые, при ε^1:

$$\begin{cases} -(\lambda + \kappa_1)(R_0 + jw\varepsilon g_0) + (\mu + \lambda\left(Ae^{2j\varepsilon w} + Be^{j\varepsilon w} + C\right) + \\ +\left(Ae^{j\varepsilon w} + B + Ce^{-j\varepsilon w}\right)\kappa_1)(R_1 + jw\varepsilon g_1) + \\ +j\varepsilon\left(j\varepsilon g_0 + (R_0 + jw\varepsilon g_0)\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}\right) - j\varepsilon\left(Ae^{j\varepsilon w} + B + Ce^{-j\varepsilon w}\right)\cdot \\ \cdot\left(j\varepsilon g_1 + (R_1 + jw\varepsilon g_1)\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}\right) = 0, \\ \left(\lambda + e^{-j\varepsilon w}\kappa_1\right)(R_0 + jw\varepsilon g_0) - (\mu + \lambda + \kappa_1)(R_1 + jw\varepsilon g_1) - \\ -j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}\left(j\varepsilon g_0 + (R_0 + jw\varepsilon g_0)\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}\right) + \\ +j\varepsilon\left(j\varepsilon g_1 + (R_1 + jw\varepsilon g_1)\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}\right) = 0, \\ \lambda(R_0 + jw\varepsilon g_0) + (\lambda e^{j\varepsilon w}\left(A - Ce^{-j\varepsilon w}\right) - \mu + \left(A + Ce^{-j\varepsilon w} - 1\right)\cdot \\ \cdot\kappa_1)(R_1 + jw\varepsilon g_1) - j\varepsilon\left(A + Ce^{-j\varepsilon w} - 1\right)\left(j\varepsilon g_1 + (R_1 + jw\varepsilon g_1)\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}\right) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\kappa_1)(R_0+jw\varepsilon g_0)+(\mu+\lambda(A(1+2j\varepsilon w)+B(1+j\varepsilon w)+C)+ \\ +\big(A(1+j\varepsilon w)+B+C(1-j\varepsilon w)\big)\kappa_1)(R_1+jw\varepsilon g_1)+ \\ +j\varepsilon\left(j\varepsilon g_0+(R_0+jw\varepsilon g_0)\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}\right)- \\ -j\varepsilon(A(1+j\varepsilon w)+B+C(1-j\varepsilon w))\left(j\varepsilon g_1+(R_1+jw\varepsilon g_1)\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}\right)=0, \\ (\lambda+(1-j\varepsilon w)\kappa_1)(R_0+jw\varepsilon g_0)-(\mu+\lambda+\kappa_1)(R_1+jw\varepsilon g_1)- \\ -j\varepsilon(1-j\varepsilon w)\left(j\varepsilon g_0+(R_0+jw\varepsilon g_0)\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}\right)+ \\ +j\varepsilon\left(j\varepsilon g_1+(R_1+jw\varepsilon g_1)\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}\right)=0, \\ \lambda(R_0+jw\varepsilon g_0)+(\lambda(1+j\varepsilon w)(A-C(1-j\varepsilon w))-\mu+(A+C(1-j\varepsilon w)-1)\kappa_1)\cdot \\ \cdot(R_1+jw\varepsilon g_1)-j\varepsilon(A+C(1-j\varepsilon w)-1)\left(j\varepsilon g_1+(R_1+jw\varepsilon g_1)\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}\right)=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\kappa_1)jw\varepsilon g_0+R_1(\lambda(2Aj\varepsilon w+Bj\varepsilon w)+\kappa_1(Aj\varepsilon w-Cj\varepsilon w))+ \\ +jw\varepsilon g_1((\mu+\lambda(A+B+C))+ \\ +\kappa_1(A+B+C))+j\varepsilon R_0\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}-j\varepsilon R_1\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}=0, \\ (\lambda+\kappa_1)jw\varepsilon g_0-jw\varepsilon\kappa_1R_0-(\mu+\lambda+\kappa_1)jw\varepsilon g_1-j\varepsilon R_0\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}+ \\ +j\varepsilon R_1\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}=0, \\ \lambda jw\varepsilon g_0+R_1[\lambda Aj\varepsilon w-Cj\varepsilon w\kappa_1]+jw\varepsilon g_1[\lambda A-\lambda C-\mu-(1-A-C)\kappa_1]- \\ -j\varepsilon(A+C-1)R_1\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\kappa_1)g_0+R_1[\lambda 2A+\lambda B+\kappa_1(A-C)]+g_1[(\mu+\lambda[A+B+C])+ \\ +\kappa_1(A+B+C)]+R_0\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\mathrm{w}\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}-R_1\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\mathrm{w}\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}=0, \\ (\lambda+\kappa_1)g_0-\kappa_1R_0-(\mu+\lambda+\kappa_1)g_1-R_0\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\mathrm{w}\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}+R_1\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\mathrm{w}\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}=0, \\ \lambda g_0+R_1(\lambda A-C\kappa_1)+g_1[\lambda A-\lambda C-\mu-(1-A-C)\kappa_1]- \\ -(A+C-1)R_1\dfrac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\mathrm{w}\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}=0. \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
-(\lambda+\kappa_1)g_0 + R_1[\lambda(2A+B)+\kappa_1(A-C)] + \\
+g_1[\mu+\lambda+\kappa_1] = (R_1-R_0)\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\mathrm{w}\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}, \\
(\lambda+\kappa_1)g_0 - \kappa_1 R_0 - (\mu+\lambda+\kappa_1)g_1 = (R_0-R_1)\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\mathrm{w}\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}, \\
\lambda g_0 + R_1(\lambda A - C\kappa_1) + g_1[\lambda A - \lambda C - \mu - (1-A-C)\kappa_1] = \\
= (A+C-1)R_1\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\mathrm{w}\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}.
\end{cases} \tag{3.4.15}
$$

Из (3.4.15) следует, что

$$
\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\mathrm{w}\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w} = const = \kappa_2.
$$

То есть

$$
\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) = e^{\kappa_2\frac{(jw)^2}{2}}.
$$

Суммируя первые два уравнения системы (3.4.15), получаем тождество:

$$
\lambda(A+B)R_1 + \kappa_1(A-C)R_1 + g_1\big((A-1)+B+C\big) - \kappa_1 R_0 = 0.
$$

Оставим в системе (3.4.15) два уравнения для нахождения κ_2 и добавим дополнительное условие $g_0+g_1=0$:

$$
\begin{cases}
\frac{(\lambda+\kappa_1)g_0 - \kappa_1 R_0 - (\mu+\lambda+\kappa_1)g_1}{R_1-R_0} = -\kappa_2, \\
\frac{\lambda g_0 + R_1(\lambda A - \lambda C - C\kappa_1) + g_1[\lambda A - \lambda C - \mu - (1-A-C)\kappa_1]}{(A-1)R_1} = -\kappa_2, \\
g_0+g_1=0.
\end{cases}
$$

Откуда имеем

$$
\kappa_2 = \frac{(\lambda+\kappa_1)g_0 - \kappa_1 R_0 - (\lambda+\mu+\kappa_1)g_1}{R_1-R_0},
$$

в которой g_0, g_1 являются решениями системы уравнений:

$$
\begin{cases}
\frac{(\lambda+\kappa_1)g_0 - \kappa_1 R_0 - (\lambda+\mu+\kappa_1)g_1}{R_1-R_0} = \\
= \frac{\lambda g_0 + R_1(\lambda A - \lambda C - C\kappa_1) + g_1(\lambda A - \lambda C - \mu - (1-A-C)\kappa_1)}{(A-1)R_1}, \\
g_0+g_1=0.
\end{cases}
$$

Делая обратные замены, получаем

$$h_k{}^{(2)}(u) = f_k{}^{(2)}(\varepsilon, w) = \left(R_k + jw\varepsilon g_k\right)e^{\kappa_2\frac{(jw)^2}{2}} + o(\varepsilon^2) \approx R_k e^{\frac{\kappa_2}{\sigma}\frac{(ju)^2}{2}},$$

затем, выражения (3.4.11), можно записать как

$$h_k{}^{(2)}(u) = e^{\frac{\kappa_1}{\sigma}ju} h_k{}^{(2)}(u) \approx R_k e^{\frac{\kappa_1}{\sigma}ju + \frac{\kappa_2}{\sigma}\frac{(ju)^2}{2}}.$$

Для асимптотической характеристической функции числа заявок на орбите с учетом (3.4.11) имеем

$$h(u) = e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} h^{(2)}(u) = e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} e^{\frac{j^2u^2\kappa_2}{2\sigma}} = e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2\kappa_2}{2\sigma}}.$$

Таким образом, найденная асимптотика второго порядка показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа *i(t)* заявок на орбите в рассматриваемой системе является гауссовским с асимптотическим средним κ_1/σ и дисперсией κ_2/σ.

3.5 Нахождение численных результатов распределения вероятностей числа заявок на орбите

В данной главе представлено описание численного анализа вероятностно-временных характеристик системы совместного доступа с коллизиями и H1, H2 настойчивыми заявками и отказами.

Программное обеспечение для моделирования данной СМО на базе математической модели реализовано в виде рабочих листов системы Mathcad.

В таблице 8 представлен текст программы для нахождения допредельного распределения вероятностей числа заявок на орбите, реализованной в виде рабочих листов системы Mathcad.

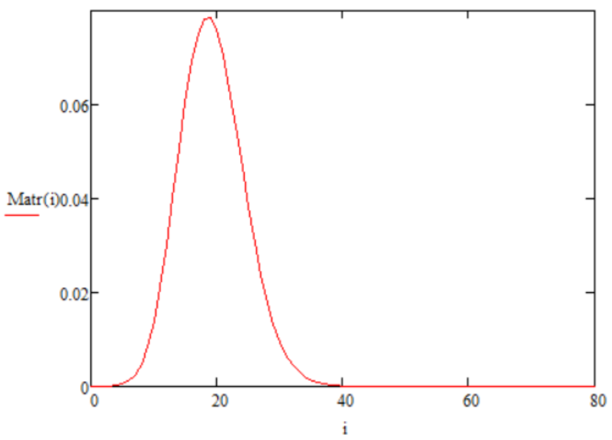
Таблица 8 – Блок вычисления допредельного распределения вероятностей числа заявок на орбите

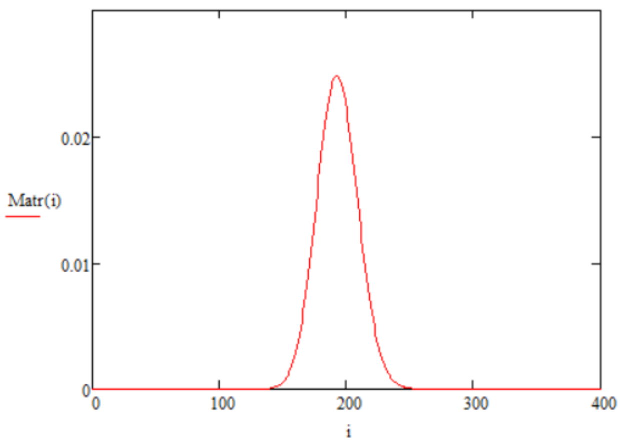
Параметры потока	
$n := 100$ $i := 0..n$	– определяет количество заявок на орбите, которое меняется от 0 до некоторого значения n;
$\lambda := 0.4$	– интенсивность потока заявок;
$\mu := 1$	– интенсивность обслуживания;

<table>
<tr><td>$\sigma := 0.1$</td><td>– интенсивность задержки заявки на орбите;</td></tr>
<tr><td>$H1 := 0.4$</td><td>– вероятность ухода первой заявки на орбиту;</td></tr>
<tr><td>$H2 := 0.8$</td><td>– вероятность ухода второй заявки на орбиту;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Нахождение распределения числа заявок на орбите</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2\cdot n \\ \quad \text{for } k \in 0..2n \\ \quad\quad A1_{i,k} \leftarrow 0 \\ A1_{0,0} \leftarrow -\lambda \\ A1_{1,0} \leftarrow \mu + \lambda\cdot(1-H1)(1-H2) \\ A1_{3,0} \leftarrow \sigma\cdot(1-H1)(1-H2) \\ A1_{0,1} \leftarrow \lambda \\ A1_{1,1} \leftarrow -(\lambda+\mu) \\ A1_{2,1} \leftarrow \sigma \end{array}$$</td><td>– коэффициенты матрицы A для i = 0;</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{l} \text{for } k \in 1 \\ \quad A1_{2k-1,2\cdot k} \leftarrow \lambda\cdot(1-H2)H1 + \lambda\cdot(1-H1)H2 \\ \quad A1_{2\cdot k,2\cdot k} \leftarrow -(\lambda+\sigma) \\ \quad A1_{2\cdot k+1,2\cdot k} \leftarrow \mu + \lambda\cdot(1-H1)(1-H2) + \sigma\cdot(1-H1)\cdot H2 + \sigma\cdot(1-H2)\cdot H1 \\ \quad A1_{2\cdot k+3,2\cdot k} \leftarrow 2\sigma\cdot(1-H1)(1-H2) \\ \quad A1_{2\cdot k,2\cdot k+1} \leftarrow \lambda \\ \quad A1_{2\cdot k+1,2\cdot k+1} \leftarrow -(\lambda+\mu+\sigma) \\ \quad A1_{2\cdot k+2,2\cdot k+1} \leftarrow 2\sigma \end{array}$$</td><td>– коэффициенты матрицы A для i = 1;</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{l} \text{for } k \in 2..n-1 \\ \quad A1_{(2\cdot k-2)-1,2k} \leftarrow \lambda\cdot H1\cdot H2 \\ \quad A1_{2\cdot k-1,2\cdot k} \leftarrow \lambda\cdot[H1\cdot(1-H2) + H2\cdot(1-H1)] + (k-1)\sigma\cdot H1\cdot H2 \\ \quad A1_{2\cdot k,2\cdot k} \leftarrow -(\lambda + k\cdot\sigma) \\ \quad A1_{2\cdot k+1,2\cdot k} \leftarrow \mu + \lambda\cdot(1-H1)(1-H2) + [H1\cdot(1-H2) + H2\cdot(1-H1)]\cdot k\cdot\sigma \\ \quad A1_{2\cdot k+3,2\cdot k} \leftarrow (k+1)\cdot\sigma\cdot(1-H1)(1-H2) \\ \quad A1_{2k,2\cdot k+1} \leftarrow \lambda \\ \quad A1_{2\cdot k+1,2\cdot k+1} \leftarrow -(\mu+\lambda+k\cdot\sigma) \\ \quad A1_{2\cdot k+2,2\cdot k+1} \leftarrow (k+1)\cdot\sigma \end{array}$$</td><td>– коэффициенты матрицы A для i = 2, 3, n-1;</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{l} A1_{2n,2n} \leftarrow -(\lambda + n\cdot\sigma) \\ A1_{2n-1,2n} \leftarrow \lambda\cdot[H1\cdot(1-H2) + H2\cdot(1-H1)] + (n-1)\sigma\cdot H1\cdot H2 \\ A1_{2n-3,2n} \leftarrow \lambda\cdot H1\cdot H2 \\ A1_{2n+1,2n} \leftarrow \mu + \lambda\cdot(1-H1)(1-H2) + [H1\cdot(1-H2) + H2\cdot(1-H1)]\cdot n\cdot\sigma \\ A1_{2n,2\cdot n+1} \leftarrow \lambda \\ A1_{2n+1,2\cdot n+1} \leftarrow -(\mu+\lambda+n\cdot\sigma) \\ \text{for } i \in 0..2\cdot n+1 \\ \quad A1_{i,2\cdot n+2} \leftarrow 1 \end{array}$$</td><td>– коэффициенты матрицы A для i = n;</td></tr>
</table>

$v := \left\vert \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2 \cdot n + 1 \\ \quad v_i \leftarrow 0 \\ v_{2 \cdot n+2} \leftarrow 1 \\ v \end{array} \right.$	– формируем вектор-столбец **B**
$Pstat21 := v^T \cdot A1^T \cdot \left(A1 \cdot A1^T\right)^{-1}$	– находим вектор-столбец **X** путем решения алгебраических уравнений через обратную матрицу

Для определения влияния параметров на распределение вероятностей, проведем серию экспериментов с уменьшением значений σ. На рисунках 15, 16 изображены графики распределения вероятностей числа заявок на орбите.



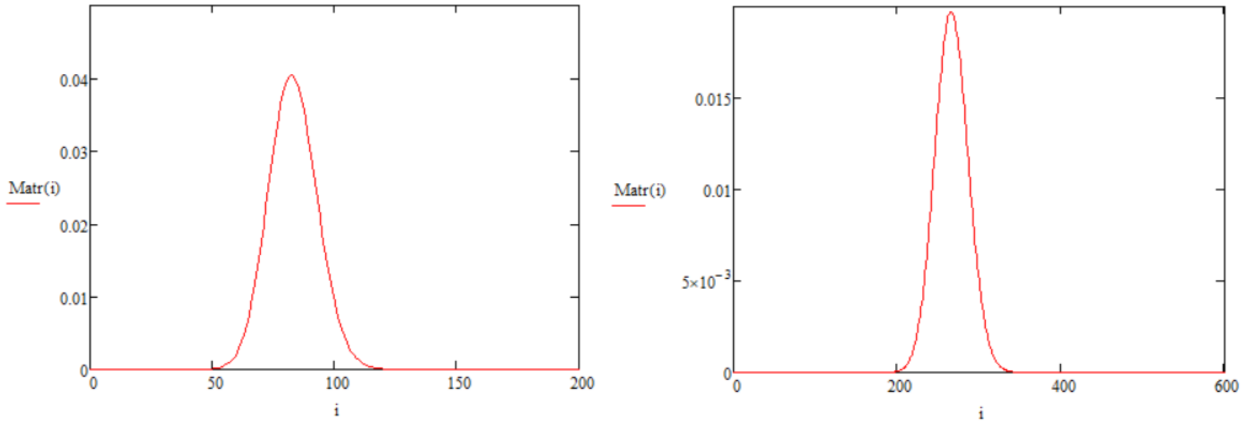


А) $\lambda = 0.4$, $\sigma = 0.01$, $\mu = 1$, Б) $\lambda = 0.4$, $\sigma = 0.001$, $\mu = 1$

Рисунок 16 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите для RQ-системы с коллизиями и отказами, при H1 = 0.4, H2 = 0.8

Из полученных результатов следует, что при уменьшении случайной задержки, которую осуществляет заявка на орбите в случае возникновения конфликта, распределение числа заявок на орбите имеет вид гауссовского.

На рисунке 16 видно, что при увеличении параметров вероятности отказа H_1, H_2 среднее число заявок на орбите также увеличивается.



А) $H_1 = 0.4$, $H_2 = 0.3$ Б) $H_1 = 0.6$, $H_2 = 0.8$

Рисунок 17 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите для RQ-системы с коллизиями и отказами, при $\lambda = 0.4$, $\mu = 1$, $\sigma = 0.001$

4 RQ-система MMPP/M/1 с коллизиями и H настойчивыми заявками

4.1 Математическая модель системы совместного доступа с коллизиями и H настойчивыми заявками

Рассмотрим модификацию однолинейной RQ-системы с конфликтами заявок и H настойчивыми заявками, рассмотренную в главе 1, на вход которой поступает марковский модулированный поток (MMPP-поток), управляемый цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний $k(t) = 1, 2, \dots, K$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \|qij\|$, $i, j = 1, 2, \dots, K$ и диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Продолжительность обслуживания имеет экспоненциальную функцию распределения с параметром μ. Случайная задержка, которую осуществляет заявка на орбите в случае возникновения конфликта, экспоненциально распределена с параметром σ.

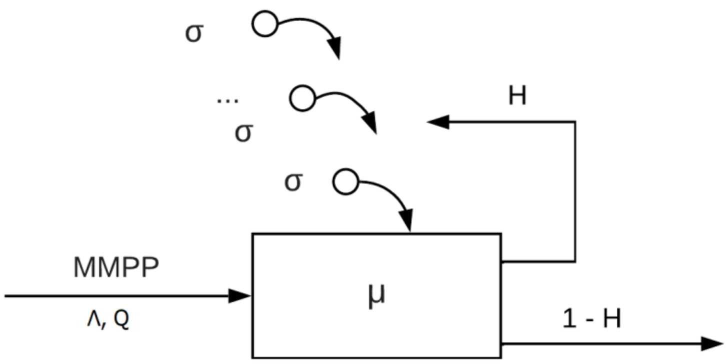


Рисунок 18 – RQ-система MMPP/M/1 с коллизиями и H настойчивыми заявками

Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его и начинает обслуживание, которое заканчивается успешно, если во время него другие заявки не поступали. Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки вступают в конфликт. При этом, будем считать, что заявка с прибора уходит на орбиту с вероятностью 1, заявка, вызвавшая конфликт, уходит на орбиту с вероятностью H, а с вероятностью $1 - H$ покидает систему.

Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t, $k(t) = 1, 2, \dots, K$ – состояние управляющей цепи Маркова, $l(t)$ будет определять состояние прибора следующим образом:

$$l(t) = \begin{cases} 0, \text{если прибор свободен,} \\ 1, \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

$P\{l(t)=l, k(t)=k, i(t)=i\} = P_l(i,t)$– вероятность того, что управляющая потоком цепь Маркова находится в состоянии k, прибор в момент времени находится в состоянии l, и в источнике повторных вызовов i заявок.

4.1.1 Система уравнений Колмогорова

Для $P_l(k,i,t)$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_0(k,i,t)}{\partial t} = -(\lambda_k + i\sigma)P_0(k,i,t) + \mu P_1(k,i,t) + H\lambda_k P_1(k,i-2,t) + \\ \qquad (1-H)\lambda_k P_1(k,i-1,t) + H(i-1)\sigma P_1(k,i-1,t) + \\ \qquad +(1-H)i\sigma P_1(k,i,t) + \sum\limits_{\nu} q_{\nu k} P_0(\nu,i,t), \\ \dfrac{\partial P_1(k,i,t)}{\partial t} = -(\mu + \lambda_k + i\sigma)P_1(k,i,t) + \lambda_k P_0(k,i,t) + \\ \qquad +\sigma(i+1)P_0(k,i+1,t) + \sum\limits_{\nu} q_{\nu k} P_1(\nu,i,t). \end{cases}$$

Запишем систему уравнений Колмогорова в стационарном режиме $\lim\limits_{t\to\infty} P_l(i,t) = \Pi_l(i)$:

$$\begin{cases} -(\lambda_k + i\sigma)P_0(k,i) + \mu P_1(k,i) + H\lambda_k P_1(k,i-2) + (1-H)\lambda_k P_1(k,i-1) + \\ \qquad +H(i-1)\sigma P_1(k,i-1) + (1-H)i\sigma P_1(k,i) + \sum\limits_{\nu} q_{\nu k} P_0(\nu,i) = 0, \\ -(\mu + \lambda_k + i\sigma)P_1(k,i) + \lambda_k P_0(k,i) + \sigma(i+1)P_0(k,i+1) + \sum\limits_{\nu} q_{\nu k} P_1(\nu,i) = 0. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

4.1.2 Метод характеристических функций

Введем частичные характеристические функции вида:

$$h_l(k,u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui}\Pi_l(k,i), \qquad l = \{0,1\},$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Тогда из системы (4.1.1) получим систему двух уравнений относительно функций $h_l(k,u)$:

$$\begin{cases} -\lambda_k h_0(k,u) + j\sigma \dfrac{\partial h_0(k,u)}{\partial u} + \mu h_1(k,u) + \lambda_k H e^{2ju} h_1(k,u) + \lambda_k (1-H) e^{ju} h_1(k,u) - \\ \qquad -j\sigma H e^{ju} \dfrac{\partial h_1(k,u)}{\partial u} - j\sigma(1-H)\dfrac{\partial h_1(k,u)}{\partial u} + \sum\limits_{\nu} q_{\nu k} h_0(\nu,i) = 0, \\ -\mu h_1(k,u) - \lambda_k h_1(k,u) + j\sigma \dfrac{\partial h_1(k,u)}{\partial u} + \lambda_k h_0(k,u) - j\sigma e^{-ju} \dfrac{\partial h_0(k,u)}{\partial u} + \\ \qquad + \sum\limits_{\nu} q_{\nu k} h_1(\nu,u) = 0 \end{cases}$$

Запишем систему в матричном виде:

$\boldsymbol{h}_l(u) = \{h_l(1,u), h_l(2,u), \ldots, h_l(K,u)\}$ – вектор-строка характеристических функций;

$\mathbf{Q}$ – матрица инфинитезимальных характеристик $q_{k_1 k_2}$;

$\boldsymbol{\Lambda}$ – диагональная матрица с элементами λ_k по главной диагонали;

$$\begin{cases} -\mathbf{h}_0(u)\boldsymbol{\Lambda} + j\sigma \frac{\partial \mathbf{h}_0(u)}{\partial u} + \mu \mathbf{h}_1(u) + He^{2ju}\mathbf{h}_1(u)\boldsymbol{\Lambda} + (1-H)e^{ju}\mathbf{h}_1(u)\boldsymbol{\Lambda} - \\ \qquad -j\sigma H e^{ju} \frac{\partial \mathbf{h}_1(u)}{\partial u} - j\sigma(1-H)\frac{\partial \mathbf{h}_1(u)}{\partial u} + \mathbf{h}_0(u)\mathbf{Q} = 0, \\ -\mu \mathbf{h}_1(u) - \mathbf{h}_1(u)\boldsymbol{\Lambda} + j\sigma \frac{\partial \mathbf{h}_1(u)}{\partial u} + \mathbf{h}_0(u)\boldsymbol{\Lambda} - j\sigma e^{-ju}\frac{\partial \mathbf{h}_0(u)}{\partial u} + \mathbf{h}_1(u)\mathbf{Q} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\mathbf{h}_0(u)(\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{Q}) + \mathbf{h}_1(u)\big(\mu\mathbf{I} + He^{2ju}\boldsymbol{\Lambda} + (1-H)e^{ju}\boldsymbol{\Lambda}\big) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{h}_0(u)}{\partial u} - \\ \qquad -j\sigma \frac{\partial \mathbf{h}_1(u)}{\partial u}(He^{ju} + 1 - H) = 0, \\ -\mathbf{h}_1(u)(\mu\mathbf{I} + \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{Q}) + \mathbf{h}_0(u)\boldsymbol{\Lambda} - j\sigma e^{-ju}\frac{\partial \mathbf{h}_0(u)}{\partial u} + j\sigma \frac{\partial \mathbf{h}_1(u)}{\partial u} = 0, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Далее, в разделе 4.2 будем решать систему (4.1.2) методом асимптотического анализа.

4.2 Асимптотический анализ системы совместного доступа с коллизиями и H настойчивыми заявками

Умножим второе уравнение системы (4.1.2) на e^{ju} и суммируя уравнения системы, получим дополнительное уравнение:

$$-\mathbf{h}_0(u)\boldsymbol{\Lambda}\big(1 - e^{ju}\big) + \mu\mathbf{h}_1(u)\big(1 - e^{ju}\big) + \mathbf{h}_1(u)\boldsymbol{\Lambda}\big(He^{ju} + 1 - H - 1\big) -$$

$$-j\sigma \frac{\partial \mathbf{h}_1(u)}{\partial u}(He^{ju} + 1 - H - e^{ju}) + \mathbf{h}_0(u)\mathbf{Q} + \mathbf{h}_1(u)\mathbf{Q}e^{ju} = 0,$$

$$\left(e^{ju}-1\right)\mathbf{h}_0(u)\mathbf{\Lambda}-\left(e^{ju}-1\right)\mu\mathbf{h}_1(u)+\mathbf{h}_1(u)\mathbf{\Lambda}\mathrm{H}\left(e^{ju}-1\right)-$$
$$-j\sigma\frac{\partial\mathbf{h}_1(u)}{\partial u}(1-e^{ju})(H-1)+\mathbf{h}_0(u)\mathbf{Q}+\mathbf{h}_1(u)\mathbf{Q}e^{ju}=0. \qquad (4.2.1)$$

Домножим уравнение (4.2.1) на $\mathbf{e}=\begin{bmatrix}1\\1\\\dots\\1\end{bmatrix}$:

$$\left(e^{ju}-1\right)\mathbf{h}_0(u)\mathbf{\Lambda e}-\left(e^{ju}-1\right)\mu\mathbf{h}_1(u)\mathbf{e}+\mathrm{H}\left(e^{ju}-1\right)\mathbf{h}_1(u)\mathbf{\Lambda e}-$$
$$-j\sigma\frac{\partial\mathbf{h}_1(u)}{\partial u}\mathbf{e}(e^{ju}-1)(H-1)=0. \qquad (4.2.2)$$

Разделим уравнение (4.2.2) на $(e^{ju}-1)$:

$$\mathbf{h}_0(u)\mathbf{\Lambda e}-\mu\mathbf{h}_1(u)\mathbf{e}+\mathrm{H}\mathbf{h}_1(u)\mathbf{\Lambda e}+(1-H)j\sigma\frac{\partial\mathbf{h}_1(u)}{\partial u}\mathbf{e}=0,$$

Получим систему:

$$\begin{cases}-\mathbf{\Lambda h}_0(u)+j\sigma\frac{\partial\mathbf{h}_0(u)}{\partial u}+\mu\mathbf{h}_1(u)+He^{2ju}\mathbf{\Lambda h}_1(u)+(1-H)e^{ju}\mathbf{\Lambda h}_1(u)-\\ \quad -j\sigma He^{ju}\frac{\partial\mathbf{h}_1(u)}{\partial u}-j\sigma(1-H)\frac{\partial\mathbf{h}_1(u)}{\partial u}+\mathbf{Qh}_0(u)=0,\\ -\mu\mathbf{h}_1(u)-\mathbf{\Lambda h}_1(u)+j\sigma\frac{\partial\mathbf{h}_1(u)}{\partial u}+\mathbf{\Lambda h}_0(u)-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial\mathbf{h}_0(u)}{\partial u}+\mathbf{Qh}_1(u)=0.\\ \mathbf{h}_0(u)\mathbf{\Lambda e}+\mathbf{h}_1(u)(\mathrm{H}\mathbf{\Lambda e}-\mu\mathbf{Ie})+(1-H)j\sigma\frac{\partial\mathbf{h}_1(u)}{\partial u}\mathbf{e}=0.\end{cases} \qquad (4.2.3)$$

которую будем решать методом асимптотического анализа в предельном условии $\sigma\to 0$.

4.2.1 Асимптотика первого порядка

Для нахождения асимптотики первого порядка в системе (4.2.3) выполним следующие замены:

$$\sigma=\varepsilon, u=\varepsilon w, \mathbf{h}_k(u)=\mathbf{f}_k(\varepsilon,w).$$

Тогда система уравнений (4.2.3) примет вид:

$$\begin{cases} -\mathbf{f}_0(\varepsilon,w)(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q})+\mathbf{f}_1(\varepsilon,w)\left(\mu\mathbf{I}+He^{2j\varepsilon w}\mathbf{\Lambda}+(1-H)e^{j\varepsilon w}\mathbf{\Lambda}\right)+j\dfrac{\partial\mathbf{f}_0(\varepsilon,w)}{\partial w} \\ -j\dfrac{\partial\mathbf{f}_1(\varepsilon,w)}{\partial w}(He^{j\varepsilon w}+1-H)=0, \\ -\mathbf{f}_1(\varepsilon,w)(\mu\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q})+\mathbf{f}_0(\varepsilon,w)\mathbf{\Lambda}-je^{-j\varepsilon w}\dfrac{\partial\mathbf{f}_0(\varepsilon,w)}{\partial w}+j\dfrac{\partial\mathbf{f}_1(\varepsilon,w)}{\partial w}=0. \\ \mathbf{f}_0(\varepsilon,w)\mathbf{\Lambda e}-\mu\mathbf{f}_1(\varepsilon,w)\mathbf{e}+\mathrm{H}\mathbf{f}_1(\varepsilon,w)\mathbf{\Lambda e}+(1-H)j\dfrac{\partial\mathbf{f}_1(\varepsilon,w)}{\partial w}\mathbf{e}=0. \end{cases}$$

Решение для $f_k(\varepsilon,w)$ будем искать в виде:

$$f_k(\varepsilon,w)=\mathbf{r}_k\Phi(\mathrm{w})+o(\varepsilon) \tag{4.2.4}$$

где $\mathbf{r}_0=\{r_0(1),r_0(2),\dots,r_0(K)\},\mathbf{r}_1=\{r_1(1),r_1(2),\dots,r_1(K)\};\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_1=\mathbf{r}:\begin{cases}\mathbf{rQ}=0,\\ \mathbf{re}=1\end{cases}$

Получаем:

$$\begin{cases} -\mathbf{r}_0(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q})\Phi(\mathrm{w})+\mathbf{r}_1\left(\mu\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}\left(H+(1-H)\right)\right)\Phi(\mathrm{w})+j\mathbf{r}_0\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} \\ -j\mathbf{r}_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w}(H+1-H)=0, \\ -\mathbf{r}_1(\mu\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q})\Phi(\mathrm{w})+\mathbf{r}_0\Phi(\mathrm{w})\mathbf{\Lambda}-j\mathbf{r}_0\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w}+j\mathbf{r}_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w}=0. \\ \mathbf{r}_0\mathbf{\Lambda e}\Phi(\mathrm{w})-\mu\mathbf{r}_1\mathbf{e}\Phi(\mathrm{w})+\mathrm{H}\mathbf{r}_1\mathbf{\Lambda e}\Phi(\mathrm{w})+(1-H)j\mathbf{r}_1\mathbf{e}\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w}=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\mathbf{r}_0(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q})\Phi(\mathrm{w})+\mathbf{r}_1(\mu\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda})\Phi(\mathrm{w})+j\mathbf{r}_0\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w}-j\mathbf{r}_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w}=0, \\ -\mathbf{r}_1(\mu\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q})\Phi(\mathrm{w})+\mathbf{r}_0\mathbf{\Lambda}\Phi(\mathrm{w})-j\mathbf{r}_0\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w}+j\mathbf{r}_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w}=0. \\ \mathbf{r}_0\mathbf{\Lambda e}\Phi(\mathrm{w})-\mu\mathbf{r}_1\mathbf{e}\Phi(\mathrm{w})+\mathrm{H}\mathbf{r}_1\mathbf{\Lambda e}\Phi(\mathrm{w})+(1-H)j\mathbf{r}_1\mathbf{e}\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w}=0. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

Домножим первое и второе уравнение системы (4.2.5) на $\mathbf{e}=\begin{bmatrix}1\\1\\\dots\\1\end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} -\mathbf{r}_0(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q})\mathbf{e}\Phi(\mathrm{w})+\mathbf{r}_1(\mu\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{e}\Phi(\mathrm{w})+j\mathbf{r}_0\mathbf{e}\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w}-j\mathbf{r}_1\mathbf{e}\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w}=0, \\ -\mathbf{r}_1(\mu\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q})\mathbf{e}\Phi(\mathrm{w})+\mathbf{r}_0\mathbf{\Lambda e}\Phi(\mathrm{w})-j\mathbf{r}_0e\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w}+j\mathbf{r}_1\mathbf{e}\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w}=0. \\ \mathbf{r}_0\mathbf{\Lambda e}\Phi(\mathrm{w})-\mu\mathbf{r}_1\mathbf{e}\Phi(\mathrm{w})+\mathrm{H}\mathbf{r}_1\mathbf{\Lambda e}\Phi(\mathrm{w})+(1-H)j\mathbf{r}_1\mathbf{e}\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w}=0. \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Учитывая, что $\mathbf{Qe}=0$:

$$\mathbf{r\Lambda e}=[r(1),\dots,r(K)]\begin{bmatrix}\lambda_1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \lambda_K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \dots\\ 1\end{bmatrix}=\sum_{s=1}^{K}r(s)\lambda_s=\lambda,$$

– интенсивность входящего MMPP-потока, то обозначим:

$$\mathbf{r}_0\mathbf{\Lambda e} = [r_0(1), \dots, r_0(K)] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^{K} R_0\, r(s)\lambda_s = R_0\lambda, \qquad (4.2.7)$$

– интенсивность входящего потока и прибор свободен,

$$\mathbf{r}_1\mathbf{\Lambda e} = [r_1(1), \dots, r_1(K)] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^{K} R_1\, r(s)\lambda_s = R_1\lambda, \qquad (4.2.8)$$

– интенсивность входящего потока и прибор занят.

$$\mathbf{r}_1\mathbf{e} = [r_1(1), \dots, r_1(K) \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^{K} r_1\,(s) = R_1, \qquad (4.2.9)$$

– вероятность того что прибор занят,

$$\mathbf{r}_0\mathbf{e} = [r_0(1), \dots, r_0(K) \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^{K} r_0\,(s) = R_0, \qquad (4.2.10)$$

– вероятность того что прибор свободен.

Выполнив замены в (4.1.8) получаем систему:

$$\begin{cases} -\lambda R_0\Phi(\mathrm{w}) + (\mu R_1 + \lambda R_1)\Phi(\mathrm{w}) + j(R_0 - R_1)\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} = 0, \\ -(\mu R_1 + \lambda R_1)\Phi(\mathrm{w}) + \lambda R_0\Phi(\mathrm{w}) - j(R_0 - R_1)\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} = 0. \\ \lambda R_0\Phi(\mathrm{w}) - \mu R_1\Phi(\mathrm{w}) + \mathrm{H}\lambda R_1\Phi(\mathrm{w}) + (1-H)jR_1\frac{\partial\Phi(\mathrm{w})}{\partial w} = 0. \end{cases} \qquad (4.2.11)$$

Из первого и второго уравнения системы (4.2.11) получаем дифференциальное уравнение:

$$j(R_0 - R_1)\frac{\partial\Phi(w)}{\partial w} = (\lambda R_0 - \mu R_1 - \lambda R_1)\Phi(w),$$

$$j\frac{d\Phi(w)}{\Phi(w)} = \frac{\lambda R_0 - \mu R_1 - \lambda R_1}{R_0 - R_1}dw.$$

Из третьего уравнения системы (4.2.11) получаем:

$$(1-H)jR_1\frac{\partial\Phi(w)}{\partial w} = (-\lambda R_0 + \mu R_1 - H\lambda R_1)\Phi(w),$$

$$j\frac{d\Phi(w)}{\Phi(w)} = \frac{-\lambda R_0 + \mu R_1 - H\lambda R_1}{(1-H)R_1}dw.$$

Отсюда, добавив условие нормировки, получаем систему уравнений для R_1 ,R_2:

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda R_0 - \mu R_1 - \lambda R_1}{R_0 - R_1} = \dfrac{-\lambda R_0 + \mu R_1 - H\lambda R_1}{(1-H)R_1},\\ R_0 + R_1 = 1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{\lambda - \mu R_1}{(1-H)R_1} + \lambda = \lambda - \dfrac{\mu R_1}{(1-2R_1)},\\ R_0 + R_1 = 1,\end{cases} \qquad (4.2.12)$$

Из первого уравнения системы (4.2.12) получаем квадратное уравнение для нахождения R_0, R_1:

$$(1-2R_1)(\lambda - \mu R_1) = \mu(1-H)R_1^2,$$

$$\lambda - (\mu + 2\lambda)R_1 + \mu(1+H)R_1^2 = 0,$$

$$\mu(1+H)R_1^2 - (\mu + 2\lambda)R_1 + \lambda = 0. \qquad (4.2.13)$$

Вернемся к (4.2.12):

$$-\frac{\lambda R_0 + (\lambda H - \mu)R_1}{(1-H)R_1} = \frac{\lambda R_0 - (\mu + \lambda)R_1}{(R_0 - R_1)} = -\kappa,$$

$$-\frac{\lambda - \mu R_1}{(1-H)R_1} + \lambda = \lambda - \frac{\mu R_1}{(1-2R_1)} = -\kappa,$$

$$-\kappa = j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)},$$

$$j\kappa = \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)},$$

$$\Phi(w) = e^{j\kappa t},$$

где $\kappa = \frac{\mu R_1}{1-2R_1} - \lambda$.

Вернемся к исходной характеристической функции с помощью обратных изменений и поставим ε = σ. Тогда

$$h_k(u) = f_k(\varepsilon, w) = f_k(w) + o(\varepsilon) \approx f_k(w) = f_k\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) = R_k e^{\frac{\kappa_1}{\sigma}ju}.$$

Принимая во внимание условие нормировки $R_0 + R_1 = 1$, получим, что асимптотическая характеристическая функция первого порядка имеет вид

$$h^{(1)}(u) = h_0(u) + h_1(u) = e^{\frac{\kappa_1}{\sigma}ju}.$$

Полученная величина κ_1 определяет асимптотическое среднее значение κ_1/σ числа заявок на орбите в системе совместного доступа с ненастойчивыми заявками, конфликтами и отказами. Для построения гауссовской аппроксимации распределения вероятностей числа *i(t)* заявок на орбите рассмотрим асимптотику второго порядка.

4.3.2 Асимптотика второго порядка

Выполнив в системе (4.2.3) замены

$$h_k(u) = e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}} h_k^{(2)}(u), \tag{4.2.14}$$

Получим

$$\begin{cases} -e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{h}_0^{(2)}(u) + e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}j\sigma\dfrac{\partial \mathbf{h}_0^{(2)}(u)}{\partial u} + e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}\mu\mathbf{h}_1^{(2)}(u) + e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}He^{2ju}\mathbf{\Lambda}\mathbf{h}_1^{(2)}(u) + \\ +e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}(1-H)e^{ju}\mathbf{\Lambda}\mathbf{h}_1^{(2)}(u) - e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}j\sigma He^{ju}\dfrac{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}(u)}{\partial u} - e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}j\sigma(1-H)\dfrac{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}(u)}{\partial u} + \\ +e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}\mathbf{Q}\mathbf{h}_0^{(2)}(u) = 0, \\ -e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}\mu\mathbf{h}_1^{(2)}(u) - e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{h}_1^{(2)}(u) + e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}j\sigma\dfrac{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}(u)}{\partial u} + \\ +e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{h}_0^{(2)}(u) - e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}j\sigma e^{-ju}\dfrac{\partial \mathbf{h}_0^{(2)}(u)}{\partial u} + e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}\mathbf{Q}\mathbf{h}_1^{(2)}(u) = 0, \\ e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{h}_0^{(2)}(u)\mathbf{e} + e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}\mathbf{h}_1^{(2)}(u)(\mathrm{H}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} - \mu\mathbf{I}\mathbf{e}) + e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}(1-H)j\sigma\dfrac{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}(u)}{\partial u}\mathbf{e} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\mathbf{h}_0^{(2)}(u)(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{Q} + \kappa_1\mathbf{I}) + \mathbf{h}_1^{(2)}(u)\big(\mu\mathbf{I} + (1-H)e^{ju}\mathbf{\Lambda} + He^{2ju}\mathbf{\Lambda} + \\ +\Big((1-H) + He^{ju}\Big)\kappa_1\mathbf{I}\big) + j\sigma\dfrac{\partial \mathbf{h}_0^{(2)}(u)}{\partial u} - j\sigma\Big((1-H) + He^{ju}\Big)\dfrac{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}(u)}{\partial u} = 0, \\ \mathbf{h}_0^{(2)}(u)\big(\mathbf{\Lambda} + e^{ju}\kappa_1\mathbf{I}\big) - \mathbf{h}_1^{(2)}(u)(\mu\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda} - \mathbf{Q} + \kappa_1\mathbf{I}) - j\sigma e^{-ju}\dfrac{\partial \mathbf{h}_0^{(2)}(u)}{\partial u} + \\ +j\sigma\dfrac{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}(u)}{\partial u} = 0, \\ \mathbf{\Lambda}\mathbf{h}_0^{(2)}(u)\mathbf{e} + \mathbf{h}_1^{(2)}(u)\big(He^{ju}\mathbf{\Lambda} - \mu\mathbf{I} - (1-H)\kappa_1\mathbf{I}\big)\mathbf{e} + j\sigma(1-H)\dfrac{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}(u)}{\partial u}\mathbf{e} = 0. \end{cases}$$

Сделаем замены

$$\sigma = \varepsilon^2, u = \varepsilon w, h_k^{(2)}(u) = f_k^{(2)}(\varepsilon, w),$$

тогда

$$\begin{cases} -\mathbf{f}_0{}^{(2)}(\varepsilon,w)(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q}+\kappa_1\mathbf{I})+\mathbf{f}_1{}^{(2)}(\varepsilon,w)\big(\mu\mathbf{I}+(1-H)e^{j\varepsilon w}\mathbf{\Lambda}+He^{2j\varepsilon w}\mathbf{\Lambda}+ \\ +\Big((1-H)+He^{j\varepsilon w}\Big)\kappa_1\mathbf{I})+j\varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{f}_0{}^{(2)}(\varepsilon,w)}{\partial w}-j\varepsilon\Big((1-H)+He^{j\varepsilon w}\Big)\dfrac{\partial\mathbf{f}_1{}^{(2)}(\varepsilon,w)}{\partial w}=0, \\ \mathbf{f}_0{}^{(2)}(\varepsilon,w)\big(\mathbf{\Lambda}+e^{j\varepsilon w}\kappa_1\mathbf{I}\big)-\mathbf{f}_1{}^{(2)}(\varepsilon,w)(\mu\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q}+\kappa_1\mathbf{I})- \\ -j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}\dfrac{\partial\mathbf{f}_0{}^{(2)}(\varepsilon,w)}{\partial w}+j\varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{f}_1{}^{(2)}(\varepsilon,w)}{\partial w}=0, \\ \mathbf{\Lambda}\mathbf{f}_0{}^{(2)}(\varepsilon,w)\mathbf{e}+\mathbf{f}_1{}^{(2)}(\varepsilon,w)\big(He^{j\varepsilon w}\mathbf{\Lambda}-\mu\mathbf{I}-(1-H)\kappa_1\mathbf{I}\big)\mathbf{e}+j\varepsilon(1-H)\dfrac{\partial\mathbf{f}_1{}^{(2)}(\varepsilon,w)}{\partial w}\mathbf{e}=0. \end{cases}$$

В систему подставим разложение

$$f_k{}^{(2)}(\varepsilon,w)=(\boldsymbol{r}_k+jw\varepsilon\boldsymbol{g}_k)\Phi^{(2)}(\mathrm{w})+O(\varepsilon^2),$$

$$\begin{cases} -(\boldsymbol{r}_0+jw\varepsilon\boldsymbol{g}_0)\Phi^{(2)}(\mathrm{w})(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q}+\kappa_1\mathbf{I})+(\boldsymbol{r}_1+jw\varepsilon\boldsymbol{g}_1)\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\cdot \\ \cdot\big(\mu\mathbf{I}+(1-H)e^{j\varepsilon w}\mathbf{\Lambda}+He^{2j\varepsilon w}\mathbf{\Lambda}+\Big((1-H)+He^{j\varepsilon w}\Big)\kappa_1\mathbf{I}\Big)+ \\ +j\varepsilon((\boldsymbol{r}_0+jw\varepsilon\boldsymbol{g}_0)\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\partial w}-j\varepsilon\boldsymbol{g}_0\Phi^{(2)}(\mathrm{w}))\ - \\ -j\varepsilon\Big((1-H)+He^{j\varepsilon w}\Big)((\boldsymbol{r}_1+jw\varepsilon\boldsymbol{g}_1)\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\partial w}-j\varepsilon\boldsymbol{g}_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w}))=0, \\ (\boldsymbol{r}_0+jw\varepsilon\boldsymbol{g}_0)\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\big(\mathbf{\Lambda}+e^{j\varepsilon w}\kappa_1\mathbf{I}\big)-(\boldsymbol{r}_1+jw\varepsilon\boldsymbol{g}_1)\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\cdot \\ \cdot(\mu\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q}+\kappa_1\mathbf{I})-j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}((\boldsymbol{r}_0+jw\varepsilon\boldsymbol{g}_0)\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\partial w}- \\ -j\varepsilon\boldsymbol{g}_0\Phi^{(2)}(\mathrm{w}))+j\varepsilon((\boldsymbol{r}_1+jw\varepsilon\boldsymbol{g}_1)\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\partial w}-j\varepsilon\boldsymbol{g}_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w}))=0, \\ (\boldsymbol{r}_0+jw\varepsilon\boldsymbol{g}_0)\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}+(\boldsymbol{r}_1+jw\varepsilon\boldsymbol{g}_1)\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\big(He^{j\varepsilon w}\mathbf{\Lambda}-\mu\mathbf{I}-(1-H)\kappa_1\mathbf{I}\big)\mathbf{e}+ \\ +j\varepsilon(1-H)((\boldsymbol{r}_1+jw\varepsilon\boldsymbol{g}_1)\frac{\partial\Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{\partial w}-j\varepsilon\boldsymbol{g}_1\Phi^{(2)}(\mathrm{w}))\mathbf{e}=0. \end{cases} \tag{4.2.15}$$

Полученную систему (4.2.15) поделим на $\Phi^{(2)}(\mathrm{w})$ и выполним предельный переход, при $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{cases} -\boldsymbol{r}_0(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q}+\kappa_1\mathbf{I})+\boldsymbol{r}_1(\mu\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I})=0, \\ \boldsymbol{r}_0(\mathbf{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I})-\boldsymbol{r}_1(\mu\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q}+\kappa_1\mathbf{I})=0, \\ \boldsymbol{r}_0\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}+\boldsymbol{r}_1(H\mathbf{\Lambda}-\mu\mathbf{I}+(1-H)\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}=0. \end{cases}$$

Домножим на $\mathbf{e}=\begin{bmatrix}1\\1\\\dots\\1\end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} -\boldsymbol{r}_0\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}-\kappa_1\boldsymbol{r}_0\mathbf{e}+\mu\boldsymbol{r}_1\mathbf{e}+\boldsymbol{r}_1\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}+\kappa_1\boldsymbol{r}_1\mathbf{e}=0, \\ \boldsymbol{r}_0\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}+\kappa_1\boldsymbol{r}_0\mathbf{e}-\boldsymbol{r}_1\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}-\mu\boldsymbol{r}_1\mathbf{e}-\kappa_1\boldsymbol{r}_1\mathbf{e}=0, \\ \boldsymbol{r}_0\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}+H\boldsymbol{r}_1\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}-\mu\boldsymbol{r}_1\mathbf{e}+(1-H)\kappa_1\boldsymbol{r}_1\mathbf{e}=0. \end{cases} \tag{4.2.16}$$

Выполним замены (4.2.7) – (4.2.9) в системе (4.2.16):

$$\begin{cases} -\lambda R_0 - \kappa_1 R_0 + (\mu + \lambda) R_1 + \kappa_1 R_1 = 0, \\ \lambda R_0 + \kappa_1 R_0 - (\lambda + \mu) R_1 - \kappa_1 R_1 = 0, \\ \lambda R_0 + H R_1 \lambda - (\mu - (1 - H)\kappa_1) R_1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda R_0 + (\mu + \lambda) R_1 = \kappa_1 (R_0 - R_1), \\ \lambda R_0 + \lambda H R_1 - \mu R_1 = -(1 - H)\kappa_1 R_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-\lambda R_0 + (\mu + \lambda) R_1}{R_0 - R_1} = \kappa_1, \\ \dfrac{-\lambda R_0 - \lambda H R_1 + \mu R_1}{(1 - H) R_1} = \kappa_1. \end{cases}$$

Значения κ_1 для первой и второй асимптотики совпадают, следовательно, в (4.2.16) слагаемые при ε в нулевой степени обращаются в ноль.

Теперь систему (4.12.16) поделим на $\Phi^{(2)}(\mathrm{w})$ и соберем слагаемые, при ε^1:

$$\begin{cases} -\boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{Q} + \kappa_1 \mathbf{I}) + \boldsymbol{r}_1\big((1 + H)\boldsymbol{\Lambda} + H\kappa_1 \mathbf{I}\big) + \boldsymbol{g}_1(\mu \mathbf{I} + \boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I}) = \\ = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\frac{\partial \Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{w\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}, \\ \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I}) - \boldsymbol{r}_0 \kappa_1 \mathbf{I} - \boldsymbol{g}_1(\mu \mathbf{I} + \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{Q} + \kappa_1 \mathbf{I}) = (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1)\frac{\partial \Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{w\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}, \\ \boldsymbol{g}_0 \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} + \boldsymbol{g}_1(H\boldsymbol{\Lambda} - \mu \mathbf{I} - (1 - H)\kappa_1 \mathbf{I})\mathbf{e} + \boldsymbol{r}_1 H \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} = -(1 - H)\boldsymbol{r}_1 \mathbf{e}\frac{\partial \Phi^{(2)}(\mathrm{w})}{w\Phi^{(2)}(\mathrm{w})\partial w}. \end{cases} \quad (4.2.17)$$

Следовательно

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{w\Phi^{(2)}(w)\partial w} = const = \kappa_2.$$

То есть

$$\Phi^{(2)}(\mathrm{w}) = e^{\kappa_2 \frac{(jw)^2}{2}}.$$

Домножим (4.1.17) на $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} -\boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I})\mathbf{e} + \boldsymbol{r}_1\big((1 + H)\boldsymbol{\Lambda} + H\kappa_1 \mathbf{I}\big)\mathbf{e} + \boldsymbol{g}_1(\mu \mathbf{I} + \boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I})\mathbf{e} = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\kappa_2 \mathbf{e}, \\ \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I})\mathbf{e} - \boldsymbol{r}_0 \kappa_1 \mathbf{e} - \boldsymbol{g}_1(\mu \mathbf{I} + \boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I})\mathbf{e} = (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1)\kappa_2 \mathbf{e}, \\ \boldsymbol{g}_0 \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} + \boldsymbol{g}_1(H\boldsymbol{\Lambda} - \mu \mathbf{I} - (1 - H)\kappa_1 \mathbf{I})\mathbf{e} + \boldsymbol{r}_1 H \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} = -(1 - H)\boldsymbol{r}_1 \kappa_2 \mathbf{e}. \end{cases} \quad (4.2.18)$$

Выполним замены (4.2.7) – (4.2.9) в системе (4.2.18):

$$\begin{cases} -\boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}+(1+H)\lambda R_1+H\kappa_1R_1+\boldsymbol{g}_1(\mu\mathbf{I}+\boldsymbol{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}=(R_1-R_0)\kappa_2, \\ \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}-R_0\kappa_1-\boldsymbol{g}_1(\mu\mathbf{I}+\boldsymbol{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}=(R_0-R_1)\kappa_2, \\ \boldsymbol{g}_0\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}+\boldsymbol{g}_1(H\boldsymbol{\Lambda}-\mu\mathbf{I}-(1-H)\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}+H\lambda R_1=-(1-H)R_1\kappa_2. \end{cases} \qquad (4.2.19)$$

Если сложить два первых уравнения, то получится тождество

$$(1+H)\lambda R_1+H\kappa_1R_1-R_0\kappa_1=0.$$

Поэтому в (4.2.19) оставляем два уравнения для нахождения κ_2 и добавим дополнительное условие $\boldsymbol{g}_0+\boldsymbol{g}_1=\mathbf{0}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}-R_0\kappa_1-\boldsymbol{g}_1(\mu\mathbf{I}+\boldsymbol{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}}{R_0-R_1}=\kappa_2, \\ \dfrac{\boldsymbol{g}_0\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}+\boldsymbol{g}_1(H\boldsymbol{\Lambda}-\mu\mathbf{I}-(1-H)\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}+H\lambda R_1}{-(1-H)R_1}=\kappa_2, \\ \boldsymbol{g}_0+\boldsymbol{g}_1=0. \end{cases}$$

Откуда имеем

$$\kappa_2=\frac{-\boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}+(1+H)\lambda R_1+H\kappa_1R_1+\boldsymbol{g}_1(\mu\mathbf{I}+\boldsymbol{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}}{R_1-R_0},$$

в которой **g₀, g₁** являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}-R_0\kappa_1-\boldsymbol{g}_1(\mu\mathbf{I}+\boldsymbol{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}}{R_0-R_1}=\dfrac{\boldsymbol{g}_0\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}+\boldsymbol{g}_1(H\boldsymbol{\Lambda}-\mu\mathbf{I}-(1-H)\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}+H\lambda R_1}{-(1-H)R_1}, \\ \boldsymbol{g}_\mathbf{0}+\boldsymbol{g}_\mathbf{1}=\mathbf{0}. \end{cases}$$

Делая обратные замены, получаем:

$$h_k{}^{(2)}(u)=f_k{}^{(2)}(\varepsilon,w)=\left(R_k+jw\varepsilon g_k\right)e^{\kappa_2\frac{(jw)^2}{2}}+o(\varepsilon^2)\approx R_ke^{\frac{\kappa_2}{\sigma}\frac{(ju)^2}{2}},$$

затем, выражения (4.2.14), можно записать как

$$h_k{}^{(2)}(u)=e^{\frac{\kappa_1}{\sigma}ju}h_k{}^{(2)}(u)\approx R_ke^{\frac{\kappa_1}{\sigma}ju+\frac{\kappa_2}{\sigma}\frac{(ju)^2}{2}}.$$

Для асимптотической характеристической функции числа заявок на орбите с учетом (4.2.14) имеем

$$h(u)=e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}h^{(2)}(u)=e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}}e^{\frac{j^2u^2\kappa_2}{2\sigma}}=e^{\frac{ju\kappa_1}{\sigma}+\frac{(ju)^2\kappa_2}{2\sigma}}.$$

Таким образом, найденная асимптотика второго порядка показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа *i(t)* заявок на орбите в рассматриваемой системе является гауссовским с асимптотическим средним κ_1/σ и дисперсией κ_2/σ.

5 Нахождение характеристик загрузки систем

5.1 Показатели качества обслуживания

Область использования модели – расчёт показателей качества обслуживания заявок. Для решения данной задачи необходимо найти среднее число абонентов, повторяющих попытку соединения.

Дополнительными характеристиками работы системы являются: среднее число повторных попыток соединения на одну первичную, доля повторных вызовов в общем потоке поступающих заявок, интенсивность суммарного потока поступающих заявок.

Формальные выражения для вычисления показателей качества обслуживания заявок следуют из их физического смысла и определяются через отношение интенсивностей анализируемых событий или суммирование стационарных вероятностей модели. Приведём словесное определение характеристик и их формальные выражения через вероятности $P_k(i) = P\{i(t) = i, k(t) = k\}$, где $i(t)$ – число абонентов, повторяющих вызов, $k(t)$ – состояние прибора:

- Среднее число абонентов, повторяющих попытку соединения:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{1} iP_k(i).$$

- Среднее число повторных попыток соединения на одну первичную:

$$\frac{\sigma\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{1} iP_k(i)}{\lambda}.$$

- Доля повторных вызовов в общем потоке поступающих заявок:

$$\frac{\sigma\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{1} iP_k(i)}{\lambda+\sigma\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{1} iP_k(i)}.$$

- Интенсивность суммарного потока поступающих заявок:

$$\lambda+\sigma\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{1} iP_k(i).$$

- Интенсивность отказов;

$$(1-H)\left(\lambda+\sigma\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{1} iP_k(i)\right).$$

5.2 Характеристики функционирования RQ-системы M/M/1 с H настойчивыми заявками, коллизиями и отказами

В главе 1 были определены формальные выражения для вычисления показателей качества обслуживания заявок через вероятности $P_1(i)$, расчет которых представлен в таблице 9.

Таблица 9 – Технические характеристики функционирования RQ-системы с H настойчивыми заявками, коллизиями и отказами

<table>
<tr><td rowspan="4">Характеристики системы</td><td colspan="8">Параметры входящего потока</td></tr>
<tr><td colspan="4">λ = 0,4, μ = 1</td><td colspan="2">λ = 0,6, μ = 1</td><td colspan="2">λ = 1, μ = 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">σ = 0,1</td><td colspan="2">σ = 0,001</td><td colspan="2">σ = 0,1</td><td colspan="2">σ = 0,1</td></tr>
<tr><td>H = 0,4</td><td>H = 0,8</td><td>H = 0,4</td><td>H = 0,8</td><td>H = 0,4</td><td>H = 0,8</td><td>H = 0,4</td><td>H = 0,8</td></tr>
<tr><td>Интенсивность суммарного потока поступающих заявок</td><td>0,665</td><td>1,005</td><td>0,667</td><td>1,000</td><td>1,176</td><td>2,288</td><td>2,363</td><td>5,833</td></tr>
<tr><td>Среднее число абонентов, повторяющих вызов</td><td>2,651</td><td>6,053</td><td>266,65</td><td>600,05</td><td>5,756</td><td>16,877</td><td>13,63</td><td>48,33</td></tr>
<tr><td>Интенсивность отказов первичных и повторных заявок</td><td>0,339</td><td>0,201</td><td>0,400</td><td>0,200</td><td>0,705</td><td>0,458</td><td>1,418</td><td>1,167</td></tr>
<tr><td>Среднее число повторных попыток соединения на одну первичную</td><td>0,663</td><td>1,513</td><td>0,667</td><td>1,500</td><td>0,959</td><td>2,813</td><td>1,363</td><td>4,833</td></tr>
<tr><td>Доля повторных вызовов в общем потоке поступающих заявок</td><td>0,399</td><td>0,602</td><td>0,400</td><td>0,600</td><td>0,490</td><td>0,738</td><td>0,577</td><td>0,829</td></tr>
</table>

5.3 Характеристики функционирования RQ-системы M/M/1 с конфликтами, ненастойчивыми и нетерпеливыми заявками

В главе 2 были определены формальные выражения для вычисления показателей качества обслуживания заявок через вероятности $P_k(i)$, расчет которых представлен в таблице 10.

Таблица 10 – Технические характеристики функционирования RQ-системы с конфликтами, ненастойчивыми и нетерпеливыми заявками

Характеристики системы	Параметры входящего потока							
	λ = 0.4, μ = 1				λ = 0.6, μ = 1		λ = 1, μ = 1	
	σ = 0.1		σ = 0.001		σ = 0.01		σ = 0.01	
	$H = 0,4$	$H = 0,8$	$H = 0,4$	$H = 0,8$	$H = 0,4$	$H = 0,8$	$H = 0,4$	$H = 0,8$
Интенсивность суммарного потока поступающих заявок	0.449	0.467	0.45	0.468	0.694	0.73	1.197	1.274
Среднее число абонентов, повторяющих вызов	0.493	0.673	49.679	67.84	9.408	12.984	19.69	27.45
Интенсивность отказов первичных и повторных заявок	0.27	0.093	0.27	0.094	0.416	0.146	0.718	0.255
Среднее число повторных попыток соединения на одну первичную	0.123	0.168	0.124	0.17	0.157	0.216	0.197	0.274
Доля повторных вызовов в общем потоке поступающих заявок	0.11	0.144	0.11	0.145	0.136	0.178	0.165	0.215

5.4 Характеристики функционирования RQ-системы M/M/1 с коллизиями и H1, H2 настойчивыми заявками и отказами

В главе 3 были определены формальные выражения для вычисления показателей качества обслуживания заявок через вероятности $P_k(i)$, расчет которых представлен в таблице 11.

Таблица 11 – Технические характеристики функционирования RQ-системы с коллизиями и H1, H2 настойчивыми заявками и отказами

Характеристики системы	Параметры входящего потока					
	λ = 0.2, μ = 1		λ = 0.4, μ = 1		λ = 0.6, μ = 1	λ = 1, μ = 1
	σ = 0.1	σ = 0.001	σ = 0.1	σ = 0.001	σ = 0.1	σ = 0.1
	$H1 = 0,4$ $H2 = 0,8$	$H1 = 0,4$ $H2 = 0,8$	$H1 = 0,6$ $H2 = 0,9$	$H1 = 0,6$ $H2 = 0,9$	$H1 = 0,4$ $H2 = 0,8$	$H1 = 0,4$ $H2 = 0,8$
Интенсивность суммарного потока поступающих заявок	0.592	0.593	0.716	0.716	0.997	1.902
Среднее число абонентов, повторяющих вызов	1.921	193.06	3.159	316.102	3.975	9.02
Интенсивность отказов первичных и повторных заявок	0.071	0.071	0.029	0.029	0.12	0.228
Среднее число повторных попыток соединения на одну первичную	0.48	0.483	0.79	0.79	0.662	0.902
Доля повторных вызовов в общем потоке поступающих заявок	0.324	0.326	0.441	0.441	0.398	0.474

Полученные данные показывают, что в области малых значений загрузки системы $\left(\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 0,5\right)$ влияние повторных заявок не существенно, но при высокой загрузке и повышенной настойчивости абонента нарастающие потоки повторных вызовов, инициированные настойчивостью абонента в установлении соединения, приводят к лавинообразному росту трафика и приводят сеть в состояние перегрузки. Это влияние становится особенно заметным, когда абонент абсолютно настойчив в установлении соединения, а значение интенсивности поступления первичных заявок близко к максимальной пропускной способности системы.

На основе численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

- среднее время задержки является ключевым параметром системы, так как его значение влияет на загрузку орбиты, среднее число абонентов, повторяющих вызов, пропорционально растет с уменьшением значений параметра σ;
- на интенсивность суммарного потока и долю повторных вызовов в общем потоке, среднее время задержки практически не влияет;
- значение параметра вероятности отказа H существенно влияет на значение общей интенсивности обращений в систему: чем меньше значение H, тем меньше интенсивность суммарного потока.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной выпускной квалификационной работе магистра исследованы математические модели RQ-систем с входящим простейшим в ситуациях с конфликтами заявок, отказами, различными видами настойчивостей (Н и Н1, Н2), с нетерпеливостью заявок и без, а также система с входящим MMPP-потоком в ситуации с конфликтами заявок, Н1, Н2 настойчивыми заявками и отказами.

В главе 1 построены функциональная и математическая модели RQ-системы вида M|M|1 с Н настойчивыми заявками, конфликтами и отказами. Для приведенной модели в явном виде был построен итерационный (рекурсивный) алгоритм для нахождения распределения числа заявок на орбите, предложена модификация метода асимптотического анализа (в условиях большой задержки заявки на орбите), разработан комплекс численных методов для расчета допредельных вероятностно-временных характеристик.

В главе 2 построена математическая модель RQ-системы вида M|M|1 с Н настойчивыми заявками, конфликтами и нетерпеливыми заявками. Выполнено исследование RQ-системы матричным методом, предложена модификация метода асимптотического анализа (в условиях большой задержки заявки на орбите), разработан комплекс численных методов для расчета допредельных вероятностно-временных характеристик.

В главе 3 построена математическая модель RQ-системы вида M|M|1 с Н1, Н2 настойчивыми заявками, конфликтами и отказами. Выполнено исследование RQ-системы матричным методом, предложена модификация метода асимптотического анализа (в условиях большой задержки заявки на орбите), разработан комплекс численных методов для расчета допредельных вероятностно-временных характеристик.

В главе 4 построена математическая модель RQ-системы вида MMPP|M|1 с Н настойчивыми заявками, конфликтами и отказами. Предложена модификация метода асимптотического анализа (в условиях большой задержки заявки на орбите).

В главе 5 произведен расчёт показателей качества обслуживания заявок RQ-систем с входящим простейшим в ситуациях с конфликтами заявок, отказами, различными видами настойчивостей (Н и Н1, Н2), с нетерпеливостью заявок и без.

По материалам исследований были сделаны доклады на следующих конференциях:

1) IX Международная научная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии» памяти А.М.Богомолова. Саратов, 18-20 ноября 2021 г.
2) XX Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные

технологии и математическое моделирование» (ИТММ-2021). Томск, 1–5 декабря 2021 г.

3) Международная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» Томск, 26-28 мая 2022 г.
4) Международный научный семинар молодых ученых в рамках 50-летия кафедры теории вероятностей и математической статистики 01.12.2022 - 10.12.2022
5) XXI Международная конференция им. А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ-2022). 24.10.2022 - 29.10.2022 (Карши, Узбекистан)

Результаты исследования были опубликованы:

1) Polkhovskaya A., Moiseeva S., Danilyuk E. Asymptotic Analysis of Retrial Queueing System M/M/1 with Non-persistent Customers and Collisions // Communications in Computer and Information Science. 2022. Vol. 1605. P. 343–355. DOI: 10.1007/978-3-031-09331-9_27
2) Полховская А.В., Данилюк Е.Ю., Моисеева С.П., Бобкова О.С. Вероятностная модель системы совместного доступа с коллизиями, H-настойчивостью и отказами // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 35–46. DOI: 10.17223/19988605/58/4
3) Полховская А., Бобкова О., Моисеева С.П. Ресурсная RQ-система с коллизиями //Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2020) : материалы XIX Международной конференции имени А. Ф. Терпугова, 2−5 декабря 2020 г. Томск: Изд-во НТЛ, 2021. С. 228-231.
4) Полховская А.В., Моисеева С.П. Асимптотический анализ RQ-системы M/M/1 с коллизиями и H_1, H_2 настойчивыми заявками //Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2022) : материалы XXI Международной конференции имени А. Ф. Терпугова, 25-29 октября 2022г. –Томск: Издательство Томского государственного университета, 2023, 136-142.

Было получено свидетельство о государственной регистрации программы для электронных вычислительных машин:

1) Свидетельство на ПЭВМ. Программа реализации рекуррентного алгоритма нахождения распределения вероятностей состояний для системы совместного доступа с коллизиями и отказами (ПЭВМ) Свидетельство № 2021665775. 29.09.2021

ЛИТЕРАТУРА

1. Artalejo J.R. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach / J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral // Springer – 2008. – P. 309.

2. Wilkinson R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell Syst. Techn. J. – 1956. – Vol.35, №.2. – P. 421–507.

3. Cohen J.W. Basic problems of telephone traffic and the influence of repeated calls // Philips Telecommun. Rev. – 1957. – Vol.18, №.2. – P. 49–100.

4. Gosztony G. Repeated call attempts and their effect on traffic engineering // Budavox Telecommun. Rev. – 1976. – Vol.2. – P. 16–26.

5. Falin G.I., Retrial queues. London: Chapman & Hall / G.I Falin, J.G.C. Templeton – 1997. – P. 1–95.

6. Artalejo J.R. Markovian retrial queues with two way communication / J.R. Artalejo, T. Phung-Duc. // Journal of industrial and management optimization – 2012. – Vol.8, №4. – P. 781–806.

7. Artalejo J.R. Single server retrial queues with two way communication / J.R. Artalejo, T. Phung-Duc. // Applied Mathematical Modelling – 2013. – Vol.37, №4. – P. 1811–1822.

8. Yang T. The M/G/1 retrial queue with non-persistent customers / T. Yang, M. Posner, J. Templeton // Queueing Syst. – 1990. – Vol.7, №2. – P. 209–218.

9. Krishnamoorthy A. An M/G/1 retrial queue with nonpersistent customers and orbital search / A. Krishnamoorthy, T. Deepak, V. Joshua // Stochast. Anal. Appl. – 2005. – №23. – P. 975–997.

10. Kim J. Retrial queueing system with collision and impatience // Commun. Korean Math. Soc. – 2010. – №.4. – P. 647–653.

11. Fayolle G. On a system with impatience and repeated calls / G. Fayolle, M. Brun // Queueing Theory Appl.: Liber Amicorum for J.W. Cohen – 1988. – P. 283–305.

12. Martin M. Analysis of an M/G/1 Queue with two Types of Impatient units / M. Martin, J. Artalejo // Advances Appl. Probab. – 1995. – №27. – P. 647–653.

13. Aissani A. An unreliable retrial queue with impatience and preventive maintenance / A. Aissani, S. Taleb, D. Hamadouche // Proc., 15 Appl. Stochast. Models Data Anal. – 2013. – P. 1–9.

14. Artalejo J.R. Standard and retrial queueing systems: A comparative analysis / J.R. Artalejo, G.I. Falin // Revista Mat. Complut. – 2002. – Vol. 15. – P. 101–129.

15. Dudin A.N. Queueing System $BMAP/G/1$ with repeated calls / A.N. Dudin, V.I. Klimenok // Math. Comp. Model. – 1999. – Vol.30, №.3–4. – P. 115–128.

16. Степанов С.Н. Алгоритмы приближенного расчета систем с повторными вызовами // АиТ. – 1983. – №1. – С. 80–90.

17. Назаров А.А. Немарковская динамическая RQ-система с входящим MMP-потоком заявок / А.А. Назаров, Т.В. Любина // АиТ. – 2013. – №7. – С. 89–101.

18. Artalejo J.R. Numerical calculation of the stationary distribution of the main multiserver retrial queue / J.R. Artalejo, M. Pozo // Ann. Oper. Res. – 2002. – №116. – P. 41–56.

19. Neuts M.F. Numerical investigation of a multiserver retrial model / M.F. Neuts, B.M. Rao // Queueing Syst. – 1990. – Vol.7, №.2. – P. 169–189.

20. Krishna Kumar B. A single server feedback retrial queue with collisions / B. Krishna Kumar, G. Vijayalakshmi, A. Krishnamoorthy, S. Sadiq Basha // Computer and operations research. – 2010. – №37. – P. 1247–1255.

21. Хомичков И.И. Исследование моделей локальной сети с протоколом случайного множественного доступа // АиТ. – 1993. – №12. – С. 89-90.

22. Хомичков И.И. Модель локальной сети с протоколом доступа CSMA/CD // Автоматика и вычислительная техника. – 1988. – №5. – С. 53-58.

23. Русков П., Янев К., Димитров Б., Боянов К. Модель исследования локальных компьютерных сетей связи. // Контроль систем и машин. – 1984. – N.5. – С. 37–40.

24. Анисимов В.В. Асимптотический анализ очередей в системах с повторными вызовами и сдвоенными соединениями / В.В. Анисимов, Х.Л Атаджанов // препринт. Акад. Наук Украины. Инст. Кибернетики. Киев. – 1991.

25. Назаров А.А. Допредельные характеристики RQ-системы с конфликтами заявок / А.А. Назаров, Судыко Е.А. // Материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции «Научное творчество молодежи». Филиал КемГУ в г. Анжеро-Судженске, 15–16 апреля 2010 г. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2010. – Ч.1. – С. 97–100.

26. Назаров А.А. Исследование марковской RQ-системы с конфликтами заявок и простейшим входящим потоком / А.А. Назаров, Е.А. Судыко // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – Т3, №12. – С. 97–106.

27. Назаров А.А. Метод асимптотических семиинвариантов для исследования математической модели сети случайного доступа / А.А. Назаров, Е.А. Судыко // Проблемы передачи информации. – 2010. – Т46, №1. – С. 94–111.

28. Назаров А.А., Метод асимптотических семиинвариантов для исследования системы M|M|1|ИПВ с конфликтом заявок / А.А. Назаров, Е.А. Судыко // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2009): Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Филиал

КемГУ в г. Анжеро-Судженске, 12–13 ноября 2009г. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2009. – Ч.1. – С. 70–74.

29. Назаров А.А. Неэргодичность математической модели компьютерной сети случайного доступа / А.А. Назаров, Е.А. Судыко // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. – 2011. – Т3, №36. – С. 62–65.

30. Назаров А.А. Стационарный режим в немарковских RQ-системах с конфликтами заявок / А.А. Назаров, Е.А. Судыко // Материалы XV Всероссийской научно-практической конференции «Научное творчество молодежи». Филиал КемГУ в г. Анжеро-Судженске, 28–29 апреля 2011 г. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2011. – Ч.1. – С. 31–34.

31. Назаров А.А. Условия существования стационарного режима в немарковских RQ-системах с конфликтами заявок / А.А. Назаров, Е.А. Судыко // Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – Т318, №5. – С. 166–168.

32. Назаров А.А. Численное исследование математической модели сети случайного доступа / А.А. Назаров, Е.А. Судыко // Материалы XIII Всероссийской научно-практической конференции «Научное творчество молодежи». Филиал КемГУ в г. Анжеро-Судженске, 14–15 мая 2009г. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2009. – Ч.1. – С. 88–90.

33. Назаров А.А. Характеристические функции в асимптотическом анализе математической модели сети случайного доступа / А.А. Назаров, Е.А. Судыко, С.А. Цой // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети. Материалы международной научной конференции "Современные математические методы анализа и оптимизации информационно - телекоммуникационных сетей". Минск, 26–29 января 2009 г. – Минск: РИВШ – 2009. – С. 210–215.

34. Erlang A. K. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges, The Post Office Electrical Engineers Journal. – 1918. – 10. – P. 189-197.

35. Kolmogorov A. N. Foundations of the theory of probability. Chelsea Pub. Co; 2nd edition. – 1956. – 84 p.

36. Гнеденко Б. В. Элементарное введение в теорию массового обслуживания. / Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. / 6-е изд. – М. : Наука, 1964. – 146 с.

37. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания // Тр. Мат. ин-та им В. А. Стеклова АН СССР. – 1955. – Т. 49. – С. 1-123.

38. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин; под ред. Б. В. Гнеденко. – М. : Наука, 1963. – 528 с.

39. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. – М. : Мир, 1979.

40. Choo Q. H. New results in the theory of repeated orders queueing system / Choo Q. H., Conolly B. / J. Appl. Probab. 16. – 1979. – 631 p.

41. Башарин Г. П. Анализ очередей в вычислительных сетях. / Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. Ф. / Теория и методы анализа. – М. : Наука. – 1989.

42. Башарин Г. П. Актуальные задачи математической теории телетрафика / Башарин Г. П., Гайдамака Ю. В., Самуйлов К. Е. / Международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию со дня рождения Б. В. Гнеденко (Москва, 26-30 июня 2012 года), Тезисы докладов. – М. : ЛЕ-НАНД, 2012. – С. 176-177.

43. Башарин Г. П. Новый этап развития математической теории телетрафика / Башарин Г. П., Самуйлов К. Е., Яркина Н. В., Гудкова И. А. / Автоматика и телемеханика. – 2009. № 12. – С. 16-28.

44. Башарин Г. П. Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем / Башарин Г. П., Толмачев А. Л. / Итоги науки и техники. Серия. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. 21, ВИНИ-ТИ, М. 1983. С. 3-119.

45. Башарин Г. П., Харкевич А. Д., Шнепс М. А. Массовое обслуживание в телефонии. – М. : Наука, 1968.

46. Самуйлов К. Е. Методы анализа и расчета сетей ОКС 7 : Монография. – М. : Изд-во РУДН, 2002. – 292 с.

47. Самуйлов К. Е., Савочкин Е. А. Алгоритм свертки для расчета вероятностных характеристик звена сети мультивещания // В сб. «Системы телекоммуникаций и моделирование сложных систем». – М. : ПАИМС, 2002.

48. Tassiulas L., Papavassilon S. A Dynamic Sheduling Problem in Packet Switched Satellite Networks // Proc. 33rd IEEE Conf. Decis. and Contr. – Piscataway (N.J.), 1994. – Vol. 3. – P. 2079-2084.

49. Riordan J. Stochastic service systems. – Wiley, New York. – 1962.

50. Falin G.I. A diffusion approximation for retrial queueing systems. // The-ory of Probability and Its Applications. – 1991. – V.36. – N.1. – P.149–152.

51. Falin G.I. Asymptotic investigation of fully available switching systems with high repetition intensity of blocked calls. // Moscow University Mathematics Bulletin. – 1984. – V.39. – N.6. – P.72–77.

52. Falin G.I. Continuous approximation for a single server system with an arbitrary service time under repeated calls. // Engineering Cybernetics. – 1984. – V.22. – N.2. – P.66–71.

53. Falin G.I. Limit theorems for queueing systems with repeated calls. // A paper presented at the 4th Int. Vilnius Conf. on Probability Theory and Mathematical Statistics. Vilnius. – 1985.

54. Artalejo J.R. Information theoretic approximations for retrial queueing systems. // Trans. 11th Prague Conf. Int. Theory, Statist. Decis. Funct., Random Pro-cesses, Prague Aug. 27–31, 1990, (eds S. Kubik and J.A. Visek), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. – 1992. – P.263–270.

55. Иванова О.В., Назаров А.А. Асимптотический анализ протокола множественного доступа «синхронная Алоха» к локальной сети // Радиотехника. – 1991. – N 5. – С. 20-24.

56. Лопухова С.В. Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: Дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18; Томский гос. ун-т. – Томск. 2008. – 167 с.

57. Назаров А.А., Моисеева А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

58. Назаров А.А., Судыко Е.А., Цой С.А. Характеристические функции в асимптотическом анализе математической модели сети случайного доступа // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети. Материалы международной научной конференции "Современные математические методы анализа и оптимизации информационно - телекоммуникационных сетей". Минск, 26–29 января 2009 г. – Минск: РИВШ, 2009. – С. 210–215.

59. Sudyko E. Investigation of system MAP|M|1|RQ by the method of asymptotical semiinvariants by the third order // The third international conference «Problems of cybernetics and informatics»(PCI’2010), Baku, Azerbaijan. 6–8 Sep-tember, 2010. – Baku: Elm, 2010. – V. 2. – P.228–231.

С результатом ознакомлена

Моисеева С.В.

5.06.2023

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

Отчет о проверке на заимствования №2

Автор: Полховская Анна Васильевна
Проверяющий: Моисеева Светлана Владимировна
Организация: Томский Государственный Университет

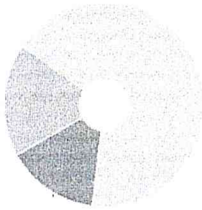
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://tsu.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 343
Начало загрузки: 01.06.2023 16:16:23
Длительность загрузки: 00:00:28
Имя исходного файла: Полховская магистерская диссертация.pdf
Название документа: Полховская магистерская диссертация
Размер текста: 114 кБ
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Символов в тексте: 116985
Слов в тексте: 13988
Число предложений: 842

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 01.06.2023 16:22:13
Длительность проверки: 00:00:34
Корректировка от 01.06.2023 16:23:53
Комментарии: [Автосохраненная версия]
Поиск с учетом редактирования: да
Проверенные разделы: основная часть с. 1-2,5-87
Модули поиска: ИПС Адилет, Библиография, Сводная коллекция ЭБС, Сводная коллекция РГБ, Цитирование, eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ: аналитика, СПС ГАРАНТ: нормативно-правовая документация, Диссертации НББ, Коллекция НБУ, Перефразирования по eLIBRARY.RU, Перефразирования по Интернету, Перефразирования по Интернету (EN), Перефразирования по коллекции издательства Wiley , СМИ России и СНГ, Шаблонные фразы, Модуль поиска "tsu", Кольцо вузов



СОВПАДЕНИЯ	САМОЦИТИРОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
15,2%	17,6%	0%	67,2%

Совпадения — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.

Самоцитирования — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» – это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.

Цитирования — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы; библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.

Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.

Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.

Оригинальный текст — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует полному тексту проверяемого документа.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в тексте	Источник	Актуален на	Модуль поиска	Комментарии
[01]	17,47%	Вероятностная модель системы совместного доступа с коллизиями, Н-настойчивостью и отказами. https://elibrary.ru	14 Июл 2022	eLIBRARY.RU	
[02]	8,3%	Судыко, Елена Александровна диссертация ... кандидата физико-математических наук : 05.13.18 Томск 2011 http://dlib.rsl.ru	раньше 2011	Сводная коллекция РГБ	
[03]	4,46%	68277 http://e.lanbook.com	09 Мар 2016	Сводная коллекция ЭБС	
[04]	4,46%	Труды Томского государственного университета. – Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы II Всероссийской молодежной научной конференции. Томск, 16–17 мая 2014 г. Т https://e.lanbook.com	22 Янв 2020	Сводная коллекция ЭБС	
[05]	4,06%	Асимптотический анализ RQсистемы M|M|1 с конфликтами и нетерпеливыми заявками. http://elibrary.ru	01 Фев 2021	eLIBRARY.RU	
[06]	3,94%	Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем. Материалы II Всероссийской молодежной научной конференции. Томск, 16–17 мая 2014 г. http://bibliorossica.com	раньше 2011	Сводная коллекция ЭБС	
[07]	3,82%	Асимптотический анализ системы MMP|M|1 с источником повторных вызовов	05 Янв 2017	Перефразирования по Интернету	